Estadística general conjuntos y probabilidad

UNIVERSIDAD EAFIT®

Contenido

Diagramas de Venn

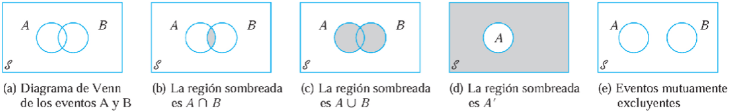


Figura 2.1 Diagramas de Venn

Ejemplo

El experimento consiste en contar el número de bombas de uso en una estación de gasolinas con 6 bombas.

$$
\begin{aligned}
S &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
A &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \\
B &= \{3, 4, 5, 6\} \\
C &= \{1, 3, 5\}
\end{aligned}
$$

Conjunto $\emptyset$

- $\emptyset$: denota el evento nulo (evento sin resultados).
- Cuando $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son eventos mutuamente excluyentes o disjuntos.

$A \cup B = S$ $\quad$ A y B son colectivamente exhaustivos (partición de S)

Axiomas, interpretación y propiedades

$S \qquad [0, 1]$

$A \xrightarrow{p} P(A)$

Dados un experimento y un espacio muestral S, el objetivo de la probabilidad es asignar a cada evento A un número $P(A)$, llamada la probabilidad de evento A, la cual dará una medida precisa de la oportunidad de que A ocurra.

1. **Axioma 1:** Para cualquier evento A, $P(A) \geq 0$.
2. **Axioma 2:** $P(S) = 1$.
3. **Axioma 3:** Si $A_1, A_2, A_3, \cdots$ es una sucesión de eventos disjuntos ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$), entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Proposición

$P(\emptyset) = 0$ donde $\emptyset$ es el conjunto nulo. Esto a su vez significa que la propiedad contenida en el axioma 3 es válida para un conjunto finito de eventos disjuntos

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Demostración

Consideremos una sucesión infinita de conjuntos $A_1 = \emptyset = A_2 = A_3 = \cdots$

Como $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall\ i \neq j$ entonces los A_i son disjuntos y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$. Por tanto, por el axioma 3. tenemos que

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) \quad 1$$

la expresión (I) sólo se tiene si $P(\emptyset)=0$.

Por otro lado, se sucesión infinita

$A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots$ donde

$$A_{k+1} = \emptyset = A_{k+2} = A_{k+3}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup \emptyset\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup \bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

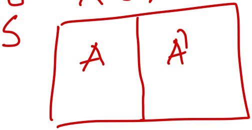
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{K} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{K} P(A_i) + \sum_{i=K+1}^{\infty} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{K} P(A_i) + 0$$

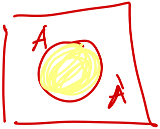
$$= \sum_{i=1}^{K} P(A_i)$$

$S = A \cup A'$



Proposición

Para cualquier evento A,



$$P(A) + P(A') = 1 \tag{1}$$

a partir de la cuál

$$P(A) = 1 - P(A'),$$
$$P(A') = 1 - P(A).$$

Demostración

Como $P(S) = 1$ y

$A \cup A' = S \Rightarrow P(A \cup A') = P(S)$ (1)

Por axioma 2 $P(S) = 1 \Rightarrow P(A \cup A') = 1$ (2)

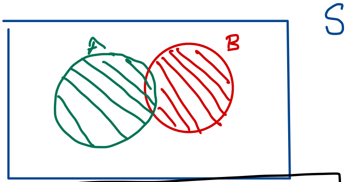
Por axioma 3 $P(A \cup A') = P(A) + P(A')$ (3)

porque $A \cap A' = \emptyset$

$\Rightarrow$ Por (2) y (3)

$P(A) + P(A') = 1$

Proposición

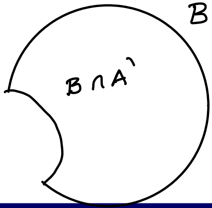


$$\boxed{A\cup B = A\cup(B\cap A')}$$

con $A\cap(B\cap A')=\emptyset$

Para todo $A, B \subseteq S$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$



$B\cap A' = B - A$

$B - A = \{x / x\in B, x\notin A\}$

Demostración

$$A \cup B = \underline{A} \cup \underline{(B \cap A')} \quad (1)$$

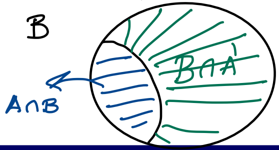
Aplicando el operador probabilidad en lados de la igualdad (1) se tiene que

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \cap A'))$$
$$P(A) + P(B \cap A') \text{ por axioma 3} \quad (*)$$

Despejando $P(B \cap A')$ se tiene que

$$P(B \cap A') = P(A \cup B) - P(A) \quad (2)$$

$$B = (A \cap B) \cup (B \cap A') \quad (3)$$



Sabemos que $(A \cap B) \cap (B \cap A') = \emptyset$

Por axioma tenemo

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A') \quad (4)$$

Despejando $P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) \quad (5)$

Comparando (5) con (2) se tiene que.

$$P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A) \quad (6)$$

Despejando de (6) $P(A \cup B)$ entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Generalización tres eventos

Sean A, B, $C \subseteq S$

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\
&- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\
&+ P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

Resultados igualmente probables

Sea N el número de resultados de un experimento compuesto. Es razonable asignar probabilidades iguales a todos los N eventos simples.

Ejemplo:

Sea $S = \{C, L\}$ donde C es cara y L es sello. S es el espacio muestral del lanzmiento de una moneda. Por tanto, todos los posibles eventos son

$$\begin{aligned} A_1 &= \{C\} \\ A_2 &= \{L\} \\ A_3 &= \{C, L\} \\ A_4 &= \emptyset \end{aligned}$$

A_1 y A_2 son eventos simples, mientras que A_3 es compuesto.

En el ejemplo anterior tenemos que $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$. De manera general, se tiene que $p = P(A_i)$ para todo $i = 1, 2, \cdots, N$.

$$S = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$$

donde A_i es el i-ésimo evento simple y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Se sigue que

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i) = \sum_{i=1}^{N} p = Np \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{N}$$

Despejando p de (2) se tiene que

$$p = \frac{1}{N}$$

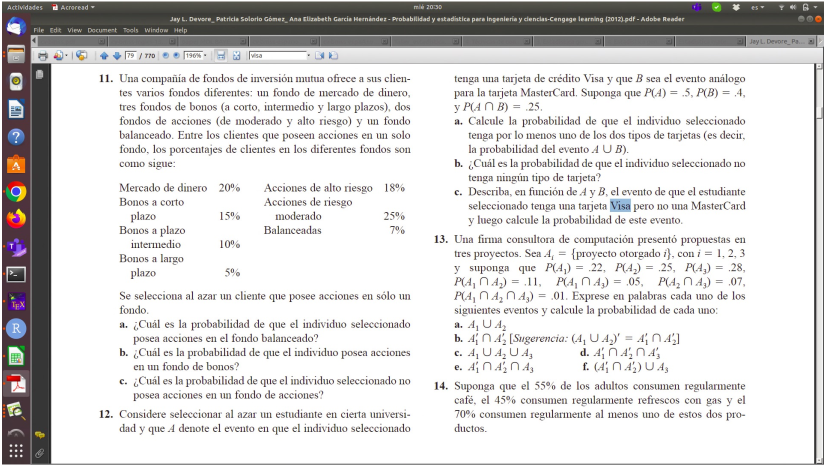
Es decir, si existen N resultados igualmente probables, la probabilidad de cada uno es $\frac{1}{N}$.

Sea A un evento del espacio muestral S. Denotaremos por $N(A)$ al número de resultados contenidos en A. Entonces

$$P(A) = \sum_{A_i \in A} P(A_i) = \sum_{A_i \in A} \frac{1}{N} = \frac{\sum_{A_i \in A} 1}{N} = \frac{N(A)}{N}$$

Nota: Cuando los resultados son igualmente probables, el cálculo de probabilidades se reduce a contar.

Ejercicio 11 página 79 pdf



11. Una compañía de fondos de inversión mutua ofrece a sus clientes varios fondos diferentes: un fondo de mercado de dinero, tres fondos de bonos (a corto, intermedio y largo plazos), dos fondos de acciones (de moderado y alto riesgo) y un fondo balanceado. Entre los clientes que poseen acciones en un solo fondo, los porcentajes de clientes en los diferentes fondos son como sigue:

Mercado de dinero	20%	Acciones de alto riesgo	18%
Bonos a corto plazo	15%	Acciones de riesgo moderado	25%
Bonos a plazo intermedio	10%	Balanceadas	7%
Bonos a largo plazo	5%		

Se selecciona al azar un cliente que posee acciones en sólo un fondo.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo seleccionado posea acciones en el fondo balanceado?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo posea acciones en un fondo de bonos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo seleccionado no posea acciones en un fondo de acciones?

12. Considere seleccionar al azar un estudiante en cierta universidad y que A denote el evento en que el individuo seleccionado tenga una tarjeta de crédito Visa y que B sea el evento análogo para la tarjeta MasterCard. Suponga que $P(A) = .5$, $P(B) = .4$, y $P(A \cap B) = .25$.

a. Calcule la probabilidad de que el individuo seleccionado tenga por lo menos uno de los dos tipos de tarjetas (es decir, la probabilidad del evento $A \cup B$).

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo seleccionado no tenga ningún tipo de tarjeta?

c. Describa, en función de A y B, el evento de que el estudiante seleccionado tenga una tarjeta Visa pero no una MasterCard y luego calcule la probabilidad de este evento.

13. Una firma consultora de computación presentó propuestas en tres proyectos. Sea $A_i = \{\text{proyecto otorgado } i\}$, con $i = 1, 2, 3$ y suponga que $P(A_1) = .22$, $P(A_2) = .25$, $P(A_3) = .28$, $P(A_1 \cap A_2) = .11$, $P(A_1 \cap A_3) = .05$, $P(A_2 \cap A_3) = .07$, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = .01$. Exprese en palabras cada uno de los siguientes eventos y calcule la probabilidad de cada uno:

a. $A_1 \cup A_2$

b. $A_1' \cap A_2'$ [*Sugerencia:* $(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2'$]

c. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

d. $A_1' \cap A_2' \cap A_3'$

e. $A_1' \cap A_2' \cap A_3$

f. $(A_1' \cap A_2') \cup A_3$

14. Suponga que el 55% de los adultos consumen regularmente café, el 45% consumen regularmente refrescos con gas y el 70% consumen regularmente al menos uno de estos dos productos.

Solución

11a. 0.07 es la probabilidad de que el cliente tenga acciones en el fondo balonceado

11b. AFB : "Tenga acciones en un fondo de bonos"

BCP : " Bonos corto plazo"
BMP : " " Mediano plazo"
BLP : " " Largo plazo"

$$P(AFB) = P(BCP) + P(BMP) + P(BLP)$$
$$= 0.15 + 0.10 . 0.05$$
$$= 0.30 = 30\%$$

La probabilidad de que un individuo seleccionado tenga acciones en un fondo de bonos es 30%

11c. Acción: " Invirtió en algún tipo de acción "

Alto: " Adquirió una acción de alto riesgo "

Moderado: " Al " " " riesgo moderado "

$$P(\text{Acción}) = P(\text{Alto}) + P(\text{Moderado})$$

$$= 0.18 + 0.25$$

$$= 0.43 = 43\%$$

$$P(\text{Accion}') = P(\text{No adquiere acciones})$$

$$= 1 - P(\text{Acción})$$

$$= 1 - 0.43$$

$$= 0.57$$

Ejercicio 12

$A =$ "Visa" $\quad B =$ "Master Card"

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.5 + 0.4 - 0.25$

$= 0.9 - 0.25$

$= 0.65 = 65\%$

b) $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - 0.65$

$= 0.35 = 35\%$

c) Tenga una visa, pero no una Master Card $= A \cap B'$

$A \cap B' = A - A \cap B$ 1

Como $A \cap B \subset A$ se tiene que

Solución

$$P(A \cap B') = P(A - (A \cap B))$$
$$= P(A) - P(A \cap B)$$
$$= 0.5 - 0.25 = 0.25$$

Entonces, la probabilidad de que un estudiante seleccionado tenga una tarjeta Visa, pero no una MasterCard es 25%.

Ejercicio 13

a) $A_1 \cup A_2$ = "Alguno de los proyectos 1 y 2 han sido otorgados"

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$= 0.22 + 0.25 - 0.11$$
$$= 0.36$$

Ejercicio 13

b) $A_1' \cap A_2' = (A_1 \cup A_2)'$

$(A_1 \cup A_2)'$ = "Ninguno de los proyectos 1 y 2 han sido asignados"

$$P(A_1' \cap A_2') = P((A_1 \cup A_2)') = 1 - P(A_1 \cup A_2)$$
$$= 1 - 0.36$$
$$= 0.64$$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3$ = "Alguno de los tres proyectos son otorgados a la compañía"

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
$$= 0.22 + 0.25 + 0.28 - (0.11 + 0.05 + 0.07) + 0.01$$
$$= 0.53$$

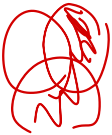
Solución

e. $A_1' \cap A_2' \cap A_3$

$= A_3 \cap A_1' \cap A_2'$

$= A_3 \cap (A_1 \cup A_2)'$

$= A_3 - (A_3 \cap (A_1 \cup A_2))$



Otras propiedades

(M1) *"no (A y B)" es lo mismo que "(no A) o (no B)"*, y también,

(M2) *"no (A o B)" es lo mismo que "(no A) y (no B)"*.

En términos de conjuntos (M1) se puede escribir:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

mientras que (M2) se puede escribir como:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
P\left((A \cap B)^c\right) &= 1 - P(A \cap B) = P\left(A^c \cup B^c\right) \\
P\left((A \cup B)^c\right) &= 1 - P(A \cup B) = P\left(A^c \cap B^c\right)
\end{aligned}
$$

Por otro lado,
Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$ y

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) = P(A \cap B^c).$$

Técnicas de conteo

Las reglas del producto para pares ordenados:
Por par ordenado se quiere decir si O_1 y O_2 son objetos, entonces el par (O_1, O_2) es diferente del par (O_2, O_1).

Proposición

Si el primer elemento u objeto de un par ordenado puede ser seleccionado de n_1 maneras, el segundo elemento del par puede ser seleccionado de n_2 maneras, entonces el número de pares es $n_1 n_2$.

En muchos problemas de conteo y probabilidad se puede utilizar una configuración conocida como **diagrama de árbol** para representar pictóricamente todas las posibilidades.