Variables aleatorias

Definición

La **dictribución de probabilidad** o **función de masa de probabilidad** (fmp) de una variable discreta se define para cada número x como

Definición

La **dictribución de probabilidad** o **función de masa de probabilidad** (fmp) de una variable discreta se define para cada número x como

$$p(x) = P(X = x) = P(\text{todas las } s \in \mathcal{S} : X(s) = x)$$

Ejemplo

Sea $X =$ "número de fallas tipo cortante en una muestra de 3 vigas".

Ejemplo

Sea X = "número de fallas tipo cortante en una muestra de 3 vigas".

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{8} & \text{si } x = 1 \\ \frac{3}{8} & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{8} & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Definición

Supóngase que $p(x)$ depende de la cantidad que puede ser asignada a cualquiera de un número de valores posibles, y cada valor determina una distribución de probabilidad diferente. Tal cantidad se llama **parámetro** de distribución.

Definición

Supóngase que $p(x)$ depende de la cantidad que puede ser asignada a cualquiera de un número de valores posibles, y cada valor determina una distribución de probabilidad diferente. Tal cantidad se llama **parámetro** de distribución.El conjunto de todas las distribuciones de probabilidad para diferentes valores del parámetro se llama **familia** de destribuciones de probabilidad.

Ejemplo

$$p(x,\alpha) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{si } x = 0 \\ \alpha & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo

$$p(x,\alpha) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{si } x = 0 \\ \alpha & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$p(x) \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$X = \begin{cases} 0 & \text{con prob } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{con prob } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Definición

La **función de distribución acumulativa** (fda) $F(x)$ de una variable aleatoria discreta X con función de masa de probabilidad $p(x)$ se define para cada número x como

Definición

La **función de distribución acumulativa** (fda) $F(x)$ de una variable aleatoria discreta X con función de masa de probabilidad $p(x)$ se define para cada número x como

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y:y \leq x} p(y)$$

Para cualquier número x, $F(x)$ es la probabilidad de que el valor observado de X será cuando mucho x.

Ejemplo

Recordemos el ejemplo de las vigas, tenemos que

Ejemplo

Recordemos el ejemplo de las vigas, tenemos que

$$F(2) = P(X \leq 2)$$

Ejemplo

Recordemos el ejemplo de las vigas, tenemos que

$$\begin{aligned} F(2) &= P(X \leq 2) \\ &= p(0) + p(1) + p(2) \end{aligned}$$

Ejemplo

Recordemos el ejemplo de las vigas, tenemos que

$$\begin{aligned} F(2) &= P(X \leq 2) \\ &= p(0) + p(1) + p(2) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Ejemplo

Recordemos el ejemplo de las vigas, tenemos que

$$\begin{aligned} F(2) &= P(X \leq 2) \\ &= p(0) + p(1) + p(2) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Proposición

Para dos números cualesquiera a y b con $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - (a-)$$

donde "$a-$" representa el valor posible de X más grande que es estrictamente menor que a.

Proposición

Para dos números cualesquiera a y b con $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - (a-)$$

donde "$a-$" representa el valor posible de X más grande que es estrictamente menor que a.
En particular, si los únicos valores posibles son enteros, y si a y b son enteros, entonces

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(X = a \text{ o } a+1 \text{ o } \cdots \text{ o } b) \\ &= F(b) - F(a-1) \end{aligned}$$

Proposición

Para dos números cualesquiera a y b con $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - (a-)$$

donde "$a-$" representa el valor posible de X más grande que es estrictamente menor que a.
En particular, si los únicos valores posibles son enteros, y si a y b son enteros, entonces

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(X = a \text{ o } a+1 \text{ o } \cdots \text{ o } b) \\ &= F(b) - F(a-1) \end{aligned}$$

Con $a = b$ se obtiene $P(X = a) = F(a) - F(a-1)$ en este caso.

Ejemplo

Recordemos nuevamente el ejemplo de las vigas.

Ejemplo

Recordemos nuevamente el ejemplo de las vigas.
Tenemos que:

$$P(1 \leq X \leq 3) \quad = \quad F(3) - F(0)$$

Ejemplo

Recordemos nuevamente el ejemplo de las vigas.
Tenemos que:

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= F(3) - F(0) \\ &= 1 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Ejemplo

Recordemos nuevamente el ejemplo de las vigas.
Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
P(1 \leq X \leq 3) &= F(3) - F(0) \\
&= 1 - \frac{1}{8} \\
&= \frac{7}{8}
\end{aligned}
$$

Valor esperado de X

Sea X una variable aleatoria discreta con un conjunto de valores posibles D y una función de masa de probabilidad $p(x)$. El **valor esperado** o **valor medio** de X, denotado por $E(X)$ o μ_X o sólo μ, es

Valor esperado de X

Sea X una variable aleatoria discreta con un conjunto de valores posibles D y una función de masa de probabilidad $p(x)$. El **valor esperado** o **valor medio** de X, denotado por $E(X)$ o μ_X o sólo μ, es

$$E(X) = \mu_x = \sum_{x \in D} x \cdot p(x)$$

Ejemplo

Nuevamente, retomando nuestro ejemplo de las vigas

Ejemplo

Nuevamente, retomando nuestro ejemplo de las vigas

$$E(X) = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3)$$

Ejemplo

Nuevamente, retomando nuestro ejemplo de las vigas

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Ejemplo

Nuevamente, retomando nuestro ejemplo de las vigas

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} \\
&= \frac{12}{8}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Nuevamente, retomando nuestro ejemplo de las vigas

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{12}{8} \\ &= 1{,}5 \approx 2 \end{aligned}$$

Proposición

Si la variable aleatoria X tiene un conjunto de posibles valores D y una función de masa de probabilidad $p(x)$, entonces el valor esperado de cualquier función $h(X)$, denotada por $E[h(X)]$ o $\mu_{h(X)}$, se calcula con

Proposición

Si la variable aleatoria X tiene un conjunto de posibles valores D y una función de masa de probabilidad $p(x)$, entonces el valor esperado de cualquier función $h(X)$, denotada por $E[h(X)]$ o $\mu_{h(X)}$, se calcula con

$$E[h(X)] = \sum_{D} h(\cancel{X}\, x) \cdot p(x).$$

Ejemplo

En nuestro ejemplo de las vigas, consideramos la función

$$h(x) = 3x + 1{,}5 \text{ mil costo}$$

Ejemplo

En nuestro ejemplo de las vigas, consideramos la función

$$h(x) = 3x + 1{,}5 \text{ mil costo}$$

Entonces

$$E[h(X)] \;=\; h(0)\cdot p(0) + h(1)\cdot p(1) + h(2)\cdot p(2) + h(3)\cdot p(3)$$

Ejemplo

En nuestro ejemplo de las vigas, consideramos la función

$$h(x) = 3x + 1{,}5 \text{ mil costo}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E[h(X)] &= h(0)\cdot p(0) + h(1)\cdot p(1) + h(2)\cdot p(2) + h(3)\cdot p(3) \\ &= 1{,}5\cdot\frac{1}{8} + 4{,}5\cdot\frac{3}{8} + 7{,}5\cdot\frac{3}{8} + 10{,}5\cdot\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Ejemplo

En nuestro ejemplo de las vigas, consideramos la función

$$h(x) = 3x + 1{,}5 \text{ mil costo}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E[h(X)] &= h(0)\cdot p(0) + h(1)\cdot p(1) + h(2)\cdot p(2) + h(3)\cdot p(3) \\ &= 1{,}5\cdot\frac{1}{8} + 4{,}5\cdot\frac{3}{8} + 7{,}5\cdot\frac{3}{8} + 10{,}5\cdot\frac{1}{8} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Ejemplo

Una tienda de computadoras adquirió tres computadoras de un tipo a \$500 cada una. las venderá a \$1000 cada una. El fabricante se comprometió a readquirir cualquier computadora que no se haya vendido después de un periodo especificado a \$200 cada una.

Ejemplo

Una tienda de computadoras adquirió tres computadoras de un tipo a \$500 cada una. las venderá a \$1000 cada una. El fabricante se comprometió a readquirir cualquier computadora que no se haya vendido después de un periodo especificado a \$200 cada una.Sea X el número de computadoras vendidas y suponga $p(0) = 0{,}1$, $p(1) = 0{,}2$, $p(2) = 0{,}3$ y $p(3) = 0{,}4$.

Ejemplo

Una tienda de computadoras adquirió tres computadoras de un tipo a \$500 cada una. las venderá a \$1000 cada una. El fabricante se comprometió a readquirir cualquier computadora que no se haya vendido después de un periodo especificado a \$200 cada una.Sea X el número de computadoras vendidas y suponga $p(0) = 0{,}1$, $p(1) = 0{,}2$, $p(2) = 0{,}3$ y $p(3) = 0{,}4$. Con $h(X)$ denotando la utilidad asociada con la venta de X unidades, la información dada implica que

Ejemplo

Una tienda de computadoras adquirió tres computadoras de un tipo a \$500 cada una. las venderá a \$1000 cada una. El fabricante se comprometió a readquirir cualquier computadora que no se haya vendido después de un periodo especificado a \$200 cada una.Sea X el número de computadoras vendidas y suponga $p(0) = 0{,}1$, $p(1) = 0{,}2$, $p(2) = 0{,}3$ y $p(3) = 0{,}4$. Con $h(X)$ denotando la utilidad asociada con la venta de X unidades, la información dada implica que

$$h(X) = \text{ ingreso } - \text{ costo } = 1000X + 200(3 - X) - 1500 = 800X - 900.$$

La utilidad esperada es entonces

La utilidad esperada es entonces

$$E[h(X)] = h(0) \cdot p(0) + h(1) \cdot p(1) + h(2) \cdot p(2) + h(3) \cdot p(3)$$

La utilidad esperada es entonces

$$
\begin{aligned}
E[h(X)] &= h(0) \cdot p(0) + h(1) \cdot p(1) + h(2) \cdot p(2) + h(3) \cdot p(3) \\
&= (-900)0{,}1 + (-100)0{,}2 + (700)0{,}3 + (1500)0{,}4
\end{aligned}
$$

La utilidad esperada es entonces

$$
\begin{aligned}
E[h(X)] &= h(0)\cdot p(0) + h(1)\cdot p(1) + h(2)\cdot p(2) + h(3)\cdot p(3) \\
&= (-900)0{,}1 + (-100)0{,}2 + (700)0{,}3 + (1500)0{,}4 \\
&= 700
\end{aligned}
$$

Proposición

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$

Proposición

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$

(O, con la notación alternativa, $\mu_{aX+b} = a \cdot \mu_X + b$)

Definición

Sea $p(x)$ la función de masa de probabilidad de X y μ su valor esperado. En ese caso la **varianza** de X, denotada por $V(X)$ o σ_X^2 o simplemente σ^2, es

Definición

Sea $p(x)$ la función de masa de probabilidad de X y μ su valor esperado. En ese caso la **varianza** de X, denotada por $V(X)$ o σ_X^2 o simplemente σ^2, es

$$V(X) = \sum_D (x - \mu)^2 \cdot p(x) = E[(X - \mu)^2]$$

$$= \sum_{x \in D} (x - \mu)^2 p(x)$$

Definición

Sea $p(x)$ la función de masa de probabilidad de X y μ su valor esperado. En ese caso la **varianza** de X, denotada por $V(X)$ o σ_X^2 o simplemente σ^2, es

$$V(X) = \cancel{\sum_{D}(x-\mu)^2 \cdot} = E[(X-\mu)^2] = \sum_{D}(x-\mu)^2 p(x)$$

La **desviación estándar** (DE) de X es

Definición

Sea $p(x)$ la función de masa de probabilidad de X y μ su valor esperado. En ese caso la **varianza** de X, denotada por $V(X)$ o σ_X^2 o simplemente σ^2, es

$$V(X) = \sum_D (x-\mu)^2 \cdot = E[(X-\mu)^2]$$

La **desviación estándar** (DE) de X es

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

Proposición

$$V(X) = \sigma^2 = \left[\sum_D x^2 \cdot p(x)\right] - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X) = \sum_{x \in D} x\,p(x) \quad ; \quad E(X^2) = \sum_{x \in D} x^2 p(x)$$

Proposición

$$V(aX + b) = \sigma^2_{aX+b} = a^2 \cdot \sigma^2_X \text{ y } \sigma_{aX+b} = |a| \cdot \sigma_X$$

Proposición

$$V(aX+b)=\sigma^2_{aX+b}=a^2\cdot\sigma^2_X \text{ y } \sigma_{aX+b}=|a|\cdot\sigma_X$$

En particular,

Proposición

$$V(aX+b) = \sigma^2_{aX+b} = a^2 \cdot \sigma^2_X \text{ y } \sigma_{aX+b} = |a| \cdot \sigma_X$$

En particular,

$$\sigma_{aX} = |a| \cdot \sigma_X \text{ y } \sigma_{X+b} = \sigma_X$$

Tarea

Ejercicios 14 y 15 pagína 105 *"Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias"*, Jay Devore, Octava Edición.