Distribuciones discretas

UNIVERSIDAD EAFIT

Contenido

Ejercicio

Una empresa de ventas en línea dispone de seis líneas telefónicas. Sea X el número de líneas en uso en un tiempo especificado. Suponga que la función de masa de probabilidad de X es la que se da en la tabla.

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.06	0.04

Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

Dado 2

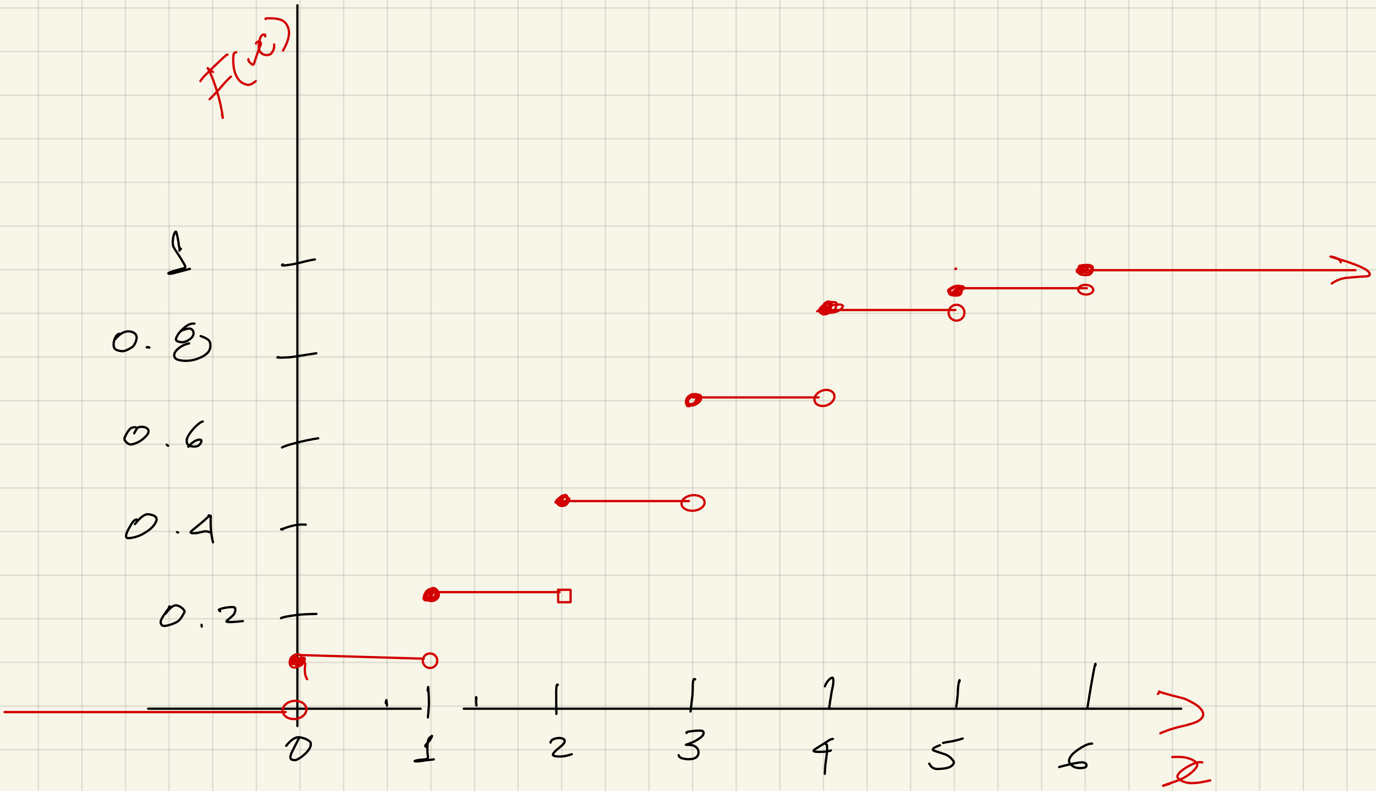
Dado 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$|S| = 36$

$X \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } x=2 \text{ ó } x=12 \\ \frac{2}{36} & \text{si } x=3 \text{ ó } x=11 \\ \vdots & \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.1 & \text{si } 0 \le X < 1 \\ 0.25 & \text{si } 1 \le X < 2 \\ 0.45 & \text{si } 2 \le X < 3 \\ 0.70 & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 0.90 & \text{si } 4 \le x < 5 \\ 0.96 & \text{si } 5 \le x < 6 \\ 1 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$$


F(x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
2
3
4
5
6
x

a. {Cuando mucho tres líneas están en uso}

$$P(X \leq 3) = F(3)$$
$$= f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$
$$= 0.1 + 0.15 + 0.2 + 0.25$$
$$= 0.7.$$

b. {Menos de tres líneas están en uso}

$$P(X<3) = f(0) + f(1) + f(2)$$

$$= 0.1 + 0.15 + 0.2$$

$$= 0.45$$

c. {Por lo menos tres líneas están en uso}

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$
$$= 1 - 0.45$$
$$= 0.55$$

d. {Entre dos y cinco líneas, inclusive, están en uso}

$$P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(2-1)$$

$$= [\cancel{f(0)} + \cancel{f(1)} + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)] - [\cancel{f(0) + f(1)}]$$

$$= f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$$

$$= 0.2 + 0.25 + 0.2 + 0.06$$

$$= 0.71$$

$$= F(5) - F(1) = 0.96 - 0.25 = 0.71$$

e. {Entre dos y cuatro líneas, inclusive, NO están en uso}

X	0	1	2	3	4	5	6
Y	6	5	4	3	2	1	0
$P(X=x)$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.2	0.06	0.04

Y = "lineas que NO están en uso"

X = "lineas que si están en uso"

Y	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y)$	0.04	0.06	0.2	0.25	0.2	0.15	0.1

$$P(2 \le Y \le 4) = F_Y(4) - F_Y(2-1)$$

$$= \left[\cancel{f_Y(0)} + \cancel{f_Y(1)} + f_Y(2) + f_Y(3) + f_Y(4)\right] - \left[\cancel{f_Y(0)} + \cancel{f_Y(1)}\right]$$

$$= f_Y(2) + f_Y(3) + f_Y(4)$$

$$= 0.2 + 0.25 + 0.2$$

$$= 0.65$$

$$P(2 \le Y \le 4) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=5) + P(X=6)\right]$$

$$= 1 - [0.1 + 0.15 + 0.06 + 0.04]$$

$$= 1 - 0.35 = 0.65$$

$$P(2 \le Y \le 4) = 1 - \left[P(X<2) + P(X>4)\right]$$

$$= 1 - \left[P(2 \le X \le 4)^c\right]$$

f. {Por lo menos cuatro líneas NO están en uso}

$$P(Y \geq 4) = 1 - P(Y < 4)$$

$$= 1 - [f_Y(0) + f_Y(1) + f_Y(2) + f_Y(3)]$$

$$= 1 - [0.04 + 0.06 + 0.2 + 0.25]$$

$$= 0.45.$$

$$E(X) = 0\,P(X=0) + 1\,P(X=1) + 2\,P(X=2) + 3\,P(X=3)$$
$$+\ 4\,P(X=4) + 5\,P(X=5) + 6\,P(X=6).$$
$$=$$

Ejercicio

Se selecciona al azar un individuo que tiene asegurado su automóvil con una compañía. Sea Y el número de infracciones de tránsito por las que el individuo fue citado durante los últimos tres años. La función de masa de probabilidad de Y es:

y	0	1	2	3
$p(y)$	0.60	0.25	0.10	0.05

a. Calcule $E(Y)$.

$$E(Y) = 0 \cdot \cancel{P(Y=0)} + 1\,P(Y=1) + 2\,P(Y=2) + 3\,P(Y=3)$$

$$= 0.6$$

b. Suponga que un individuo con Y infracciones incurre en un recargo de $\$100Y^2$. Calcule el monto esperado del recargo

$$h(Y) = 100Y^2$$

$$E(h(Y)) = E(100Y^2) = 100E(Y^2)$$

$$E(Y^2) = \cancel{0^2 P(Y=0)} + 1^2 P(Y=1) + 2^2 P(Y=2) + 3^2 P(Y=3)$$

$$= 1(0.25) + 4(0.1) + 9(0.05)$$

$$= 1.1$$

$$E(h(y)) = 100E(y^2) = 100(1.1) = 110$$

Ejercicio

Un resultado llamado **desigualdad de Chebyshev** establece que para cualquier distribución de probabilidad de una variable aleatoria X y cualquier número k, que por lo menos sea uno, $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$.

Ejercicio

Un resultado llamado **desigualdad de Chebyshev** establece que para cualquier distribución de probabilidad de una variable aleatoria X y cualquier número k, que por lo menos sea uno, $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$. En palabras, las posibilidad de que el valor de X sea por lo menos a k desviaciones estándar de su media es cuando mucho $\frac{1}{k^2}$.

Ejercicio

Un resultado llamado **desigualdad de Chebyshev** establece que para cualquier distribución de probabilidad de una variable aleatoria X y cualquier número k, que por lo menos sea uno, $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$. En palabras, las posibilidad de que el valor de X sea por lo menos a k desviaciones estándar de su media es cuando mucho $\frac{1}{k^2}$.

a. ¿Cuál es el valor del límite superior cuando $k = 2$?

Ejercicio

Un resultado llamado **desigualdad de Chebyshev** establece que para cualquier distribución de probabilidad de una variable aleatoria X y cualquier número k, que por lo menos sea uno, $P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$. En palabras, las posibilidad de que el valor de X sea por lo menos a k desviaciones estándar de su media es cuando mucho $\frac{1}{k^2}$.

a. ¿Cuál es el valor del límite superior cuando $k = 2$? ¿$k = 3$?

Ejercicio

Un resultado llamado **desigualdad de Chebyshev** establece que para cualquier distribución de probabilidad de una variable aleatoria X y cualquier número k, que por lo menos sea uno, $P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$. En palabras, las posibilidad de que el valor de X sea por lo menos a k desviaciones estándar de su media es cuando mucho $\frac{1}{k^2}$.

a. ¿Cuál es el valor del límite superior cuando $k=2$? ¿$k=3$? ¿$k=4$?

Ejercicio

Un resultado llamado **desigualdad de Chebyshev** establece que para cualquier distribución de probabilidad de una variable aleatoria X y cualquier número k, que por lo menos sea uno, $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$. En palabras, las posibilidad de que el valor de X sea por lo menos a k desviaciones estándar de su media es cuando mucho $\frac{1}{k^2}$.

a. ¿Cuál es el valor del límite superior cuando $k = 2$? ¿$k = 3$? ¿$k = 4$? ¿$k = 5$?

$P(|X-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4} = 0.75$

Ejercicio

Un resultado llamado **desigualdad de Chebyshev** establece que para cualquier distribución de probabilidad de una variable aleatoria X y cualquier número k, que por lo menos sea uno, $P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$. En palabras, las posibilidad de que el valor de X sea por lo menos a k desviaciones estándar de su media es cuando mucho $\frac{1}{k^2}$.

a. ¿Cuál es el valor del límite superior cuando $k=2$? ¿$k=3$? ¿$k=4$? ¿$k=5$? ¿$k=10$?

b. Calcule μ y σ para la distribución de nuestro primer ejercicio (líneas telefónicas).

$E(X) =$

b. Calcule μ y σ para la distribución de nuestro primer ejercicio (líneas telefónicas). Evalúe en seguida $P(|X - \mu| \geq k\sigma)$ con los valores de k dados en el inciso **a.**.

b. Calcule μ y σ para la distribución de nuestro primer ejercicio (líneas telefónicas). Evalúe en seguida $P(|X - \mu| \geq k\sigma)$ con los valores de k dados en el inciso **a.**. ¿Qué sugiere esto sobre el límite superior con respecto a la probabilidad correspondiente?

b. Calcule μ y σ para la distribución de nuestro primer ejercicio (líneas telefónicas). Evalúe en seguida $P(|X - \mu| \geq k\sigma)$ con los valores de k dados en el inciso **a.**. ¿Qué sugiere esto sobre el límite superior con respecto a la probabilidad correspondiente?

c. Sea X con los valores posibles -1, 0 y 1, con las probabilidades $\frac{1}{18}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{18}$, respectivamente.

b. Calcule μ y σ para la distribución de nuestro primer ejercicio (líneas telefónicas). Evalúe en seguida $P(|X - \mu| \geq k\sigma)$ con los valores de k dados en el inciso **a.**. ¿Qué sugiere esto sobre el límite superior con respecto a la probabilidad correspondiente?

c. Sea X con los valores posibles -1, 0 y 1, con las probabilidades $\frac{1}{18}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{18}$, respectivamente.¿Cuál es $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$ y cómo se compara con el límite correspondiente?

b. Calcule μ y σ para la distribución de nuestro primer ejercicio (líneas telefónicas). Evalúe en seguida $P(|X - \mu| \geq k\sigma)$ con los valores de k dados en el inciso **a.**. ¿Qué sugiere esto sobre el límite superior con respecto a la probabilidad correspondiente?

c. Sea X con los valores posibles -1, 0 y 1, con las probabilidades $\frac{1}{18}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{18}$, respectivamente.¿Cuál es $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$ y cómo se compara con el límite correspondiente?

d. Dé una distribución para la cual $P(|X - \mu| \geq 5\sigma) = 0{,}04$.

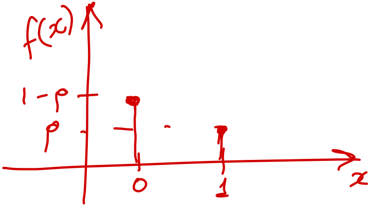
Distribución Bernoulli

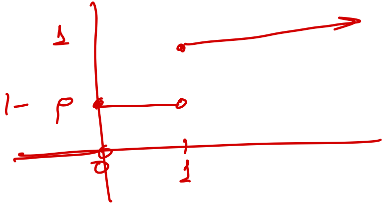
X = Si en 1 intento se observa lo que me interesa.

$X = 0, 1$

$P(X=1)=p \qquad P(X=0) = 1-p = q$

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$





$$P(X=x)=\begin{cases} p & \text{si } x=1 \\ 1-p & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$$E(X) = 0(1-p) + 1(p) = p$$

$$V(X) = E[X^2] - [E(x)]^2$$

$$E(x^2) = 0^2(1-p) + 1^2(p) = p$$

$$V(x) = p - p^2 = (1-p)p = qp$$

Distribución Binomial

$$\underbrace{\boxed{1}\ \boxed{0}\ \cdots\cdots\ \boxed{1}}_{n \text{ ensayos}}$$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

$$X \sim Bin(n, p)$$

n = # total de ensayos Bernoulli

p = prob. de falla.

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq$$

Un experimento de Bernoulli puede tener como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $q = 1 - p$. Entonces, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial X, el número de éxitos en n ensayos independientes, es

Un experimento de Bernoulli puede tener como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $q = 1 - p$. Entonces, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial X, el número de éxitos en n ensayos independientes, es

$$b(x;\, n,\, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},\ x = 0,\, 1, \cdots,\, n$$

Teorema

La media y la varianza de la distribución binomial $b(x; n, p)$

Teorema

La media y la varianza de la distribución binomial $b(x; n, p)$

$$\mu = np \text{ y } \sigma^2 = npq.$$

Distribución multinomial

Si cada ensayo tiene más de dos resultados posibles se usa la distribución multinomial

$$\begin{array}{cccccc} E_1 & E_2 & E_1 & E_3 & E_2 & E_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ p_1 & p_2 & p_1 & p_3 & p_2 & p_2 \end{array}$$

x_1 = Error tipo 1 $(E_1) = 2$

x_2 = Error tipo 2 $(E_2) = 3$

x_3 = Error tipo 3 $(E_3) = 1$

$x_1 + x_2 + x_3 = n = 6$ # total de ensayos.

$$\binom{6}{x_1, x_2, x_3} = \binom{6}{2, 3, 1} = \frac{6!}{2!\,3!\,1!}$$

Número de formas en que se puede presentar 2 errores tipo 1, 3 errores tipo 2 y 1 error tipo 3

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \binom{n}{x_1, x_2, x_3} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}$$

donde $x_1 + x_2 + x_3 = n$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$

Si un ensayo dado puede producir los k resultados $E_1, E_2, \cdots, E_k$ con probabilidades $p_1, p_2, \cdots, p_k$ entonces la distribución de probabilidad de las variables aleatorias $X_1, X_2, \cdots, X_k$, que representa el número de ocurrencias para $E_1, E_2, \cdots, E_k$ en n ensayos independientes, es

Si un ensayo dado puede producir los k resultados $E_1, E_2, \cdots, E_k$ con probabilidades $p_1, p_2, \cdots, p_k$ entonces la distribución de probabilidad de las variables aleatorias $X_1, X_2, \cdots, X_k$, que representa el número de ocurrencias para $E_1, E_2, \cdots, E_k$ en n ensayos independientes, es

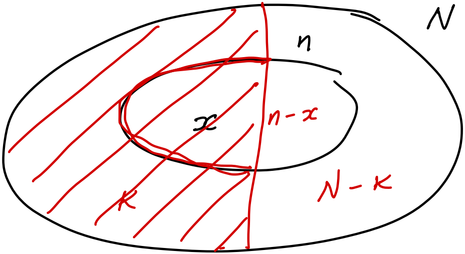
$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k; p_1, p_2, \cdots, p_k, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \cdots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k},$$

con

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n \text{ y } \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

Distribución Hipergeométrica

Nos interesa el cálculo de probabilidades para el número de observaciones que caen en una categoría específica.



N tamaño total de la población

n tamaño de la muestra

Distribución Hipergeométrica

Nos interesa el cálculo de probabilidades para el número de observaciones que caen en una categoría específica. Sin embargo, la distribución binomial requiere que los ensayos sean independientes.

$\binom{N}{n}$ # Número de formas en que puedo formar muestras de tamaño n en una población de N individuos.

$\binom{K}{x}$ # Número de formas en las que se pueden agrupar x éxitos de K éxitos en la población

$\binom{N-K}{n-x}$ # de formas de que $n-x$ fracasos salgan de un total de $N-K$ fracasos en la población

Distribución Hipergeométrica

Nos interesa el cálculo de probabilidades para el número de observaciones que caen en una categoría específica. Sin embargo, la distribución binomial requiere que los ensayos sean independientes.

Por consiguiente, si se aplica esta distribución, digamos tomando muestras de un lote de artículos, el muestreo se debe efectuar reemplazando cada artículo después de observado (se regresa el artículo a la muestra).

Por otro lado, la distribución hipergeométrica NO requiere independencia y se basa en el muestreo que se realiza sin reemplazo (No se regresa el artículo a la muestra).

- De un lote de N artículos se selecciona una muestra aleatoria de tamaño n sin reemplazo.

- De un lote de N artículos se selecciona una muestra aleatoria de tamaño n sin reemplazo.
- k de los N artículos del lote se pueden clasificar como éxitos. Entonces, hay $N - k$ fracasos.

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria hipergeométrica X, el número de éxitos en una muestra de tamaño n que se selecciona de N artículos, en los que k se denomina **éxito** y $N - k$ **fracaso**, es

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria hiper-geométrica X, el número de éxitos en una muestra de tamaño n que se selecciona de N artículos, en los que k se denomina **éxito** y $N - k$ **fracaso**, es

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \ \text{máx}\{0, n-(N-k)\} \leq x \leq \text{mín}\{n, k\}$$

$N = 100$ $\quad k = 10$

$n = 20$

$\max\{0, 20-(100-10)\} \leq X \leq \min\{20, 10\}$

$\max\{0, -70\} \leq X \leq \min\{20, 10\}$

$0 \leq x \leq 10$

$n = 20$

$N = 100$ $\quad K = 90$

$\max\{0, 20-(100-90)\} \leq X \leq \min\{20, 90\}$

$\max\{0, 10\} \leq X \leq \min\{20, 90\}$

$10 \leq X \leq 20$

Teorema

La media y la varianza de la distribución hipergeométrica $h(x; N, n, k)$ son

Teorema

La media y la varianza de la distribución hipergeométrica $h(x; N, n, k)$ son

$$E(X) = \frac{nk}{N} \text{ y } Var(X) = \frac{N-n}{N-1} n \frac{k}{N}\left(1 - \frac{k}{N}\right).$$

Hemos revisado varias distribuciones discretas importantes que tiene diversas aplicaciones.

Hemos revisado varias distribuciones discretas importantes que tiene diversas aplicaciones. Muchas de estas distribuciones se relacionan bien entre sí.

Hemos revisado varias distribuciones discretas importantes que tiene diversas aplicaciones. Muchas de estas distribuciones se relacionan bien entre sí. Existe una relación interesante entre las distribuciones hipergeométrica y binomial.

Hemos revisado varias distribuciones discretas importantes que tiene diversas aplicaciones. Muchas de estas distribuciones se relacionan bien entre sí. Existe una relación interesante entre las distribuciones hipergeométrica y binomial. Como se esperaría, si n es pequeña comparada con N, la naturaleza de los N artículos cambia muy poco en cada prueba.

Hemos revisado varias distribuciones discretas importantes que tiene diversas aplicaciones. Muchas de estas distribuciones se relacionan bien entre sí. Existe una relación interesante entre las distribuciones hipergeométrica y binomial. Como se esperaría, si n es pequeña comparada con N, la naturaleza de los N artículos cambia muy poco en cada prueba.Así, cuando n es pequeña en comparación con N, se puede utilizar una distribución binomial para aproximar la distribución hipergeométrica.

Hemos revisado varias distribuciones discretas importantes que tiene diversas aplicaciones. Muchas de estas distribuciones se relacionan bien entre sí. Existe una relación interesante entre las distribuciones hipergeométrica y binomial. Como se esperaría, si n es pequeña comparada con N, la naturaleza de los N artículos cambia muy poco en cada prueba.Así, cuando n es pequeña en comparación con N, se puede utilizar una distribución binomial para aproximar la distribución hipergeométrica. De hecho, por regla general la aproximación es buena cuando $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$.

Por lo tanto, la cantidad $\frac{k}{N}$ desempeña el papel de parámetro binomial p y, como consecuencia, la distribución binomial se podría considerar una versión de pobación grande de la distribución hipergeométrica.

Por lo tanto, la cantidad $\frac{k}{N}$ desempeña el papel de parámetro binomial p y, como consecuencia, la distribución binomial se podría considerar una versión de pobación grande de la distribución hipergeométrica. La media y varianza entonces se obtienen de las fórmulas

Por lo tanto, la cantidad $\frac{k}{N}$ desempeña el papel de parámetro binomial p y, como consecuencia, la distribución binomial se podría considerar una versión de pobación grande de la distribución hipergeométrica. La media y varianza entonces se obtienen de las fórmulas

$$\mu = np = \frac{nk}{N} \text{ y } \sigma^2 = npq = n\frac{k}{N}\left(1 - \frac{k}{N}\right).$$

Por lo tanto, la cantidad $\frac{k}{N}$ desempeña el papel de parámetro binomial p y, como consecuencia, la distribución binomial se podría considerar una versión de pobación grande de la distribución hipergeométrica. La media y varianza entonces se obtienen de las fórmulas

$$\mu = np = \frac{nk}{N} \text{ y } \sigma^2 = npq = n\frac{k}{N}\left(1 - \frac{k}{N}\right).$$

Al compara estas fórmulas con las del teorema anterior, vemos que la media es la misma, mientras que la varianza difiere por un factor de corrección de $\frac{N-n}{N-1}$, que es insignificante cuando n es pequeña en relación con N.

Distribución binomial negativa

- Condiciones parecidas a un experimento binomial, sólo que las pruebas (ensayos) se repetiran sólo hasta que ocurra un número fijo de éxitos.

Distribución binomial negativa

- Condiciones parecidas a un experimento binomial, sólo que las pruebas (ensayos) se repetiran sólo hasta que ocurra un número fijo de éxitos.
- En la binomial encontramos la probabilidad de que x éxitos en n ensayos, acá encontramos la probabilidad de que ocurra el $k-$ésimo éxito en el $x-$ésimo ensayo.

Si ensayos independientes repetidos pueden dar como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $q = 1 - p$, entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, el número del ensayo en el que ocurre el $k-$ésimo éxito, es

Si ensayos independientes repetidos pueden dar como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $q = 1-p$, entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, el número del ensayo en el que ocurre el $k-$ésimo éxito, es

$$b^*(x;\, k,\, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k},\; x = k,\, k+1, \cdots$$

E F E E E F E $\qquad p = 0.6$

$\downarrow$ 1° $\downarrow$ 0.6, $\downarrow$ 0.4, $\downarrow$ 2° $\downarrow$ 0.6, $\downarrow$ 3° $\downarrow$ 0.6, $\downarrow$ 4° $\downarrow$ 0.6, $\downarrow$ 0.4, $\downarrow$ 5° $\downarrow$ 0.6

0.6 0.4 0.6 0.6 0.6 0.4 0.6

$\binom{6}{4}$ # de formas de encontrar 4 éxitos en 6 ensayos

X = # de ensayos necesarios en el que ocurren k éxitos

$$P(X=7) = \binom{6}{4}(0.6)^5(0.4)^2$$

Distribución geométrica

Si pruebas independientes repetidas pueden tener como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $q = 1 - p$, entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, el número de la prueba en el que ocurre el primer éxito, es

Distribución geométrica

Si pruebas independientes repetidas pueden tener como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $q = 1 - p$, entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, el número de la prueba en el que ocurre el primer éxito, es

$$g(x; p) = pq^{x-1},\ x = 1, 2, \cdots$$

Teorema

La media y la varianza de una variable aleatoria que sigue la distribución geométrica son

Teorema

La media y la varianza de una variable aleatoria que sigue la distribución geométrica son

$$\mu = \frac{1}{p} \text{ y } \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

Ejemplo si $p = 0.6$

$$E(X) = \frac{1}{0.6} = \frac{10}{6} = 1.66 \cong 2.$$

Distribución de Poisson

Un experimento de Poisson se deriva del proceso de Poisson que tiene las siguientes propiedades:

Distribución de Poisson

Un experimento de Poisson se deriva del proceso de Poisson que tiene las siguientes propiedades:

- El número de resultados que ocurren en un intervalo o región especifica es independiente del número que ocurre en cualquier otro intervalo de tiempo o región del espacio disjunto. de esta forma vemos que el proceso de Poisson no tiene memoria.

Distribución de Poisson

Un experimento de Poisson se deriva del proceso de Poisson que tiene las siguientes propiedades:

- El número de resultados que ocurren en un intervalo o región especifica es independiente del número que ocurre en cualquier otro intervalo de tiempo o región del espacio disjunto. de esta forma vemos que el proceso de Poisson no tiene memoria.
- La probabilidad de que ocurra un sólo resultado durante un intervalo de tiempo muy corto o región muy pequeña es proporcional a la longitud del intervalo o al tamaño de la región y NO depende del número de resultados que ocurren fuera de este intervalo de tiempo o región.

- La probabilidad de que ocurra más de un resultado en tal intervalo de tiempo corto o que caiga en tal región pequeña es insignificante.

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson X, la cual representa el número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo dado o región especifica y se denota con t, es

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson X, la cual representa el número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo dado o región especifica y se denota con t, es

$$p(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \cdots$$

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson X, la cual representa el número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo dado o región especifica y se denota con t, es

$$p(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \; x = 0,\, 1,\, 2, \cdots$$

donde λ es el número promedio de resultados por unidad de tiempo, distancia, área, volumen y $e = 2{,}71828 \cdots$

Teorema: Tanto la media como la varianza de la distribución de Poisson son λt.

Teorema: Tanto la media como la varianza de la distribución de Poisson son λt.

Teorema: Sea X una variable aleatoria binomial con distribución de probabilidad $b(x;\, n,\, p)$. Cuando $n \to \infty$, $p \to 0$ y $np \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ que permanece constante,

Teorema: Tanto la media como la varianza de la distribución de Poisson son λt.

Teorema: Sea X una variable aleatoria binomial con distribución de probabilidad $b(x;\, n,\, p)$. Cuando $n \to \infty$, $p \to 0$ y $np \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ que permanece constante,

$$b(x;\, n,\, p) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} p(x;\, \mu).$$

Ejercicio: La probabilidad de que una persona que vive en cierta ciudad tenga un perro es de 0.3. Calcule la probabilidad de que la décima persona entrevistada al azar en esa ciudad sea la quinta que tiene un perro.

$$b^*(10, 5, 0.3) = \binom{10-1}{5-1} 0.3^5 (0.7)^5$$

$$= \binom{9}{4} 0.3^5 (0.7)^5 =$$

Ejercicios de repaso

5.77 Durante un proceso de producción, cada día se seleccionan al azar 15 unidades de la línea de ensamble para verificar el porcentaje de artículos defectuosos. A partir de información histórica se sabe que la probabilidad de tener una unidad defectuosa es de 0.05. Cada vez que se encuentran dos o más unidades defectuosas en la muestra de 15, el proceso se detiene. Este procedimiento se utiliza para proporcionar una señal en caso de que aumente la probabilidad de unidades defectuosas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado se detenga el proceso de producción? (Suponga 5% de unidades defectuosas).

b) Suponga que la probabilidad de una unidad defectuosa aumenta a 0.07. ¿Cuál es la probabilidad de que en cualquier día no se detenga el proceso de producción?

5.78 Se considera utilizar una máquina automática de soldadura para un proceso de producción. Antes de comprarla se probará para verificar si tiene éxito en 99% de sus soldaduras. Si no es así, se considerará que no es eficiente. La prueba se llevará a cabo con un prototipo que requiere hacer 100 soldaduras. La máquina se aceptará para la producción sólo si no falla en más de 3 soldaduras.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se rechace una buena máquina?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se acepte una máquina ineficiente que solde bien el 95% de las veces?

5.79 Una agencia de renta de automóviles en un aeropuerto local tiene 5 Ford, 7 Chevrolet, 4 Dodge, 3 Honda y 4 Toyota disponibles. Si la agencia selecciona al azar 9 de estos automóviles para transportar delega-

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - F(1) \approx 1 - \text{pbinom}(1, 15, 0.05)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} f(x)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} \binom{15}{x} (0.05)^{x} (1-0.05)^{15-x}$$

$$= 0.17095$$