

Teorema de Bayes

Contenido

Ley de probabilidad

Teorema de Bayes

Independencia

Independencia de dos o más eventos

Variables aleatorias

Variable aleatoria discreta

Variable aleatoria continua

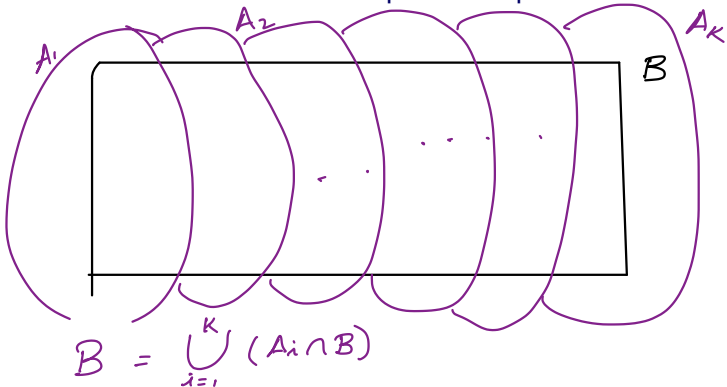
Variable aleatoria de Bernoulli

Teorema de Bayes

$$\begin{aligned} P(E_i | B) &= \frac{P(E_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B/E_i) P(E_i)}{\sum_{i=1}^6 P(B/E_i) P(E_i)} \end{aligned}$$

Ley de probabilidad

Sean A_1, A_2, \dots, A_k eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Entonces para cualquier otro evento B ,



Ley de probabilidad

Sean A_1, A_2, \dots, A_k eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Entonces para cualquier otro evento B ,

$$\begin{aligned}P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i \cap B\right) \\&= \sum_{i=1}^k P(A_i \cap B) \\&= \sum_{i=1}^k P(B/A_i)P(A_i)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$P(B) = \sum_{i=1}^k P(B/A_i)P(A_i) \quad (1)$$

Teorema de Bayes

Sean A_1, A_2, \dots, A_k eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos con probabilidades $P(A_i)$ (para $i = 1, \dots, k$). Entonces para cualquier otro evento B , para el cual $P(B) > 0$, la probabilidad **posterior** de A_j dado B es

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^k P(B/A_i)P(A_i)}$$

para $j = 1, \dots, k$.

Ejercicio

La población de un país particular se compone de tres grupos étnicos. Cada individuo pertenece a uno de los cuatro grupos sanguíneos principales. La tabla de probabilidad da la proporción de individuos en las diversas combinaciones de grupo étnico-grupo sanguíneo es:

$y \backslash x$	O	A	B	AB	
1	0.082	0.106	0.008	0.004	0.2
2	0.135	0.141	0.018	0.006	0.3
3	0.215	0.200	0.065	0.020	0.5
	0.432	0.447	0.091	0.03	1

Suponga que se selecciona un individuo al azar de la población y que los eventos se definen como:

$$A = \{ \text{tipo A seleccionado} \}$$

$$B = \{ \text{tipo B seleccionado} \}$$

$$C = \{ \text{grupo étnico 3 seleccionado} \}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap 1) + P(A \cap 2) + P(A \cap 3) \\ &= 0.106 + 0.141 + 0.2 \\ &= 0.447 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(Y=3) = P(3 \cap 0) + P(3 \cap A) + P(3 \cap B) + P(3 \cap AB) \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

a. Calcule $P(A)$, $P(C)$ y $P(A \cap C)$

$P(A \cap C) = 0.2$ sale directamente de la tabla.

$$P(0 / Y=1) = \frac{P(0, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0.082}{0.2}$$
$$= 0.41$$

b. Calcule tanto $P(A/C)$ y $P(C/A)$ y explique en contexto lo que cada una de estas probabilidades representa

$P(A/C)$ = "La probabilidad de que al escoger un individuo de este país particular, resulte ser del grupo sanguíneo A dado que es del grupo étnico 3"

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$

c. Si el individuo seleccionado no tiene sangre de tipo B, ¿Cuál es la probabilidad de que él o ella pertenezca al grupo étnico 1?

$$P(Y=1 | B') = \frac{P[(Y=1) \cap B']}{P(B')} = \frac{P(Y=1, B')}{P(B')}$$

$$P(Y=1, B') = P(Y=1, O) + P(Y=1, A) + P(Y=1, AB)$$

$$= 0.082 + 0.106 + 0.004$$

$$= 0.192$$

$$P(Y=1, B') = P(Y=1) - P(Y=1, B)$$

$$= 0.2 - 0.08$$

$$= 0.12$$

$$P(B') = 1 - P(B)$$

$$= 1 - [P(B, Y=1) + P(B, Y=2) + P(B, Y=3)]$$

$$= 1 - [0.008 + 0.18 + 0.065]$$

$$= 1 - 0.091$$

$$= 0.909$$

$$P(Y=1/B') = \frac{0.192}{0.909} = 0.2112.$$

Ejemplo

En una gasolinera, 40 % de los clientes usan gasolina regular (A_1), 35 % usan gasolina plus (A_2) y 25 % utilizan premium (A_3). De los clientes que utilizan gasolina regular, sólo 30 % llenan sus tanques (evento B). De los clientes que utilizan plus, 60 % llenan sus tanques, mientras que los que utilizan premium, 50 % llenan sus tanques.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente pida gasolina plus y llene el tanque ($A_2 \cap B$)?

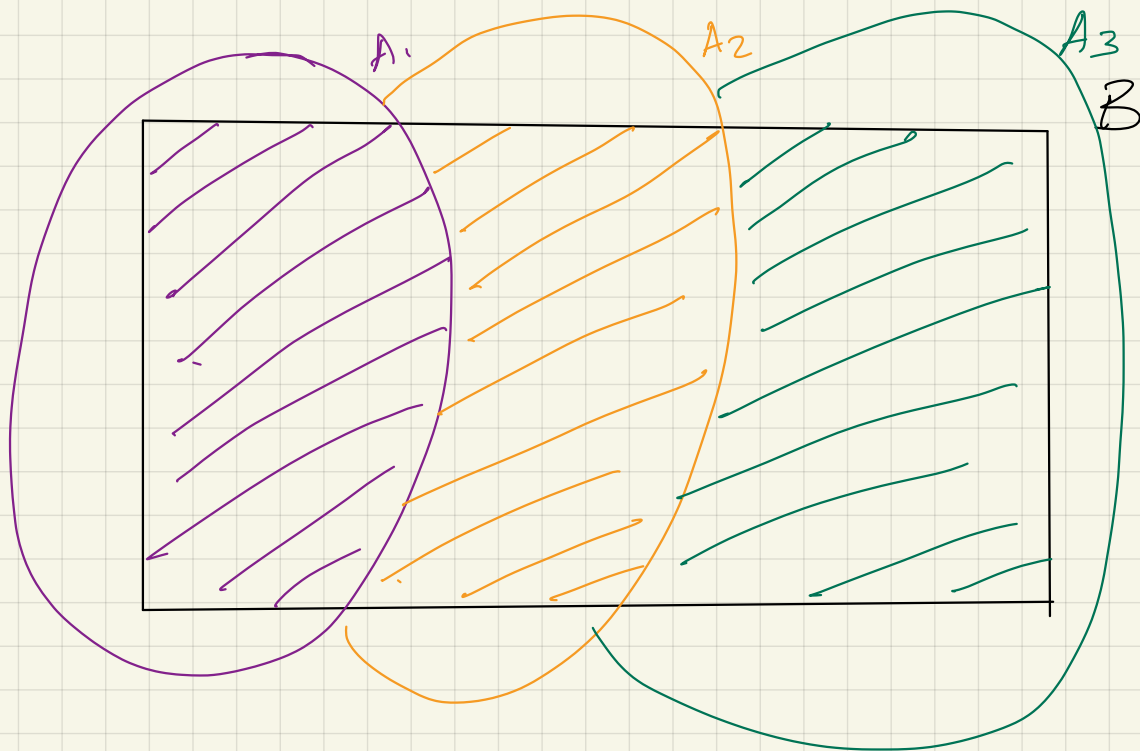
$$P(A_1) = 0.4 \quad P(A_2) = 0.35 \quad P(A_3) = 0.25$$

$$P(B|A_1) = 0.3 \quad P(B|A_2) = 0.6 \quad P(B|A_3) = 0.5$$

$$P(A_1/B) + P(A_2/B) + P(A_3/B)$$

$$\frac{P(A_1, B)}{P(B)} + \frac{P(A_2, B)}{P(B)} + \frac{P(A_3, B)}{P(B)} =$$

$$\frac{P(A_1, B) + P(A_2, B) + P(A_3, B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$



$$B = (B \cap A_1) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$$

$$P(A_1/B) \approx c P(A_1)$$

Cuando $c=1$, se dice que A_1 es ind. de B .

$$P(A_2, B) = P(A_2/B) P(B) \quad (1)$$

$$P(A_2, B) = P(B/A_2) P(A_2) \quad (2)$$

Utilizando (2) se tiene que

$$P(A_2, B) = (0.6) \cdot (0.35) = 0.21.$$

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llene el tanque?

$$\begin{aligned}P(B) &= P(A_1, B) + P(A_2, B) + P(A_3, B) \\&= P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + P(B/A_3)P(A_3) \\&= (0.3)(0.4) + 0.21 + (0.25)(0.5) \\&= 0.12 + 0.21 + 0.125 \\&= 0.455.\end{aligned}$$

c. Si el siguiente cliente llena el tanque ¿cuál es la probabilidad de que pida gasolina regular? ¿Plus? ¿Premium?

$$P(A_1/B) = ? \quad P(A_2/B) = ? \quad P(A_3/B) = ?$$

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1, B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.455} = 0.264$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2, B)}{P(B)} = \frac{0.21}{0.455} = 0.4615$$

$$\begin{aligned} P(A_3/B) &= 1 - [P(A_1/B) + P(A_2/B)] \\ &= 1 - [0.264 + 0.4615] \\ &= 0.2747 \end{aligned}$$

Independencia

Los eventos A y B son **independientes** si $P(A/B) = P(A)$ o $P(B/A) = P(B)$. Son dependientes en caso contrario.
 A y B son independientes si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Independencia de dos o más eventos

Los eventos A_1, \dots, A_n son **mutuamente independientes** si por cada k ($k = 2, 3, \dots, n$) y para cada subconjunto de índices i_1, i_2, \dots, i_k se cumple:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$

Ejemplo

Los componentes enviados a un distribuidor son revisados en cuanto a defectos por dos inspectores diferentes (cada componente es revisado por ambos inspectores). El primero detecta 90 % de todos los defectuosos que están presentes y el segundo hace lo mismo. Por lo menos un inspector no detecta un defecto en 20 % de todos los componentes ~~de todos los componentes defectuosos~~. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra lo siguiente?

a. ¿Un componente defectuoso será detectado sólo por el primer inspector? ¿Por exactamente uno de los dos inspectores?

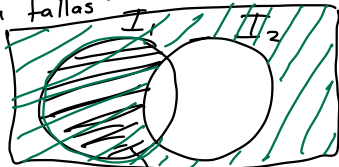
I_1 = "El inspector 1 detecta fallas"

I_2 = "El inspector 2 detecta fallas"

$$P(I_1) = P(I_2) = 0.9$$

$$\begin{aligned} a) \quad P(I_2^c) &= 1 - P(I_2) \\ &= 1 - 0.9 = 0.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(I_1 \cap I_2^c) &= P(I_1 - (I_1 \cap I_2)) \\ &= P(I_1) - P(I_1 \cap I_2) \\ &= 0.9 - P(I_1)P(I_2) \\ &= 0.9 - 0.9^2 = 0.09 \end{aligned}$$




$$\begin{aligned} P(I_1 \cap I_2^c) &= P(I_1)P(I_2^c) \\ &= (0.9)(0.1) \\ &= 0.09 \end{aligned}$$

$$P(I_2 \cap I_1^c) = P(I_2) P(I_1^c) \\ = 0.9 \cdot 0.1 = 0.09$$

$$P(\text{Exactamente uno de los dos inspectores}) \\ = 0.09 + 0.09 = 0.09 \times 2 = 0.18.$$

b)

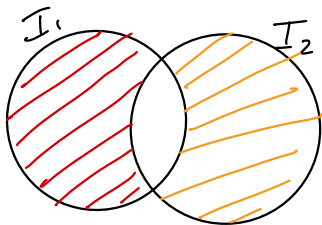


$$P(I_1^c) P(I_2^c) \quad P(I_1^c) P(I_2^c) \quad P(I_1^c) P(I_2^c) \\ = 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01$$

$A = \text{"Tres componentes defectuosos no son detectados por ambos inspectores"}$

$$P(A) = 0.01^3 = 0.000001 \approx 0.$$

b. ¿Los tres componentes defectuosos en un lote no son detectados por ambos inspectores (suponiendo que las inspecciones de los diferentes componentes son independientes unas de otras)?



Variables Aleatorias

Para un espacio muestral \mathcal{S} dado de algún experimento, una **variable aleatoria** es cualquier regla que asocia un número con cada resultado en \mathcal{S} . En lenguaje matemático, una variable aleatoria es una función cuyo dominio es el espacio muestral cuyo rango es el conjunto de los números reales.

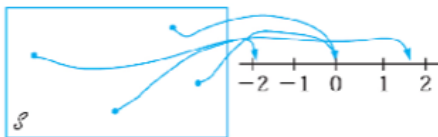
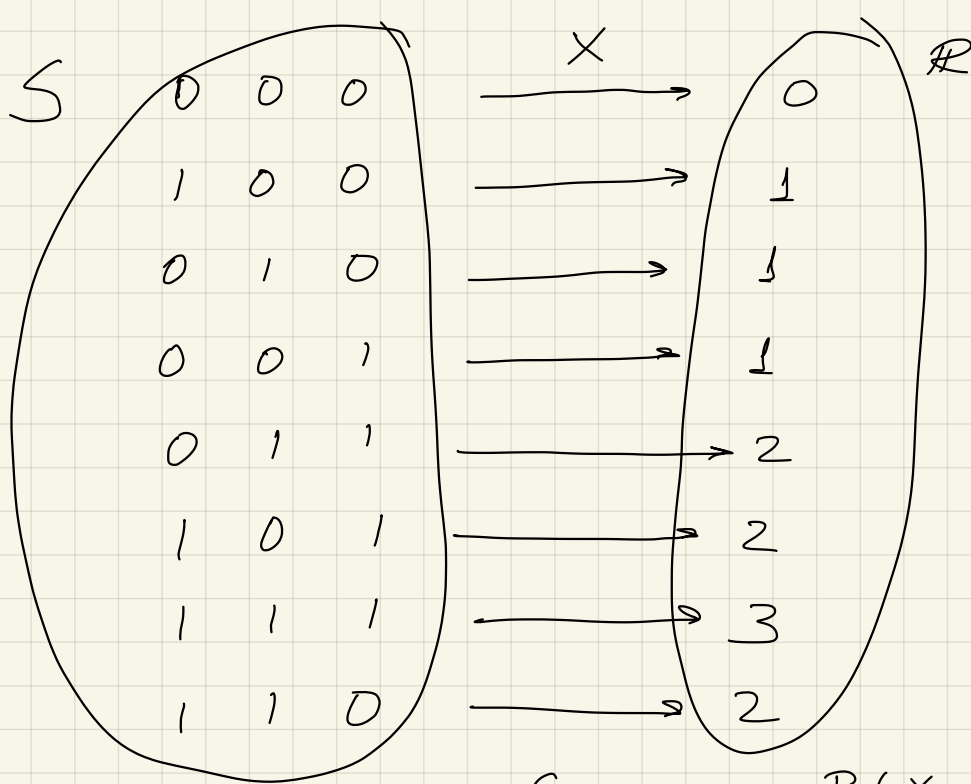


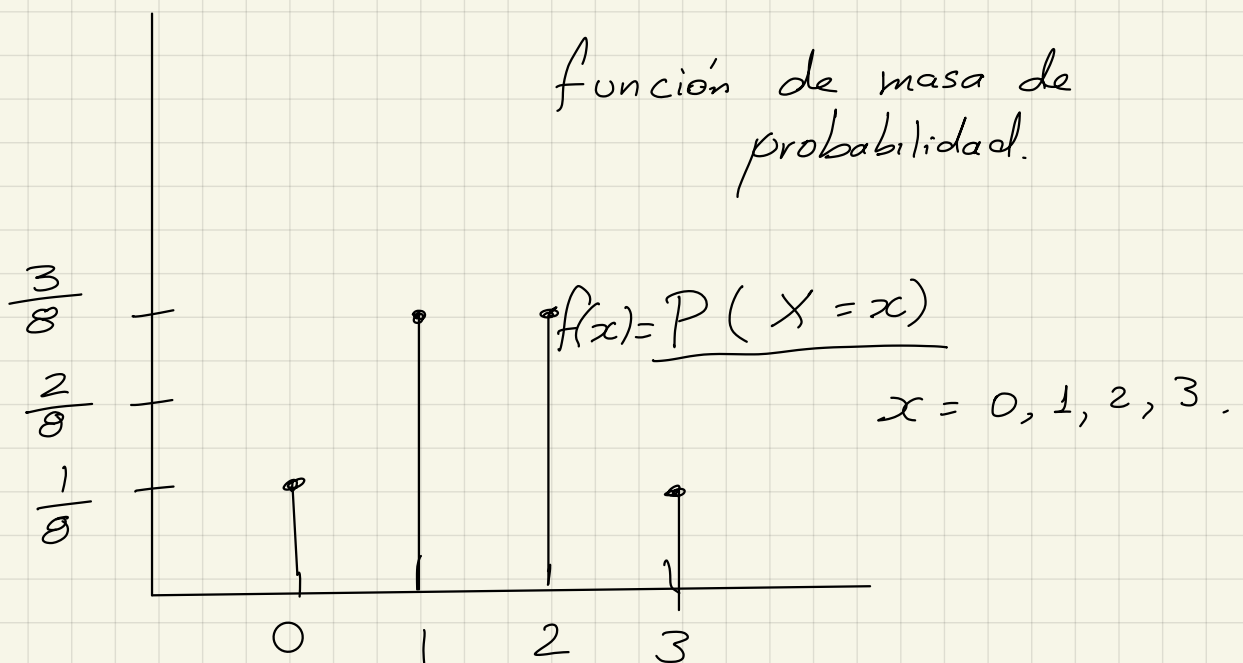
Figura 3.1 Una variable aleatoria



$$X = \begin{cases} 0, & P(X=0) = \frac{1}{8} \\ 1, & P(X=1) = \frac{3}{8} \\ 2, & P(X=2) = \frac{3}{8} \\ 3, & P(X=3) = \frac{1}{8} \end{cases}$$

función de probabilidad

función de masa de probabilidad.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{Si } x = 0 \\ \frac{3}{8} & \text{Si } x = 1 \\ \frac{3}{8} & \text{Si } x = 2 \\ \frac{1}{8} & \text{Si } x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, \dots, n$$

$n = \# \text{ ensayo}$
 $x = \# \text{ aciertos}$

$$n = 3 \quad ; \quad x = 0, 1, 2, 3 \quad p = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-0} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

$$f(1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

$$f(2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

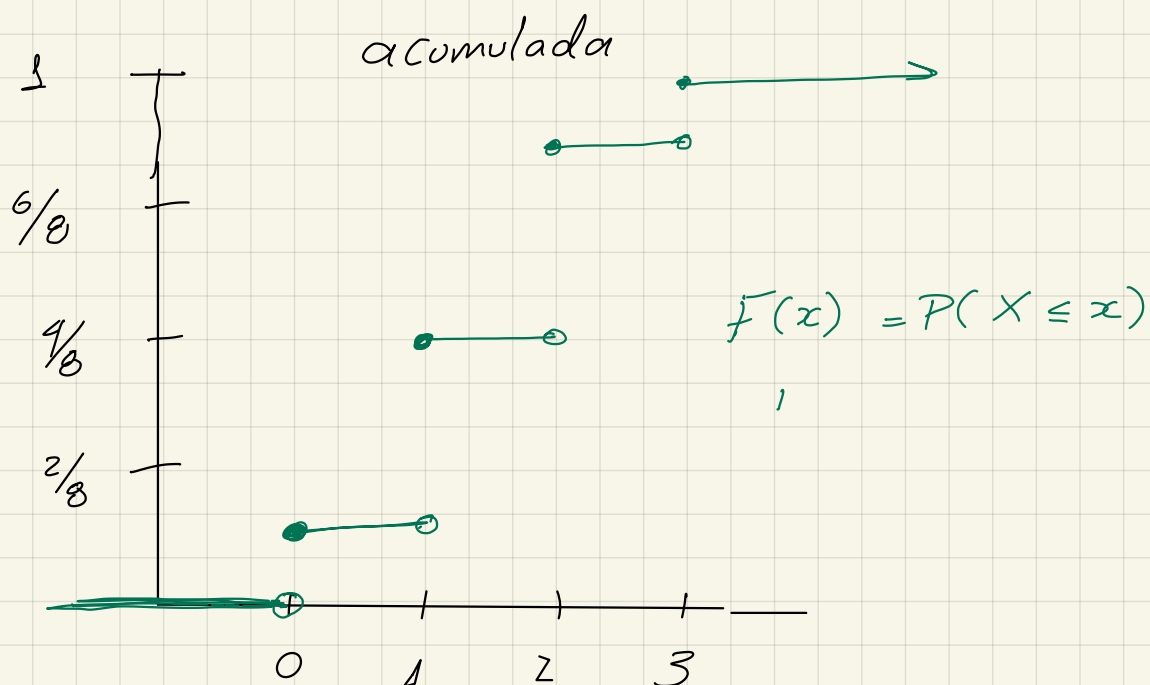
$$f(3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} = 1 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 1 = \frac{1}{8}$$

$$p = \frac{1}{2} \quad q = 1 - p = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (p+q)^3 &= p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 \quad (1) \\
 1^3 &= \binom{3}{0} p^3 q^0 + \binom{3}{1} p^2 q^1 + \binom{3}{2} p^1 q^2 + \binom{3}{3} p^0 q^3 \\
 &= f(0) + f(1) + f(2) + f(3)
 \end{aligned}$$

$$E(X) = 0 f(0) + 1 f(1) + 2 f(2) + 3 f(3)$$

Función de distribución



X	$f(x)$	$F(x)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	1

$$F(x) = \sum_{z \leq x} f(z)$$

$$F(1) = \sum_{z \leq 1} f(z) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = \sum_{z \leq 2} f(z) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

VALOR ESPERADO $E(X) = \mu$

(Promedio, media)
Primer momento de la v.a.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 1 P(X=1) + 2 P(X=2) + 3 P(X=3) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = 1.5 \end{aligned}$$

SEGUNDO MOMENTO DE UNA V.A

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 P(X=0) + 1^2 P(X=1) + 2^2 P(X=2) + 3^2 P(X=3) \\ &= P(X=1) + 4 P(X=2) + 9 P(X=3) \\ &= \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{3 + 12 + 9}{8} = 3 \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 3 - (1.5)^2 = 3 - 2.25 = 0.75$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.75} \approx 0.87$$

Variable aleatoria discreta

Una variable aleatoria **discreta** es una variable aleatoria cuyos valores posibles constituyen un conjunto finito o bien pueden ser puestos en lista en una secuencia infinita en la cual existe un primer elemento, un segundo elemento, y así sucesivamente (“contablemente” infinita).

Variable aleatoria continua

Una variable aleatoria es **continua** si ambas de las siguientes condiciones se cumplen:

1. Su conjunto de valores posibles se compone de todos los números que hay en un solo intervalo sobre la línea de numeración (posiblemente de extensión infinita, es decir, desde $-\infty$ hasta ∞) o todos los números en una unión disjuntas de dichos intervalos (por ejemplo, $[0, 10] \cup [20, 30]$).

Variable aleatoria continua

Una variable aleatoria es **continua** si ambas de las siguientes condiciones se cumplen:

1. Su conjunto de valores posibles se compone de todos los números que hay en un solo intervalo sobre la línea de numeración (posiblemente de extensión infinita, es decir, desde $-\infty$ hasta ∞) o todos los números en una unión disjuntas de dichos intervalos (por ejemplo, $[0, 10] \cup [20, 30]$).
2. Ningún valor posible de la variable tiene probabilidad positiva, esto es, $P(X = c) = 0$ con cualquier valor posible de c .

Ejemplo

Considere el experimento en el cual se marca un número telefónico en cierto código de área con un marcador de número aleatorio (tales dispositivos los utilizan en forma extensa en organizaciones encuestadoras) y defina una variable aleatoria Y como:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si el número seleccionado no aparece en el directorio} \\ 0 & \text{si el número seleccionado sí aparece en el directorio} \end{cases}$$

Por ejemplo, si 5282966 aparece en el directorio telefónico, entonces $Y(5282966) = 0$ en tanto que $Y(7727350) = 1$ dice que el número 7727350 no aparece en el directorio telefónico. Una descripción en palabras de esta índole es más económica que una lista completa, por lo que se utilizará tal descripción siempre que sea posible.

Variable aleatoria de Bernoulli

Cualquier variable aleatoria cuyos únicos valores posibles son 0 y 1 se llama **variable aleatoria de Bernoulli**.

Variable aleatoria de Bernoulli

Cualquier variable aleatoria cuyos únicos valores posibles son 0 y 1 se llama **variable aleatoria de Bernoulli**.

Ejemplo: Un experimento en el cual se determinó el número de bombas en uso en cada una de dos gasolineras. Defina las variables aleatorias X , Y y U como:

- X = el número total de bombas en uso en las dos gasolineras
- Y = la diferencia entre el número de bombas en uso en la gasolinera 1 y el número en uso en la gasolinera 2
- U = el máximo de los números de bombas en uso en las dos gasolineras

Si se realiza este experimento y se obtiene $s = (2, 3)$, entonces $X((2, 3)) = 2 + 3 = 5$, por lo que se dice que el valor observado de X fue $x = 5$.

Asimismo, el valor observado de Y sería $y = 2 - 3 = -1$ y el U sería $u = \max(2, 3) = 3$.

A pesar de que en nuestro ejemplo las variables pueden asumir sólo un número finito de posibles valores, en general éste no tiene que ser el caso.

Ejercicio 1

Una viga de concreto puede fallar por esfuerzo constante (S) o por flexión (F). Suponga que se seleccionan al azar tres vigas que fallaron y se determina el tipo de falla de cada una. Sea X el número de vigas entre las tres seleccionadas que fallaron por esfuerzo constante. Ponga en lista cada resultado en el espacio muestral junto con el valor asociado de X .

Solución

	X
(S, S, S)	3
(S, F, F)	1
(S, F, S)	2
(F, S, S)	2
(F, F, S)	1
(F, S, F)	1
(S, S, F)	2
(F, F, F)	0

$$E(X) = 1.5$$

$$sd(X) = 0.87$$

Solución

Solución