Prueba de Evaluación Continua Número 1

Fecha de inicio: 30/09/2019. Fecha de entrega: 18/10/2019.

- Esta actividad es un estudio teórico de la propagación del error y la convergencia de métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Puede resolverse sin usar MATLAB, aunque en momentos específicos su uso puede ser útil para realizar cálculos.
- Podéis entregar la resolución en catalán, español o inglés, usando un procesador de textos o escaneando el documento siempre que vuestra letra sea legible. En cualquier caso, el nombre del fichero debe ser Apellido1-Nombre-PEC1T19.pdf

  Si usáis MATLAB, tenéis que entregar el correspondiente fichero preparado para ser ejecutado de forma ràpida.
- Vuestra resolución debre mostrar claramente la estrategia utilizada. No hace falta incluir todos los cálculos, pero sí deben estar los elementos suficientes para entender como se ha resuelto.
- Es necesario justificar adecuadamente todas las respuestas.

Exercise 1. Considérese la sucesión de números reales definida por

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 0.\hat{3}, \\ x_n &= 4.\hat{3}\, x_{n-1} - 1.\hat{3}\, x_{n-2}, \qquad \text{para} \quad n > 2 \end{aligned}$$

a) Usando 8 dígitos significativos, calcular hasta el quinto término de la sucesión.
b) Usando las fórmulas de propagación del error en los datos inciales, calcular una cota superior del error absoluto para este quinto término.
c) ¿Cuántos dígitos correctos se espera tener en el término que ocupa la posición 100?

Exercise 2. Asumimos que el valor exacto del número e es $e = 2.7182818$, pero no podemos calcular potencias de e. Queremos conocer el valor de $f(x) = e^{x^2}$ cuando x es un valor cercano 1, que puede escribirse de la forma $x_0 = 1 + \epsilon$ para una constante dada ϵ.

a) Calcular el error absoluto y el error relativo del valor aproximado $x_0^* = 1$.
b) Usando las fórmulas de propagación del error en los datos inciales, calcular una cota superior del error absoluto y otra para el error relativo de $f(x_0)$ cuando usamos el valor aproximado $x_0^* = 1$.
c) Usando las fórmulas de propagación del error en los datos inciales, deducir cuan lejos de 1 podemos tomar x_0 para asegurar que la aproximación $f(x_0) \simeq f(x_0^*)$ tendrá un error menor que $0.5 \cdot 10^{-6}$

d) Si el valor exacto de e fuese $e = 3$, ¿habría alguna diferencia significativa en la respuesta del apartado c)? ¿Cuál crees que es la razón?

Exercise 3. Considérese el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 51x + 82y &= 235 \\ 50.33x + 81y &= 232 \end{aligned}$$

a) Si se escribe el sistema dado en forma matricial $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{b}$, indicar la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{b}$ que corresponden.
b) ¿La matriz $\mathbf{A}$ es estrictamente diagonal dominante?
c) Indicar la matriz de iteración del método de Jacobi y la matriz del método de Gauss-Seidel correspondientes a este sistema.
d) Calcular el radio espectral de la matriz de iteración del método de Jacobi y del de Gauss-Seidel (si os es útil, podéis usar MATLAB para el cálculo).
e) Discutir, sin resolver el sistema, la convergencia de ambos métodos para este sistema.
f) Sin calcular iteraciones, hacer una predicción sobre el número de iteraciones necesarias para obtener una solución con un error relativo menor a $0.5 \cdot 10^{-3}$. Comentar el resultado: el valor es muy alto/bajo, cuál crees que es la razón.

Exercise 4. Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de dimensión n definida como

$$\begin{cases} a_{ij} = n + j - i + 1 & \text{si} \quad j < i \\ a_{ii} = 1 + p & \\ a_{ij} = 1 + j - i & \text{si} \quad j > i \end{cases}$$

donde i indica la fila de la matriz, j indica la columna y p es una constante. Y sea $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$ un vector de dimensión n. Nuestro objetivo es resolver el sistema lineal $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}$ usando un método iterativo.

Primero trabajaremos con $n = 4$, $p = 19$ y la aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_4^{(0)} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; el sistema será:

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 20 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 20 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Las siguientes preguntas deben ser contestadas usando los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel

a) Indicar al matriz y el vector de iteración.
b) Completar las siguientes tablas con las cuatro primeras aproximaciones de la solución, $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, $\mathbf{x}^{(3)}$ y $\mathbf{x}^{(4)}$, sus residuos $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{(k)}$ y las normas euclideas $E^{(k)} = \|\mathbf{r}^{(k)}\|_2$

	$\mathbf{x}^{(0)}$	$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	...
x_1	0	...	...	...
x_2	0	...	...	...
x_3	0	...	...	...
x_4	0	...	...	...

	$\mathbf{r}^{(0)}$	$\mathbf{r}^{(1)}$	$\mathbf{r}^{(2)}$	...
r_1	2	...	...	...
r_2	0	...	...	...
r_3	0	...	...	...
r_4	2	...	...	...
$E^{(k)}$	2.828427	...	...	...

c) Completar la siguiente tabla con el mínimo valor, k_{min}, de iteraciones necesarias para que se cumpla

$$E^{(k)} \leq 10^{-8}$$

y el valor de $E^{(k)}$ en la iteración número $k_{min} - 1$ y k_{min}.

Tolerance	k_{min}	$E^{(k_{min}-1)}$	$E^{(k_{min})}$
10^{-8}	...	...	...

d) En caso de convergencia de los métodos, ¿el orden de convergencia es el mismo para los dos métodos? Justificar la respuesta.
e) Completar la tabla del apartado c) con los resultados para $p = 69$ y $n = 9$. ¿Qué sucede en este caso?
f) Completar la tabla de $\mathbf{r}^{(k)}$ del apartado b) con los resultados para $p = 0$ y $n = 4$. ¿Qué sucede en este caso? ¿Cuál crees que es la razón de este comportamiento?