Universitat Oberta de Catalunya

Elementos Finitos y Diferencias Finitas - PEC 2

Juan José Rodríguez Aldavero

November 4, 2020

Contents

1 Método de Elementos Finitos

1.a Cálculo de aproximaciones L^2

En este problema vamos a calcular las aproximaciones L^2 de un conjunto de funciones:

A. $f(x) = 1 + 2x$

B. $g(x) = x^3(x-1)(1-2x)$

C. $h(x) = \arctan\left[(x-0.5)/\epsilon\right]$ para $\epsilon = 0.1, 0.01$

todas ellas en el intervalo $I = [-1, 1]$ con $n = 25$ y $n = 100$ subintervalos. También calcularemos el error asociado a cada proyección.

Para dar un poco de contexto, la aproximación L^2 de una función f, dada por $P_h f$, es la proyección sobre el espacio de funciones lineales a trozos V_h tal que el error, $f - P_h f$ minimize la norma L^2 dada por:

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)} = \left(\int_I (f - P_h f)^2 dx\right)^{1/2}$$

Es decir, es una proyección tal que minimiza el "error promedio" con respecto a la función original.

Su cálculo se puede realizar utilizando un cambio de variables a "variables sombrero" (*hat functions*):

$$\varphi_j\left(x_i\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n$$

tales que

$$P_h f = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \varphi_j$$

donde los coeficientes ξ_j vienen dados por un sistema de ecuaciones lineales en términos de una matriz M (*mass matrix*) y un vector b (*load vector*) que pueden ser calculados de antemano:

$$M\xi = b$$
$$M_{ij} = \int_I \varphi_j \varphi_i dx, \qquad b_i = \int_I f \varphi_i dx, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n,$$

los problemas numéricos vendrán dados por el cálculo de las integrales y la resolución del sistema lineal de ecuaciones. Las integrales se resolverán mediante métodos basados en interpolantes lineales para el *load vector* y mediante el método numérico de Simpson para la *mass matrix*, que es más preciso y aproxima la integral entre x_0 y x_1.

En definitiva, podemos reciclar las funciones presentes en el libro de la asignatura realizando los cambios pertinentes. Las funciones **MassAssembler1D(x)** y **LoadAssembler1D(x,f)** pueden ser reutilizadas sin cambios, y la función **L2Projector1D()** puede ser reutilizada cambiando únicamente la función f sobre la que actúa, el intervalo I y el número de subintervalos n. Los resultados son:

A. $f(x) = 1 + 2x$

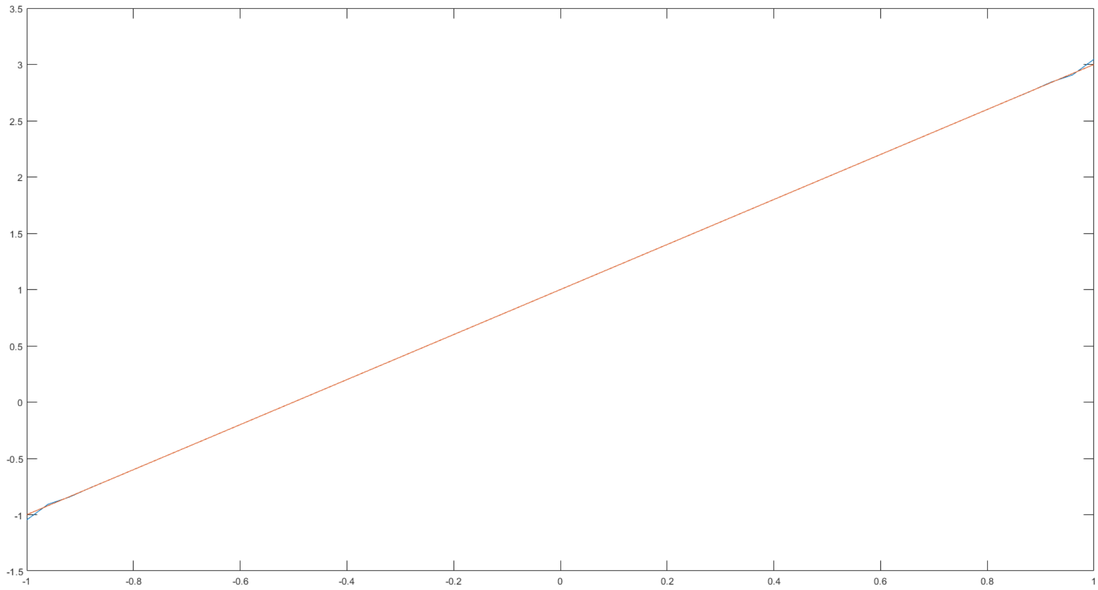

Figure 1.1: *Resultado para* $n = 25$

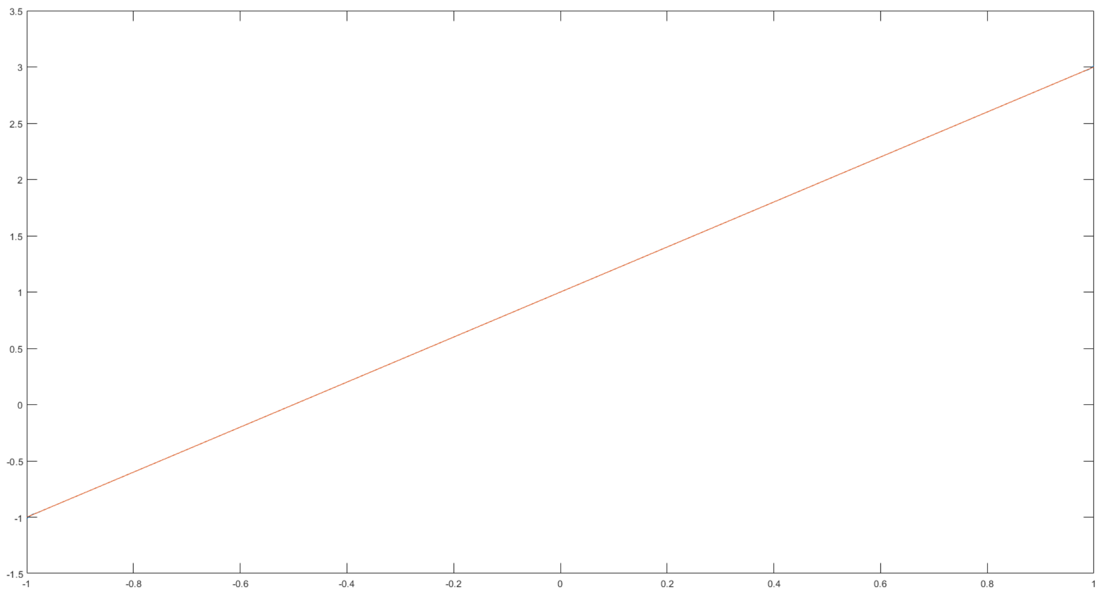

Figure 1.2: *Resultado para* $n = 100$

B. $g(x) = x^3(x-1)(1-2x)$

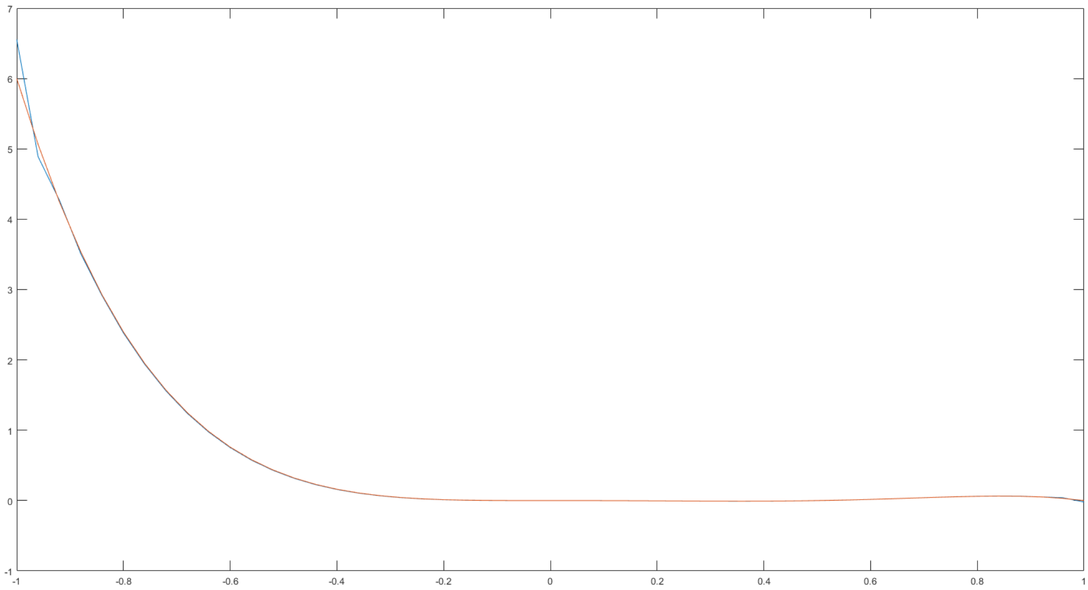

Figure 1.3: *Resultado para* $n = 25$

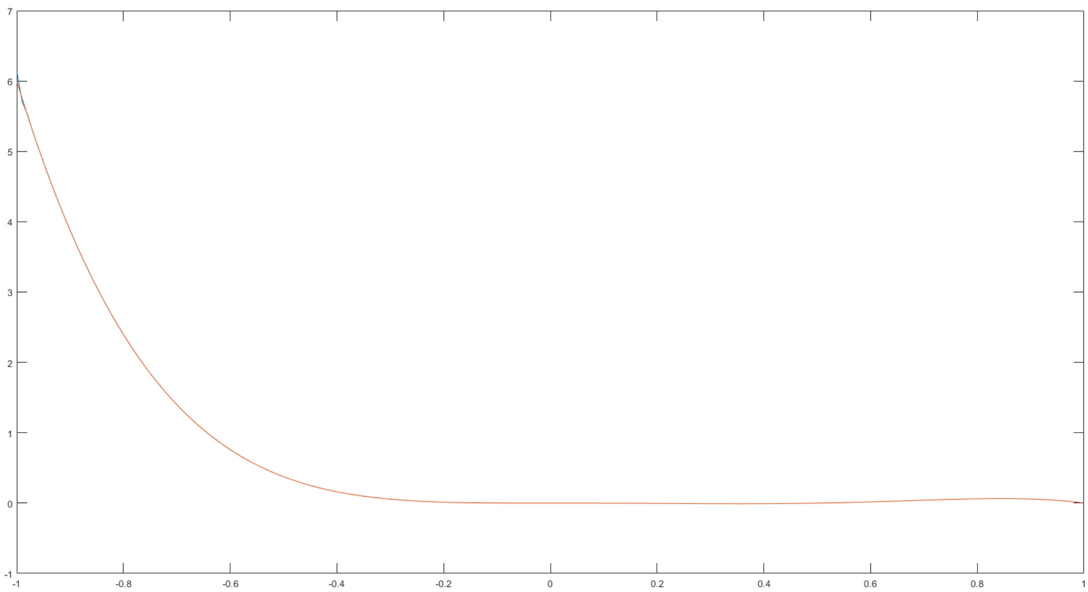

Figure 1.4: *Resultado para* $n = 100$

C. $h(x) = \arctan\left[(x - 0.5)/\epsilon\right]$ para $\epsilon = 0.1, 0.01$

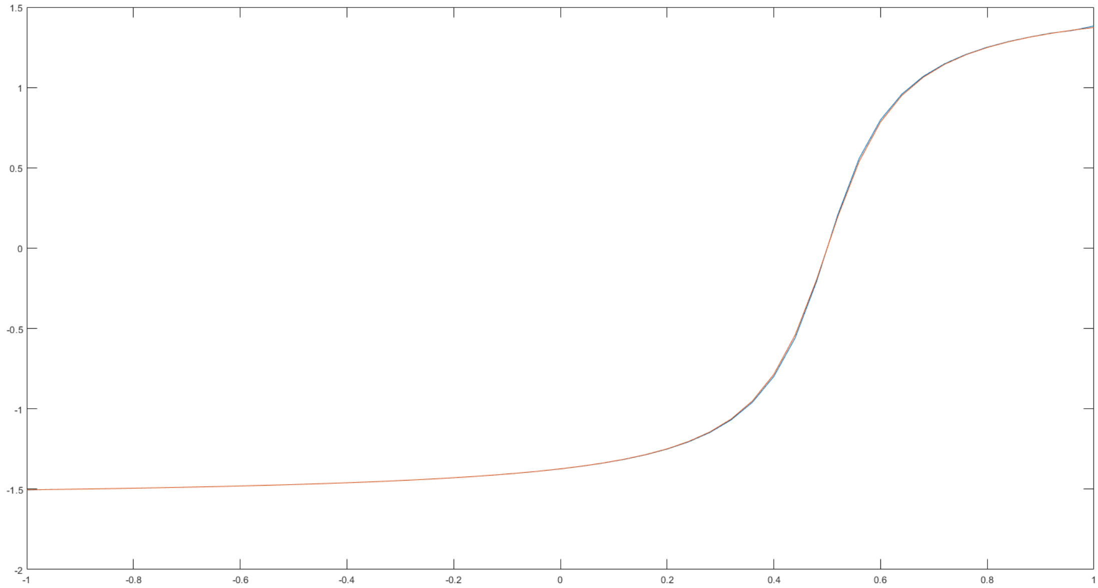

Figure 1.5: *Resultado para* $n = 25$, $\epsilon = 0.1$

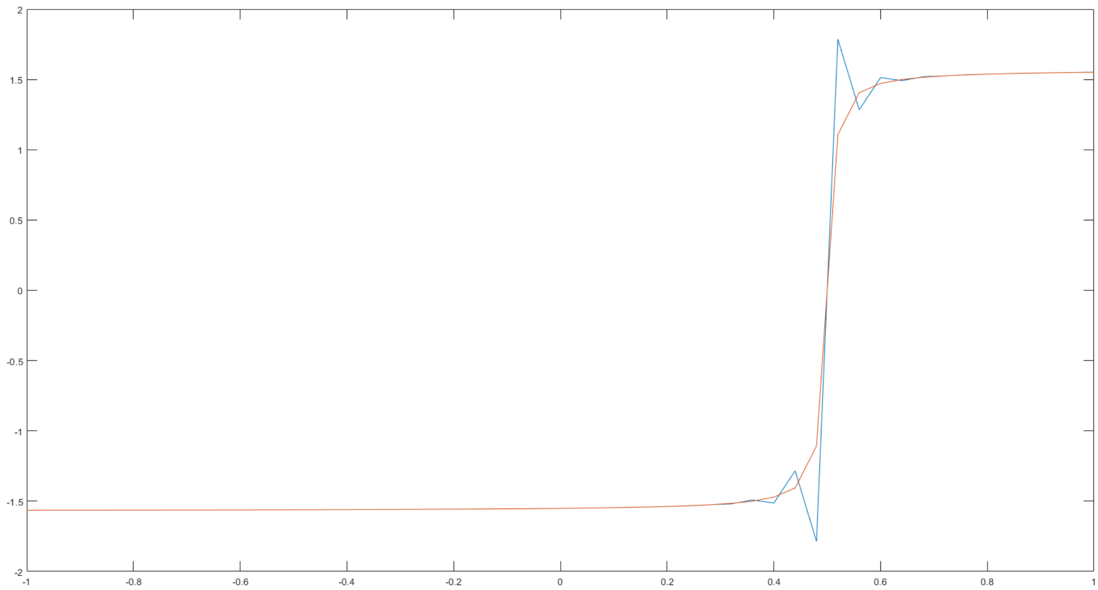

Figure 1.6: *Resultado para* $n = 25$, $\epsilon = 0.01$

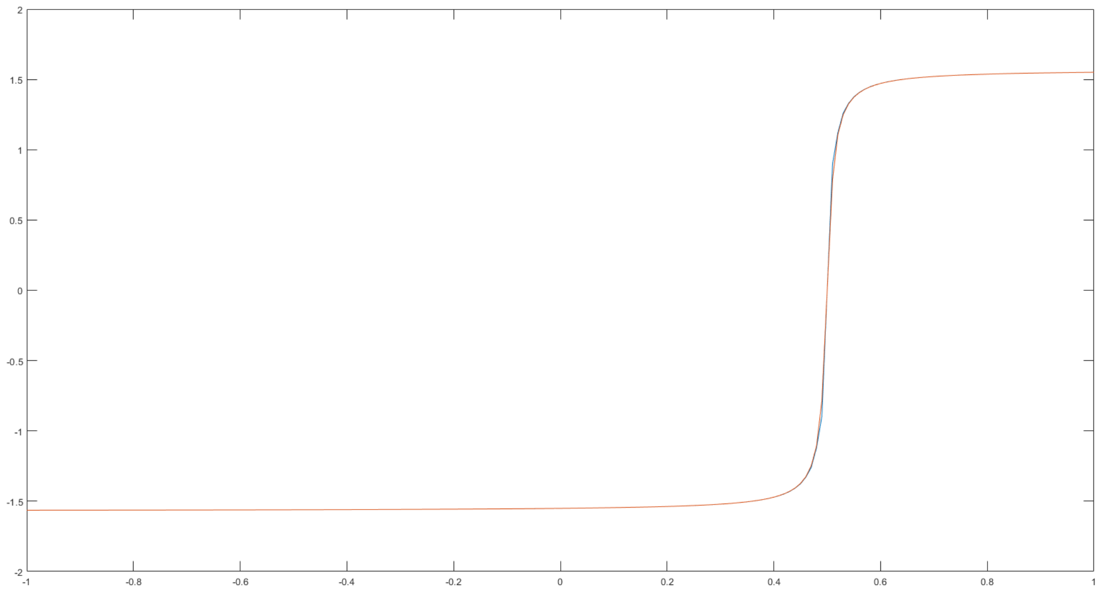

Figure 1.7: *Resultado para* $n = 100$, $\epsilon = 0.01$

Vemos como la aproximación se asemeja mucho a la función original, aún para intervalos grandes con $n = 25$, sobretodo para las dos primeras funciones. En las figuras 1.1 y 1.3 vemos algunas desviaciones en los extremos de las curvas para $n = 25$, que desaparecen al hacer $n = 100$.

En la figura 1.6 vemos como para $\epsilon = 0.01$ y $n = 25$ la proyección no resulta del todo precisa, posiblemente debido a la elevada pendiente de la curva con respecto al número de divisiones, pero esto desaparece al hacer $n = 100$ en la figura 1.7.

Respecto a los errores cometidos en las aproximaciones, sabemos por la teoría que existe una cota máxima dada por:

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)} \leq Ch^2 \, \|f''\|_{L^2(I)}$$

donde C es una constante y:

$$\|f''\|_{L^2(I)} = \sqrt{\int_I f''(x)dx}$$

por lo que obtenemos los siguientes valores:

- $\|f_A - P_h f_A\|_{L^2(I)} \leq 0$
- $\|f_B - P_h f_B\|_{L^2(I)} \leq \sqrt{24}Ch^2$
- $\|f_C - P_h f_C\|_{L^2(I)} \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{(0.25+\epsilon^2)(2.25+\epsilon^2)}}Ch^2$

vemos como en todos los casos tienden a cero cuando $h \to 0$. Para f_C vemos como el error puede hacerse arbitrariamente alto para $\epsilon \to 0$

1.b Resolución del problema elíptico unidimensional

Continuamos el entregable resolviendo problemas elípticos unidimensionales. En su forma más general, con coeficientes variables y con condiciones de contorno de Von-Neumann toman la forma:

$$\begin{aligned} -\left(au'\right)' + bu' + cu &= f, \quad x \in I = [0, L] \\ au'(0) &= \kappa_0 \left(u(0) - g_{0D}\right) + g_{0N} \\ -au'(L) &= \kappa_L \left(u(L) - g_{LD}\right) + g_{LN} \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde a, b, c y f son funciones de x lo suficientemente suaves.

De manera general, para plantear un problema de elementos finitos, es necesario transformar la ecuación en derivadas parciales a una **formulación variacional**. Esto se hace multiplicando la ecuación por una "función test", v, que cumpla las mismas condiciones de contorno que nuestro problema, integrando sobre todo el dominio e imponiendo que se cumpla una identidad integral entre la solución, $u(x)$ y v para todos los posibles valores de v.

Después, se toma la aproximación de elementos finitos suponiendo que $u(x)$ pertenece al espacio de funciones lineales a trozos, es decir, aproximando u por $u_h \in V_h$.

Por último, se resuelve el problema variacional de manera análoga a como se hizo en el ejercicio anterior, desarrollando u_h en la base formada por las funciones $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$.

$$u_h = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \varphi_j$$

donde podemos calcular los distintos coeficientes ξ_j resolviendo un problema de ecuaciones lineales que dependerá de la forma de la ecuación y cuyos componentes vendrán dados por integrales que habrá que calcular numéricamente.

Por ejemplo, para problema planteado por el libro (ecuación elíptica coeficientes variables), el sistema lineal vendrá dado por:

$$(A + R)\xi = b + r$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_I a\varphi_j'\varphi_i' dx \qquad \textit{stiffness matrix} \\ b_i &= \int_I f\varphi_i dx \qquad \textit{load vector} \\ R_{ij} &= \kappa_L \varphi_j(L)\varphi_i(L) + \kappa_0 \varphi_j(0)\varphi_i(0) \\ r_i &= \kappa_L g_L \varphi_i(L) + \kappa_0 g_0 \varphi_i(0) \end{aligned}$$

El libro de la asignatura proporciona unas funciones **StiffnessAssembler1D** y **SourceAssembler1D** que utilizan el método del punto medio y que podemos reciclar para calcular numéricamente problemas elípticos de contorno. En nuestro caso, añadiremos términos adicionales que tendrán que ser incorporados a los algoritmos encontrados en el libro.

A. **Escribir la ecuación variacional necesaria para resolver numéricamente el problema (1.1)**

Planteando el método variacional:

$$\int_0^L f v dx = \int_0^L \left(-(au')' + (bu)' + cu\right) v dx$$

donde por simplicidad hemos hecho el cambio $bu' \to (bu)'$ para simplificar algunos cálculos (que es sin pérdida de generalidad ya que solo haría falta adaptar el resto de coeficientes), obtenemos el resultado:

$$\int_0^L f v dx = \int_0^L \left[(au_h' - bu_h)v' + cu_h v\right] dx + C \tag{1.2}$$

donde

$$C = v(L)\left[u(L)(\kappa_L + b(L)) - \kappa_L g_{LD} + g_{LN}\right] + v(0)\left[u(0)(\kappa_0 - b(0)) - \kappa_0 g_{0D} + g_{0N}\right]$$

se corresponde con las condiciones de contorno sustituyendo $u'(0)$ y $u'(L)$. Los cálculos están hechos en detalle en el anexo.

B. **Resolver numéricamente el problema**

$$\begin{aligned} u'' + u &= x^2, x \in I = [0,1] \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

y comparar con la solución exacta

$$u(x) = \frac{\sin x + 2\sin(1-x)}{\sin 1} + x^2 - 2$$

Una vez tenemos el caso general, podemos aplicarlo a cada problema particular haciendo los cambios correspondientes. Para este problema, obtenemos el esquema de elementos finitos:

$$\int_0^L f v dx = \int_0^L \left(u_h' v' + u_h v\right) dx + \kappa\left[v(L)u(L) + v(0)u(0)\right] \tag{1.4}$$

donde para conseguir las condiciones de contorno se ha tenido que hacer $\kappa_0 \to \infty$, $\kappa_L \to \infty$, $g_{0D} = g_{0N} = g_{LD} = g_{LN} = 0$. En término de las funciones sombrero ϕ_i queda:

$$b_i = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \left[A_{ij} + B_{ij} + R_{ij}\right]$$

donde

$$B_{ij} = \int_0^L u_h v dx = \int_I \phi_j \phi_i dx$$

es un término nuevo que hay que implementar computacionalmente. Haciendo los cálculos en el anexo vemos como es una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque $\{B_{ii}\}$ toma la forma:

$$\{B_{ii}\} = \frac{(\Delta x)^3}{6h^2}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

por lo que es muy sencilla de implementar, y el resto de objetos se pueden aprovechar del ejemplo del libro. El resultado de los elementos finitos es:

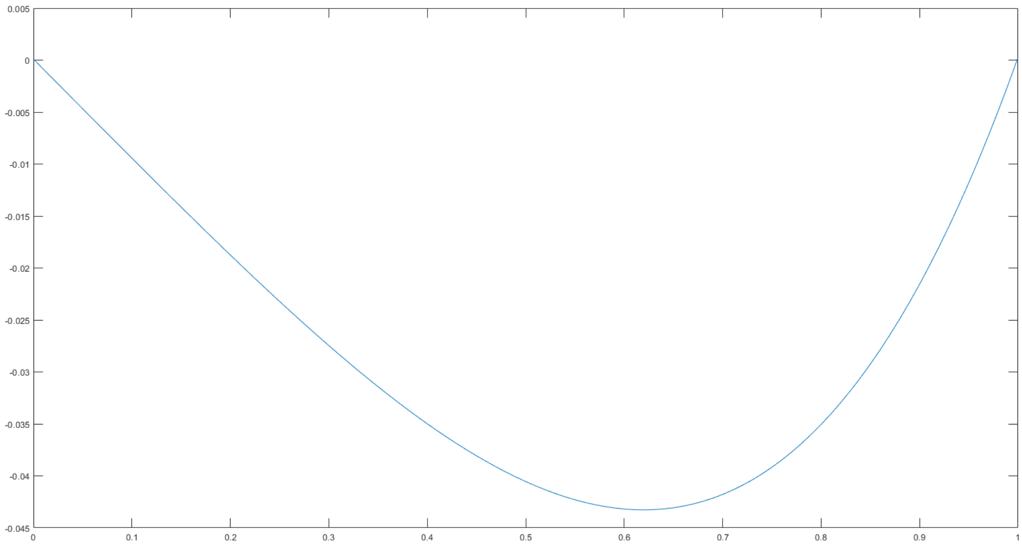

Figure 1.8: *Resultado de los elementos finitos para el problema 1.3 para una malla de* $h = 0.01$

Comparándola con la solución exacta, dada por

$$u(x) = \frac{\sin x + 2\sin(1-x)}{\sin 1} + x^2 - 2$$

tenemos:

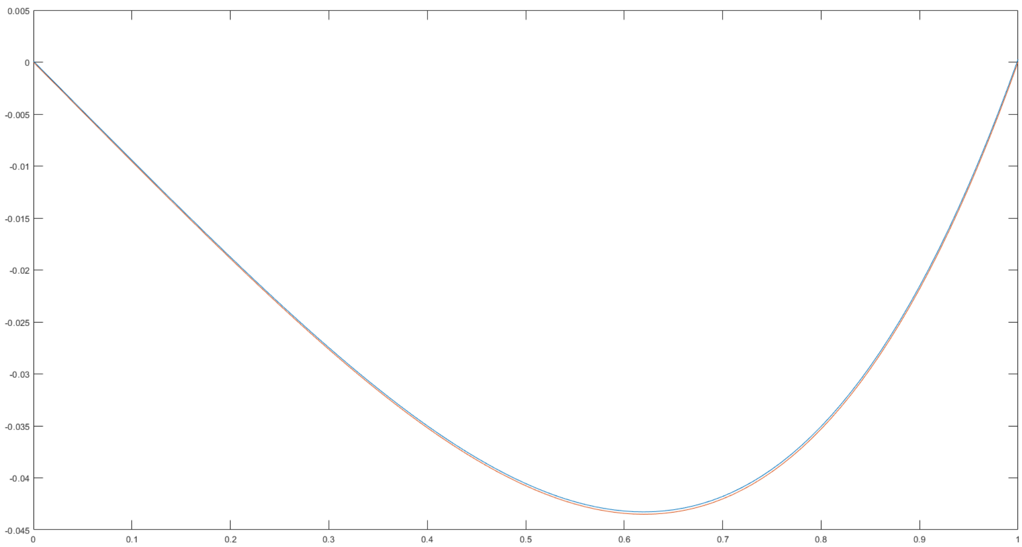

Figure 1.9: *Resultado de los elementos finitos junto con la solución exacta*

La solución encontrada es muy parecida a la exacta. Informalmente, vemos como el error producido es del orden de 10^{-4}:

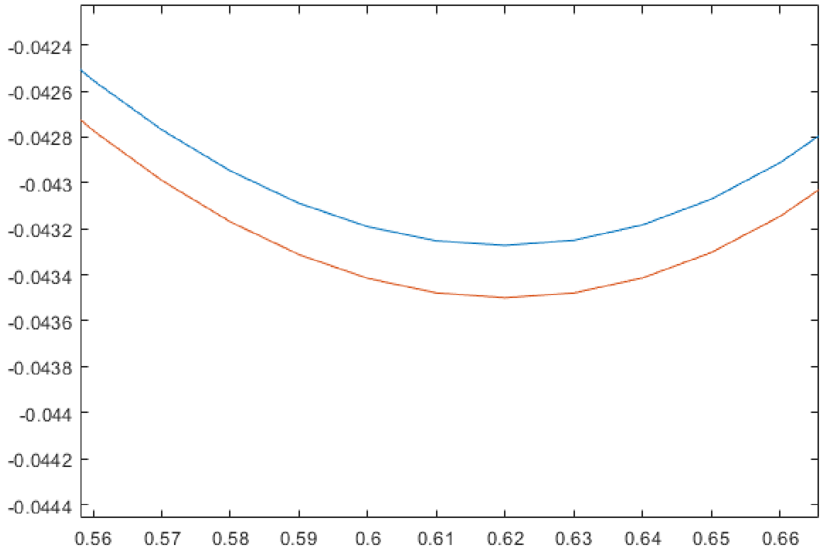

Figure 1.10: *Errores entre la solución exacta y la calculada por elementos finitos*

C. Resolver numéricamente el problema

$$\begin{aligned} u'' + u' - 2u &= x, x \in I = [0,1] \\ u(0) &= 0 \\ u'(1) &= 1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

De nuevo, haciendo los cambios correspondientes obtenemos el esquema:

$$\int_0^L f v dx = \int_0^L (-u_h' - u_h)v' - 2u_h v dx + C \tag{1.6}$$

donde

$$C = \kappa_L v(L)u(L) + \kappa_0 v(0)u(0) + v(L)u(L) - v(0)u(0) + v(L) - v(0)$$

y se han tenido que hacer los cambios $\kappa_0 \to \infty$, $\kappa_L \to 0$, $g_{0D} = g_{0N} = g_{LN} = 0$, $g_{LD} \to \infty$.

En términos de las variables sombrero ϕ_i nos queda:

$$b_i - r_i' = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \left[-A_{ij} - 2B_{ij} - C_{ij} + R_{ij} + R_{ij}' \right]$$

donde

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \int_I \phi_j \phi_i' dx \\ R_{ij}' &= v(L)u(L) - v(0)u(0) \\ r_i' &= v(L) - v(0) \end{aligned}$$

y se ve en el anexo que puede ser calculada como una matriz diagonal por bloques donde cada bloque toma la forma:

$$C_{ii} = \frac{(\Delta x)^2}{2h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y los objetos R'_{ij} y r'_i pueden ser absorbidos fácilmente dentro de R_{ij} y r_i lo que permite reutilizar el código planteado en el libro.

El resultado de este esquema de elementos finitos es:

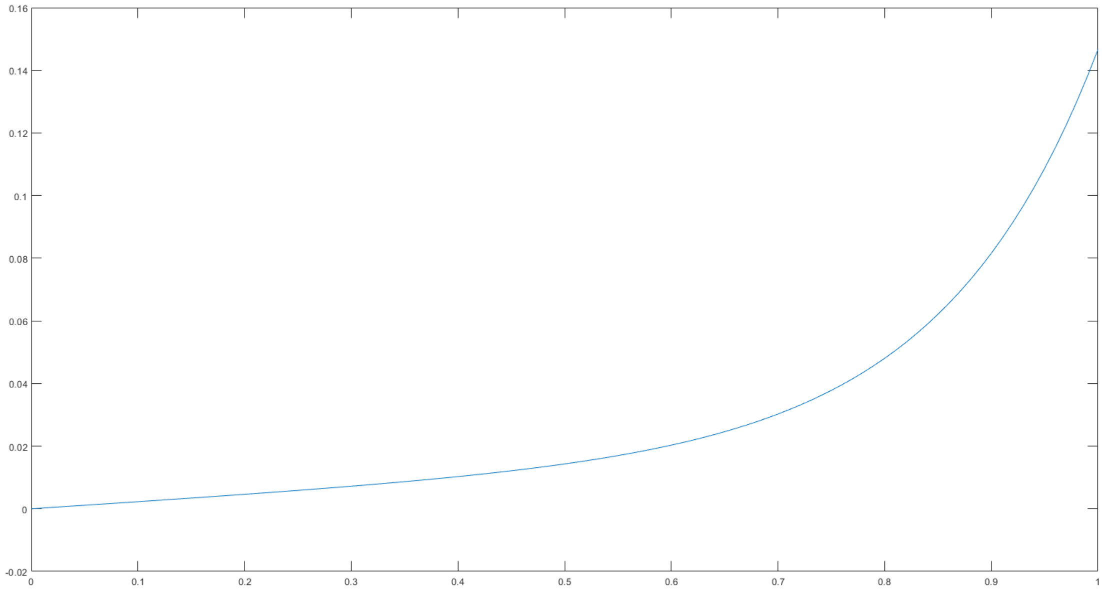

Figure 1.11: *Resultado de los elementos finitos para el problema 1.5 para una malla de* $h = 0.01$

Podemos calcular la solución exacta del problema 1.5 con Mathematica, que es:

$$u(x) = \frac{1}{4}\left[-1 - 2x + \frac{e^{-2x}\left((e-6)e^2 + 2e^{3x}(1+3e^2)\right)}{2+e^3}\right]$$

comparando la solución obtenida con la exacta tenemos:

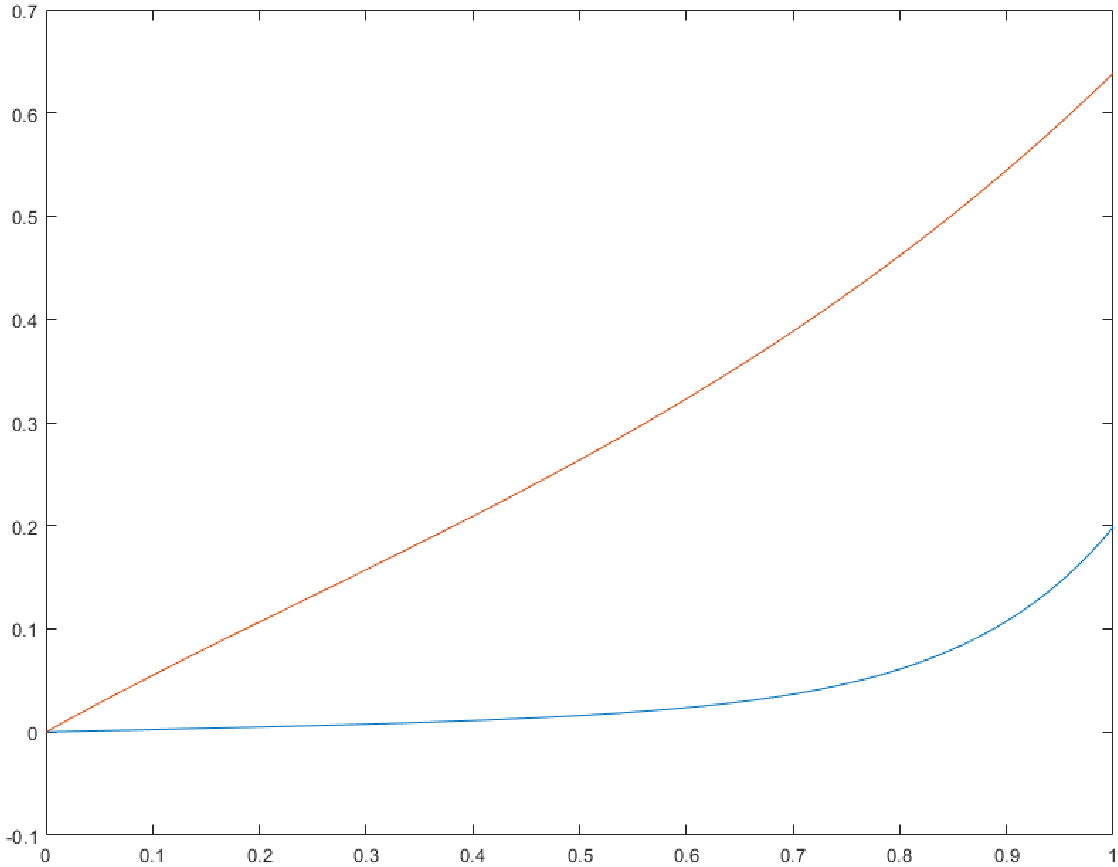

Figure 1.12: *Comparación entre la solución de elementos finitos y la exacta para el problema 1.5*

Vemos como la función calculada no se asemeja a la solución exacta, posiblemente por algún error de cálculo, aunque sí que conseguimos capturar el comportamiento en los extremos de la función, con la condición de contorno de Dirichlet y de Neumann.