Técnicas de conteo

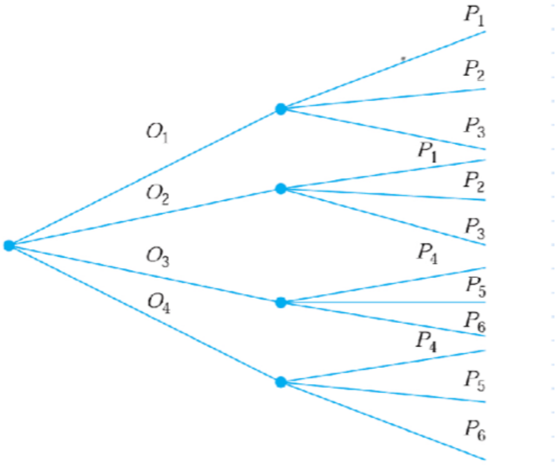
Diagramas de árbol

Ejemplo: Una familia se acaba de cambiar a una nueva ciudad y requiere los servicios tanto de un obstetra como de un pediatra. Existen dos clínicas médicas fácilmente accesibles y cada una tiene dos obstetras y tres pediatras. La familia obtendrá los máximos beneficios del seguro de salud si se une a una clínica y selecciona ambos doctores en dicha clínica. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Solución

Denote los obstetras por O_1, O_2, O_3 y O_4 y los pediatras por $P_1, \cdots, P_6$. Entonces se desea el número de pares (O_i, P_j) para los cuales O_i y P_j están asociados con la misma clínica. Como existen cuatro obstetras, $n_1 = 4$, y por cada uno existen tres opciones de pediatras, por lo tanto $n_2 = 3$. Aplicando la regla de producto se obtiene $N = n_1 n_2 = 12$ posibles opciones.

El diagrama de árbol del ejemplo anterior es:



Una regla del producto más general

Un conjunto ordenado de k objetos recibirá el nombre de k-túpla.

Regla del producto para k-túplas: Suponga que un conjunto se compone de conjuntos ordenados de k elementos (k-túplas) y que existen n_1 posibles opciones para el primer elemento; por cada opción de primer elemento, existen n_2 posibles opciones de segundo elemento;$\cdots$; por cada posible opción de los primeros $k-1$ elementos, existen n_k opciones del k-ésimo elemento. Existen entonces $n_1 n_2 \cdots n_k$ posibles k-túplas.

Ejemplo

En el ejemplo anterior si cad clínica además tiene dos especialistas en medicina interna y dos médicos generales, existen $n_1 n_2 n_3 n_4 = (4)(3)(3)(2) = 72$ formas de seleccionar un doctor de cada tipo, de tal suerte que todos los doctores practiquen en la misma clínica.

Permutaciones y Combinaciones

Considérese un grupo de n individuos u objetos bf distintos (significa que existe alguna característica que diferencia a cualquier individuo u objeto de cualquier otro)

¿Cuántas maneras existen de seleccionar un subconjunto de tamaño k del grupo?

Para dar respuesta a la pregunta, se deben de distinguir dos casos:

1. El orden de la selección es importante.
   Ejemplo:

Lanzador	Receptor	Alineación
Angela	Ben	1
Ben	Angela	2

2. El orden de la selección **NO** es importante .
   Ejemplo: Si una librería universitaria vende diez computadoras portátiles diferentes, pero tiene espacio para mostrar sólo tres de ellas...

$$C_1 C_2 C_3 = C_3 C_2 C_1$$

Definición

Un subconjunto ordenado se llama **permutación.** El número de permutaciones de tamaño k que se pueden formar con los n individuos u objetos en un grupo será denotado por $P_{k,n}$ o ${}_nP_k$. Un subconjunto no ordenado se llama **combinación.** Una forma de denotar el número de combinaciones de tamaño k que se pueden formar con los n individuos u objetos en un grupo es $C_{k,n}$ o ${}_nC_k$. Pero en su lugar se utilizará una notación que es bastante común: $\binom{n}{k}$ que se lee "de n se elige k".

Proposición

Sean n un entero mayor que cero y k un entero menor o igual a n:

$$
\begin{aligned}
P_{k\,n} &= \frac{n!}{(n-k)!} && (1) \\
\binom{n}{k} &= \frac{P_{k\,n}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} && (2)
\end{aligned}
$$

donde $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Ejercicio

Con la fecha de abril de 2006, aproximadamente 50 millones de nombres de dominios web.com fueron registrados (p. ej., *yahoo.com*).

a. ¿Cuántos nombres de dominio compuesto de exactamente dos letras en sucesión pueden ser formados? ¿Cuántos nombres de dominios exiten si como caracteres se permiten dígitos y letras? (*Nota:* una longitud de carácter de tres o más ahora es obligatoria.)
b. ¿Cuántos noombres de dominio existen compuestos de tres letras en seciencia?¿Cuántos de esta longitud existen si se permiten letras o dígitos? (*Nota:* en la actualidad todos están utilizados.)

c. Responda las preguntas hechas en (b) para secuencias de cuatro caracteres.
d. Con la fecha de 2006, 97786 de las secuencias de cuatro caracteres utilizando o letras o digitos aún no habían sido reclamadas. Si se elige un nombre de cuatro caracteres al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ya tenga dueño?

Ejercicio

Una empresa de producción emplea 20 trabajadores en el turno de día, 15 en el truno de tarde y 10 en el turno de medianoche. Un consultor de control de calidad va a seleccionar 6 de estos trabajadores para entrevistas a fondo. Suponga que la selección se hace de tal modo que cualquier grupo de 6 trabajadores tiene la misma oportunidad de ser seleccionado al igual que cualquier otro grupo (sacando 6 papelitos de entre 45 sin reemplazarlos).

a. ¿Cuántas selecciones resultarán en que los 6 trabajadores provengan del turno de día?¿Cuál es la probabilidad de que los 6 trabajadores seleccionados sean del turno del día?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los 6 trabajadores seleccionados sean del mismo turno?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos turnos diferentes estén representados entre los trabajadores seleccionados?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos uno de los turnos **no** esté representado en la muestra de trabajadores?

Probabilidad condicional

$P(A)$ es la probabilidad original o no condicional de un evento. ¿Cómo afecta la información de que un evento B ha ocurrido a la probabilidad de que ocurra A?

Ejemplo: Sean A el evento "Sufre una enfermedad (presenta unos síntomas)" y B el evento "el examen es negativo". $P(A/B)$ es "la probabilidad de A dado que el evento B ha ocurrido".

Definición

Para dos eventos cualesquiera A y B con $P(B) > 0$, la **probabilida condicional** de A dado que B ha ocurrido está definida por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{3}$$

Ejemplo

Considere la siguiente información:

- 60 % incluyen una tarjeta de memoria en la compra de una cámara digital.
- 40 % incluyen una batería extra en su compra de una cámara digital.
- 30 % incluyen tanto una tarjeta como una batería extra en su compra de una cámara digital.

A: "Tarjeta de memoria"

B: "Batería"

$P(A) = 0.6$

$P(B) = 0.4$

$P(A \cap B) = 0.3$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5$$

$P(A/B) = 0.75 \neq P(A) = 0.6$

$P(B/A) = 0.5 \neq P(B) = 0.4$

$P(A/B) :=$ "Probabilidad de que dado el individuo seleccionado adquirió una batería extra, adquiera una tarjeta de memoria"

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

Regla de la multiplicación para $P(A/B)$

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A/B)P(B) \\
P(A \cap B) &= P(B/A)P(A)
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Considere 4 individuos, de los cuales ninguno ha donado sangre antes. Además tipos de sangre desconocidos, pero se sabe que uno de los cuatro tiene O+. Se desea un donador O+. Considere los evntos B “el primer tipo no es O+” y A “el segundo tipo no es O+”.

B = " primer tipo no O+ "

A = " segundo tipo no O+ "

$$P(B) = \frac{3}{4} = 75\%$$

$$P(A/B) = \frac{2}{3} = 67\%$$

$$P(A \cap B) = P(A/B)\,P(B)$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

La regla de la multiplicación es más útil cuando los experimentos se componen de varias etapas en sucesión.

La regla de la multiplicación es más útil cuando los experimentos se componen de varias etapas en sucesión.

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_3/(A_1 \cap A_2))P(A_1 \cap A_2) \\
&= P(A_3/(A_1 \cap A_2))P(A_2/A_1)P(A_1)
\end{aligned}
$$

Continuación del ejemplo

Además de los eventos A y B considere el evento C “el tercer tipo es O+”.

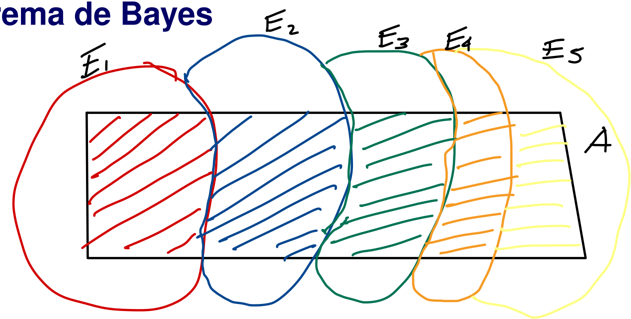
$$P(C\cap B\cap A) = P(C/B\cap A)\,\underbrace{P(B/A)\,P(A)}$$

$$= P(C/B\cap A)\;P(A\cap B)$$

$$= \qquad \frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Teorema de Bayes



(1) $A = (E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A) \cup (E_3 \cap A) \cup (E_4 \cap A) \cup (E_5 \cap A)$

$(E_i \cap A) \cap (E_j \cap A) = \emptyset \quad i \neq j \quad i,j = 1, \ldots, 5$

$$P(A) = P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A) + P(E_3 \cap A) + P(E_4 \cap A) + P(E_5 \cap A)$$

$$= \sum_{i=1}^{5} P(E_i \cap A)$$

$$= \sum_{i=1}^{5} P(A/E_i)\, P(E_i)$$

En general, la probabilidad total para A establece

$$\text{(2)} \quad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/E_i)\, P(E_i)$$

$$\text{(3)} \quad P(E_1/A) = \frac{P(E_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/E_1)\, P(E_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/E_i)\, P(E_i)}$$