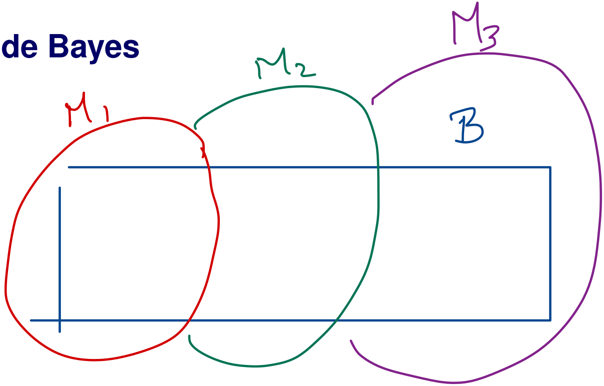
Teorema de Bayes

Teorema de Bayes



$$P(B) = P(M_1 \cap B) + P(M_2 \cap B) + P(M_3 \cap B)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} P(M_i \cap B) = \sum_{i=1}^{3} P(B/M_i)\,P(M_i)$$

$$P(M_j / B) = \frac{P(M_j \cap B)}{P(B)} \; ; \quad j = 1, 2, 3$$

$$= \frac{P(B / M_j)\, P(M_j)}{\sum_{i=1}^{3} P(B / M_i)\, P(M_i)}$$

Ley de probabilidad

Sean $A_1, A_2, \cdots, A_k$ eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Entonces para cualquier otro evento B,

Ley de probabilidad

Sean $A_1, A_2, \cdots, A_k$ eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Entonces para cualquier otro evento B,

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cap B\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(B/A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

Ley de probabilidad

Sean $A_1, A_2, \cdots, A_k$ eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Entonces para cualquier otro evento B,

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cap B\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P(B/A_i)P(A_i)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B/A_i)P(A_i) \tag{1}$$

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \cdots, A_k$ eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos con probabilidades $P(A_i)$ (para $i = 1, \cdots, k$). Entonces para cualquier otro evento B, para el cual $P(B) > 0$, la probabilidad **posterior** de A_j dado B es

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \cdots, A_k$ eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos con probabilidades $P(A_i)$ (para $i = 1, \cdots, k$). Entonces para cualquier otro evento B, para el cual $P(B) > 0$, la probabilidad **posterior** de A_j dado B es

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B/A_i)P(A_i)}$$

para $j = 1, \cdots, k$.

Ejercicio

La población de un país particular se compone de tres grupos étnicos. Cada individuo pertenece a uno de los cuatro grupos sanguíneos principales. La tabla de probabilidad da la proporción de individuos en las diversas conbinaciones de grupo étnico-grupo sangíneo es:

	O	A	B	AB
1	0.082	0.106	0.008	0.004
2	0.135	0.141	0.018	0.006
3	0.215	0.200	0.065	0.020

Suponga que se selecciona un individuo al azar de la población y que los eventos se definen como:

$$P(A) = P(A \cap G_1) + P(A \cap G_2) + P(A \cap G_3) = 0.447.$$

$$P(G_3) = P(G_3 \cap O) + P(G_3 \cap A) + P(G_3 \cap AB) + P(G_3 \cap B)$$
$$= 0.5$$

$$P(A \cap G_3) = 0.2$$

$$P(A / G_3) = \frac{P(A \cap G_3)}{P(G_3)} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Suponga que se selecciona un individuo al azar de la población y que los eventos se definen como:

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{ tipo A seleccionado}\} \\
B &= \{\text{ tipo B seleccionado}\} \\
C &= \{\text{grupo étnico 3 seleccionado}\}
\end{aligned}
$$

a. Calcule $P(A)$, $P(C)$ y $P(A \cap C)$

A = { Tiene la sangre tipo A }

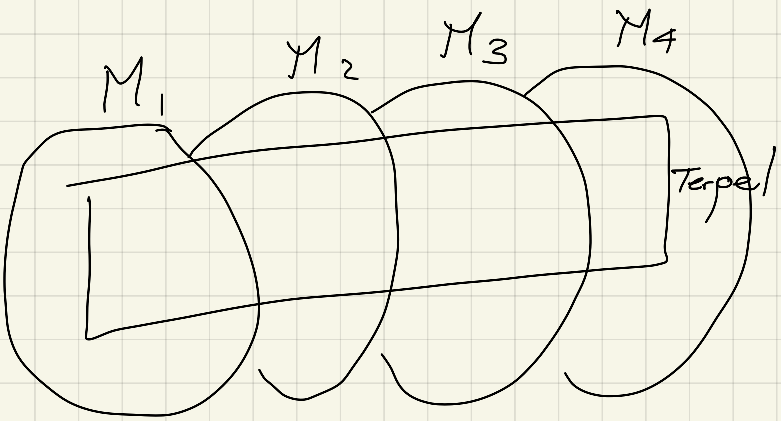
C_3 = { Es del grupo etnico 3 seleccionado }.

$$P(A) = P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) + P(A \cap C_3)$$
$$= 0.106 + 0.141 + 0.200$$
$$= 0.447$$

$$P(C_3) = P(Y=3) = P(C_3 \cap O) + P(C_3 \cap A) + P(C_3 \cap B) + P(C_3 \cap AB)$$
$$= 0.215 + 0.200 + 0.065 + 0.02$$
$$= 0.5$$

$$P(A \cap C_3) = 0.2$$

$$P(\text{Terpel}) = \frac{\text{Terpel}}{\text{Total}}$$



$$P(\text{Covid}) = P(M_1 \cap \text{Covid}) + P(M_2 \cap \text{Covid}) + P(M_3 \cap \text{Covid}) + P(M_4 \cap \text{Covid})$$

$$= P(\text{Covid}/M_1)P(M_1) + P(\text{Covid}/M_2)P(M_2) + P(\text{Covid}/M_3)P(M_3) + P(\text{Covid}/M_4)P(M_4)$$

$$P(M_1/\text{Covid}) = \frac{P(M_1 \cap \text{Covid})}{P(\text{Covid})}$$

$$= \frac{P(\text{Covid}/M_1)P(M_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(\text{Covid}/M_i)P(M_i)}$$

b. Calcule tanto $P(A/C_3)$ y $P C_3/A)$ y explique en contexto lo que cad una de estas probabilidades representa

$$P(A/C_3) = \frac{P(A \cap C_3)}{P(C_3)} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5} = 40\%$$

$$P(C_3/A) = \frac{P(A \cap C_3)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.447} = 45\%$$

c. Si el individuo seleccionado no tiene sangre de tipo B, ¿Cuál es la probabilidad de que él o ella pertenezca al grupo étnico 1?

$$P(Y=1/B') = \frac{P(\{Y=1\}\cap B')}{P(B')} = \frac{0.192}{P(B')}$$

$$P(\{Y=1\}\cap B') = P(\{Y=1\},O) + P(\{Y=1\},A) + P(\{Y=1\},AB)$$

$$= 0.082 + 0.106 + 0.004$$

$$= \boxed{0.192}$$

$$P(\{Y=1\}\cap B') = P(\{Y=1\}) - P(\{Y=1\}\cap B)$$

$$= 0.2 - 0.008 = \boxed{0.192}$$

$$P(B') = 1 - P(B)$$

$$= 1 - \left(P(B, \{Y=1\}) + P(B, \{Y=2\}) + P(B, \{Y=3\}) \right)$$

$$= 1 - (0.008 + 0.018 + 0.065)$$

$$= 1 - 0.091$$

$$= 0.909$$

$$\Longrightarrow P(\{Y=1\} / B') = \frac{0.192}{0.909}$$

$$= 0.211$$

Ejemplo

En una gasolinera, 40 % de los clientes usan gasolina regular (A_1), 35 % usan gasolina plus (A_2) y 25 % utilizan premium (A_3). De los clientes que utilizan gasolina regular, sólo 30 % llenan sus tanques (evento B). De los clientes que utilizan plus, 60 % llenan sus tanques, mientras que los que utilizan premium, 50 % llenan sus tanques.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente pida gasolina plus y llene el tanque ($A_2 \cap B$)?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llene el tanque?

c. Si el siguiente cliente llena el tanque,¿cuál es la probabilidad de que pida gasolina regular? ¿Plus? ¿Premium?

Independencia

Los eventos A y B son **independientes** si $P(A/B) = P(A)$ o $P(B/A) = P(B)$.

Independencia

Los eventos A y B son **independientes** si $P(A/B) = P(A)$ o $P(B/A) = P(B)$. Son dependientes en caso contrario.

$P(B/A) \neq P(B) \Rightarrow$ A y B son dependientes

Independencia

Los eventos A y B son **independientes** si $P(A/B) = P(A)$ o $P(B/A) = P(B)$. Son dependientes en caso contrario.
A y B son independientes si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

$P(A \cap B) = P(A/B)\,P(B)$ por hip A y B son independientes enton $P(A/B) = P(A)$ por tanto $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Independencia de mas de dos eventos

Los eventos $A_1, \cdots, A_n$ son **mutuamente independientes** si por cada k ($k = 2, 3, \cdots, n$) y para cada subconjunto de índices $i_1, i_2, \cdots, i_k$ se cumple:

Independencia de mas de dos eventos

Los eventos $A_1, \cdots, A_n$ son **mutuamente independientes** si por cada k ($k = 2, 3, \cdots, n$) y para cada subconjunto de índices $i_1, i_2, \cdots, i_k$ se cumple:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$

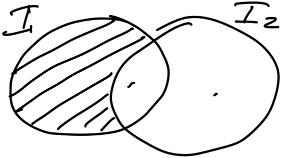
Ejemplo

Los componentes enviados a un distribuidor son revisados en cuanto a defectos por dos inspectores diferentes (cada componente es revisado por ambos inspectores). El primero detecta 90 % de todos los defectuosos que están presentes y el segundo hace lo mismo. Por lo menos un inspector no detecta un defecto en 20 % de todos los componentes de todos los componentes defectuosos.¿Cuál es la probabilidad de que ocurra lo siguiente?

a. ¿Un componente defectuoso será detectado sólo por el primer inspector? ¿Por exactamente uno de los dos inspectores?

I_1 : "El inspector 1 detecta fallas"

I_2 : "El inspector 2 detecta fallas"



$P(I_1) = 0.9 = P(I_2).$

$P(I_2^c) = 1 - P(I_2)$

$= 1 - 0.9 = 0.1$

$P(I_1 \cap I_2)^c = 1 - P(I_1 \cap I_2) = 1 - P(I_1)P(I_2)$

$= 1 - (0.9)^2 = 0.19.$

b. ¿Los tres componentes defectuosos en un lote no son detectados por ambos inspectores (suponiendo que las inspecciones de los diferentes componentes son independientes unas de otras)?

$$P(I_1^c \cap I_2^c) = P(I_1 \cup I_2)^c$$
$$= 1 - P(I_1 \cup I_2)$$
$$= 1 - [P(I_1) + P(I_2) - P(I_1 \cap I_2)]$$
$$= 1 - [0.9 + 0.9 - 0.9^2]$$
$$= 0.01$$

Si A = Tres componentes defectuosos no son detectados por ambos inspectores

$$P(A) = 0.01^3 = 0.0001 \approx 0$$

Variables Aleatorias

Para un espacio muestral dado $\mathcal{S}$ de algún experimento, una **variable aleatoria** es cualquier regla que asocia un número con dada resultado en $\mathcal{S}$. En lenguaje matemático, una variable aleatoria es una función cuyo dominio es el espacio muestral cuyo rango es el conjunto de los números reales.

Variables Aleatorias

Para un espacio muestral dado $\mathcal{S}$ de algún experimento, una **variable aleatoria** es cualquier regla que asocia un número con dada resultado en $\mathcal{S}$. En lenguaje matemático, una variable aleatoria es una función cuyo dominio es el espacio muestral cuyo rango es el conjunto de los números reales.

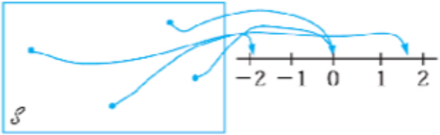


Figura 3.1 Una variable aleatoria

$$S \xrightarrow{\quad X \quad} \mathbb{R}$$

$$(N,N,N) \longrightarrow 0$$

$$(N,S,S) \longrightarrow 2$$

$$(S,N,S) \longrightarrow 2$$

$$(S,S,N) \longrightarrow 2$$

$$(S,S,S) \longrightarrow 3$$

$$(N,N,S) \longrightarrow 1$$

$$(S,N,N) \longrightarrow 1$$

$$(N,S,N) \longrightarrow 1$$

Rango X

$\{0, 1, 2, 3\}$

$$X^{-1}(1) = \{(N,S,N), (S,N,N), (N,N,S)\}$$

$$X^{-1}(0) = \{(N,N,N)\}$$

$$X^{-1}(2) = \{(N,S,S), (S,N,S), (S,S,N)\}$$

$$X^{-1}(3) = \{(S,S,S)\}$$

$\Longrightarrow$ $X^{-1}(0)$, $X^{-1}(1)$, $X^{-1}(2)$, $X^{-1}(3)$

son eventos del muestral S.

Una variable aleatoria **discreta** es una variable aleatoria cuyos valores posibles constituyen un conjunto finito o bien pueden ser puestos en lista en una secuencia infinita en la cual existe un primer elemento, un segundo elemento, y así sucesivamente ("contablemente" infinita).

Una variable aleatoria es **continua** si ambas de las siguientes condiciones se cumplen:

Una variable aleatoria es **continua** si ambas de las siguientes condiciones se cumplen:

1. Su conjunto de valores posibles se compone de todos los números que hay en un solo intervalo sobre la línea de numeración (posiblemente de extensión infinita, es decir, desde $-\infty$ hasta ∞) o todos los números en una unión disjuntas de dichos intervalos (por ejemplo, $[0, 10] \cup [20, 30]$).

Una variable aleatoria es **continua** si ambas de las siguientes condiciones se cumplen:

1. Su conjunto de valores posibles se compone de todos los números que hay en un solo intervalo sobre la línea de numeración (posiblemente de extensión infinita, es decir, desde $-\infty$ hasta ∞) o todos los números en una unión disjuntas de dichos intervalos (por ejemplo, $[0, 10] \cup [20, 30]$).
2. Ningún valor posible de la variable tiene probabilidad positiva, esto es, $P(X = c) = 0$ con cualquier valor posible de c.

Ejemplo

Considere el experimento en el cual se marca un número telefónico en cierto código de área con un marcador de número aleatorio (tales dispositivos los utilizan en forma extensa en organizaciones encuestadoras) y defina una variable aleatoria Y como

Ejemplo

Considere el experimento en el cual se marca un número telefónico en cierto código de área con un marcador de número aleatorio (tales dispositivos los utilizan en forma extensa en organizaciones encuestadoras) y defina una variable aleatoria Y como

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si el número seleccionado no aparece en el directorio} \\ 0 & \text{si el número seleccionado sí aparece en el directorio} \end{cases}$$

Por ejemplo, si 5282966 aparece en el directorio telefónico, entonces $Y(5282966) = 0$ en tanto que $Y(7727350) = 1$ dice que el número 7727350 no aparece en el directorio telefónico. Una descripción en palabras de esta índole es más económica que una lista completa, por lo que se utilizará tal descripción simpre que sea posible.

Cualquier variable aleatoria cuyos únicos valores posibles son 0 y 1 se llama **variable aleatoria de Bernoulli**

Cualquier variable aleatoria cuyos únicos valores posibles son 0 y 1 se llama **variable aleatoria de Bernoulli**

En ocasiones se deseará definir y estudiar diferentes variables del mismo espacio muestral.

Cualquier variable aleatoria cuyos únicos valores posibles son 0 y 1 se llama **variable aleatoria de Bernoulli**

En ocasiones se deseará definir y estudiar diferentes variables del mismo espacio muestral.

Ejemplo: Un experimento en el cual se determinó el número de bombas en uso en cada una de dos gasolineras. Defina las variables aleatorias X, Y y U como:

Cualquier variable aleatoria cuyos únicos valores posibles son 0 y 1 se llama **variable aleatoria de Bernoulli**

En ocasiones se deseará definir y estudiar diferentes variables del mismo espacio muestral.

Ejemplo: Un experimento en el cual se determinó el número de bombas en uso en cada una de dos gasolineras. Defina las variables aleatorias X, Y y U como:

$$\begin{aligned} X &= \text{el número total de bombas en uso en las dos gasolineras} \\ Y &= \text{la diferencia entre el número de bombas en uso en la} \\ &\quad \text{gasolinera 1 y el número en uso en la gasolinera 2} \\ U &= \text{el máximo de los números de bombas en uso en las dos} \\ &\quad \text{gasolineras} \end{aligned}$$

Si se realiza este experimento y se obtiene $s = (2, 3)$, entonces $X((2, 3)) = 2 + 3 = 5$, por lo que se dice que el valor observado de X fue $x = 5$.

Asimismo, el valor observado de Y sería $y = 2 - 3 = -1$ y el U sería $u = \text{máx}(2, 3) = 3$.

Si se realiza este experimento y se obtiene $s = (2, 3)$, entonces $X((2, 3)) = 2 + 3 = 5$, por lo que se dice que el valor observado de X fue $x = 5$.

Asimismo, el valor observado de Y sería $y = 2 - 3 = -1$ y el U sería $u = \text{máx}(2, 3) = 3$.

A pesar de que en nuestro ejemplo las variables pueden asumir sólo un número finito de posibles valores, en general éste no tiene que ser el caso.

Ejercicio 1

Una viga de concreto puede fallar por esfuerzo constante (S) o por flexión (F). Suponga que se seleccionan al azar tres vigas que fallaron y se determina el tipo de falla de cada una. Sea X el número de vigas entre las tres seleccionadas que fallaron por esfuerzo constante. Ponga en lista cada resultado en el espacio muestral junto con el valor asociado de X.

Solución

S : "Una viga falla por esfuerzo cortante"

F "Una viga falla por flexión"

X : "el # de vigas entre las tres seleccionadas que fallaron por esfuerzo cortante"

Solución

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

$(S,S,S) \mapsto 3$

$(S,S,F) \mapsto 2$

$(S,F,F) \mapsto 1$

$(F,S,S) \mapsto 2$

$(F,F,S) \mapsto 1$

$(F,F,F) \mapsto 0$

$(S,F,S) \mapsto 2$

$(F,S,F) \mapsto 1$

Rango X $= \{0,1,2,3\}$

Discreta.

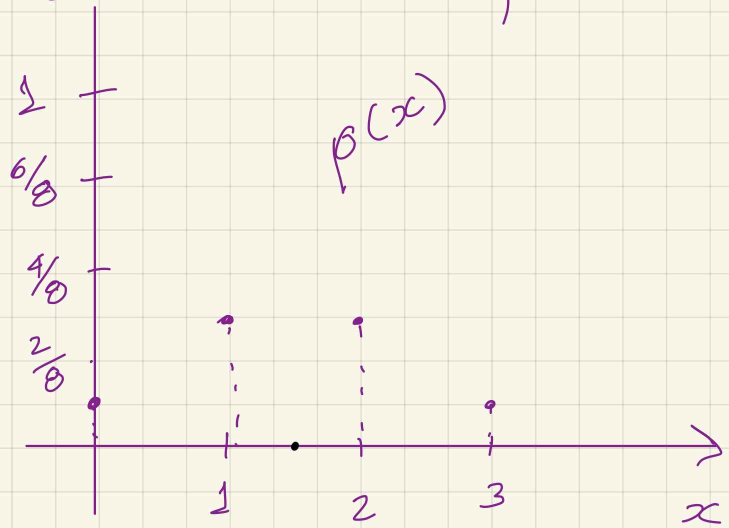
Solución

Distribución de probabilidad o función de masa de probabilidad.

$X = x$		$P(X = x)$
0	$\longmapsto$	$P(X=0) = \frac{1}{8}$
1	$\longmapsto$	$P(X=1) = \frac{3}{8}$
2	$\longmapsto$	$P(X=2) = \frac{3}{8}$
3	$\longmapsto$	$P(X=3) = \frac{1}{8}$

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{8} & \text{si } x = 1 \\ \frac{3}{8} & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{8} & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Distribución de probabilidad de X.



X = x	P(X = x)	F(x) = P(X ≤ x)
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	1

F(x) es la función de distribución acumulada de la v.a X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4/8 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$P(X \leq 2)$ = "Probabilidad de que número de vigas con falla cortante sea menor o igual a 2"

"Probabilidad de que a lo más 2 vigas tengan falla cortante"

$$P(X \leq 2) = F(2) = \boxed{\frac{7}{8}}$$

acá utilizamos la función de distribución acumulada $F(x)$ para calcular la probabilidad requerida.

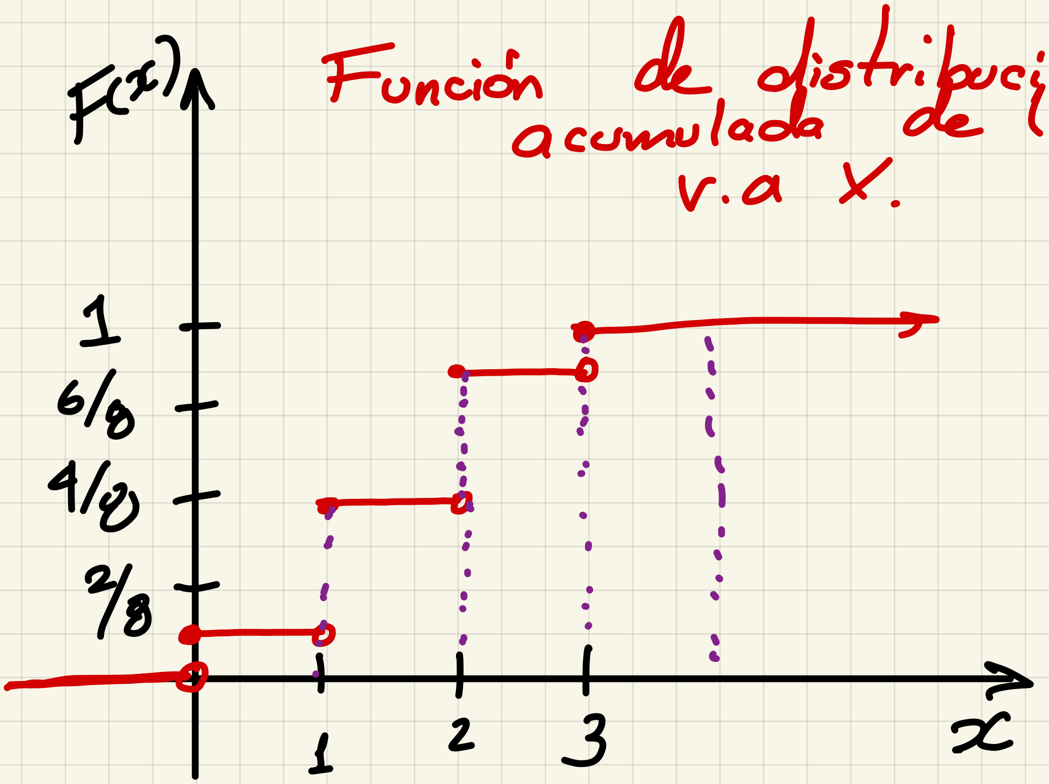
$$P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}$$

$$= \boxed{\frac{7}{8}}$$

Acá utilizamos la función de distribución de probabilidad $p(x)$ para calcular la probabilidad requerida.

Función de distribución acumulada de la v.a X.



Valor esperado de X $\quad E(X) = \mu = \bar{x}$

$\mu \to$ Población, $\quad \bar{x} \to$ Muestra.

$$E(X) = 0\,p(0) + 1\,p(1) + 2\,p(2) + 3\,p(3)$$
$$= \cancel{0\left(\frac{1}{8}\right)} + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right)$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{\cancel{12}^{\,\cancel{6}\,3}}{\cancel{8}_{\,\cancel{4}\,2}} = \frac{3}{2} = 1.5.$$
$$= \sum_{i=1}^{4} x_i\, p(x_i) \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 2 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$
$$= 1.5$$

Varianza de X : $\quad Var(X) = \sigma^2 = s^2$

$\sigma^2 \to$ población, $\quad s^2 \to$ muestra.

$$Var(X) = \underbrace{E(X^2)}_{\text{Segundo momento}} - \underbrace{[E(X)]^2}_{\text{primer momento al cuadrado}}$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2\, p(x_i)$$

Ejemplo $\quad E(X^2) = \cancel{0^2 p(0)}^{\,0} + 1^2 p(1) + 2^2 p(2) + 3^2 p(3)$
$$= p(1) + 4\,p(2) + 9\,p(3)$$
$$= \frac{3}{8} + 4\cdot\frac{3}{8} + 9\cdot\frac{1}{8}$$

$$E[X^2] = \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8}$$

$$= \frac{24}{8} = 3$$

$$Var(X) = E[X^2] - [E[X]]^2$$

$$= 3 - (1.5)^2$$

$$= 3 - 2.25$$

$$= 0.75$$

Desviación estándar de la v.a. X : $sd(X)$

$$sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

$$= \sqrt{0.75}$$

$$= 0.87$$

Conclusión $E(X) = 1.5$