Hauptseminar Mathematische Logik 2010
Unabhängigkeit des Prinzips von Paris-Harrington zur Peano Arithmetik

Julian Schlöder

10. und 17. November 2010

Konvention 1. Im Folgenden bezeichnet L immer die Sprache der Arithmetik.

Definition 2 (Kombinatorische Aussage der Sätze von Ramsey)**.** Seien κ, η, μ und λ Kardinalzahlen. Wir schreiben $\kappa \to (\eta)^{\mu}_{\lambda}$, wenn für alle Mengen X mit $|X| \geq \kappa$ und alle Funktionen $f : [X]^{\mu} \to \lambda$ ein $Y \subseteq X$ mit $|Y| \geq \eta$ existiert, so dass f konstant auf $[Y]^{\mu}$ ist.

Definition 3 (Regressive Funktionen)**.** Sei $X \subseteq \omega$.
Eine Funktion $f : [X]^d \to \omega$ heißt **regressiv** wenn $f(A) < \min A$ für alle $A \subseteq [X]^n$.

Definition 4 (Min-homogene Mengen)**.** Sei $X \subseteq \omega$ und $f : [X]^d \to \omega$ eine Funktion.
$Y \subseteq X$ heißt **min-homogen** für f, wenn für $A, B \subseteq [Y]^n$ mit $\min A = \min B$ gilt: $f(A) = f(B)$.

Definition 5 (Diagonal Ununterscheidbare)**.** Sei Γ eine endliche Menge von L-Formeln und sei $\mathcal{M}$ ein Modell der Peano Arithmetik (PA).
$I \subseteq M$ nennen wir eine Folge von **diagonal Ununterscheidbaren (UU) bezüglich** Γ wenn für alle Formeln

$$\varphi(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n) \in \Gamma$$

und alle $x_0, \dots, x_n \in I$, $y_1, \dots, y_n \in I$, $\overline{a} = a_1, \dots, a_m$ mit

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n,$$

$$x_0 < y_1 < \cdots < y_n,$$

$$a_1, \dots, a_m < x_0$$

gilt:

$$\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(\overline{a}, y_1, \dots, y_n)$$

Prinzip 6 (Kombinatorisches Prinzip $(*)$)**.** *Für alle natürlichen Zahlen c, m, n, k existiert ein $d \in \mathbb{N}$, so dass für alle regressiven Funktionen $f_1, \dots, f_k : [d]^n \to d$ ein $Y \subseteq [c, d]$ existiert, sodass $|Y| \geq m$ und Y min-homogen für alle diese f_i ist.*

Prinzip 7 (Prinzip von Paris-Harrington)**.** *Für alle natürlichen Zahlen n, k, m existiert ein $l \in \mathbb{N}$, so dass für eine Funktion $f : [l]^n \rightarrow k$ ein $Y \subseteq l$ existiert, so dass Y homogen für f, $|Y| \geq m$ und $|Y| \geq y_0$ wobei y_0 das kleinste Element von Y ist.*

Satz 8 (Endlicher Satz von Ramsey)**.** *Für alle natürlichen Zahlen $k, n, m < \omega$ existiert ein $l < \omega$, so dass $l \rightarrow (m)^n_k$.*

Lemma 9. *Für natürliche Zahlen l, m, n und L-Formeln*

$$\varphi_1(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_n), \ldots, \varphi_l(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_n)$$

existiert eine Menge I von diagonal Ununterscheidbaren bezüglich $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ mit $|I| \geq m$.
Das betrachtete Modell der Peano Arithmetik ist dabei das Standardmodell $\mathbb{N}$.

Beweis. OBdA sei $m > 2n$.

Nach Ramsey: Es existiert ein w so dass $w \rightarrow (m+n)^{2n+1}_{l+1}$. Nach $(*)$: Es existiert ein s, so dass für regressive Funktionen $f_1, \ldots, f_k : [s]^{2n+1} \rightarrow s$ ein $Y \subseteq s$ existiert mit $|Y| \geq w$ und Y min-homogen für alle f_i. Insbesondere wähle w groß genug, damit $s \geq w \geq l$.

Definiere Funktionen $f_j : [s]^{2n+1} \rightarrow l$ für $j \in 1, \ldots, k$ und $g : [s]^{2n+1} \rightarrow l+1$ wie folgt: Sei $x_0, \ldots, x_{2n} = X \in [s]^{2n+1}$ mit $x_0 < x_1 < \ldots x_{2n}$. Wenn für alle $i \leq l$ und $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k < x_0$ gilt

$$\varphi_i(\overline{a}, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi_i(\overline{a}, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}),$$

dann setze für alle $j \leq l$ $f_j(X) = 0$ und $g(X) = 0$. Andernfalls existiert ein $i < l$ und ein $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k < x_0$, so dass:

$$\varphi_i(\overline{a}, x_1, \ldots, x_n) \not\leftrightarrow \varphi_i(\overline{a}, x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$$

Dann setze $g(X) = i$ und $f_1(X) = a_1, \ldots, f_j(X) = a_j, \ldots, f_k(X) = a_k)$.

Alle f_j sind regressiv: Nach Wahl ist für $f_j(X) = a$: $\min X = x_0$ und $a < x_0$. Dann folgt aus $(*)$: Es gibt ein $Y \subseteq s$, Y min-homogen für alle f_j und $|Y| \geq w$. Und aus dem endlichen Satz von Ramsey: Es existiert ein $X \subseteq Y$, ein $i \leq k$, so dass $|X| \geq m + n$ und $g(A) = i$ für alle $A \in [X]^{2n+1}$.

Behauptung: $i = 0$. Annahme: $i > 0$.

Da $m > 2n$ und $|X| \geq m + n$ gilt: $|X| > 3n$. Also existiert eine Folge $x_0 < \cdots < x_{3n} \in X$. Da außerdem X min-homogen für alle f_j ist existiert für jedes $1 \leq j \leq k$ ein $a_j < x_0$, so dass:

$$a_j = f_j(x_0, \ldots, x_{2n}) = f_j(x_0, \ldots, x_n, x_{2n+1}, \ldots, x_{3n}) = f_j(x_0, x_{n+1}, \ldots, x_{3n})$$

Setze:

$$\overline{a} = (a_1, \ldots, a_k)$$

Dann ist (da $i > 0$ und nach Wahl von $\overline{a}$) wegen der Konstruktion der f_i:

$$\varphi_i(\overline{a}, x_1, \ldots, x_n) \not\leftrightarrow \varphi_i(\overline{a}, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) \tag{1}$$
$$\varphi_i(\overline{a}, x_1, \ldots, x_n) \not\leftrightarrow \varphi_i(\overline{a}, x_{2n+1}, \ldots, x_{3n}) \tag{2}$$
$$\varphi_i(\overline{a}, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) \not\leftrightarrow \varphi_i(\overline{a}, x_{2n+1}, \ldots, x_{3n}) \tag{3}$$

Dies ist unmöglich. Nehme an, dass $\phi_i(\overline{a}, x_1, \ldots, x_n)$ den Wahrheitswert 1 hat. Dann müssen wegen (1) $\phi_i(\overline{a}, x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$ und wegen (2) $\phi_i(\overline{a}, x_{2n+1}, \ldots, x_{3n})$ beide den Wert 0 annehmen. Dies ist ein Widerspruch zu (3). Analog erfolgt ein Widerspruch in (3) wenn für $\phi_i(\overline{a}, x_1, \ldots, x_n)$ der Wahrheitswert 0 angenommen wird. $\lightning$

Also i=0.

Konstruiere nun die gesuchte Menge I wie folgt:

Seien $z_1 < \cdots < z_n$ die n größten Elemente von X. Sei $I = X \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$. Da $|X| \geq m + n$ ist dann $|I| \geq m$ wie gefordert.

Es bleibt zu überprüfen, dass I tatsächlich eine Folge diagonal Ununterscheidbarer bezüglich der $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ ist:

Seien $x_0 < x_1 < \ldots x_n$ und $y_1 < \cdots < y_n$ mit $y_1 > x_0$ in I. Sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k < x_0$. Dann gilt für alle $1 \leq j \leq l$:

$$\varphi_j(\overline{a}, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi_j(\overline{a}, z_1, \ldots, z_n)$$
$$\varphi_j(\overline{a}, y_1, \ldots, y_n) \leftrightarrow \varphi_j(\overline{a}, z_1, \ldots, z_n)$$

Und damit:

$$\varphi_j(\overline{a}, y_1, \ldots, y_n) \leftrightarrow \varphi_j(\overline{a}, x_1, \ldots, x_n)$$

□

Definition 10 (Menge der Δ_0-Formeln)**.** Die Menge der **Δ_0-Formeln** ist die kleinste Menge D von L-Formeln, sodass:

i) Jede Quantoren-freie Formel ist in D.

ii) Für $\varphi, \psi \in D$ sind $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ und $\neg\varphi$ in D.

iii) Für $\varphi \in D$ und einen Term t sind $\exists v < t\, \varphi$ und $\forall v < t\, \varphi$ in D.

Lemma 11. *Sei $\mathcal{M}$ ein Modell der Peano Arithmetik und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ ein Submodell, dessen Trägermenge N ein Anfangsstück der Trägermenge M von $\mathcal{M}$ ist; das heißt es gelte:*

$$a \in M, b \in N, a < b \Rightarrow a \in N$$

Dann ist für eine Δ_0-Formel $\varphi(\overline{v})$ und $\overline{a} \in N$:

$$\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\overline{a}).$$

Beweis. Erfolgt durch Induktion über den Aufbau von Δ_0:

i) Klar.

ii) Sei für $\varphi, \psi \in \Delta_0$ die Aussage bereits gezeigt, sei $\overline{a} \in N$. Es genügt $(\varphi \wedge \psi)$ und $\neg\varphi$ zu betrachten:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models (\varphi \wedge \psi)(\overline{a}) \quad & \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}) \text{ und } \mathcal{M} \models \phi(\overline{a}) \\ \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\overline{a}) \text{ und } \mathcal{N} \models \psi(\overline{a}) \quad & \Leftrightarrow \mathcal{N} \models (\varphi \wedge \psi)(\overline{a}) \end{aligned}$$

Und:

$$\mathcal{M} \models \neg\varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \not\models \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \neg\varphi(\overline{a})$$

iii) Sei für $\varphi \in \Delta_0$ die Aussage bereits gezeigt, sei $\overline{a} \in N$ und sei t ein Term. Es genügt $\forall v < t\, \varphi$ zu betrachten:

$\Rightarrow$) $\mathcal{M} \models (\forall v < t\, \varphi)(\overline{a}) \Rightarrow \mathcal{N} \models (\forall v < t\, \varphi)(\overline{a})$, klar, da $N \subseteq M$.

$\Leftarrow$) $\mathcal{N} \models (\forall v < t\, \varphi)(\overline{a}) \Rightarrow$ für alle $v \in N$ mit $v < t^{\mathcal{N}}(\overline{a})$ ist $\mathcal{N} \models \varphi(v, \overline{a})$. Wahl von $\varphi \Rightarrow$ für alle $v \in N$ mit $v < t^{\mathcal{N}}(\overline{a})$ ist $\mathcal{M} \models \varphi(v, \overline{a})$. Da $t^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = t^{\mathcal{N}}(\overline{a}) \in N$ gilt für alle $m \in M$ mit $m < t^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ nach Voraussetzung an $\mathcal{N}$: $m \in N$.

Zusammengefasst: Für alle $m < t^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ in M ist $\mathcal{M} \models \varphi(m, \overline{a})$.
$\Rightarrow \mathcal{M} \models (\forall v < t\, \varphi)(\overline{a})$.

□

Lemma 12. *Sei $\mathcal{M}$ ein Modell der Peano Arithmetik und seien $x_0 < x_1 < \ldots$ eine Folge von diagonal Ununterscheidbaren bezüglich der Menge Δ_0. Setze $N = \{y \in M \mid y < x_i$ für ein $i < \omega\}$. Dann ist die Menge N abgeschlossen unter Addition und Multiplikation und wenn $\mathcal{N}$ die Substruktur von $\mathcal{M}$ mit Trägermenge N bezeichnet, dann ist $\mathcal{N}$ ein Modell der Peano Arithmetik.*

Beweis. i) Abgeschlossenheit unter Addition

Seien $i < j < k < l$. Seien $a, b \in N$ und OBdA gelte $a, b < x_i$.
Behauptung: $a + x_j < x_k$.
Annahme: Es existiert ein $a < x_i$ mit $a + x_j \geq x_k$.
Dann existiert ein $c \leq a$, so dass $c + x_j = x_k$. Da $\varphi(z, y_1, y_2) = z + y_1 \equiv x_k \in \Delta_0$ gilt wegen Ununterscheidbarkeit: $\varphi(c, x_j, x_k) \leftrightarrow \varphi(c, x_j, x_l)$. Also $x_k = x_l$ ↯.

Also $a + x_j < x_k$ und da $b < x_i < x_j$ insbesondere $a + b < x_k \Rightarrow a + b \in N$, also ist N abgeschlossen unter Addition.

ii) Abgeschlossenheit unter Multiplikation

Seien wieder $i < j < k < l$. Sei $b < x_i$.
Behauptung: Für alle $a < x_i$ gilt $ab < x_k$.
Annahme: Behauptung gilt nicht.
Dann existiert ein $a < x_i$ mit $ab < x_k \leq (a + 1)b$. Ununterscheidbarkeit: $x_l \leq (a + 1)b$. Außerdem folgt aus $ab < x_k$ mit beidseitiger Addition von b: $(a + 1)b < b + x_k$. Damit erhalten wir mit dem Ergebnis aus *i)*: $x_l \leq (a + 1)b < b + x_k < x_l$ ↯.

Also für alle $a, b < x_i$: $ab < x_k$, also $ab \in N$. Also ist N abgeschlossen unter Multiplikation.

iii) Die Erfüllbarkeit von Formeln in N kann auf die Erfüllbarkeit von Δ_0-Formeln in M zurückgeführt werden.

Sei $\varphi(\overline{w}) = \exists v_2 \forall v_2 \exists v_3 \ldots \exists v_n \psi(\overline{w}, v_1, \ldots, v_n)$, wobei ψ Quantoren-frei. Jede L-Formel ϑ kann durch Hinzufügen von „dummy-Variablen“ $v_j \notin var(\vartheta)$ auf diese Form gebracht werden. Sei nun $i < \omega$ und $\overline{a} < x_i$. Die Folge $x_0 < x_1 < \ldots$ ist unbeschränkt in N, denn gäbe es eine Schranke, wäre diese kleiner als eines der x_i↯. Damit:

$\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ genau dann, wenn $\exists i_1 > i\, \forall i_2 > i_1 \ldots \exists i_n > i_{n-1}$ so, dass
$\mathcal{N} \models \exists v_1 < x_{i_1} \forall v_2 < x_{i_2} \ldots \exists v_n < x_{i_n} \psi(\overline{a}, v_1, \ldots, v_n)$.

Mit Lemma 11 stellen wir nun den Bezug zu $\mathcal{M}$ her:

$\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ genau dann, wenn $\exists i_1 > i \, \forall i_2 > i_1 \ldots \exists i_n > i_{n-1}$ so, dass $\mathcal{M} \models \exists v_1 < x_{i_1} \forall v_2 < x_{i_2} \ldots \exists v_n < x_{i_n} \psi(\overline{a}, v_1, \ldots, v_n)$.

Dies ist nun eine Δ_0-Formel, daher können wir Ununterscheidbarkeit anwenden:

$$\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a}) \text{ genau dann, wenn}$$
$$\mathcal{M} \models \exists v_1 < x_{i+1} \forall v_2 < x_{i+2} \ldots \exists v_n < x_{i+n} \psi(\overline{a}, v_1, \ldots, v_n).$$

für ein i.

iv) Die Peano Axiome werden von N erfüllt.

Einzig interessanter Fall: Das Induktionsaxiom. Sei also $\varphi(u, \overline{w})$ eine L-Formel, φ habe die Form $\exists v_1 \forall v_2 \ldots \exists v_n \psi(u, \overline{w}, \overline{v})$ für ein quantorenfreies ψ. Wenn gilt: $\mathcal{N} \models \varphi(b, \overline{a})$ für $\overline{a}, b \in \mathcal{N}$, dann wähle i und $i < i_1 < \cdots < i_n$ sodass $b < x_i$. Dann gilt nach *iii*):

$$\mathcal{M} \models \exists v_1 < x_{i_1} \forall v_2 < x_{i_2} \ldots \exists v_n < x_{i_n} \psi(b, \overline{a}, \overline{v})$$

Da Induktion auf $\mathcal{M}$ gilt, gibt es ein kleinstes $b' \leq b < x_i$, insbesondere $b' \in N$, so dass $\mathcal{N} \models \varphi(b', \overline{a})$. Also gilt Induktion auf $\mathcal{N}$.

$\square$

Anmerkung. Wir benötigen für den folgenden Beweis ein Konzept, das wir **Codierung** nennen wollen. Dabei werden konkrete Folgen und metamathematische Sachverhalte durch arithmetische Formeln dargestellt. Insbesondere:

Formel $S(u)$, die die Menge der Codierungen aller endlichen Folgen definiert.

Formel $l(u, v)$, die erfüllt ist, wenn u Codierung einer Folge mit Länge v ist.

Formel $e(v, u, i)$, die erfüllt ist, wenn u das $i$te Element der Folge ist, die von v codiert ist.

Außerdem gibt es ein Konzept nach Gödel, das jeder Formel eine Zahl zuweist. Damit können wir betrachten:

Formel $Form_0(v)$, die die Menge der Gödel-Codes aller Δ_0-Formeln definiert.

Formel $Sat_0(u, v, w)$, die erfüllt ist, wenn u der Gödel-Code einer Δ_0-Formel $\varphi(v_1, \ldots, v_w)$ ist, v die Codierung einer Folge $\overline{a}$ von w Elementen ist, und $\varphi(\overline{a})$ erfüllt ist.

Um dies zu erreichen, benötigen wir zuerst eine Methode, um eine endliche Folge in eine natürliche Zahl und eine Primzahl zu codieren. Für eine gegebene Folge $(a_0, \ldots, a_r)$ wähle eine genügend große Primzahl $p > a_0, \ldots, a_r, r+1$ und setze $t = 1 \cdot p^0 + a_0 p^1 + 2p^2 + a_1 p^3 + \cdots + (r+1)p^{2r} + a_r p^{2r+1}$. Dies ist die eindeutige p-adische Darstellung der Zahl t. Aus dieser Darstellung von t lässt sich mit Kenntnis von p die Folge extrahieren, da jeder Koeffizient einer geraden Potenz von p die Position des Koeffizienten der nächstgrößeren ungeraden Primzahlpotenz in der Folge angibt.

Nun gilt für alle $i \leq r$: $a = a_i$ genau dann, wenn b_0, b_1, b_2, l existieren so dass:

i) $t = b_0 + b_1((i+1) + ap + b_2p^2)$

ii) $a < p$

iii) $b_0 < b_1$

iv) $b_1 = p^{2l}$

Die Richtung $\Rightarrow$ folgt sofort aus der Konstruktion von t, wenn man $l = i$ setzt. Für $\Leftarrow$ wird *i)* ausmultipliziert: $t = b_0 + (i+1)p^{2l} + ap^{2l+1} + b_2p^{2l+2}$. Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von t und da $a < p$ folgt, dass $l = i$ und damit sofort $a = a_i$.

Diese aequivalente Bedingung lässt sich in PA formulieren, denn obwohl wir noch nicht Potenzieren können, lassen sich *i)* und *iv)* in PA formulieren, da $p^2 = p \cdot p$ und *iv)* bedeutet „es gibt ein x, so dass $b_1 = x * x$ und p ist der einzige Primfaktor von x".

Nun können wir über Folgen natürlicher Zahlen sprechen. Damit kann insbesondere die Potenz $a^b = c$ formalisiert werden: Als eine Folge $(a_1, \dots, a_b)$ so, dass $a_1 = a$, $a_b = c$ und für alle $i < b$: $a_i = a_{i-1} \cdot a$. Der Spezialfall, dass aus $b = 0$ $c = 1$ folgt, lässt sich getrennt berücksichtigen. Analog lässt sich eine Formel $prim(p, n)$ formulieren, die erfüllt ist, wenn p die n-te Primzahl ist. Seien $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$,... die aufsteigend nummerierten Primzahlen. Generell lassen sich rekursive Vorschriften auf den natürlichen Zahlen mit Hilfe von Folgen auf diese Art in eine L-Formel codieren.

Damit kann eine **Folge** $(a_1, \dots, a_n)$ in eine einzige natürliche Zahl a codiert werden: Setze $a = p_1^{a_1+1} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n+1}$. Da die Zerlegung in Primfaktoren eindeutig ist, lässt sich die Folge aus a wieder extrahieren; es wird in jedem Exponenten 1 addiert, damit der Spezialfall $a_i = 0$ keine Probleme bereitet. Da wir nun zu einer Zahl sagen, ob sie die i-te Primzahl ist, und innerhalb der Peano Arithmetik potenzieren können, lassen sich alle grundlegenden Aussagen über Folgen ausdrücken. Mit den Formeln $teilt(a, b) = \exists z(z \cdot a \equiv b)$ und $prim(p) = \forall x(x > 1 \to \neg teilt(x, p))$ lauten sie beispielsweise wie folgt:

$$S(u) = \exists p > 2(prim(p) \wedge teilt(p, u) \wedge \forall q > p(prim(q) \to \neg teilt(q, u) \\ \wedge \forall 2 < q < p(prim(q) \to teilt(q, u))$$

$$l(u, v) = S(u) \wedge \exists p(prim(p, v) \wedge \forall y(y > p \wedge prim(y) \to \neg teilt(y, u)))$$

$$e(v, u, i) = S(v) \wedge (\exists j(j \geq i \wedge l(v, j))) \wedge (\exists p(prim(p, i) \wedge \forall c(c > u \to \\ \neg teilt(p^{c+1}, v)) \wedge teilt(p^{u+1}, v)))$$

Leicht lassen sich nun auch endliche **Teilmengen** natürlicher Zahlen codieren. Setze für eine Menge $a_1, \dots, a_n$ die Codierung a: $a = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_n}$. Die 2-adische Darstellung von a ist eindeutig, also lassen sich die Mengenelemente aus a wieder extrahieren. Außerdem ist für die Codierung a_I von $I \subseteq n$: $a_I \leq 2^{2n}$.

Für eine exemplarische „naive" Herangehensweise an die Darstellung von **Formeln** weisen wir zunächst jedem Symbol der Sprache einen Zahlenwert zu.

Gerade Zahlen bieten sich hier an, da diese keine Codierung von Folgen sein können, weil wir Folgen durch Zahlen mit Primfaktoren größer 2 codieren. Also:

$$
\begin{aligned}
< &\to 0 \\
\equiv &\to 1 \\
+ &\to 2 \\
\cdot &\to 4 \\
' &\to 6 \\
\neg &\to 8 \\
\vee &\to 10 \\
\exists &\to 12 \\
0 &\to 14 \\
1 &\to 16 \\
x_1 &\to 18 \\
x_2 &\to 20 \\
\ldots, x_i &\to 16 + 2^i, \ldots \quad \text{(Alle geraden Zahlen größer 16 bezeichnen Variablensymbole).}
\end{aligned}
$$

Nun lassen sich die üblichen rekursiven Definitionen für Terme und Formeln übertragen: Ein atomarer Term wird durch eine gerade Zahl größer 12 codiert. Eine natürliche Zahl t ist Codierung eines Terms, wenn eine Folge von Subtermen existiert: Folge $(a_0, \ldots, a_n)$ so dass $a_n = t$ und für alle $i \leq n$ gilt: Entweder a_i ist Codierung eines atomaren Terms oder es existieren $j, k < i$, so dass a_i Codierung ist von $(+, a_k, a_j)$ oder $(\cdot, a_k, a_j)$ oder $(', a_k)$.

Analog dazu für Formeln: Eine atomare Formel wird codiert durch die die Codierung eines Tripels $(\equiv, y, z)$ oder $(<, y, z)$, wenn y und z Codierungen von Termen sind. Eine Zahl f ist Codierung einer Formel, wenn eine Folge von Subformeln existiert: Folge $(a_0, \ldots, a_n)$ so dass $a_n = f$ und für alle $i \leq n$ gilt: Entweder a_i ist Codierung einer atomaren Formel oder es existieren $j, k < i$ so dass, a_i Codierung ist von $(\neg, a_k)$ oder $(\vee, a_k, a_j)$ oder $(\exists, <, x, a_k)$, wobei x Codierung eines Variablensymbols ist.

Die Erfüllbarkeit von Δ_0-Formeln kann dann ebenfalls rekursiv über die Zerlegung in Subformeln codiert werden. Dies ist für (quantifizierte) Δ_0-Formeln möglich, da immer nur endlich viele natürliche Zahlen kleiner als eine gegebene Variable sein können. Diese endliche Teilmenge kann dann wie oben codiert werden.

Sat_0 nennen wir das **Wahrheitsprädikat** für Δ_0. Mit Hilfe dieser Codierungen können wir Beweise, im Folgenden insbesondere den von Lemma 9, formalisieren.

Satz 13. *Das Prinzip* $(*)$ *ist nicht beweisbar in der Peano Arithmetik.*

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ ein nonstandard-Modell der Peano Arithmetik und sei c ein nonstandard-Element von $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ erfülle $(*)$. Da der Endliche Satz von Ramsey in der Peano Arithmetik beweisbar ist, wird er von $\mathcal{M}$ erfüllt. Also existiert ein $v \in M$, so dass $\mathcal{M} \models v \to (3c+1)^{2c+1}_c$. Sei w minimal unter allen solchen v.

Außerdem erfüllt $\mathcal{M}$ $(*)$. Also existiert ein $e \in M$, so dass für regressive Funktionen $f_1, \ldots, f_c : [e]^{2c+1} \to e$ immer ein $Y \subseteq (c, e)$ existiert, mit $|Y| \geq w$ und Y min-homogen für alle f_i. Sei d minimal unter allen solchen e.

Sei Φ die Menge aller Δ_0-Formeln mit Gödel-Code höchstens c, freien Variablen in $v_1, \ldots, v_c$ und Parametervariablen in $w_1, \ldots, w_c$; insbesondere umfasst Φ auch alle Standard-Δ_0-Formeln. Mit Hilfe des Wahrheitsprädikats $Sat_0(u, v, w)$ kann dann der Beweis von Lemma 9 für $\mathcal{M}$ formalisiert werden. Aus der Konstruktion in dem Beweis ist ersichtlich, dass die Menge I der diagonal Ununterscheidbaren für Φ eine Teilmenge des vom Prinzip $(*)$ gegebenem $Y \subseteq (c, d)$ ist. Schließlich erhalten wir eine Menge $I \subseteq (c, d)$, $|I| \geq c$ von diagonal Ununterscheidbaren bezüglich Φ für $\mathcal{M}$.

Sei nun $x_0 < x_1 < \ldots$ ein Anfangsstück von I und sei $\mathcal{N}$ das Anfangsstück von $\mathcal{M}$ mit Trägermenge $N = \{y \in M \mid y < x_i \text{ für ein } i\}$. Lemma 12 besagt, dass $\mathcal{N}$ ein Modell der Peano Arithmetik ist. Nach Konstruktion von I und N ist $c \in N$ und $d \notin N$.

Außerdem: Da der Endliche Satz von Ramsey in der Peano Arithmetik beweisbar ist und $\mathcal{N} \models PA$ existiert ein $w' \in N$, so dass $\mathcal{N} \models w' \to (3c+1)_c^{2c+1}$. Alle Funktionen $[w']^{2c+1} \to c$ und alle Teilmengen von w, die in $\mathcal{M}$ codierbar sind, sind auch in $\mathcal{N}$ codierbar. Damit $\mathcal{M} \models w' \to (3c+1)_c^{2c+1}$. Da w minimal war gilt $w \leq w'$ und da N Anfangsstück ist, gilt $w \in N$.

Analog dazu: Würde das Prinzip $(*)$ in $\mathcal{N}$ gelten, dann gäbe es ein d', so dass gälte:

$$\mathcal{N} \models \text{ für regressive Funktionen } f_1, \ldots, f_c : [d']^{2c+1} \to d' \text{ gibt es ein } Y \subseteq (c, d'), \\ \text{das min-homogen für alle } f_i \text{ ist, und } |Y| \geq w.$$

Da alle Funktionen $[d']^{2c+1} \to d'$ und alle Teilmengen von w, die in $\mathcal{M}$ codierbar sind, auch in $\mathcal{N}$ codierbar sind gälte ebenfalls:

$$\mathcal{M} \models \text{ für regressive Funktionen } f_1, \ldots, f_c : [d']^{2c+1} \to d' \text{ gibt es ein } Y \subseteq (c, d'), \\ \text{das min-homogen für alle } f_i \text{ ist, und } |Y| \geq w.$$

Nach Wahl von d gilt dann $d \leq d'$. Da $d \notin N$, aber $d' \in N$ und N Anfangsstück $\lightning$.

Also gilt das Prinzip $(*)$ nicht in $\mathcal{N}$. Damit gibt es einerseits Modelle der Peano Arithmetik in denen $(*)$ gilt und andererseits solche in denen $(*)$ nicht gilt. Nach Vollständigkeit ist dann $PA \nvdash (*)$. $\square$

Korollar 14 (Satz von Paris-Harrington)**.** *Das Prinzip von Paris-Harrington ist in der Peano Arithmetik nicht beweisbar.*

Beweis. Wir hatten gezeigt, dass in PA mit Hilfe des Prinzips von Paris-Harrington das Prinzip $(*)$ bewiesen werden kann. Wäre nun das Prinzip von Paris-Harrington beweisbar, so wäre dies ein Widerspruch zu Satz 13. $\square$