Die Riemannsche Zetafunktion III - Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion

Julian Schlöder

28. Mai 2009

Konvention 1. *Wenn nichts weiter angegeben ist, ist stets $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma := \Re(s)$ und $t := \Im(s)$. p bezeichnet stets eine Primzahl.*

Satz 2. *Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ hat für $\sigma > 1$ keine Nullstellen.*

Beweis. $\zeta(s)$ hat die Euler-Produktdarstellung: $\zeta(s) = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$ Damit gilt für ein P:

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{P^s}\right)\zeta(s) = \prod_{p>P}(1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$$
$$= \prod_{p>P}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^s}\right)^i = 1 + \frac{1}{n_1^s} + \frac{1}{n_2^s} + \frac{1}{n_3^s} + \cdots$$

wobei $n_1, n_2, n_3, \cdots$ alle natürlichen Zahlen sind, deren Primfaktoren größer als P sind.
Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung für hinreichend große P:

$$\left|\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{P^s}\right)\zeta(s)\right| = \left|1 + \frac{1}{n_1^s} + \frac{1}{n_2^s} + \frac{1}{n_3^s} + \cdots\right|$$
$$= \left|1 - \frac{-1}{n_1^s} - \frac{-1}{n_2^s} - \frac{-1}{n_3^s} - \cdots\right| \geqslant 1 - \frac{1}{n_1^\sigma} - \frac{1}{n_2^\sigma} - \frac{1}{n_3^\sigma} - \cdots$$
$$\geqslant 1 - \frac{1}{(P+1)^\sigma} - \frac{1}{(P+2)^\sigma} > 0.$$

□

Korollar 3. *Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ hat für $\sigma < 0$ keine Nullstellen außer den trivialen Nullstellen bei $s = -2, -4, -6....$*

Beweis. Es gilt folgende Funktionalgleichung für $\zeta(s)$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

$\sin(\frac{s\pi}{2}) = 0$ genau dann wenn $s \in 2\mathbb{Z}$. Aber $\Gamma(1-s)$ hat für ganzzahlige $s \geqslant 1$ eine Polstelle, die die entsprechende Nullstelle des Sinus weghebt. Die Nullstelle des Sinus bei $s = 0$ wird von der Polstelle der Zetafunktion bei $s = 1$ weggehoben.
Also hat $\zeta(s)$ Nullstellen bei allen negativen ganzzahligen Vielfachen von 2.

Für ungerade, negative ganze Zahlen sind $\sin\frac{s\pi}{2}$, $\Gamma(1-s)$, und $\zeta(1-s)$ (nach Satz 2) jeweils ungleich Null, also hat $\zeta(s)$ dort keine Nullstellen.
Wenn wir nun $s := 1-s$ setzen, ergibt sich aus der Funktionalgleichung:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\sin(\frac{\pi-\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)$$

Die Nullstellen des Cosinus bei allen ganzzahligen negativen ungeraden Zahlen werden von $\Gamma(s)$ weggehoben. $s=1$ wird von der Polstelle von $\zeta(1)$ weggehoben. Die Nullstellen bei allen positiven ungeraden ganzen Zahlen außer 1 entsprechen den oben gefundenen Nullstellen von $\zeta(s)$, da $1-s$ für solche s eine negative gerade Zahl ist.
Annahme: Für ein $s = \sigma + it, \sigma < 0, s \notin \mathbb{Z}^-$ ist $\zeta(s) = 0$. Für solche s ist $\Gamma(s)$ definiert und $\cos(\frac{\pi s}{2})$ ungleich 0.

$$\Rightarrow 0 = \frac{2}{(2\pi)^s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s) = \zeta(1-s) =: \zeta(s')$$

Aber wegen $\Re s' > 1$ ist $\zeta(s') = 0$ ein Widerspruch zu Satz 2. $\lightning$ $\square$

Lemma 4. *Für $|x| < 1, x \in \mathbb{R}$ hat der natürliche Logarithmus die Reihenentwicklung*

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$

Beweis. Es gilt für ein n:

$$\begin{aligned}1-t+t^2-\cdots+(-t)^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k(1+t)}{1+t}\\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + (-1)^k t^{k+1}}{1+t} = \frac{1-(-t)^n}{1+t} \text{ (Teleskopsumme)}\end{aligned}$$

Damit:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + \frac{(-t)^n}{1+t}$$

Also:

$$\ln(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + \frac{(-t)^n}{1+t}\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^n\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$$

Mit $n\to\infty$ und $|x|<1$ ist $\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \to 0$. $\square$

Lemma 5. *Für eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{A\} \to \mathbb{C}$, die einen Pol der Ordnung 1 in $a \in A$ hat, gilt:*

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(a) = Res_a f.$$

Beweis. In einer Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ um a lässt sich f in eine Reihe entwickeln (vgl. Vortrag von Prof. Müller):

$$f|_U(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

(mit $Res_a f := a_{-1}$)
Nun, da die Reihe konvergiert:

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-a)^{n+1} = \lim_{z\to a}\left(a_{-1} + (s-a)\sum_{k=0}^{\infty}(s-a)^k a_k\right)$$
$$= a_{-1} + \lim_{z\to a}\left((s-a)\sum_{k=0}^{\infty}(s-a)^k a_k\right) = a_{-1}$$

□

Erinnerung 6. *Es gilt:* $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

$$\Rightarrow (\cos z)^2 = \frac{1}{4}(e^{2iz} + e^{-2iz} + 2) = \frac{1}{2}(\cos 2z + 1).$$

Lemma 7. *Es gilt* $3 + 4\cos\vartheta\cos 2\vartheta \geqslant 0 \ \forall \vartheta \in \mathbb{R}$.

Beweis. $0 \leqslant 2(1+\cos\vartheta)^2 = 2 + 4\cos\vartheta + \cos 2\vartheta + 1 = 3 + 4\cos\vartheta + \cos 2\vartheta$ □

Satz 8. *Die Riemannsche Zetafunktion* $\zeta(s)$ *hat auf der Geraden* $\sigma = 1$ *keine Nullstellen.*

Beweis. Es gilt (Lemma 4):

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} \text{ und } \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

Damit:

$$\ln\zeta(\sigma) = \ln\prod_p(1-\frac{1}{p^s})^{-1} = -\sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)$$
$$= \sum_p(-1)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(-1)^k\frac{1}{p^{\sigma k}k}$$

Kurz geschrieben als:

$$= \sum_{p,k}\frac{1}{kp^{k\sigma}} \qquad (\sigma > 1)$$

$$\Rightarrow \zeta(\sigma) = \exp\left(\sum_{p,k}\frac{1}{kp^{k\sigma}}\right) \quad \forall\sigma > 1$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung von $\zeta(s)$ gilt dann:

$$\zeta(s) = \exp\left(\sum_{p,k}\frac{1}{kp^{ks}}\right) \quad \forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1 \qquad (1)$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}\Re\sum_{p,k}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{p^{k(\sigma+it)}} &= \sum_{p,k}\frac{1}{k}\cdot\Re\frac{1}{p^{k(\sigma+it)}} = \sum_{p,k}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{p^{k\sigma}}\Re e^{-kit\ln p}\\ &= \sum_{p,k}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{p^{k\sigma}}\frac{1}{2}(e^{kit\ln p}+e^{-kit\ln p})\\ &= \sum_{p,k}\frac{\cos kt\ln p}{kp^{k\sigma}}\end{aligned}$$

Analog:

$$\Re\sum_{p,k}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{p^{k(\sigma+i2t)}} = \sum_{p,k}\frac{\cos 2kt\ln p}{kp^{k\sigma}}$$

Damit aus Lemma 7:

$$\Re\left(3\sum_{p,m}\frac{1}{mp^{m\sigma}}+4\sum_{p,m}\frac{1}{mp^{m\sigma+it}}+\sum_{p,m}\frac{1}{mp^{m\sigma+i2t}}\right)$$

$$=\sum_{p,m}\frac{1}{p^{m\sigma}}(3+4\cos(mt\ln p)+\cos(2mt\ln p))\geqslant 0 \quad \text{da jeder Summand} \geqslant 0$$

Mit $e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ und $|e^s| = e^\sigma$ und (1) folgt nun für $\sigma > 1$:

$$\begin{aligned}1 &\leqslant \left|\zeta^3(\sigma)\right|\cdot\left|\zeta^4(\sigma+it)\right|\cdot|\zeta(\sigma+2it)|\\ &= |\zeta(\sigma)\cdot(\sigma-1)|^3\cdot\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{(\sigma-1)}\right|^4\cdot|\zeta(\sigma+2it)|\cdot(\sigma-1)\end{aligned}$$

Also:

$$|(\zeta(\sigma))\cdot(\sigma-1)|^3\cdot\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{(\sigma-1)}\right|^4\cdot|\zeta(\sigma+2it)|\geqslant\frac{1}{(\sigma-1)} \qquad (2)$$

Annahme: $\zeta(1+it)=0$ für ein t.
Nun lassen wir in $s=\sigma+it \quad \sigma\to 1$ laufen.
ζ hat bei s=1 eine Polstelle mit Residuum 1, also (Lemma 5):

$$\lim_{\sigma\to 1}(\sigma-1)\zeta(\sigma)=1$$

Außerdem folgt nach der Regel von l'Hospital:

$$\lim_{\sigma\to 1}\frac{\zeta(\sigma+it)}{(\sigma-1)}=\zeta'(1+it)<\infty$$

Und, da ζ auf ganz $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ definiert ist:

$$\zeta(\sigma+2it)\to\zeta(1+2it)<\infty$$

Damit folgt aus (2):

$$\infty > |\zeta'(1+it)|^4\cdot|\zeta(1+2it)|\geqslant\lim_{\sigma\to 1}\frac{1}{\sigma-1}=\infty \qquad \lightning$$

$\square$

Lemma 9. *Es gibt eine Konstante a mit*

$$|\zeta(s)| \leqslant a \ln t \quad \textit{für } \sigma \geqslant 1, t \geqslant 2$$

Beweis. Vgl. Zahlentheorie von H.Koch und H.Pieper, S. 115f □

Lemma 10. *Es gibt eine Konstante $b > 0$ mit*

$$\zeta'(s) \leqslant b(\ln t)^2 \quad \textit{für } \sigma \geqslant 1, t \geqslant 2$$

Beweis. Vgl. Zahlentheorie von H.Koch und H.Pieper, S. 115f □

Satz 11. *Es gibt Konstanten c und t_0 mit*

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leqslant c(\ln t)^7$$

für $t \geqslant t_0, \sigma \geqslant 1$.

Beweis. Aus (2) folgt:

$$|(\sigma-1)\zeta(\sigma)|^3 \, |\zeta(\sigma+it)|^4 \, |\zeta(\sigma+2t)| \geqslant (\sigma-1)^3$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ für reelle $x > 1$ konvergiert, gilt für $1 < \sigma \leqslant 2$ und ein c_1:

$$|(\sigma-1)\zeta(\sigma)|^3 < c_1$$

Wegen Lemma 9 gibt es ein a, sodass gilt:

$$|\zeta(\sigma+2it)| \leqslant a\ln(2t) \leqslant a\ln(t^2) = 2a\ln(t) \quad \text{für } t \geqslant 2$$

Also gilt für $1 < \sigma \leqslant 2, t \geqslant 2$ und ein c_2:

$$|\zeta(\sigma+it)| \geqslant \frac{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}{c_2(\ln t)^{\frac{1}{4}}}$$

Sei nun $1 < \eta < 2$ und $1 \leqslant \sigma < \eta, t \geqslant 2$. Dann folgt mit Lemma 10 und dem Fundamentalsatz der Analysis für ein $b > 0$:

$$\begin{aligned}
|\zeta(\sigma+it) - \zeta(\eta+it)| &= \left|\int_\sigma^\eta \zeta'(u+it)du\right| \\
&\leqslant \left|\int_\sigma^\eta b(\ln t)^2\right| = b(\ln t)^2(\eta-\sigma) \\
&\leqslant b(\ln t)^2(\eta-1)
\end{aligned}$$

Damit folgt aus der Dreiecksungleichung $|a-b| \geqslant |a| - |b|$:

$$\begin{aligned}
|\zeta(\sigma+it)| &= |\zeta(\eta+it) - \zeta(\eta+it) + \zeta(\sigma+it)| \\
&\geqslant |\zeta(\eta+it)| - |\zeta(\eta+it) + \zeta(\sigma+it)| \\
&\geqslant |\zeta(\eta+it)| - b(\ln t)^2(\eta-1) \\
&\geqslant \frac{(\eta-1)^{\frac{3}{4}}}{c_2(\ln t)^{\frac{1}{4}}} - b(\ln t)^2(\eta-1) \qquad \text{für} 1 < \eta < 2, 1 \leqslant \sigma < \eta, t \geqslant 2 \quad (3)
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt ebenfalls für $1 < \eta \leqslant \sigma < 2, t \geqslant 2$:

$$|\zeta(\sigma+it)| \geqslant \frac{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}{c_2(\ln t)^{\frac{1}{4}}} \geqslant \frac{(\eta-1)^{\frac{3}{4}}}{c_2(\ln t)^{\frac{1}{4}}} \geqslant \frac{(\eta-1)^{\frac{3}{4}}}{c_2(\ln t)^{\frac{1}{4}}} - b(\ln t)^2(\eta-1) \qquad (4)$$

Jetzt suchen wir ein $\eta := \eta(t)$ in Abhängigkeit von t, sodass
folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\frac{(\eta-1)^{\frac{3}{4}}}{c_2(\ln t)^{\frac{1}{4}}} = 2b(\ln t)^2(\eta-1) \qquad (5)$$

Multiplikation beider Seiten mit $((\eta-1)^{\frac{3}{4}}2b\ln(\eta-1))^{-1}$ ergibt:

$$(\eta-1)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2bc_2(lnt)^{\frac{9}{4}}}$$

Also gibt es ein c_3, sodass

$$\eta = 1 + \frac{1}{c_3(\ln t)^9}$$

die Gleichung erfüllt. Für ein geeignet gewähltes t_0 gilt also für alle $t > t_0$:

$$1 \leqslant \eta \leqslant 2$$

Damit nach (3), (4) und (5) für ein geeignetes c_4:

$$|\zeta(\sigma+it)| \geqslant b(\ln t)^2 \frac{1}{c_3(\ln t)^9} = c_4(\ln t)^{-7}$$

Also für $1 \leqslant \sigma < 2, t \geqslant t_0$ und ein c:

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma+it}\right| \leqslant c(\ln t)^7$$

Für $\sigma \geqslant 2, t \geqslant t_0$ ist nach (1):

$$|\zeta(s)| = \exp\left(\Re \sum_{p,m} \frac{1}{mp^{ms}}\right) = \exp\left(\sum_{p,m} \frac{\cos(2mt\ln p)}{p^{m\sigma}}\right)$$

Nun wird mit $\cos(z) \geqslant -1 \forall z$ und $\sigma \geqslant 2$ abgeschätzt:

$$|\zeta(s)| \geqslant \exp\left(-\sum_{p,m} \frac{1}{mp^{2m}}\right)$$

Die rechte Seite ist konstant, also existiert ein c so, dass:

$$|\zeta(s)| \geqslant \exp\left(-\sum_{p,m} \frac{1}{mp^{2m}}\right) \geqslant \frac{1}{c(\ln t)^7}$$

für alle $t > t_0$ und $\sigma \geqslant 2$. □