Problemas y ejercicios de Análisis Matemático

Jose G. Juanino

Email address: `jjuanino@gmail.com`
URL: `http://github.com`

Resumen. En este documento se expone la resolución, con cierto grado de detalle, de algunos de los problemas del libro *5000 problemas de análisis matemático* de B.P. Demidovich, un gran libro de problemas, bien estructurado, con distintos niveles de complejidad.

No pretendo ser original en absoluto, simplemente se trata de ordenar y consolidar varios apuntes que tenía por ahí dispersos de mi época de estudiante en la Facultad de Matemáticas de la Univerdad Complutense de Madrid, y hacerlos públicos para que cualquier persona pueda beneficiarse de ello. Todo el material es original mío, no se trata de copias sin más de soluciones propuestas por otros (aunque obviamente las resoluciones pueden parecerse mucho a otras) así que puede haber errores, demostraciones incorrectas, omisiones, etc. Lo que sí trato de ser es riguroso: las Mátemáticas sin rigor dejan de ser Matemáticas y se convierten en otra cosa; aunque tampoco hay que ser un esclavo del rigor, pero es mejor pecar por exceso de rigor que por defecto.

Cualquier sugerencia pueden enviarla a mi correo `jjuanino@gmail.com`.

Versión actualizada en fecha 7 de mayo de 2022

Capítulo 1

Inducción matemática

Aplicando el método de inducción matemática, demostrar que para cualquier número naturar n se verifican las siguientes igualdades:

1. $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

SOLUCIÓN: La igualdad es cierta para $n=1$: $1=\frac{1(1+1)}{2}$. Supongamos que es cierta para un entero $n\in\mathbb{N}$:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Sumando $n+1$ a ambos miembros, se obtiene

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

que es la expresión para $n+1$.

2. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

SOLUCIÓN: La igualdad es cierta para $n=1$: $1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$. Supongamos que es cierta para un entero $n\in\mathbb{N}$:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sumando $(n+1)^2$ a ambos miembros obtenemos:

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\\ \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}&=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6n+6]}{6}\\ &=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

Dado que $2n^2+2n+1=(n+2)(2n+3)$, se obtiene finalmente:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

que es justo la expresión para $n+1$.

3. $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$

SOLUCIÓN: La proposición es cierta para $n=1$: $1^3=1^2$. Supongamos que es cierta para un entero $n\in\mathbb{N}$:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$$

La expresión para $n+1$ del segundo miembro es la siguiente, aplicando la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}&[1+2+\cdots+n+(n+1)]^2=[(1+2+\cdots+n)+(n+1)]^2=\\ &(1+2+\cdots+n)^2+(n+1)^2+2(1+2+\cdots+n)(n+1)=\\ &1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^2+2(1+2+\cdots+n)(n+1)\end{aligned}$$

Aplicar ahora el resultado del ejercicio **1**:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

La última expresión se transforma en:

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^2 + n(n+1)(n+1) &= \\ 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^2 + n(n+1)^2 &= \\ 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^2(n+1) &= 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3\end{aligned}$$

y con ello queda probado el resultado.

4. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

SOLUCIÓN: El resultado es cierto para $n = 1$: $1 = 2^1 - 1$. Supongamos que es cierto para un entero $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Sumando 2^n a ambos miembros, se obtiene:

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

con lo que queda demostrado el resultado.

6. Demostrar la desigualdad de Bernoulli:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números del mismo signo, mayores que -1

SOLUCIÓN: La proposición es cierta para $n = 1$: $1 + x_1 \geqslant 1 + x_1$. Supongamos que es cierta para un entero $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{1}$$

Sea $x_{n+1} > -1$. Entonces podemos multiplicar ambos miembros de (1) por el número positivo $1 + x_{n+1}$ sin alterar el sentido de la desigualdad, y obtener:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n)(1 + x_{n+1}) \geqslant (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(1 + x_{n+1})$$

Desarrollando el segundo miembro, se obtiene:

$$\begin{aligned}(1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(1 + x_{n+1}) &= \\ 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}(1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) &= \\ (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}) + x_{n+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) &= \\ (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}) + (x_{n+1}x_1 + x_{n+1}x_2 + \cdots + x_{n+1}x_n)&\end{aligned}$$

Como todos los x_i tienen el mismo signo, los productos $x_{n+1}x_i$ son no negativos, luego la última expresión es mayor o igual que $1 + x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}$, y con ello queda probado el resultado.

7. Demostrar que, si $x > -1$ se verifica la desigualdad

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \ (n > 1),$$

donde el signo de igualdad se verifica solamente para $x = 0$.

SOLUCIÓN: Aplicando la desigualdad de Bernoulli para todos los $x_i = x$, se obtiene:

$$(1 + x)^n = (1 + x)\cdots(1 + x) \geqslant 1 + x + \cdots + x = 1 + nx$$

Vamos a probar que la igualdad se verifica solamente para $x = 0$. Desde luego, el valor $x = 0$ verifica la igualdad, porque $(1 + 0)^n = 1 + n \cdot 0$. Recíprocamente, si se verifica la igualdad $(1+x)^n = 1+nx$ y $n \geqslant 2$, desarrollando el primer miembro por el binomio de Newton, se obtiene:

$$\begin{gathered} 1+nx = (1+x)^n = \\ 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^n = \\ 1+nx+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^n \end{gathered}$$

por lo tanto:

$$0 = \binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^n = x^2\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{3}x+\cdots+\binom{n}{n}x^{n-2}\right]$$

Observar que en esta igualdad el detalle $n \geqslant 2$ es fundamental, ya que de ahí se desprende que el segundo factor de la última expresión es estrictamente positivo:

$$0 < \binom{n}{2}+\binom{n}{3}x+\cdots+\binom{n}{n}x^{n-2}$$

por lo que, si el producto de ambos factores es 0, necesariamente deber ser $x^2 = 0$, lo que equivale a $x = 0$, y con eso se demuestra el resultado.

Esta desigualdad tiene interés cuando x es muy próximo a cero, y permite simplificar una expresión algo compleja como $(1+x)^n$ por otra más simple, lineal. Observar que $1+xn$ es la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ para la función $x \mapsto (1+x)^n$.

8. Demostrar la desigualdad

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \text{ para } n > 1.$$

Indicación: Aplicar la desigualdad

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \ (n = 1, 2, \ldots).$$

SOLUCIÓN: Aplicando la desigualdad de Bernoulli, se obtiene

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 1+(n+1)\cdot\frac{1}{n+1} = 1+1 = 2$$

Particularizando para $n = 1, 2, \ldots n$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{3^2}{2^2} &> 2 \\ \frac{4^3}{3^3} &> 2 \\ &\cdots \\ \frac{(n+1)^n}{n^n} &> 2 \\ \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} &> 2 \end{aligned}$$

Multiplicando todo, se obtiene:

$$\frac{3^2 4^3 \cdots (n+1)^n (n+2)^{n+1}}{2^2 3^3 \cdots n^n (n+1)^{n+1}} > 2^n$$

Agrupando los cocientes:

$$\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{3^3}\cdot\frac{4^3}{4^4}\cdots\frac{(n+1)^n}{(n+1)^{n+1}}(n+2)^{n+1}=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{n+1}(n+2)^{n+1}>2^n$$

Esto equivale a:

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}>2^{n+1}$$

o bien, más sucintamente:

$$(n+1)!<\left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$$

Escribiendo $n+1$ en lugar de n, se obtiene finalmente el resultado buscado:

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}$$

9. Demostrar la desigualdad

$$2!\cdot 4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n \text{ para } n>1$$

SOLUCIÓN: Vamos a probarlo por inducción. Para $n=2$ la desigualdad es cierta: $2!\cdot 4!=48$, mientras que $[(2+1)!]^2=[3!]^2=36$

Supongamos que la desigualdad es cierta para un entero $n\geqslant 2$. Observar lo siguiente:

$$[(n+1)!]^n\cdot(2n+2)!=[(n+1)!]^n\,[(2n+2)(2n+1)\cdots(n+3)]\,(n+2)!$$

Pero $(2n+2)(2n+1)\cdots(n+3)>(n+2)(n+2)\cdots(n+2)=(n+2)^n$, por lo que

$$\begin{aligned}[(n+1)!]^n\cdot(2n+2)!>[(n+1)!]^n(n+2)^n(n+2)!&=\\ [(n+2)(n+1)!]^n(n+2)!&=\\ [(n+2)!]^n(n+2)!=[(n+2)!]^{n+1}&\end{aligned}$$

Por lo tanto, partiendo de la hipótesis de inducción, tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$2!\cdot 4!\cdots(2n)!(2n+2)!>[(n+1)!]^n(2n+2)!>[(n+2)!]^{n+1}$$

y con ello queda demostrada la proposición.

10. Demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

SOLUCIÓN: Lo demostraremos por inducción. Para $n=1$ la desigualdad es cierta, porque $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Supongamos que la proposición es cierta para un entero $n\in\mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}&<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}\\ &=\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+3}}=\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\cdot\frac{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}{\sqrt{(2n+2)^2}}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\cdot\sqrt{\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}}<\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\end{aligned}$$

que es el resultado buscado.

11. Demostrar la desigualdes:

(a) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ $(n\geqslant 2)$

(b) $n^{n+1}>(n+1)^n$ $(n\geqslant 3)$

(c) $\left|\operatorname{sen}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} x_k$ $(0 \leqslant x_k \leqslant \pi;\ k = 1, 2, \ldots, n)$;

(d) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

SOLUCIÓN (A) Lo demostraremos por inducción. Para $n = 2$ la proposición es cierta, porque $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Supongamos que la expresión es cierta para un entero $n \in \mathbb{N}$. Sumando a los dos miembros $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ se obtiene:

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &> \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} \\
&= \sqrt{n+1} + \frac{\sqrt{n(n+1)} + 1 - (n+1)}{\sqrt{n+1}} \\
&= \sqrt{n+1} + \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}
$$

El segundo sumando de esta última expresión ($\sqrt{n^2+n} - n$) es estrictamente positivo, con lo que definitivamente resulta

$$
1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}
$$

que es lo que queríamos probar.

SOLUCIÓN (B) Se demuestra también por inducción. Para $n = 3$ la proposición es cierta, porque $3^4 = 81$ y $4^3 = 64$.

Supongamos que es cierta para un entero $n \geqslant 3$: $(n+1)^n < n^{n+1}$

Aplicar la hipótesis de inducción para obtener:

$$
\begin{aligned}
(n+2)^{n+1} &= \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}(n+1)^n \\
&< \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n} n^{n+1} \\
&= \frac{(n+2)^{n+1} n^{n+1}}{(n+1)^n} \\
&= \frac{(n+2)^{n+1} n^{n+1} (n+1)^{n+2}}{(n+1)^n (n+1)^{n+2}} \\
&= \frac{[n(n+2)]^{n+1}}{(n+1)^{2n+2}} \cdot (n+1)^{n+2} \\
&= \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} (n+1)^{n+2} \\
&= \left[\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right]^{n+1} (n+1)^{n+2}
\end{aligned}
$$

En la última expresión, el primer factor es menor que 1, así que como resultado final se tiene

$$
(n+2)^{n+1} < (n+1)^{n+2}
$$

que es lo que se perseguía demostrar.

SOLUCION (C) Lo demostraremos por inducción. Para $n = 1$ es cierto, porque al ser $0 \leqslant x_1 \leqslant \pi$ se desprende $\operatorname{sen} x_1 \geqslant 0$, luego $|\operatorname{sen} x_1| = \operatorname{sen} x_1$. Supongamos ahora que la proposición es cierta para cualesquiera $0 \leqslant x_i \leqslant \pi$ y para un $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\operatorname{sen}\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)\right| &= \left|\operatorname{sen}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{k+1}\right)\right| \\
&= \left|\operatorname{sen}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\cos x_{k+1} + \cos\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\operatorname{sen} x_{k+1}\right| \\
&\leqslant \left|\operatorname{sen}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| |\cos x_{k+1}| + \left|\cos\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| |\operatorname{sen} x_{k+1}| \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} x_k\right) + |\operatorname{sen} x_{k+1}| = \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} x_k\right) + \operatorname{sen} x_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{sen} x_k
\end{aligned}$$

luego la proposición es cierta también para $n+1$

SOLUCIÓN (D) Se demuestra también por inducción. Para $n = 1$ es cierto, ya que $(2 \cdot 1)! = 2$ y $2^2 \cdot (1!)^2 = 4$. Supongamos que la proposición es cierta para $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}
(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)! &< (2n+2)(2n+1)2^{2n}(n!)^2 \\
&= 2^{2n+2}[(n+1)!]^2 \frac{2(n+1)(2n+1)2^{2n}(n!)^2}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2}
\end{aligned}$$

El resultado quedará probado cuando veamos que

$$\frac{2(n+1)(2n+1)2^{2n}(n!)^2}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} < 1$$

Efectivamente:

$$\frac{2(n+1)(2n+1)2^{2n}(n!)^2}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} = \frac{2(n+1)(2n+1)2^{2n}(n!)^2}{2^{2n}2^2(n+1)^2(n!)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

Capítulo 2

Teoría de sucesiones

50. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ para $|a|<1, |b|<1$

SOLUCION: Aplicar la fórmula para los términos de una progresión geométrica

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}(1-x^{n+1})$$

para obtener

$$\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} = \frac{\frac{1}{1-a}(1-a^{n+1})}{\frac{1}{1-b}(1-b^{n+1})}$$

Dado que $|a|,|b|<1 \Longrightarrow a^{n+1}\to 0$, $b^{n+1}\to 0$ luego el límite anterior es $\frac{1-b}{1-a}$

51. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

SOLUCIÓN: Usar el ejercicio **1**: $1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$. Entonces

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}=\frac{n(n-1)}{2n^2}\to\frac{1}{2}$$

52. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$

SOLUCIÓN: Agrupar los términos positivos y negativos del numerador. Si $k\in\mathbb{N}$, entonces se puede probar por inducción que

$$1+3+5+\cdots+(2k+1)=(k+1)^2$$

$$2+4+6+\cdots+(2k)=k(k+1)$$

Pongamos $n=2k$. Entonces

$$\begin{aligned}1-2+3-\cdots+(-1)^{n-1}n &= 1+3+\cdots+(2k-1)-(2+4+\cdots+2k)=\\ &k^2-k(k+1)=-k=-\frac{n}{2}\end{aligned}$$

Pongamos $n=2k+1$. Entonces

$$\begin{aligned}1-2+3-\cdots+(-1)^{n-1}n &= 1+3+\cdots+(2k+1)-(2+4+\cdots+2k)=\\ &(k+1)^2-k(k+1)=1+k=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

En resumen: si n es par:

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|=\left|\frac{-1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

Si n es impar:

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|=\frac{n+1}{2n}$$

Esto significa que la sucesión de los pares y los impares convergen al mismo límite 1/2, y por lo tanto la sucesión completa también converge:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|=\frac{1}{2}$$

53. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$

SOLUCIÓN: Emplear el resultado del ejercicio **2**:

$$\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}\to\frac{1}{3}$$

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$

Sumemos y restemos los términos pares que faltan y volver a aplicar el ejercicio **2**:

$$\begin{aligned}&1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\\ &1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2+(2n)^2-[2^2+4^2+\cdots+(2n)^2]=\\ &\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-2^2[1^2+2^2+\cdots+n^2]=\\ &\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}-\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}=\frac{4n^3-n}{3}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n}{3n^3}=\frac{4}{3}$$

55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$

SOLUCIÓN: Esta sucesión es muy similar a una serie geométrica, y de hecho el artificio empleado es el mismo: multiplicar por la razón, y restar.

Para un cierto n fijo, sea $S=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$. La razón es $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

Al restar esta cantidad a S, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}&S-\frac{1}{2}S=\\ &\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+\left(\frac{7}{2^4}-\frac{5}{2^4}\right)+\cdots+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)+\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\\ &\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots+\frac{2}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{2}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\\ &\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}+\frac{n-\frac{5}{2}}{2^n}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2}S=\frac{3}{2}+\frac{n-\frac{5}{2}}{2^n}\Longrightarrow S=3+\frac{2n-5}{2^n}$$

En un ejercicio posterior se verá que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$ luego en definitiva:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3$$

56. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

SOLUCIÓN: Esta es una serie telescópica, ya que $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ por lo que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=1$$

57. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$

SOLUCIÓN: Dado que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\frac{1}{2^n}=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)=\lim_{n\to\infty}2^{2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}=2^2=4$$

58. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$

SOLUCIÓN: Poner $x_n=\frac{n}{2^n}$. Entonces $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n+1}{2(n+1)}\to\frac{1}{2}<1$. Por lo tanto, para algún n suficientemente grande, mayor que un n_0, se tendrá $\frac{x_{n+1}}{x_n}<a$ (por ejemplo, con $a=\frac{3}{4}$). De modo recursivo, se obtiene

$$0\leqslant x_{n+1}\leqslant ax_n\leqslant a^2x_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\ a^{n-n_0+1}x_{n_0}=a^n\frac{x_{n_0}}{a^{n_0}-1}\ (\text{si } n\geqslant n_0)$$

Como $0<a<1$ se desprende $a^n\to 0$, luego $x_n\to 0$

59. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

SOLUCIÓN: El razonamiento es idéntico al problema anterior. Si $x_n=\frac{2^n}{n!}$, entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}\to 0$$

luego también $x_n\to 0$

60. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\ (a>1)$

SOLUCIÓN: Volvemos a repetir el mismo razonamiento que antes: sea $x_n=\frac{n^k}{a^n}$. Entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}\cdot\frac{a^n}{n^k}=\frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k\to\frac{1}{a}$$

Dado que $a>1$, el límite anterior es estrictamente menor que 1, luego $x_n\to 0$

61. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

SOLUCIÓN: Razonamos igual que antes: sea $x_n=\frac{a^n}{n!}$. Entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1}\to 0$$

luego también $x_n\to 0$

62. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$, si $|q| < 1$

SOLUCIÓN: Razonamos como antes, pero en este caso tomando valores absolutos, porque los valores pueden ser negativos. Sea $x_n = |nq^n|$. Entonces:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)|q|^{n+1}}{n|q|^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)|q| \to |q| < 1$$

luego $x_n \to 0$. La convergencia en valor absoluto a cero de la sucesión implica la convergencia a cero sin valor absoluto, con lo que queda probado el resultado.

63. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$

SOLUCIÓN: Supongamos primero $a > 1$. Entonces $\sqrt[n]{a} > 1$, luego podemos poner $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$, con $x_n > 0$. Vamos a probar que $x_n \to 0$ y con ello quedará probado $\sqrt[n]{a} \to 1$. Aplicando la desigualdar de Bernoulli, tenemos

$$a = (1 + x_n)^n > 1 + nx_n$$

luego $0 < x_n < \frac{a-1}{n} \to 0$ y por tanto $x_n \to 0$.

Una vez probado el resultado para $a > 1$, el resultado para $0 < a < 1$ se prueba tomando $\frac{1}{a} > 1$:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$$

por lo tanto también existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Para $a = 1$ la sucesión $(\sqrt[n]{a})_n$ es constante igual a 1, luego también converga a uno.

64. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$, $a > 1$

SOLUCIÓN: Es una consecuencia del siguiente ejercicio **65** y de la continuidad de la función logaritmo:

$$\frac{\log_a n}{n} = \log_a \sqrt[n]{n}$$

65. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

SOLUCIÓN: Dado que $\sqrt[n]{n} > 1$, podemos escribir $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$ con $x_n > 0$. Todo consiste por tanto en probar que $x_n \to 0$. Desarrollando por el binomio de Newton, tenemos:

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \left[\binom{n}{3}x_n^3 + \cdots + \binom{n}{n}x_n^n\right]$$

El sumatorio donde aparecen los números combinatorios es estrictamente positivo, y en consecuencia:

$$n > 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 > 1 + \frac{1}{2}n(n-1)x_n^2$$

luego

$$x_n^2 < \frac{2}{n}$$

Por lo tanto $x_n^2 \to 0$ y ello implica también $x_n \to 0$

66. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

SOLUCIÓN: Fijar $\varepsilon > 0$. Tomando $a = 1/\varepsilon$, en el ejercicio **61** obtuvimos $\frac{a^n}{n!} \to 0$. Por lo tanto a partir de algún $n_0 \in \mathbb{N}$ se cumple $0 < \frac{a^n}{n!} < 1$, lo que equivale a

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0$$

lo cual prueba el resultado.

En el ejercicio **142** se demostrará que $\sqrt[n]{e^n n!}$ es asíntóticamente equivalente a n, en el sentido de que $\frac{n}{\sqrt[n]{e^n n!}} \to 1$.

69. Demostrar que la sucesión

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ (n = 1, 2, \dots, n)$$

es monótona creciente y está acotada superiormente, mientras que la sucesión

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \ (n = 1, 2, \dots, n)$$

es monótona decreciente y acotada inferiormente. Deducir de esto que estas sucesiones tienen un límite común:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

Indicación: Formar las razones $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_{n-1}}{y_n}$ y aplicar la desigualdad del ejercicio **7**.

SOLUCIÓN: Este resultado presenta un enfoque totalmente diferente a los textos clásicos para introducir el número e, donde se demuesta que la sucesión $\{(1+1/n)^n\}_n$ es monótona creciente y acotada superiormente desarrollando por el binomio de Newton. Aquí no sólo se demuestra lo mismo de modo diferente, sino también que la sucesión $\{(1 + 1/n)^{n+1}\}_n$ es decreciente, cosa muy lejos de ser evidente. Una consecuencia notable es que a pesar de ser $(1+1/n)^n$ menor que e, al mutiplicar por $1+1/n$ (muy próximo a 1) ya lo superamos: $e < (1 + 1/n)^n \cdot (1 + 1/n)$. Esta desigualdad se utilizará en algún ejercicio posterior.

Demostraremos primero que $(x_n)_n$ es estrictamente creciente:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{(n+2)^n n^n}{(n+1)^n (n+1)^n} =$$

$$\frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n$$

Aplicando la desigualdad de Bernoulli (legítimamente, porque $0 < \frac{1}{(n+1)^2} < 1$):

$$\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n > 1 - \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

con lo que la sucesión $(x_n)_n$ es estrictamente creciente.

Demostremos que $(y_n)_n$ es estrictamente decreciente:

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{(n+1)^n (n-1)^n}{n^n n^n} =$$

$$\frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n}$$

Por la desigualdad de Bernoulli:

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1} = \frac{n^2+n-1}{n^2-1}$$

lo que equivale a:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n} < \frac{n^2-1}{n^2+n-1}$$

Por lo tanto:

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} < \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n^2-1}{n^2+n-1} = \frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n} < 1$$

y con ello queda probado que $(y_n)_n$ es estrictamente decreciente.

Las desigualdad $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ es evidente, y se extraen las siguientes conclusiones:

(a) $(x_n)_n$ es creciente y acotada superiormente por $y_1 = 4$

(b) $(y_n)_n$ es decreciente y acotada inferiormente por $x_1 = 2$

Además $y_n = (1+\frac{1}{n})x_n$, luego ambas sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ convergen al mismo límite (el número e).

70. Demostrar que

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \ (n = 1, 2, \ldots, n)$$

¿Para qué valores del exponente n la expresión $(1+1/n)^n$ diferirá del número e menos que 0,001?

SOLUCIÓN: Veamos primero que $(1+\frac{1}{n})^n < 3\ \forall n \in \mathbb{N}$ desarrollando por el binomio de Newton y utilizando que $2^n < n!\ \forall n \geqslant 4$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n^n} =$$

$$2+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\left[\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right] < \frac{8}{3}+\left[\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right] < \frac{8}{3}+\frac{\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{67}{24} < 3$$

Así queda probado que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ para $n \in \mathbb{N}$ (y que además $e < 3$). Entonces

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{3}{n}$$

y finalmente:

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$$

Si aseguramos que $\frac{3}{n} < 10^{-3}$, es decir, $n > 3000$, podemos asegurar que

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 10^{-3}$$

71. Sea p_n $(n = 1, 2, \ldots, n)$ una sucesión arbitraria de números que tiende a $+\infty$ y sea q_n $(n = 1, 2, \ldots, n)$ una sucesión arbitraria de números que tiende a $-\infty$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e$$

SOLUCIÓN: Vamos a demostrarlo sólo cuando $(p_n)_n$ y $(q_n)_n$ son sucesiones de enteros, ya que para el caso general habría que probar que las funciones $x \mapsto (1+1/x)^x$ e $y \mapsto (1-1/y)^y$ son respectivamente creciente y decreciente, lo cual resulta bastante complicado sin recurrir a derivadas (al menos yo he sido incapaz de hacerlo).

Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $|e - (1 + 1/n)^n| < \varepsilon$ $\forall n \geqslant n_0$. Como $p_n \to +\infty$, podemos encontrar un $n_1 \geqslant n_0$ tal que $p_n \geqslant n_0$ $\forall n \geqslant n_1$. Como p_n es siempre un entero positivo, se deduce que $(1 + 1/n_0)^{n_0} < (1 + 1/p_n)^{p_n} < e$ $\forall n \geqslant n_1$ y entonces:

$$\left|e-\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}\right| < \left|e-\left(1+\frac{1}{n_0}\right)^{n_0}\right| < \varepsilon \ \forall n \geqslant n_1$$

Esto demuestra que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$$

Vamos a demostrar también que $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \to e$ y que es una sucesión decreciente. Ambas cosas se desprenden de la igualdad

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}$$

y del ejercicio **69**, donde se probó que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_n$ era decreciente y convergía a e. Como consecuencia de este resultado, siguiendo el mismo razonamiento que antes se prueba si que (q_n) es una sucesión de enteros que tiende a $-\infty$, entonces $\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} \to e$. Efectivamente, si $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|e-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right| < \varepsilon$ $\forall n \geqslant n_0$. Como $q_n \to -\infty$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $q_n < -n_0$ $\forall n \geqslant n_1$. Como la sucesión $\left\{(1-\frac{1}{n})^{-n}\right\}_n$ es decreciente y $(q_n)_n$ está compuesta exclusivamente por enteros negativos, se tiene

$$e < \left(1-\frac{1}{-q_n}\right)^{-(-q_n)} < \left(1-\frac{1}{n_0}\right)^{-n_0} \quad \forall n \geqslant n_1$$

y por tanto

$$\left|e-\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}\right| = \left|e-\left(1-\frac{1}{-q_n}\right)^{-(-q_n)}\right| < \left|e-\left(1-\frac{1}{n_0}\right)^{-n_0}\right| < \varepsilon \ \forall n \geqslant n_1$$

Esto demuestra que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e$$

72. Sabiendo que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e,$$

demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e$$

Deducir de aquí la fórmula

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},$$

donde $0 < \theta_n < 1$, y calcular el número e con una exactitud hasta 10^{-5}.

SOLUCIÓN: Sea k un entero fijo, y n otro entero, $n > k$. Desarrollando por el binomio de Newton:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left[1+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k}\right]+$$
$$\left[\binom{n}{k+1}\cdot\frac{1}{n^{k+1}}+\cdots+\binom{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n^{n-1}}+\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}\right]=$$
$$\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]+$$
$$\left[\frac{1}{(k+1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

En esta larga suma, pongamos $a_{n,k}$ los términos hasta $\frac{1}{k!}$, y $b_{n,k}$ el resto de términos (tal y como están agrupados en los corchetes). Observar que

$$a_{n,k}+b_{n,k}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \ \forall n > k$$

y que la relación es válida para todo $n > k$ (*recordar que k es fijo*). Notar lo siguiente:

- La sucesión $(a_{n,k})_n$ es convergente, y su límite es $1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}$
- La sucesión $\{(1+1/n)^n\}_n$ es convergente, y su límite es e.
- $b_{n,k} > 0 \ \forall n > k$

De aquí se desprende que la sucesión $(b_{n,k})_n$ también converge, y además

$$1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\lim_{n\to\infty} b_{n,k} = e \qquad (2)$$

Vamos a acotar la expresión $b_{n.k}$.

$$0 < b_{n,k} < \frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+2)!}+\cdots+\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^n} < \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^k}$$

Por lo tanto, si llamamos $b_k = \lim_{n\to\infty} b_{n,k}$, se tiene $b_k \leqslant \frac{1}{2^k}$, y la expresión (2) se escribe:

$$1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}+b_k = e$$

En esta expresión ya no aparece la variable n: es válida para todo k, siendo además $b_k \to 0$. Por lo tanto, podemos pasar al límite en k y obtener:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right)=e$$

Probemos ahora que

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},$$

donde $0 < \theta_n < 1$

Sea $(x_n)_n$ definida como $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Si $p \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
x_{n+p} - x_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+3)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)\cdots(n+2)}\right] \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^{p-1}}\right] \\
&< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \frac{1}{n!n} \cdot \frac{n^2}{n^2-1}
\end{aligned}$$

Escribiendo $\alpha_n = \frac{n^2}{n^2-1}$, obtenemos

$$0 < x_{n+p} - x_n < \frac{\alpha_n}{n!n} \ \forall p > 1, 0 < \alpha_n < 1$$

Al pasar al límite en $p \to \infty$, se obtiene:

$$0 < e - x_n \leqslant \frac{\alpha_n}{n!n}$$

Esto es un hecho notable y de gran sutileza: a pesar de ser $x_n < e$, la convergencia es tan rápida que al sumar un término tan pequeño como $\frac{\alpha_n}{n!n}$, ya se supera e. De hecho, sumando a $\left[1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right]$ el valor $\frac{1}{(n+1)!}$ nunca se supera e por grande que sea n, pero al sumar $\frac{1}{n \cdot n!}$, ya se supera e, a pesar de lo extremadamente cerca que está $\frac{1}{(n+1)!}$ de $\frac{1}{n \cdot n!}$.

Finalmente, sea

$$\beta_n = \frac{e - x_n}{\frac{\alpha_n}{n!n}}$$

Entonces $0 < \beta_n \leqslant 1$, y además

$$\frac{\alpha_n \beta_n}{n!n} = e - x_n$$

lo que equivale a

$$e = x_n + \frac{\alpha_n \beta_n}{n!n}$$

Poniendo $\theta_n = \alpha_n \beta_n$, se tiene $0 < \theta_n < 1$, y

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$$

que era el resultado buscado.

Para calcular el número e con una exactitud de 10^{-5}, basta con encontrar el n más pequeño que cumpla $n!n \geqslant 10^5$, lo cual es cierto con $n = 8$: $8! \cdot 8 = 322560$. De ese modo

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}$$

tiene al menos 4 cifras decimales exactas del número e (ojo, no 5)

NOTA: el razonamiento aquí empleado de acotar $x_{n+p} - x_n$ por una constante que *no depende* p es muy común, y permite estimar la rapidez de la convergencia de una sucesión. Por ejemplo, si sabemos que $x_n \to x$ y que $|x_{n+p} - x_n| < a_n \forall n, p \in \mathbb{N}$, con $a_n \to 0$, entonces $0 \leqslant |x - x_n| < a_n$.

73. Demostrar que el número e es irracional.

SOLUCIÓN: La demostración se basa en el resultado del ejercicio anterior, y es la misma que propuso el gran Euler en el siglo XVIII. La idea es que la sucesión converge con extrema rapidez, pues los factoriales son extremadamente grandes en relación al argumento n.

Dado que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$$

entonces

$$n!e = n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \frac{\theta_n}{n}$$

El primer sumando de la última expresión es un entero, pero el segundo no lo es (porque $0 < \theta_n < 1$), luego $n!e$ *nunca* es un entero, sea cual sea $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, e no puede ser racional.

74. Demostrar la desigualdad

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

SOLUCIÓN: Sea $x_n = \frac{n^n}{e^n n!}$. Vamos a probar que $x_n < 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. En efecto, $x_1 = 1/e < 1$, y además

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1}e^n n!}{e^{n+1}(n+1)!n^n} = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1$$

Por lo tanto, $x_n < 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, es decir, $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$

Análogamente, sea $y_n = \frac{en^n}{2^n n!}$. Entonces $y_1 = \frac{e}{2} > 1$, y además

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(n+1)^{n+1}2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!n^n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1$$

luego $y_n > 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, lo que equivale a $n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

75. Demostrar las desigualdades:

(a) $\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ donde n es un número natural arbitrario

(b) $1 + \alpha < e^\alpha$, donde α es un número real arbitrario.

SOLUCIÓN: Veamos (a). Recordar que en el ejercicio **69** se demostró

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Tomando logaritmos, se obtienen dos desigualdades:

$$n\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$$

$$1 < (n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

es decir:

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

o, más sucintamente:

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Para probar (b), consideramos un número racional p/q. Por un lado, sabemos que $\left(1 + \frac{1}{q}\right)^q < e$, lo que equivale a $1 + \frac{1}{q} < e^{\frac{1}{q}}$. Por la desigualdad de Bernoulli:

$$1 + \frac{p}{q} < \left(1 + \frac{1}{q}\right)^p < \left(e^{\frac{1}{q}}\right)^p = e^{\frac{p}{q}}$$

Una vez probada la desigualdad con los racionales, automáticamente se extiende a la totalidad de los reales, gracias a la continuidad de la función exponencial.

76. Demostrar que
$$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\log a \ (a>0)$$
donde $\log a$ es el logaritmo de a en base e.

SOLUCIÓN: Como $\sqrt[n]{a}\to 1$, podemos escribir $\sqrt[n]{a}=1+\frac{1}{x_n}$, con $x_n\to+\infty$ ó $x_n\to-\infty$, según sea $a>1$ ó $0<a<1$. Tomando logaritmos:
$$\frac{1}{n}\log a=\log\left(1+\frac{1}{x_n}\right)\Longrightarrow n=\frac{\log a}{\log\left(1+\frac{1}{x_n}\right)}$$
Por lo tanto, la expresión del límite buscado la podemos reescribir así:
$$n(\sqrt[n]{a}-1)=\log a\cdot\frac{\frac{1}{x_n}}{\log\left(1+\frac{1}{x_n}\right)}=\frac{\log a}{\log\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}}$$
Como $x_n\to+\infty$ ó $x_n\to-\infty$, por el ejercicio **71** se desprende que $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\to e$ luego
$$n(\sqrt[n]{a}-1)\to\frac{\log a}{\log e}=\log a$$
.

En el caso $a=e$ se puede ofrecer una demostración mucho más sencilla usando el resultado del ejercicio **69**:
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \ \forall n>1$$
Tomando raíces n-ésimas esta desigualdad equivale a:
$$1+\frac{1}{n}<\sqrt[n]{e}<1+\frac{1}{n-1}\iff 1<n(\sqrt[n]{e}-1)<\frac{n}{n-1}$$
Como $\frac{n}{n-1}\to 1$, se sigue el resultado: $n(\sqrt[n]{e}-1)\to 1$.

Aplicando el teorema de la existencia de límite de una sucesión monótona y acotada, demostrar la convergencia de las siguientes sucesiones:

77. $x_n=p_0+\frac{p_1}{10}+\cdots+\frac{p_n}{10^n}$ $(n=1,2,\ldots)$, donde p_i $(i=0,1,2,\ldots)$ son enteros no negativos, no superiores a 9, comenzando desde p_1.

SOLUCIÓN: La sucesión $(x_n)_n$ es monótona creciente, obviamente. Veamos que es acotada:
$$|x_n|\leqslant p_0+\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^n}=p_0+\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\leqslant p_0+1$$

78. $x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$.

SOLUCIÓN: Se tiene:
$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n+10}{2n+1}=1-\frac{n+9}{2n+1}<1$$
luego $(x_n)_n$ es decreciente y acotada inferiormente (por 0).

79. $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

SOLUCIÓN: Se tiene:
$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=1-\frac{1}{2^{n+1}}<1$$
luego es decreciente, y acotada inferiormente (por 0).

80. $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

SOLUCIÓN: Aplicar el resultado del problema **75** (b):
$$x_n<e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{4}}\cdots e^{\frac{1}{2^n}}=e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=e^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}<e$$

luego es acotada superiormente. Resulta obvio que es creciente, puesto que cada término se consigue del anterior multiplicando por un número estrictamente mayor que 1:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$$

81. $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, ..., $x_n = \sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n \text{ raíces}}}$, ...

SOLUCIÓN: La sucesión $(x_n)_n$ está definida por $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Veamos por inducción que está acotada por 2: $x_n \leqslant 2\ \forall n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es cierto, porque $x_1 = \sqrt{2} < 2$. Si es cierto para $n \in \mathbb{N}$, entonces, aplicando la hipótesis de inducción:

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \leqslant \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

luego también es cierto para $n+1$.

Veamos que es monótona creciente, también por inducción, es decir, que $x_n \leqslant x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es cierto: $x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2$. Si es cierto para $n \in \mathbb{N}$, veamos que también lo es para $n+1$: $x_{n+1} \leqslant x_{n+2}$. Efectivamente:

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \underbrace{\leqslant}_{\text{hip. inducción}} \sqrt{2+x_{n+1}} = x_{n+2}$$

Aplicando el criterio de Cauchy, demostrar la convergencia de las siguientes sucesiones:

82. $x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n$, donde $|a_k| < M$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ y $|q| < 1$.

SOLUCIÓN: Sea $p, n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| = |a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \cdots + a_{n+p}q^{n+p}| \leqslant \\ |a_{n+1}| \cdot |q|^{n+1} + |a_{n+2}| \cdot |q^{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \cdot |q|^{n+p} \leqslant \\ M(|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \cdots + |q|^{n+p}) \leqslant M\frac{|q|^{n+1}}{1-|q|} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|x_{n+p} - x_n|$ se acota por una sucesión que depende exclusivamente de n (no aparece el término p) y además converge a 0 (en virtud de que $|q| < 1$). Esto prueba que $(x_n)_n$ es de Cauchy.

83. $x_n = \frac{\operatorname{sen} 1}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2}{2^2} + \cdots + \frac{\operatorname{sen} n}{2^n}$.

SOLUCIÓN: Razonemos como en el ejercicio anterior, intentando acotar $|x_{n+p} - x_n|$ por una sucesión que sólo dependa de n y que converja a 0:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\operatorname{sen}(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\operatorname{sen}(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leqslant \\ \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

84. $x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$.

SOLUCIÓN: Aplicar $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ para convertir a una suma telescópica:

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| \leqslant \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \\ + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \\ = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \\ \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \\ = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n}\end{aligned}$$

85. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

Indicación: Aplicar la desigualdad $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

SOLUCIÓN: Razonamos con antes, aplicando la indicación:

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)^2} + \frac{1}{(n+p)^2} < \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n}\end{aligned}$$

86. Una sucesión x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ se dice que es de variación acotada, si existe un número C tal que

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < C \ (n = 2, 3, \ldots).$$

Demostrar que una sucesión de variación acotada es convergente. Dar un ejemplo de una sucesión convergente que no sea de variación acotada.

SOLUCIÓN: La idea es que si la suma de una cantidad arbitraria de números positivos es acotada, entonces a partir de un cierto momento tienen ser muy pequeños.

Definamos la sucesión $(y_n)_n$ del siguiente modo: $y_1 = 0$, $y_2 = y_1 + |x_2 - x_1|$, $y_3 = y_2 + |x_3 - x_2|$, y en general $y_n = y_{n-1} + |x_n - x_{n-1}|$. Es obvio que $(y_n)_n$ es creciente, y además es acotada: efectivamente, por el hecho de ser de variación acotadada, tenemos

$$\begin{aligned}&y_1 = 0 < C \\ &y_2 = y_1 + |x_2 - x_1| = |x_2 - x_1| < C \\ &y_3 = y_2 + |x_3 - x_2| = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| < C \\ &y_4 = y_3 + |x_4 - x_3| = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_3| < C \\ &\quad \ldots \\ &y_n = y_{n-1} + |x_n - x_{n-1}| = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < C\end{aligned}$$

Por lo tanto $(y_n)_n$ es convergente, es decir, es una sucesión de Cauchy. Pero las diferencias de los valores de $(y_n)_n$ coinciden casi con las de $(x_n)_n$:

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &\leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &= y_{n+p} - y_{n+p-1} + y_{n+p-1} - y_{n+p-2} + \cdots + y_{n+1} - y_n \\ &= y_{n+p} - y_n = |y_{n+p} - y_n|\end{aligned}$$

De esta última desigualdad se desprende que, siendo $(y_n)_n$ de Cauchy, también lo es $(x_n)_n$.

Veamos un ejemplo de una sucesión convergente que no es de variación acotada. Por ejemplo, definir $(x_n)_n$ de la siguiente manera:

$$x_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Entonces $x_{n+1} = x_n + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ y por lo tanto

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ahora aplicamos el resultado del ejercicio **10.1**, apartado (b), donde se demostró que la última suma es superior a $\sqrt{n}$, de modo que

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| > \sqrt{n}$$

y en consecuencia $(x_n)_n$ **no** es de variación acotada. Sin embargo, la sucesión es convergente, por las siguientes razones:

(a) La subsucesión de los impares es monótona decreciente: $x_{2n+1} \leqslant x_{2n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) La subsucesión de los pares es monótona creciente: $x_{2n} \geqslant x_{2n-2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) La subsucesión de los impares es superior a la subsucesión de los pares: $x_{2n} \leqslant x_{2n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(d) La diferencia entre ambas subsucesiones converge a cero: $x_{2n+1} - x_{2n} \to 0$.

Vamos a demostrar las cuatro afirmaciones, que visualmente parecen bastante evidentes (hacer un dibujo donde se ilustren los saltos alternativos, hacia adelante y hacia atrás, que va haciendo la sucesión).

La sucesión de los impares se comporta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= x_{2n} + (-1)^{2n}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ &= x_{2n-1} + (-1)^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{2n}} + (-1)^{2n}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ &= x_{2n-1} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, se desprende que $x_{2n+1} < x_{2n-1}$ y por lo tanto $(x_{2n-1})_n$ es decreciente.

Análogamente, la sucesión de los pares se comporta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_{2n+2} &= x_{2n+1} + (-1)^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{2n+2}} \\ &= x_{2n} + (-1)^{2n}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + (-1)^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{2n+2}} \\ &= x_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} > \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$, se desprende que $x_{2n+2} > x_{2n}$ y por lo tanto $(x_{2n})_n$ es creciente.

La diferencia entre la sucesión de los pares y los impares es $x_{2n+1} - x_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, luego converge a cero y además $x_{2n+1} > x_{2n}$.

87. Explicar qué significa que para una sucesión dada no se verifica el criterio de Cauchy.

SOLUCIÓN: La negación del criterio de Cauchy para una sucesión $(x_n)_n$ significa que existe un $\varepsilon > 0$ y dos subsucesiones $(x_{p_n})_n$, $(x_{q_n})_n$ que están separadas por ε: $|x_{p_n} - x_{q_n}| > \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

88. Aplicando el criterio de Cauchy, demostrar que la sucesión

$$x_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

es divergente.

SOLUCIÓN: Vamos a aplicar el ejercicio **87**, encontrando dos subsucesiones uniformemente separadas:

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \overbrace{\cdots}^{n} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \overbrace{\cdots}^{n} + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

90. Demostrar que una sucesión monótona es convergente, si es convergente alguna subsucesión de la misma.

SOLUCIÓN: Sea $(x_n)_n$ una sucesión monótona decreciente (para el caso creciente el razonamiento es similar, o usar $(-x_n)_n$), y supongamos que hay una subsucesión $(x_{p_n})_n \to x$. Por un lado, probemos que $x_n \geqslant x\ \forall n \in \mathbb{N}$. Efectivamente, fijado un entero $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar un $k \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que $n < p_k$, y por ser $(x_n)_n$ decreciente se desprende $x_{p_k} \leqslant x_n$. Pero x_{p_k} es mayor o igual que x, luego también lo es x_n: $x_n \geqslant x$. Por último, probemos que la sucesión completa $(x_n)_n$ converge mediante la definición.

Dado $\varepsilon > 0$, puesto que $(x_{p_n})_n$ converge a x, existe un n_0 tal que $0 \leqslant x_{p_n} - x < \varepsilon$ $\forall n \geqslant n_0$. Vamos a probar que $|x_n - x| < \varepsilon\ \forall n \geqslant p_{n_0}$. Efectivamente, si $n \geqslant p_{n_0}$, entonces:

$$0 < x_n - x < x_{p_{n_0}} - x < \varepsilon$$

91. Demostrar que si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

SOLUCIÓN: Es consecuencia de la desigualdad triangular: $||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|$

92. Si $x_n \to a$, ¿qué se puede afirmar respecto del límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}?$$

SOLUCIÓN: Si $a \neq 0$, entonces $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to \frac{a}{a} = 1$. Pero si $a = 0$, se abre una casuística:

(a) Si $x_n = \frac{1}{n}$ se tiene $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to 1$

(b) Si $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ se tiene $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to -1$

(c) Si $x_n = \frac{1}{n!}$ se tiene $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to 0$.

(d) Si $x_n = b^n$, con $|b| < 1$, se tiene $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to b$.

Por lo tanto, cualquier número de $[-1, 1]$ puede ser el límite de $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_n$

Sean ahora b, c dos números reales diferentes, $0 < |b| < 1$, $0 < |c| < 1$, y definir $(x_n)_n$ de este modo: $x_{2n} = b^n$, $x_{2n-1} = c^n$ $(n \in \mathbb{N})$. La sucesión $(x_n)_n$ converge a 0, porque tanto la subsucesión de los pares como la de los impares converge a 0. Si ponemos $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$, entonces

$$y_{2n} = \frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} = \frac{c^{n+1}}{b^n} = c\left(\frac{c}{b}\right)^n$$

$$y_{2n-1} = \frac{x_{2n}}{x_{2n-1}} = \frac{b^n}{c^n} = \left(\frac{b}{c}\right)^n$$

Como $b \neq c$, alguna de las dos subsucesiones anteriores diverge (no es acotada), luego también $(y_n)_n = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_n$ diverge.

Una posibilidad que queda excluida es que $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_n$ converja a un número real x con $|x| > 1$, porque en ese caso podríamos encontrar otro número real y, con $1 < |y| < |x|$, y un entero n_0 tal que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > |y| \; \forall n \geqslant n_0$$

(aquí estamos aplicando que el módulo de la sucesión también converge, ver ejercicio anterior **91**). Entonces, razonando recursivamente:

$$|x_{n+1}| > |y||x_n| > |y|^2|x_{n-1}| > \cdots > |y|^{n-n_0+1}|x_{n_0}|$$

Esta relación sería válida para cualquier $n \geqslant n_0$, y puesto que $|y| > 1$, implicaría que $(x_n)_n$ *no* es acotada, lo cual contradice la hipótesis inicial de que $(x_n)_n$ era convergente a 0.

93. Demostrar que una sucesión numérica convergente es acotada.

SOLUCIÓN: Como $(x_n)_n$ converge a x, existe un n_0 tal que $|x_n - x| < 1 \; \forall n \geqslant n_0$, por lo tanto $|x_n| < 1 + |x| \; \forall n \geqslant n_0$. De este modo quedan acotados los valores x_n, $n \geqslant n_0$, y para el resto encontramos el máximo:

$$M = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|\}$$

de modo que una cota para toda la sucesión es $\max\{M, |x| + 1\}$

94. Demostrar que una sucesión numérica convergente, o bien alcanza el supremo, o bien alcanza el ínfimo, o bien el uno y el otro. Dar ejemplos de sucesiones de los tres tipos.

SOLUCIÓN: Sea $(x_n)_n$ convergente a x. Para cada entero $k \in \mathbb{N}$, dividir el rango $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en tres conjuntos disjuntos de la siguiente manera $M = A_k \cup B_k \cup C_k$:

$$M = \left[M \cap \left(-\infty, x - \frac{1}{k}\right)\right] \cup \left[M \cap \left[x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right]\right] \cup \left[M \cap \left(x + \frac{1}{k}, +\infty\right)\right]$$

Es decir, los inferiores a $x - \frac{1}{k}$, los que se encuentran en $\left[x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right]$, y los superiores a $x + \frac{1}{k}$. Observar que para algún k suficientemente grande los conjuntos A_k y C_k no pueden ser simultáneamente vacíos, porque si fueran siempre vacíos para todo k, la sucesión $(x_n)_n$ se reduciría al número x, y se despredería el resultado propuesto trivialmente. Fijemos por lo tanto un $k \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande de modo que o bien A_k o C_k sean no vacíos. Observar que ambos conjuntos contienen a lo sumo una cantidad finita de elementos: en caso contrario, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, podríamos encontrar una subsucesión convergente a un número *distinto* de x, y $(x_n)_n$ *no* sería convergente.

Se abre la siguiente casuística, que cubre todas las posibilidades;

(a) Si A_k es no vacío, entonces el ínfimo de M se alcanza en alguno de los finitos elementos que componen A_k.

(b) Si C_k es no vacío, entonces el supremo de M se alcanza en alguno de los finitos elementos de C_k.

(c) Si A_k y C_k son ambos no vacíos, entonces el ínfimo de M se alcanza en alguno de los elementos de A_k, y el supremo de M se alcanza en alguno de los elementos de C_k.

95. Demostrar que una sucesión numérica x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ que tiende hacia $+\infty$, necesariamente alcanza el ínfimo.

SOLUCIÓN: Sea M el rango de la sucesión $(x_n)_n$: $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como $x_n \to +\infty$, existe un n_0 tal que $x_n > |x_1| + 1$ para $n > n_0$, por lo que el conjunto $A = \{x_n : x_n \leqslant |x_1| + 1\}$ es finito y no vacío (es no vacío porque al menos $x_1 \in M$). Por lo tanto el ínfimo M se alcanza en el mínimo de A, que existe porque A es finito y no vacío.

Hallar el término máximo de la sucesión x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, si

96. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$

SOLUCIÓN: Sabemos que esta sucesión converge a 0, y que es monótona decreciente, porque

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9}=\frac{8}{9}<1\ \forall n\geqslant 3$$

Por lo tanto, $0<x_n<x_3\ \forall n\geqslant 3$, por lo que el máximo se alcanza en el máximo de los tres valores $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$, $x_3=\frac{9}{8}$, es decir en $\frac{9}{8}$.

97. $x_n=\frac{\sqrt{n}}{100+n}$

SOLUCIÓN: Esta sucesión converge a cero, y es positiva, así que en algún momento alcanza el máximo:

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{n+1}}{100+n+1}\cdot\frac{100+n}{\sqrt{n}}\right)^2=\frac{(100+n)^2(n+1)}{n(101+n)^2}$$

Escribir $100+n=a$. La última expresión es menor que 1 si y sólo si:

$$\begin{gathered}\frac{a^2(n+1)}{n(a+1)^2}<1\iff 1+\frac{1}{n}<\left(1+\frac{1}{a}\right)^2\iff\\ \frac{1}{n}<\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}\iff\frac{1}{n}<\frac{1+2a}{a^2}=\frac{2n+201}{(100+n)^2}\iff\\ 100^2+200n+n^2<2n^2+201n\iff 100^2<n(n+1)\end{gathered}$$

Esta expresión es cierta si y sólo si $n\geqslant 100$. En resumen:

(a) $x_{n+1}<x_n$ si $n\geqslant 100$

(b) $x_n<x_{n+1}$ si $1\leqslant n\leqslant 99$

y esto significa que el máximo buscado se alcanza en $x_{100}=\frac{\sqrt{100}}{100+100}=\frac{1}{20}$

98. $x_n=\frac{1000^n}{n!}$

SOLUCIÓN:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{1000^n}=\frac{1000}{n+1}$$

Por lo tanto si $1\leqslant n\leqslant 998\Longrightarrow x_{n+1}>x_n$. Si $n=999\Longrightarrow x_{n+1}=x_n$, y si $n\geqslant 1000\Longrightarrow x_{n+1}<x_n$. En resumen, el máximo de $(x_n)_n$ se alcanza en $x_{999}=\frac{1000^{999}}{999!}$

Hallar el término mínimo de la sucesión x_n $(n=1,2,\ldots)$, si

99. $x_n=n^2-9n-100$

SOLUCIÓN: Formar las diferencias $x_{n+1}-x_n$:

$$x_{n+1}-x_n=(n+1)^2-9(n+1)-100-n^2+9n+100=2n-8\geqslant 0\iff n\geqslant 4$$

El mínimo buscado se alcanza en $x_4=16-9\cdot 4-100=-120$

100. $x_n=n+\frac{100}{n}$

SOLUCIÓN: Formar como antes las diferencias $x_{n+1}-x_n$:

$$x_{n+1}-x_n=1-\frac{100}{n(n+1)}\geqslant 0\iff\frac{100}{n(n+1)}\leqslant 1\iff 10^2\leqslant n(n+1)$$

Esta última expresión es válida si y sólo si $n\geqslant 10$. El mínimo se alcanza para $x_{10}=20$.

Para la sucesión x_n $(n=1,2,\ldots)$, hallar $\inf_n x_n$, $\sup_n x_n$, $\liminf_n x_n$, $\limsup_n x_n$, si:

101. $x_n=1-\frac{1}{n}$.

SOLUCIÓN: $(x_n)_n$ converge a 1, luego $\limsup_n x_n=\liminf_n x_n=1$. Además se trata de una sucesión creciente, luego $\inf_n x_n=x_1=0$, $\sup_n x_n=1$.

101.1. $x_n = (-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)$

SOLUCIÓN: La sucesión de los pares $x_{2n} = -2 - \frac{3}{2n} \to -2$ y es creciente, mientras que la de los impares $x_{2n-1} = 2 + \frac{3}{2n-1} \to 2$ y es decreciente. Por lo tanto:

(a) $\inf_n x_n = \inf_n x_{2n} = x_2 = -2 - \frac{3}{2} = \frac{-7}{2}$.

(b) $\sup_n x_n = \sup_n x_{2n-1} = x_1 = 5$.

(c) $\liminf_n x_n = \lim_n x_{2n} = -2$.

(d) $\limsup_n x_n = \lim_n x_{2n-1} = 2$.

102. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$.

SOLUCIÓN: La sucesión de los pares es $x_{2n} = \frac{1}{2n} + 1 \to 1$ y es decreciente. La sucesión de los impares es $x_{2n-1} = \frac{-1}{2n-1} \to 0$ y es creciente. Por lo tanto:

(a) $\inf_n x_n = \inf_n x_{2n-1} = x_1 = -1$.

(b) $\sup_n x_n = \sup_n x_{2n} = x_2 = \frac{3}{2}$.

(c) $\liminf_n x_n = \lim_n x_{2n-1} = 0$.

(d) $\limsup_n x_n = \lim_n x_{2n} = 1$.

103. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$

SOLUCIÓN: La expresión $\cos\frac{n\pi}{2}$ tiene periodo 4, así que formamos 4 porciones:

$$\begin{aligned}
x_{4n-3} &= 1 + \frac{4n-3}{4n-2}\cos\frac{(4n-3)\pi}{2} = 1 + \frac{4n-3}{4n-2}\cos\frac{-3\pi}{2} = 1\\
x_{4n-2} &= 1 + \frac{4n-2}{4n-1}\cos\frac{(4n-2)\pi}{2} = 1 + \frac{4n-2}{4n-1}\cos(-\pi) = 1 - \frac{4n-2}{4n-1}\\
x_{4n-1} &= 1 + \frac{4n-1}{4n}\cos\frac{(4n-1)\pi}{2} = 1 + \frac{4n-1}{4n}\cos\frac{-\pi}{2} = 1\\
x_{4n} &= 1 + \frac{4n}{4n+1}\cos\frac{4n\pi}{2} = 1 + \frac{4n}{4n+1}\cos\frac{2n\pi}{2} = 1 + \frac{4n}{4n+1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

(a) $(x_{4n-2})_n$ es decreciente y converge a 0

(b) $(x_{4n})_n)$ es creciente y converge a 2

luego

(a) $\inf_n x_n = \liminf_n x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{4n-2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{4n-2}{4n-1}\right) = 0$

(b) $\sup_n x_n = \limsup_n x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{4n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{4n}{4n+1}\right) = 2$

104. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

SOLUCIÓN: Formamos 4 porciones como antes:

$$\begin{aligned}
x_{4n-3} &= 1 + 2(-1)^{4n-2} + 3\cdot(-1)^{\frac{(4n-3)(4n-2)}{2}} = 3 + 3\cdot(-1)^{(4n-3)(2n-1)} = 0\\
x_{4n-2} &= 1 + 2(-1)^{4n-1} + 3\cdot(-1)^{\frac{(4n-2)(4n-3)}{2}} = -1 + 3\cdot(-1)^{(2n-1)(4n-3)} = -4\\
x_{4n-1} &= 1 + 2(-1)^{4n} + 3\cdot(-1)^{\frac{(4n-1)(4n-2)}{2}} = 3 + 3\cdot(-1)^{(4n-1)(2n-1)} = 0\\
x_{4n} &= 1 + 2(-1)^{4n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{4n(4n-1)}{2}} = -1 + 3\cdot(-1)^{2n(4n-1)} = 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\liminf_n x_n = \inf_n x_n = -4$$

$$\limsup_n x_n = \sup_n x_n = 2$$

105. $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$

SOLUCIÓN: Formamos 3 porciones, porque $\left(\cos \frac{2n\pi}{3}\right)_n$ tiene periodo 3:

$$\begin{aligned}
x_{3n} &= \frac{3n-1}{3n+1} \cos 2n\pi = \frac{3n-1}{3n+1} = 1 - \frac{2}{3n+1} \\
x_{3n+1} &= \frac{3n}{3n+2} \cos \frac{2(3n+1)\pi}{3} = \frac{3n}{3n+2} \cos \left(2n\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \frac{-3n}{2(3n+2)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n+2} \\
x_{3n+2} &= \frac{3n+1}{3n+3} \cos \frac{2(3n+2)\pi}{3} = \frac{3n+1}{3n+3} \cos \left(2n\pi + \frac{4\pi}{3}\right) \\
&= -\frac{3n+1}{2(3n+3)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n+3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

(a) $(x_{3n})_n$ es creciente y converge a 1

(b) $(x_{3n+1})_n$ es decreciente y converge a $-\frac{1}{2}$

(c) $(x_{3n+2})_n$ es decreciente y converge a $-\frac{1}{2}$

luego

$$\limsup_n x_n = \sup_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_{3n} = 1$$

$$\liminf_n x_n = \inf_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_{3n+2} = -\frac{1}{2}$$

106. $x_n = (-1)^n n$

SOLUCIÓN: $(x_n)_n$ no está acotada ni superior ni inferiormente, luego

$$\inf_n x_n = \liminf_n x_n = -\infty, \ \sup x_n = \limsup_n x_n = +\infty$$

107. $x_n = -n[2 + (-1)^n]$

SOLUCIÓN: La sucesión no está acotada inferiormente, luego

$$\inf_n x_n = \liminf_n x_n = \limsup_n x_n = -\infty$$

El supremo se alcanza en $x_1 = -1$

108. $x_n = n^{(-1)^n}$

SOLUCIÓN: La sucesión de los pares es $x_{2n} = 2n$, y la de los impares $x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$. Por lo tanto

$$\limsup_n x_n = \sup_n x_n = +\infty$$

$$\liminf_n x_n = \inf_n x_n = 0$$

109. $x_n = 1 + n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$

SOLUCIÓN: Formamos 4 porciones, ya que $\left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}\right)_n$ tiene periodo 4.

$$
\begin{aligned}
x_{4n} &= 1 + 4n \operatorname{sen} 2n\pi = 1 \\
x_{4n+1} &= 1 + (4n+1) \operatorname{sen} \frac{(4n+1)\pi}{2} = 4n+2 \\
x_{4n+2} &= 1 + (4n+2) \operatorname{sen} \frac{(4n+2)\pi}{2} = 1 \\
x_{4n+3} &= 1 + (4n+3) \operatorname{sen} \frac{(4n+3)\pi}{2} = 1 - (4n+3) = -4n-2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\inf_n x_n = \liminf_n x_n = -\infty$$

$$\sup_n x_n = \limsup_n x_n = +\infty$$

110. $x_n = \frac{1}{n-10{,}2}$

SOLUCIÓN: $(x_n)_n$ converge a 0, por lo tanto $\limsup_n x_n = \liminf x_n = 0$. Por otro lado, para $n \geqslant 11$ la sucesión es decreciente, y para $1 \leqslant n \leqslant 10$ es creciente. El supremo se alcanza para $x_{11} = \frac{1}{0{,}8} = \frac{5}{4}$. El ínfimo se alcanza en $x_1 = \frac{1}{1-10{,}2} = -\frac{1}{9{,}2} = -\frac{5}{46}$

Hallar $\liminf_n x_n$ y $\limsup_n x_n$, si:

111. $x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3}$

SOLUCIÓN: Formamos 3 porciones:

$$
\begin{aligned}
x_{3n} &= \frac{9n^2}{1+9n^2} \cos \frac{2 \cdot 3n\pi}{3} = \frac{9n^2}{1+9n^2} = 1 - \frac{1}{1+9n^2} \\
x_{3n+1} &= \frac{(3n+1)^2}{1+(3n+1)^2} \cos \frac{2(3n+1)\pi}{3} = \frac{(3n+1)^2}{1+(3n+1)^2} \cos \frac{2\pi}{3} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(3n+1)^2}{1+(3n+1)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2[1+(3n+1)^2]} \\
x_{3n+2} &= \frac{(3n+2)^2}{1+(3n+2)^2} \cos \frac{2(3n+2)\pi}{3} = \frac{(3n+2)^2}{1+(3n+2)^2} \cos \frac{4\pi}{3} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(3n+2)^2}{1+(3n+2)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2[1+(3n+2)^2]}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\limsup_n x_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2}{1+9n^2} = 1 \\
\liminf_n x_n &= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2} \cdot \frac{(3n+1)^2}{1+(3n+1)^2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

112. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}$.

SOLUCIÓN: Formamos 8 porciones:

$$
\begin{aligned}
x_{8n} &= \left(1+\frac{1}{8n}\right)^{8n} + \operatorname{sen} 2n\pi = \left(1+\frac{1}{8n}\right)^{8n}\\
x_{8n-1} &= -\left(1+\frac{1}{8n-1}\right)^{8n-1} + \operatorname{sen}\frac{(8n-1)\pi}{4} = -\left(1+\frac{1}{8n-1}\right)^{8n-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\\
x_{8n-2} &= \left(1+\frac{1}{8n-2}\right)^{8n-2} + \operatorname{sen}\frac{(8n-2)\pi}{4} = \left(1+\frac{1}{8n-2}\right)^{8n-2} - 1\\
x_{8n-3} &= -\left(1+\frac{1}{8n-3}\right)^{8n-3} + \operatorname{sen}\frac{(8n-3)\pi}{4} = -\left(1+\frac{1}{8n-3}\right)^{8n-3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\\
x_{8n-4} &= \left(1+\frac{1}{8n-4}\right)^{8n-4} + \operatorname{sen}\frac{(8n-4)\pi}{4} = \left(1+\frac{1}{8n-4}\right)^{8n-4}\\
x_{8n-5} &= -\left(1+\frac{1}{8n-5}\right)^{8n-5} + \operatorname{sen}\frac{(8n-5)\pi}{4} = -\left(1+\frac{1}{8n-5}\right)^{8n-5} + \frac{1}{\sqrt{2}}\\
x_{8n-6} &= \left(1+\frac{1}{8n-6}\right)^{8n-6} + \operatorname{sen}\frac{(8n-6)\pi}{4} = \left(1+\frac{1}{8n-6}\right)^{8n-6} + 1\\
x_{8n-7} &= -\left(1+\frac{1}{8n-7}\right)^{8n-7} + \operatorname{sen}\frac{(8n-7)\pi}{4} = -\left(1+\frac{1}{8n-6}\right)^{8n-6} + \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\liminf_n x_n &= \lim_{n\to\infty} x_{8n-1} = -e - \frac{1}{\sqrt{2}}\\
\limsup_n x_n &= \lim_{n\to\infty} x_{8n-6} = e + 1
\end{aligned}
$$

113. $x_n = \frac{n}{n+1}\operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{4}$

SOLUCIÓN: Formamos 4 porciones, ya que la sucesión $\left(\operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{4}\right)_n$ tiene periodo 4:

$$
\begin{aligned}
x_{4n} &= \frac{4n}{4n+1}\operatorname{sen}^2\frac{4n\pi}{4} = \frac{4n}{4n+1}\operatorname{sen}^2 n\pi = 0\\
x_{4n-1} &= \frac{4n-1}{4n}\operatorname{sen}^2\frac{(4n-1)\pi}{4} = \frac{4n-1}{4n}\operatorname{sen}^2\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4n-1}{4n}\\
x_{4n-2} &= \frac{4n-2}{4n-1}\operatorname{sen}^2\frac{(4n-2)\pi}{4} = \frac{4n-2}{4n-1}\operatorname{sen}^2\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4n-2}{4n-1}\\
x_{4n-3} &= \frac{4n-3}{4n-2}\operatorname{sen}^2\frac{(4n-3)\pi}{4} = \frac{4n-3}{4n-2}\operatorname{sen}^2\left(n\pi-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4n-3}{4n-2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\liminf_n x_n &= \lim_{n\to\infty} x_{4n-1} = \frac{1}{2}\\
\limsup_n x_n &= \lim_{n\to\infty} x_{4n-2} = 1
\end{aligned}
$$

114. $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n\cdot(-1)^n}}$

SOLUCIÓN: Formamos 2 porciones:

$$
\begin{aligned}
x_{2n} &= \sqrt[2n]{1+2^{2n\cdot(-1)^{2n}}} = \sqrt[2n]{1+2^{2n}} = 2\sqrt[2n]{1+2^{-2n}} \to 2\\
x_{2n-1} &= \sqrt[2n-1]{1+2^{(2n-1)\cdot(-1)^{2n-1}}} = \sqrt[2n-1]{1+2^{-(2n-1)}} \to 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\liminf_n x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 1$$
$$\limsup_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = 2$$

115. $x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}$

SOLUCIÓN: Formemos 3 porciones:

$$\begin{aligned} x_{3n} &= \cos^{3n} 2n\pi = 1 \\ x_{3n-1} &= \cos^{3n-1} \frac{2(3n-1)\pi}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{3n-1}} \\ x_{3n-2} &= \cos^{3n-2} \frac{2(3n-2)\pi}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n-2} = \frac{(-1)^{n}}{2^{3n-2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\liminf_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_{3n-1} = 0$$
$$\limsup_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_{3n} = 1$$

Hallar los límites parciales de las siguientes sucesiones:

116. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}$

SOLUCIÓN: La sucesión de los pares es $(x_{2n})_n = \left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)_n$, y la de los impares $(x_{2n-1})_n = \left(\frac{1}{2^n}\right)_n$, por lo tanto

$$\limsup_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = 1$$
$$\liminf_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 0$$

117.

$$\begin{aligned} &1+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \\ &1+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \\ &1+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \\ &1+\frac{1}{5}, \frac{1}{2}+\frac{1}{5}, \frac{1}{3}+\frac{1}{5}, \frac{1}{4}+\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &1+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \frac{1}{3}+\frac{1}{n}, \frac{1}{4}+\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: En este triángulo, la primera columna es una subsucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)_n$, ignorando el primer término. La segunda columna es una subsucesión de $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)_n$, exceptuando también el primer término. En general, la k-ésima columna una subsucesión de $\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right)_n$, ignorando el primer término. La diagonal es una subsucesión de $\left(\frac{1}{n+1}\right)_n$. Por lo tanto, al menos los límites parciales están contenidos en el conjunto $A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\right\}$. Vamos a demostrar que no hay más límites parciales que los indicados en el conjunto A, es decir, que cualquier subsucesión convergente de $(x_n)_n$ converge a un elemento de A.

Sea $(x_{p_n})_n$ una subsucesión convergente a x. Se trata de comprobar que $x \in A$. Observar que los términos $(x_{p_n})_n$ no pueden estar confinados en un triángulo acotado.

Si $(x_{p_n})_n$ contiene infinitos términos de la diagonal, entonces tiene que converger a 0, y $0 \in A$.

Si $(x_{p_n})_n$ sólo contiene una cantidad *finita* de términos de la diagonal, entonces para n_0 suficientemente grande podemos expresar $x_{p_n} = \frac{1}{q_n} + \frac{1}{r_n}$, con $q_n, r_n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q_n < r_n$, $\forall n \geqslant n_0$, y $(r_n)_n$ creciente (no necesariamente *estrictamente* creciente). Observar que r_n apunta a la fila del triángulo, y q_n a la columna, es decir x_{p_n} es exactamente la r_n-ésima fila, y la q_n-ésima columna del triángulo, y en consecuencia los enteros r_n no puede reducirse a un conjunto finito, porque eso significaría que la subsucesión (x_{p_n}) estaría confinada en un subtriángulo acotado, cosa que sabemos es imposible. Como además $(r_n)_n$ es creciente, se desprende $\frac{1}{r_n} \to 0$. En resumen: $(x_{p_n})_n$ es convergente, suma de dos sucesiones, una de las cuales converge (a 0). Entonces la otra $\left(\frac{1}{q_n}\right)_n$ también converge. Sea Q el rango de esta sucesión: $Q = \left\{\frac{1}{q_n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Tenemos dos posibilidades:

(a) Q es infinito: entonces $\frac{1}{q_n} \to 0$, porque sabemos de antemano que se trata de una sucesión convergente. Por lo tanto, $x = 0 \in A$.

(b) Q es finito: una sucesión convergente de rango *finito* tiene que ser constante a partir de un punto, digamos $x_{q_n} = \frac{1}{q}$ $\forall n \geqslant q_0$ y para algún entero q. De ahí se desprende que $x = \frac{1}{q}$, que también es un elemento de A. Con ello la demostración quedaría completa.

118. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \cdots$

SOLUCIÓN: Como en el ejercicio anterior, escribamos la sucesión de modo triangular:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}, \\
\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \\
\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \\
\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}
\end{array}$$

La fila n-ésima del triángulo está compuesta por n racionales que cubren uniformemente el intervalo $[0, 1]$, y donde cada término está a una distancia $\frac{1}{n}$ del siguiente. Por lo tanto, si fijamos un $x \in [0, 1]$, podemos encontrar un elemento en la fila n-ésima (digamos, x_{p_n}) tal que $|x_{p_n} - x| \leqslant \frac{1}{n}$. Los elementos (p_n) forman una sucesión de enteros estrictamente creciente, así que $(x_{p_n})_n$ es realmente una subsucesión, y $x_{p_n} \to x$. Es decir, cualquier $x \in [0, 1]$ es un límite parcial.

119. $x_n = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$.

SOLUCIÓN: La sucesión de los pares es $x_{2n} = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right) + 2 \to 5$, y la de los impares $x_{2n-1} = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) - 2 \to 1$. Por tanto, los límites parciales se reducen a $\{1, 2\}$.

120. $x_n = \frac{1}{2}\left[(a + b) + (-1)^n(a - b)\right]$.

SOLUCIÓN: La sucesión de los pares es $x_{2n} = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = a \to a$, y la de los impares $x_{2n-1} = \frac{1}{2}[a + b - (a - b)] = b \to b$, luego los límites parciales se reducen a $\{a, b\}$.

121. Dar un ejemplo de una sucesión numérica cuyos límites parciales sean unos números dados

$$a_1, a_2, \ldots, a_p.$$

SOLUCIÓN: Valdría una sucesión que tomara cada uno de los p valores infinitas veces. Por ejemplo, tomando los restos de módulo p: $t_n = \mod (n,p)$, definir $x_n = a_{t_n+1}$. Podemos formar p subsucesiones formadas por constantes:

$$\begin{aligned}(x_{np+1})_n &= (a_1)_n\\ (x_{np+2})_n &= (a_2)_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (x_{np+(p-1)})_n &= (a_{p-1})_n\\ (x_{np+p})_n &= (a_p)_n\end{aligned}$$

Cada subsucesión converge a los a_k, $1 \leqslant k \leqslant p$, y se trata de subsucesiones disjuntas dos a dos, que cubren la totalidad de los enteros. Ello implica que los puntos $\{a_1, \dots, a_p\}$ son *exactamente* los límites parciales de $(x_n)_n$ (aquí es vital que los a_k formen un conjunto finito).

122. Dar un ejemplo de una sucesión numérica para la cual, todos los términos de una sucesión numérica dada

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sean sus límites parciales. ¿Qué límites parciales más tiene necesariamente la sucesión construida?

SOLUCIÓN: Definir la sucesión $(x_n)_n$ mediante el siguiente triángulo:

$$\begin{aligned}&a_1,\\ &a_1, a_2,\\ &a_1, a_2, a_3,\\ &a_1, a_2, a_3, a_4,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\end{aligned}$$

La columna k-ésima de este triángulo forma una subsucesión (constante) que converge a a_k. Por lo tanto, cada uno de los a_k es un límite parcial de $(x_n)_n$.

Vamos a demostrar que los puntos de acumulación de $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ también son límites parciales de $(x_n)_n$: sea x un punto de acumulación de A. Entonces podemos encontrar una subsucesión $(a_{p_n})_n$ que converge a x. Dado que los a_k son límites parciales de $(x_n)_n$, razonando por inducción se puede demostrar que existe otra subsucesión $(x_{q_n})_n$ tal que $|x_{q_n} - a_{p_n}| < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$|x_{q_n} - x| \leqslant |x_{q_n} - a_{p_n}| + |a_{p_n} - x| < \frac{1}{n} + |a_{p_n} - x|$$

Esta desigualdad implica que $x_{q_n} \to x$, luego x es un límite parcial de $(x_n)_n$.

Vamos a demostrar que si x *no* es un punto de acumulación A, y si $x \notin A$, entonces x *no* es un límite parcial de $(x_n)_n$. Efectivamente, si x cumple ambas condiciones, entonces podemos encontrar un ε tal que $|a_n - x| > \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Pero tal y como se ha construido la sucesión $(x_n)_n$, cada x_n es igual a algún $a_{k(n)}$ (aquí $(a_{k(n)})_n$ podría *no* ser una subsucesión). Por lo tanto $|x_n - x| = |a_{k(n)} - x| > \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia x no puede ser el límite de ninguna subsucesión de $(x_n)_n$.

123. Dar un ejemplo de sucesión que:

(a) no tenga límites parciales finitos;

(b) tenga un límite parcial finito único, pero que no sea convergente;

(c) tenga un conjunto infinito de límites parciales;

(d) tenga como límite parcial cualquier número real

SOLUCIÓN: Para el caso (a), definir $x_n = n$.

Para el caso (b), definir $x_{2n} = \frac{1}{n}$, $x_{2n-1} = n$.

Para el caso (c), tomar una sucesión que tome infinitos valores, y aplicar el problema anterior **122**. Por ejemplo $(a_n)_n = (n)_n$.

Para el caso (d), tomar la sucesión $(a_n)_n$ de los números racionales (sabemos que es posible hacerlo porque los racionales es un conjunto numerable), y aplicar de nuevo el problema **122**: los puntos de acumulación de $(a_n)_n$ son todo $\mathbb{R}$.

124. Demostrar que las sucesiones x_n e $y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tienen unos mismos límites parciales.

SOLUCIÓN: Es consecuencia de que $\sqrt[n]{n} \to 1$. Si $(x_{p_n})_n$ es convergente a x, entonces $y_n = x_n \sqrt[p_n]{p_n} \to x \cdot 1 = x$. Recíprocamente, si $y_{p_n} \to y$, entonces $x_{p_n} = \frac{y_{p_n}}{\sqrt[p_n]{p_n}} \to \frac{y}{1} = y$.

127. Supongamos que la sucesión x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ es convergente y que la sucesión y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ es divergente. ¿Qué se puede afirmar respecto de la convergencia de las sucesiones:

(a) $x_n + y_n$

(b) $x_n y_n$

?

SOLUCIÓN: La sucesión $(x_n + y_n)_n$ es divergente. Si fuera convervente entonces $(y_n)_n$ podría expresarse como diferencia de dos sucesiones convergentes: $y_n = (x_n + y_n) - x_n$ y por tanto también sería convergente, lo cual contradice la hipótesis inicial de que $(y_n)_n$ era divergente.

La sucesión $(x_n y_n)_n$ sería divergente si $x_n \to x \neq 0$. Efectivamente, si fuera convergente podríamos poner $y_n = \frac{x_n y_n}{x_n}$, un cociente de dos sucesiones convergentes, donde el denominador converge a $x \neq 0$, que sería convergente también, contradiciendo la hipótesis inicial de que y_n era divergente. En el caso de ser $x_n \to 0$ el producto $(x_n y_n)_n$ podría ser convergente o divergente. Por ejemplo, si $x_n = \frac{1}{n}, y_n = n$, entonces $x_n y_n = 1 \to 1$. Sin embargo, si $y_n = n^2$, entonces $x_n y_n = n$ es una sucesión divergente.

128. Supongamos que las sucesiones x_n e y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ son divergentes. ¿Se puede afirmar que las sucesiones

(a) $x_n + y_n$

(b) $x_n y_n$

son también divergentes?

Poner ejemplos correspondientes.

SOLUCIÓN: La suma y el producto pueden ser convergentes. Por ejemplo, sea $(x_n)_n = (-1)^n$, $(y_n)_n = (-1)^{n+1}$, ambas divergentes. Entonces $(x_n + y_n)_n$ es la sucesión constante $(0)_n$, que es convergente. Si tomamos $(x_n)_n = (y_n)_n = \{(-1)^n\}_n$, entonces el producto es la sucesión constante $(1)_n$, que es convergente.

129. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

y sea y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ una sucesión arbitraria. ¿Se puede afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0?$$

Poner ejemplos correspondientes.

SOLUCIÓN: En general, no se puede afirmar. Por ejemplo, si $(x_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$, $(y_n) = (n)_n$, entonces $(y_n)_n = (1)_n$ que no converge a 0. Obviamente, si $(y_n)_n$ es una sucesión convergente, entonces el producto $(x_n y_n)_n$ sí que converge a 0.

130. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0,$$

¿Se deduce de aquí que, o bien $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, o bien $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$?

Examinar el ejemplo: $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, $y_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

SOLUCIÓN: Con el ejemplo propuesto, ninguna de las sucesiones son convergentes, pero su producto es la sucesión constante $(0)_n$.

131. Demostrar que

(a) $\liminf_n x_n + \liminf_n y_n \leqslant \liminf_n (x_n + y_n) \leqslant \liminf_n x_n + \limsup_n y_n$

(b) $\liminf_n x_n + \limsup_n y_n \leqslant \limsup_n (x_n + y_n) \leqslant \limsup_n x_n + \limsup_n y_n$

Poner ejemplos para los cuales en estas relaciones se verifiquen las desigualdades estrictas.

SOLUCIÓN: Recordar la definición de límite superior y de límite inferior:

$$\limsup_n x_n = \inf\left\{\sup_{n\geqslant k} x_n : k \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\liminf_n x_n = \sup\left\{\inf_{n\geqslant k} x_n : k \in \mathbb{N}\right\}$$

Una de las ventajas de trabajar con límites superiores e inferiores es que siempre está garantizada su existencia si la sucesión es acotada, lo que facilita el paso al límite en desigualdades y todo tipo de expresiones.

Conviene recordar algunas propiedades importantes, que no demostraremos, poniendo $x = \liminf_n x_n$, $X = \limsup_n x_n$:

(a) Si $(x_n)_n$ está acotada superiormente, tiene límite superior, y si está acotada inferiormente, tiene límite inferior.

(b) La sucesión $(\inf_{n\geqslant k} x_n)_k$ es monótona creciente, y la sucesión $\left(\sup_{n\geqslant k} x_n\right)_k$ es monótona decreciente.

(c) $\limsup_n x_n = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{n\geqslant k} x_n$, $\liminf_n x_n = \lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{n\geqslant k} x_n$ (estos límites existen porque las sucesiones respectivas son monótonas).

(d) Dado $\varepsilon > 0$, en el intervalo $[X + \varepsilon, \infty)$ solo puede haber una cantidad finita de términos x_n, luego hay algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < X + \varepsilon$ $\forall n \geqslant n_0$.

(e) Dado $\varepsilon > 0$, en el intervalo $(-\infty, x - \varepsilon]$ solo puede haber una cantidad finita de términos x_n, luego hay algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x - \varepsilon < x_n$ $\forall n \geqslant n_0$.

(f) Si a partir de un $n_0 \in \mathbb{N}$ es $x_n \leqslant y_n$, entonces

$$\liminf_n x_n \leqslant \liminf y_n$$

$$\limsup_n x_n \leqslant \limsup_n y_n$$

(g) $\liminf_n (x_n + c) = c + \liminf_n x_n$

(h) $\limsup_n (x_n + c) = c + \limsup_n x_n$

(i) Si $c \geqslant 0$, $\limsup_n (cx_n) = c \limsup_n x_n$, $\liminf_n (cx_n) = c \liminf_n x_n$

(j) Si $c \leqslant 0$, $\limsup_n (cx_n) = c \liminf_n x_n$, $\liminf_n (cx_n) = c \limsup_n x_n$

(k) Si a cada $\varepsilon > 0$ se le puede asignar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leqslant c + \varepsilon$ $\forall n \geqslant n_0$, entonces $\limsup_n x_n \leqslant c$

(l) Análogamente, si a cada $\varepsilon > 0$ se le puede asignar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c - \varepsilon \leqslant x_n$ $\forall n \geqslant n_0$, entonces $c \leqslant \liminf_n x_n$

(m) Hay una subsucesión de $(x_n)_n$ que converge a x y otra que converge a X.

(n) Si $(x_{p_n})_n$ es una subsucesión convergente a z, entonces $x \leqslant z \leqslant X$. Es decir, los límites parciales se encuentran entre el límite superior e inferior.

(ñ) $(x_n)_n$ converge si y sólo si $x = X$, es decir, si y sólo si el límite superior es igual al límite inferior.

(o) $\liminf_n x_n = \lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{n\geqslant k} x_n$, $\limsup_n x_n = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{n\geqslant k} x_n$

Para fijar la notación, llamemos $x = \liminf_n x_n$, $y = \liminf_n y_n$, $X = \limsup_n x_n$, $Y = \limsup_n y_n$.

Vamos a demostrar (a). Dado un $\varepsilon > 0$, por la definición de límite inferior, podemos encontrar un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x - \frac{\varepsilon}{2} < x_n \ \forall n \geqslant n_1$. Análogamente, podemos encontrar un $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $y - \frac{\varepsilon}{2} < y_n \ \forall n \geqslant n_2$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, se tiene

$$x + y - \varepsilon < x_n + y_n \ \forall n \geqslant n_0$$

Según la propiedad (l) enunciadas anteriormente, esto significa que

$$x + y \leqslant \liminf_n (x_n + y_n)$$

Vamos a demostrar la segunda parte de la desigualdad, siguiendo un razonamiento parecido: fijado un $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n < Y + \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0$, por lo que

$$x_n + y_n < x_n + Y + \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0$$

Tomando límites inferiores:

$$\begin{aligned}\liminf_n (x_n + y_n) &\leqslant \liminf_n (x_n + Y + \varepsilon) = Y + \varepsilon + \liminf_n x_n \\ &= \liminf_n x_n + \limsup_n y_n + \varepsilon\end{aligned}$$

Esta desigualdad es válida para todo $\varepsilon > 0$, luego se desprende la desigualdad buscada:

$$\liminf_n (x_n + y_n) \leqslant \liminf_n x_n + \limsup_n y_n$$

Para demostrar (b), vamos a usar las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}\liminf_n x_n &= -\limsup_n (-x_n) \\ \limsup_n x_n &= -\liminf_n (-x_n)\end{aligned}$$

Probemos la primera, basándonos en que $\sup A = -\inf(-A)$ para cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\liminf_n x_n &= \sup\left\{\inf_{n\geqslant k} x_n : k \in \mathbb{N}\right\} = \\ &= \sup\left\{\inf_{n\geqslant k} -(-x_n) : k \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \sup\left\{-\sup_{n\geqslant k}(-x_n) : k \in \mathbb{N}\right\} \\ &= -\inf\left\{\sup_{n\geqslant k}(-x_n) : k \in \mathbb{N}\right\} \\ &= -\limsup_n (-x_n)\end{aligned}$$

Como consecuencia:

$$\limsup_n x_n = \limsup_n (-(-x_n)) = -\liminf_n (-x_n)$$

Con este resultado preliminar, y basándonos en lo probado en el apartado (a), se puede probar la cadena de desigualdades de (b): aplicamos el resultado de (a) a las sucesiones $(-x_n)$ e $(-y_n)_n$:

$$\liminf_n(-x_n) + \liminf(-y_n) \leqslant \liminf_n(-x_n - y_n) \leqslant \liminf_n(-x_n) + \limsup_n(-y_n)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\limsup_n x_n + \liminf y_n &= -\liminf_n(-x_n) - \limsup_n(-y_n)\\ &= -\left[\liminf_n(-x_n) + \limsup_n(-y_n)\right]\\ &\leqslant -\liminf_n(-x_n - y_n) =\\ &\leqslant -\liminf_n(-x_n) - \liminf_n(-y_n)\\ &= \limsup_n x_n + \limsup_n y_n\end{aligned}$$

Como $-\liminf_n(-x_n - y_n) = \limsup_n(x_n + y_n)$ se obtiene la desigualdad completa:

$$\limsup_n x_n + \liminf_n y_n \leqslant \limsup_n(x_n + y_n) \leqslant \limsup_n x_n + \limsup_n y_n$$

Como ejemplos donde las desigualdades sean estrictas, tomar las parejas de sucesiones $(x_n)_n = \{(-1)^n\}_n$, $(y_n)_n = \{(-1)^{n+1}\}$, y $(x_n)_n = \{(-1)^n\}_n$, $(y_n)_n = \{(-1)^n\}$.

131. Demostrar que

(a) $\liminf_n x_n + \liminf_n y_n \leqslant \liminf_n(x_n + y_n) \leqslant \liminf_n x_n + \limsup_n y_n$

(b) $\liminf_n x_n + \limsup_n y_n \leqslant \limsup_n(x_n + y_n) \leqslant \limsup_n x_n + \limsup_n y_n$

SOLUCIÓN: Vamos a dar una demostración alternativa, usando exclusivamente la definición de límite superior y límite inferior, y las propiedades básicas de la aritmética de límites.

Demostremos primero (a). Fijemos un $k \in \mathbb{N}$, y un $m \geqslant k$. Es evidente que

$$\inf_{n\geqslant k} x_n + \inf_{n\geqslant k} y_n \leqslant x_m + y_m$$

Esta relación es válida para todo $m \geqslant k$, luego el número real

$$\inf_{n\geqslant k} x_n + \inf_{n\geqslant k} y_n$$

es una cota inferior del conjunto:

$$\{x_m + y_m : m \geqslant k\}$$

Por la definición de ínfimo, se obtiene:

$$\inf_{n\geqslant k} x_n + \inf_{n\geqslant k} y_n \leqslant \inf\{x_m + y_m : m \geqslant k\}$$

En el segundo miembro el índice m es mudo; es lo mismo que escribir

$$\inf_{n\geqslant k} x_n + \inf_{n\geqslant k} y_n \leqslant \inf_{n\geqslant k}(x_n + y_n)$$

Esta relación es válida para todo $k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, tomando supremos:

$$\sup_{k\geqslant 1}\left\{\inf_{n\geqslant k} x_n + \inf_{n\geqslant k} y_n\right\} \leqslant \sup_{k\geqslant 1}\inf_{n\geqslant k}(x_n + y_n)$$

Detenerse en el primer miembro de la desigualdad anterior. Se trata del supremo de una suma de sucesiones monótonas crecientes, que a su vez es también monótona creciente, por lo tanto su supremo es el límite de la sucesión

$$\left\{\inf_{n\geqslant k} x_n + \inf_{n\geqslant k} y_n\right\}_k$$

es decir:

$$\sup_{n\geqslant 1}\inf_{n\geqslant k} x_n + \sup_{n\geqslant 1}\inf_{n\geqslant k} y_n = \lim_{k\to\infty}\inf_{n\geqslant k} x_n + \lim_{k\to\infty}\inf_{n\geqslant k} y_n =$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(\inf_{n\geqslant k} x_n + \inf_{n\geqslant k} y_n\right) = \sup_{k\geqslant 1}\left(\inf_{n\geqslant k} x_n + \inf_{n\geqslant k} y_n\right)$$

De esta cadena de desigualdades se desprende:

$$\sup_{n\geqslant 1}\inf_{n\geqslant k} x_n + \sup_{n\geqslant 1}\inf_{n\geqslant k} y_n \leqslant \sup_{k\geqslant 1}\inf_{n\geqslant k}(x_n + y_n)$$

que es justo el resultado buscado:

$$\liminf_n x_n + \liminf_n y_n \leqslant \liminf_n (x_n + y_n)$$

Vamos a demostrar ahora el segundo miembro de la desigualdad de (a). Fijado un $k \in \mathbb{N}$ y un $m \geqslant k$, se tiene

$$x_m + y_m \leqslant x_m + \sup_{n\geqslant k} y_n$$

Esta relación es válida para todo $m \geqslant k$, luego tomando ínfimos, se desprende:

$$\inf_{m\geqslant k}(x_m + y_m) \leqslant \inf_{m\geqslant k}\left(x_m + \sup_{n\geqslant k} y_n\right) = \inf_{m\geqslant k} x_m + \sup_{n\geqslant k} y_n$$

Como antes, la variable m es muda, podemos reescribir la desigualdad anterior así:

$$\inf_{n\geqslant k}(x_n + y_n) \leqslant \inf_{n\geqslant k} x_n + \sup_{n\geqslant k} y_n$$

Esta relación es válidad para todo $k \in \mathbb{N}$, así que podemos pasar al límite $k \to \infty$, y podemos operar legítimamente porque tratamos con sucesiones crecientes o decrecientes:

$$\begin{aligned}
\liminf_n (x_n + y_n) &= \sup_{k\geqslant 1}\inf_{n\geqslant k}(x_n + y_n) = \lim_{k\to\infty}\inf_{n\geqslant k}(x_n + y_n) \\
&\leqslant \lim_{k\to\infty}\left(\inf_{n\geqslant k} x_n + \sup_{n\geqslant k} y_n\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}\inf_{n\geqslant k} x_n + \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geqslant k} y_n \\
&= \sup_{k\geqslant 1}\inf_{n\geqslant k} x_n + \inf_{k\geqslant 1}\sup_{n\geqslant k} y_n \\
&= \liminf_n x_n + \limsup_n y_n
\end{aligned}$$

Vamos a demostrar la primera parte de la desigualdad de (b). Fijemos un $k \in \mathbb{N}$ y un $m \geqslant k$. Es evidente que

$$x_m + \inf_{n\geqslant k} y_n \leqslant x_m + y_m$$

Esta desigualidad es válidad para todo $m \geqslant k$, luego podemos tomar supremos:

$$\sup_{m\geqslant k} x_m + \inf_{n\geqslant k} y_n = \sup_{m\geqslant k}\left(x_m + \inf_{n\geqslant k} y_n\right) \leqslant \sup_{m\geqslant k}(x_m + y_m)$$

Como antes, la variable m es muda, podemos reescribir la expresión anterior de esta otra manera:

$$\sup_{n\geqslant k} x_n + \inf_{n\geqslant k} y_n \leqslant \sup_{n\geqslant k}(x_n + y_n)$$

Esta relación es válida para todo $k \in \mathbb{N}$, así que podemos pasar al límite:

$$\begin{aligned}
\liminf_n x_n + \limsup_n y_n &= \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} x_n + \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geqslant k} y_n \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{n\geqslant k} x_n + \inf_{n\geqslant k} y_n \right) \\
&\leqslant \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} (x_n + y_n) \\
&= \limsup_n (x_n + y_n)
\end{aligned}$$

Probemos la segunda parte de la desigualidad de (b). Fijado un $k \in \mathbb{N}$ y un $m \geqslant k$, la siguiente desigualdad es evidente:

$$x_m + y_m \leqslant \sup_{n\geqslant k} x_n + \sup_{n\geqslant k} y_n$$

Esta relación significa que el número real $\sup_{n\geqslant k} x_n + \sup_{n\geqslant k} y_n$ es una cota superior del conjunto $\{x_m + y_m : m \geqslant k\}$, luego por la definición de supremo:

$$\sup\{x_m + y_m : m \geqslant k\} \leqslant \sup_{n\geqslant k} x_n + \sup_{n\geqslant k} y_n$$

La variable m es muda, podemos reescribir la expresión anterior de esta manera:

$$\sup_{n\geqslant k}(x_n + y_n) \leqslant \sup_{n\geqslant k} x_n + \sup_{n\geqslant k} y_n$$

Esta relación es válida para todo $k \in \mathbb{N}$, luego pasando al límite en $k \to \infty$ llegamos al resultado deseadao:

$$\begin{aligned}
\limsup_n (x_n + y_n) &= \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} (x_m + y_m) \\
&\leqslant \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{n\geqslant k} x_n + \sup_{n\geqslant k} y_n \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} x_n + \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} y_n \\
&= \limsup_n x_n + \limsup_n y_n
\end{aligned}$$

132. Supongamos que $x_n \geqslant 0$ e $y_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Demostrar que

(a) $\liminf_n x_n \cdot \liminf_n y_n \leqslant \liminf_n (x_n y_n) \leqslant \liminf_n x_n \cdot \limsup_n y_n$

(b) $\liminf_n x_n \cdot \limsup_n y_n \leqslant \limsup_n (x_n y_n) \leqslant \limsup_n x_n \cdot \limsup_n y_n$

Poner ejemplos para los cuales en estas relaciones se verifiquen las desigualdades estrictas.

SOLUCIÓN: Vamos a demostrar la primera parte de la desigualdad (a), poniendo como en el ejercicio anterior $x = \liminf_n x_n$, $y = \liminf_n y_n$, $X = \limsup_n x_n$, $Y = \limsup_n y_n$ (todos números reales no negativos). Para $y = 0$ ó $x = 0$, la desigualdad es trivial, así que asumir $y > 0$, $x > 0$. Escoger un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que $x - \frac{\varepsilon}{y} > 0$, y encontrar un n_0 tal que $x - \frac{\varepsilon}{y} < x_n \ \forall n \geqslant n_0$. Multiplicando por $y_n \geqslant 0$ la desigualdad no cambia de sentido, luego

$$y_n \left(x - \frac{\varepsilon}{y} \right) < x_n y_n \ \forall n \geqslant n_0$$

Tomando límites inferiores la desigualdad no cambia de sentido, porque $x - \frac{\varepsilon}{y} > 0$, luego

$$xy - \varepsilon = y \left(x - \frac{\varepsilon}{y} \right) \leqslant \liminf_n (x_n y_n)$$

Esta relación es válida para todo $\varepsilon > 0$, luego se infiere el resultado buscado:

$$\liminf_n x_n \liminf y_n \leqslant \liminf_n (x_n y_n)$$

Para comprobar la otra cara de la desigualdad (b), asumir primero $x > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, encontrar n_0 tal que $y_n < Y + \frac{\varepsilon}{x}$ $\forall n \geqslant n_0$. Multiplicando por x_n la desigualdad no cambia de sentido, luego

$$x_n y_n < x_n \left(Y + \frac{\varepsilon}{x} \right) \ \forall n \geqslant n_0$$

Tomando límites inferiores:

$$\liminf_n (x_n y_n) \leqslant x \left(Y + \frac{\varepsilon}{x} \right) = xY + \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0$$

Esta relación es válida para todo $\varepsilon > 0$, luego se deduce:

$$\liminf_n (x_n y_n) \leqslant \liminf_n x_n \limsup_n y_n$$

Queda probar la desigualdad para $x = 0$. En este caso, la relación a demostrar se reduce a $\liminf_n (x_n y_n) = 0$. Pero esto es una consecuencia de que $(y_n)_n$ es acotada: encontrar primero una subsucesión $(x_{p_n})_n$ convergente a 0. Entonces $(x_{p_n} y_{p_n})_n$ es también convergente a 0, porque es producto de dos sucesiones, donde una converge a 0 y la otra es acotada. A fin de cuentas, hemos encontrado una subsucesión de $(x_n y_n)_n$ convergente a 0, luego el límite inferior $\liminf_n (x_n y_n)$ también tiene que ser 0 (no puede ser menor que 0 porque los productos $x_n y_n$ siempre son no negativos).

Vamos a demostrar la primera parte de (b). Para $Y = 0$ ó $x = 0$ la desigualdad es trivial, así que asumir $Y > 0$, $x > 0$. Escoger un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que $x - \frac{\varepsilon}{Y} > 0$: podemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x - \frac{\varepsilon}{Y} < x_n \ \forall n \geqslant n_0$$

Multiplicando por $y_n \geqslant 0$, la desigualdad no cambia de sentido:

$$y_n \left(x - \frac{\varepsilon}{Y} \right) < x_n y_n \ \forall n \geqslant n_0$$

Tomando límites superiores la desigualdad no cambia de sentido porque $x - \frac{\varepsilon}{Y} > 0$, luego

$$xY - \varepsilon = Y \left(x - \frac{\varepsilon}{Y} \right) \leqslant \limsup_n (x_n y_n)$$

Esta relación es válida para todo $\varepsilon > 0$, luego queda probada el primer miembro de la desigualdad:

$$\liminf_x x_n \limsup_n y_n \leqslant \limsup_n (x_n y_n)$$

Para probar el segundo miembro de la desigualdad de (b), asumir primero $Y > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, encontrar un n_0 tal que $x_n < X + \frac{\varepsilon}{Y}$ $\forall n \geqslant n_0$. Multiplicando por $y_n \geqslant 0$ la desigualdad no cambia de sentido:

$$x_n y_n < y_n \left(X + \frac{\varepsilon}{Y} \right) \ \forall n \geqslant n_0$$

Tomando límites superiores:

$$\limsup_n (x_n y_n) \leqslant Y \left(X + \frac{\varepsilon}{Y} \right) = XY + \varepsilon$$

Esta relación es válida para todo $\varepsilon > 0$, así que:

$$\limsup_n (x_n y_n) \leqslant \limsup_n x_n \cdot \limsup_n y_n$$

Queda probar la desigualdad para el caso $Y = 0$, que se reduce a

$$\limsup_n (x_n y_n) = 0$$

Pero esto es evidente, porque si $0 \leqslant y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\limsup_n y_n = 0$, entonces $(y_n)_n$ converge a 0, y el producto de una sucesión acotada por otra que converge a 0, también converge a 0, luego *cualquier* subsucesión de $(x_n y_n)_n$ converge a cero. Esto último probaría que $\limsup_n (x_n y_n) = 0$.

Vamos a dar ejemplos donde las desigualdades sean estrictas. Por ejemplo, $(x_n)_n = \{(-1)^n\}_n$, $(y_n)_n = (1)_n$, o bien $(x_n)_n = (1)_n$, $(y_n)_n = \{(-1)^n\}_n$

132. Supongamos que $x_n \geqslant 0$ e $y_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Demostrar que

(a) $\liminf_n x_n \cdot \liminf_n y_n \leqslant \liminf_n (x_n y_n) \leqslant \liminf_n x_n \cdot \limsup_n y_n$

(b) $\liminf_n x_n \cdot \limsup_n y_n \leqslant \limsup_n (x_n y_n) \leqslant \limsup_n x_n \cdot \limsup_n y_n$

Como se hizo con el ejercicio **131** vamos a dar una demostración alternativa usando propiedades básicas de los límites superiores e inferiores.

Demostremos la primera parte de la desigualdad de (a). Fijado un $k \in \mathbb{N}$ y un $m \geqslant k$, se tiene la desigualdad siguiente, puesto que los términos x_n e y_n son no negativos:

$$\inf_{n \geqslant k} x_n \cdot \inf_{n \geqslant k} y_n \leqslant x_m y_m$$

Esta relación indica que el número real $\inf_{n \geqslant k} x_n \cdot \inf_{n \geqslant k} y_n$ es una cota inferior del conjunto $\{x_n y_n : n \geqslant k\}$, luego por la definición de ínfimo se tiene

$$\inf_{n \geqslant k} x_n \cdot \inf_{n \geqslant k} y_n \leqslant \inf_{n \geqslant k} (x_n y_n)$$

Esta relación es válida para todo $k \in \mathbb{N}$, luego pasando al límite en $k \to \infty$ se tiene el resultado buscado:

$$\begin{aligned}
\liminf_n x_n \cdot \liminf_n y_n &= \lim_{k \to \infty} \inf_{n \geqslant k} x_n \cdot \lim_{k \to \infty} \inf_{n \geqslant k} y_n \\
&= \lim_{k \to \infty} \left(\inf_{n \geqslant k} x_n \cdot \inf_{n \geqslant k} y_n \right) \\
&\leqslant \lim_{k \to \infty} \inf_{n \geqslant k} (x_n y_n) \\
&= \liminf_n (x_n y_n)
\end{aligned}$$

Demostremos la segunda parte de la desigualdad de (a). Fijado un $k \in \mathbb{N}$ y un $m \geqslant k$, se tiene la desigualdad siguiente, puesto que los términos x_n e y_n son no negativos:

$$x_m y_m \leqslant x_m \cdot \sup_{n \geqslant k} y_n$$

Tomando ínfimos en $n \geqslant k$:

$$\inf_{n \geqslant k} (x_n y_n) \leqslant \inf_{n \geqslant k} x_n \cdot \sup_{n \geqslant k} y_n$$

Esta relación es válida para todo $k \in \mathbb{N}$, luego pasando al límite en $k \to \infty$ se tiene el resultado buscado:

$$\begin{aligned}
\liminf_n (x_n y_n) &= \lim_{k \to \infty} \inf_{n \geqslant k} (x_n y_n) \\
&\leqslant \lim_{k \to \infty} \left(\inf_{n \geqslant k} x_n \cdot \sup_{n \geqslant k} y_n \right) \\
&= \lim_{k \to \infty} \inf_{n \geqslant k} x_n \cdot \lim_{k \to \infty} \sup_{n \geqslant k} y_n \\
&= \liminf_n x_n \cdot \limsup_n y_n
\end{aligned}$$

Demostremos la primera parte de la desigualdad de (b). Fijado un $k \in \mathbb{N}$ y un $m \geqslant k$, se tiene la desigualdad siguiente, puesto que los términos x_n e y_n son no negativos:

$$\left(\inf_{n \geqslant k} x_n \right) \cdot y_m \leqslant x_m y_m$$

Esta relación es válida para todo $m \geqslant k$, luego tomando supremos:

$$\inf_{n \geqslant k} x_n \cdot \sup_{n \geqslant k} y_n \leqslant \sup_{n \geqslant k} (x_n y_n)$$

Esta relación es válida para todo $k \in \mathbb{N}$, luego pasando al límite en $k \to \infty$ se tiene el resultado buscado:

$$\begin{aligned}
\liminf_n x_n \cdot \limsup_n y_n &= \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geqslant k} x_n \cdot \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} y_n \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\inf_{n\geqslant k} x_n \cdot \sup_{n\geqslant k} y_n \right) \\
&\leqslant \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} (x_n y_n) \\
&= \limsup_n (x_n y_n)
\end{aligned}$$

Demostremos la segunda parte de la desigualdad de (b). Fijado un $k \in \mathbb{N}$ y un $m \geqslant k$, se tiene la desigualdad siguiente, puesto que los términos x_n e y_n son no negativos:

$$x_m \cdot y_m \leqslant \sup_{n\geqslant k} x_n \cdot \sup_{n\geqslant k} y_n$$

Esta relación es válida para todo $m \geqslant k$, luego el número real $\sup_{n\geqslant k} x_n \cdot \sup_{n\geqslant k} y_n$ es una cota superior del conjunto $\{x_n y_n : n \geqslant k\}$. Por la definición de supremo:

$$\sup_{n\geqslant k} (x_n y_n) \leqslant \sup_{n\geqslant k} x_n \cdot \sup_{n\geqslant k} y_n$$

Esta relación es válida para todo $k \in \mathbb{N}$, luego pasando al límite en $k \to \infty$ se tiene el resultado buscado:

$$\begin{aligned}
\limsup_n (x_n y_n) &= \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} (x_n y_n) \\
&\leqslant \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{n\geqslant k} x_n \cdot \sup_{n\geqslant k} y_n \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} x_n \cdot \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} y_n \\
&= \limsup_n x_n \cdot \limsup_n y_n
\end{aligned}$$

133. Demostrar que, si existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, entonces, para cualquier sucesión y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, se tiene:

(a) $\limsup_n (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \limsup\limits_n x_n$

(b) $\limsup_n (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup\limits_n x_n$ $(x_n \geqslant 0)$.

SOLUCIÓN: Veamos (a). Según el problema **131**, parte (b), se tiene la desigualdad:

$$\liminf_n x_n + \limsup_n y_n \leqslant \limsup_n (x_n + y_n) \leqslant \limsup_n x_n + \limsup_n y_n$$

Como la sucesión $(x_n)_n$ es convergente, coinciden los límites inferior y superior, y son iguales, luego las dos desigualdades se transforman en una igualdad:

$$\lim_{n\to\infty} x_n + \limsup_n y_n = \limsup_n (x_n + y_n)$$

lo que prueba (a).

Para probar (b), no podemos usar el apartado (b) del problema **132** directamente, ya que ahí se exigía que ambas sucesiones fueran no negativas, por lo que hay que intentar otra cosa. Sea $y = \limsup_n y_n$. Vamos a distinguir 3 casos:

(a) $y > 0$

(b) $y < 0$

(c) $y = 0$

Si $y > 0$, entonces para a partir de algún n_0 se tiene la desigualdad $0 < y_n \ \forall n \geqslant n_0$ y entonces sí podemos aplicar el apartado (b) del problema **132**:

$$\liminf_n x_n \cdot \limsup_n y_n \leqslant \limsup_n (x_n y_n) \leqslant \limsup_n x_n \cdot \limsup_n y_n$$

de donde se desprende el resultado perseguido:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_n y_n = \limsup_n (x_n y_n)$$

Si $y < 0$, razonamos con la sucesión $(-y_n)_n$, y el apartado (a) del ejercicio **132**:

$$\liminf_n (-y_n) \cdot \liminf_n x_n \leqslant \liminf_n (-x_n y_n) \leqslant \limsup_n x_n \liminf(-y_n) \tag{3}$$

Recordar que $\liminf_n(-y_n) = -\limsup_n y_n$, $\limsup_n(-y_n) = -\liminf_n y_n$ luego la ecuación (3) se transforma en:

$$-\limsup_n y_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant -\limsup_n (x_n y_n) \leqslant -\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_n y_n$$

De aquí se desprende la igualdad buscada de nuevo:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_n y_n = \limsup_n (x_n y_n)$$

Solo queda el caso $y = 0$, es decir:

$$\limsup_n (x_n y_n) = 0$$

Sea $M > 0$ una cota de $(x_n)_n$: $0 \leqslant x_n < M \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, encontrar un n_0 tal que $y_n < \frac{\varepsilon}{M} \ \forall n \geqslant n_0$. Como $(x_n)_n$ es no negativa, podemos multiplicar por x_n sin alterar el sentido de la desigualdad:

$$x_n y_n < x_n \frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0$$

Esto demuestra que

$$\limsup_n (x_n y_n) \leqslant 0 \tag{4}$$

Pero por otro lado, como al menos hay alguna subsucesión $(y_{p_n})_n$ convergente a 0, se desprende que la sucesión $(x_{p_n} y_{p_n})_n$ también converge a cero, porque es producto de una sucesión convergente $(x_{p_n})_n$ por otra $(y_{p_n})_n$ que converge a 0. Por lo tanto, al menos hay una subsucesión de $(x_n y_n)_n$ convergente a 0, luego su límite superior es superior o igual a 0:

$$\limsup_n (x_n y_n) \geqslant 0$$

Esta relación, junto con (4), demuestra que

$$\limsup_n (x_n y_n) = 0$$

134. Demostrar que, si para una sucesión x_n $(n = 1, 2, \dots)$ y para cualquier sucesión y_n $(y_n = 1, 2, \dots)$ se verifica al menos una de las igualdades:

(a) $\limsup_n (x_n + y_n) = \limsup_n x_n + \limsup_n y_n$

(b) $\limsup_n (x_n y_n) = \limsup_n x_n \cdot \limsup_n y_n$ $(x_n \geqslant 0)$

la sucesión $(x_n)_n$ es convergente.

SOLUCIÓN: Vamos a demostrar primero que si $(x_n)_n$ es una sucesión tal que $x_n > 0$ a partir de un $n \geqslant n_0$, entonces

$$\limsup_n \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\liminf_n x_n}$$

Para demostrarlo, amplicamos el ejercicio **132** a las sucesiones $(x_n)_n$ y $\left(\frac{1}{x_n}\right)_n$:

$$\begin{aligned}\liminf_n x_n \cdot \liminf_n \frac{1}{x_n} &\leqslant \liminf_n 1\\ &\leqslant \liminf_n x_n \cdot \limsup_n \frac{1}{x_n}\\ &\leqslant \limsup_n 1\\ &\leqslant \limsup_n x_n \cdot \limsup_n \frac{1}{x_n}\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\liminf_n x_n \limsup_n \frac{1}{x_n} = 1$$

que equivale al resultado buscado.

Supongamos ahora que se cumple (a) para toda sucesión $(y_n)_n$. En particular, tomando $(y_n)_n = (-x_n)_n$, se tiene

$$0 = \limsup_n (x_n + (-x_n)) = \limsup_n x_n + \limsup_n (-x_n) = \limsup_n x_n - \liminf_n x_n$$

es decir $\liminf_n x_n = \limsup_n x_n$. Por lo tanto, $(x_n)_n$ es convergente.

Supongamos que $x_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ y que se cumple (b) para toda sucesión $(y_n)_n$. Si $\limsup_n x_n = 0$ entonces $(x_n)_n$ es convergente porque partimos de la hipótesis de que $x_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, supongamos que $\limsup_n x_n > 0$. Entonces existe algún $\varepsilon > 0$ y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \varepsilon < x_n\ \forall n \geqslant n_0$$

Podemos definir $y_n = \frac{1}{x_n}\ \forall n \geqslant n_0$ (para el resto de valores menores que n_0, el valor de y_n puede ser cualquiera, es irrelevante). Entonces

$$1 = \limsup_n (x_n y_n) = \limsup_n x_n \cdot \limsup_n y_n = \limsup_n x_n \cdot \frac{1}{\liminf_n x_n}$$

luego $\liminf_n x_n = \limsup_n x_n$ y por lo tanto $(x_n)_n$ es convergente.

135. Demostrar que, si $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y

$$\limsup_n x_n \cdot \limsup_n \frac{1}{x_n} = 1,$$

la sucesión x_n es convergente.

SOLUCIÓN: Es consecuencia de que

$$\limsup_n \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\liminf_n x_n}$$

136. Demostrar que, si la sucesión x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ está acotada y

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$$

entonces los límites parciales de esta sucesión están situados densamente entre sus límites inferior y superior:

$$l = \liminf_n x_n \text{ y } L = \limsup_n x_n,$$

es decir, cualquier número del segmento $[l, L]$ es un límite parcial de la sucesión dada.

SOLUCIÓN: La idea es que si los términos x_n están cada vez más juntos, y además se acercan a l y L, entonces también se acercan a cualquier número intermedio. El argumento mostrado a continuación es una formalización de este hecho intuitivo.

Fijar un $x \in (l, L)$. Vamos a demostrar que x es un punto de acumulación del rango de la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, es decir, que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \neq x$ y $|x_k - x| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que

$$l + \varepsilon < x - \varepsilon < x + \varepsilon < L - \varepsilon,$$

es decir, los tres conjuntos siguientes sean disjuntos:

$$(l, l + \varepsilon),\ [x - \varepsilon, x + \varepsilon],\ (L - \varepsilon, L).$$

Encontrar primero un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon\ \forall n \geqslant n_0$, y dos enteros $n_1 < n_2$ ($n_1, n_2 > n_0$) tal que $x_{n_1} < l + \varepsilon$ y $L - \varepsilon < x_{n_2}$. Afirmamos que para algún entero k, $n_1 < k < n_2$, se cumple $|x_k - x| < \varepsilon$ y $x_k \neq x$. Efectivamente, en el conjunto de enteros $C = \{n : n_1 \leqslant n \leqslant n_2\}$ definir $A = \{n \in C : x_n < x - \varepsilon\}$, $B = \{n \in C : x + \varepsilon < x_n\}$. Es claro que A y B son disjuntos, y ambos son no vacíos porque $n_1 \in A$, $n_2 \in B$. Sea j el máximo elemento de A (que existe porque A es finito) y definir $k = j + 1$. Observar que $j < n_2$, porque $n_2 \notin A$, luego $k \in C \setminus A$, y entonces:

$$x - \varepsilon \leqslant x_k = (x_k - x_j) + x_j < \varepsilon + (x - \varepsilon) = x$$

Por lo tanto, $x_k \neq x$ y $|x_k - x| < \varepsilon$.

137. Supongamos que la sucesión numérica $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ cumple la condición

$$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_n + x_m\ (m, n = 1, 2, \dots).$$

Demostrar que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$

SOLUCIÓN: Este problema fui incapaz de resolverlo por mí mismo, tuve que pedir ayuda a un foro donde amablemente me dieron la pista para abordarlo. El enlace completo puede verse aquí: `https://foro.rinconmatematico.com/index.php?topic=90791.msg366058#msg366058`

La idea es que $\left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ parece ser una sucesión decreciente (y por lo tanto convergente, por ser de términos positivos): si fijamos un $p \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{x_{pn}}{pn} \leqslant \frac{p x_n}{pn} = \frac{x_n}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Sin embargo, a pesar de la fortaleza de este argumento, no es suficiente para probar que $\left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ converge. Para demostrarlo hay que explotar más la hipótesis inicial $x_{n+m} \leqslant x_n + x_m$ sin restringirse a múltiplos de n. El razonamiento completo se expone a continuación.

Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y $n > k$. Realizar la división entera de n por k y encontrar $c \in \mathbb{N}$ y $0 \leqslant r < k$ tal que $n = ck + r$. Entonces

$$x_n = x_{ck+r} \leqslant x_{ck} + x_r \leqslant c x_k + x_r$$

Sea $M_k = \text{máx}\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$. Entonces $0 \leqslant x_r \leqslant M$, luego

$$\frac{x_n}{n} \leqslant \frac{c x_k}{n} + \frac{M_k}{n} \leqslant \frac{c x_k}{ck} + \frac{M_k}{n} = \frac{x_k}{k} + \frac{M_k}{n}$$

Esta relación es la que realmente sugiere que $\left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ es *casi* decreciente cuando n es grande en relación a k. Observar que M_k depende tan solo de k, no de n, luego la relación anterior es válida para todo $n > k$, y esto permite pasar al límite superior cuando $n \to \infty$.

$$\limsup_n \frac{x_n}{n} \leqslant \limsup_n \left(\frac{x_k}{k} + \frac{M_k}{n}\right) = \frac{x_k}{k}$$

Esta relación ya es válida para todo $k \in \mathbb{N}$, luego podemos pasar al límite inferior cuando $k \to \infty$:

$$\limsup_n \frac{x_n}{n} \leqslant \liminf_k \frac{x_k}{k}$$

En definitiva: el límite superior e inferior de $\left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ son iguales, luego la sucesión es convergente.

NOTA: El resultado puede generalizarse de la siguiente manera: sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada y para cada $k \in \mathbb{N}$ una sucesión $(\varepsilon_{n,k})_n$ convergente a cero. Supongamos que se cumplen alguna de las dos siguientes condiciones:

$$x_n \leqslant x_k + \varepsilon_{n,k}\ \forall n \geqslant k,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$x_k + \varepsilon_{n,k} \leqslant x_n \ \forall n \geqslant k,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces $(x_n)_n$ converge (esta condición de convergencia es más débil que ser monótona).

138. Demostrar que, si la sucesión x_n $(n = 1, 2, \dots)$ es convergente, la sucesión de las medias aritméticas

$$\xi_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \ (n = 1, 2, \dots)$$

también es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Lo recíproco no es justo. Poner un ejemplo.

SOLUCIÓN: Sea $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dado un $\varepsilon > 0$, existe un k tal que $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ $\forall n > k$. Sumando todas las expresiones para $k+1, k+2, \dots, n = k + (n-k)$, se obtiene

$$(n-k)(x-\varepsilon) < x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_{k+(n-k)} < (n-k)(x+\varepsilon)$$

Sumemos los términos que faltan $x_1, x_2, \dots, x_k$ y dividamos por n:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{n} + \frac{(n-k)(x-\varepsilon)}{n} &< \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \\ &< \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{n} + \frac{(n-k)(x+\varepsilon)}{n} \end{aligned}$$

Esta relación es válida para todo $n > k$, luego podemos pasar al límite superior e inferior en $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} x - \varepsilon \leqslant \liminf_n \xi_n \leqslant x + \varepsilon \\ x - \varepsilon \leqslant \limsup_n \xi_n \leqslant x + \varepsilon \end{aligned}$$

Esta relación es válida para todo $\varepsilon > 0$, luego en definitiva $\liminf \xi_n$ y $\limsup_n \xi_n$ son iguales a x y por lo tanto $(\xi_n)_n$ converge a x.

Un ejemplo que demuestra que el recíproco no es justo sería la sucesión $((-1)^n)_n$

139. Demostrar que, si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty.$$

SOLUCIÓN: Dado $M > 0$, por hipótesis existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 2M$ $\forall n \geqslant k$. Por lo tanto, para $n > 2k$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} &= \frac{x_1 + \cdots + x_k}{n} + \frac{x_{k+1} + \cdots + x_n}{n} \\ &\geqslant \frac{2M(n-k)}{n} \\ &= 2M\left(1 - \frac{k}{n}\right) \geqslant 2M\left(1 - \frac{k}{2k}\right) = M \end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty.$$

140. Demostrar que, si la sucesión x_n $(n = 1, 2, \dots)$ es convergente y $x_n > 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

SOLUCIÓN: La demostración es parecida a la del ejercicio **138**. Sea $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, y asumir primero que $x > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que $0 < x - \varepsilon$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \ \forall n > k$. Multiplicando miembro a miembro para $k+1, k+2, \ldots, n = k + (n-k)$, se obtiene:

$$(x-\varepsilon)^{n-k} < x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_{k+(n-k)} < (x+\varepsilon)^{n-k}$$

Multiplicar por los términos que faltan $x_1 x_2 \cdots x_k$ y tomar raíces n-ésimas:

$$(x-\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{x_1\cdots x_k}{(x-\varepsilon)^k}} < \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} < (x+\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{x_1\cdots x_k}{(x+\varepsilon)^k}}$$

Esta relación es válida para todo $n > k$, luego es legítimo tomar límites inferiores y superiores en $n \to \infty$, y obtener:

$$x - \varepsilon \leqslant \liminf_n \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leqslant x + \varepsilon$$
$$x - \varepsilon \leqslant \limsup_n \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leqslant x + \varepsilon$$

Esta relación es válida para todo $\varepsilon > 0$, luego hemos demostrado que el límite superior e inferior de $\left(\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\right)_n$ son iguales a x, luego la sucesión converge también a x.

Para el caso $x = 0$ la demostración es muy parecida: para $\varepsilon > 0$, encontrar un $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leqslant x_n < \varepsilon \ \forall n \geqslant k$. Entonces:

$$0 \leqslant \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} < \varepsilon\sqrt[n]{\frac{x_1\cdots x_k}{\varepsilon^k}}$$

Tomando límites superiores en $n \to \infty$ se obtiene $0 \leqslant \limsup_n x_n \leqslant \varepsilon$, luego $\limsup_n x_n = 0$ y por tanto $(x_n)_n$ converge a cero.

141. Demostrar que, si $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

suponiendo que el límite que figura en el segundo miembro existe.

SOLUCIÓN: Usar el resultado del problema **140** con la sucesión $(y_n)_n = \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)_n$, que es legítimo puesto que partimos del hecho de que $(y_n)_n$ converge:

$$\sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} = \sqrt[n]{\frac{x_1}{1}\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\frac{x_n}{x_{n-1}}} = \sqrt[n]{x_n}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_1\cdots y_n} = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

142. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

SOLUCIÓN: Aplicamos el ejercicio anterior **141** a la sucesión $(x_n)_n = \left(\frac{n^n}{n!}\right)_n$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

luego también

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$$

143. Demostrar el teorema de Stolz: si

(a) $y_{n+1} > y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

(b) $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$

(c) existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

SOLUCIÓN: Resultado de gran belleza, que permite calcular complejos límites que necesitarían de métodos de cálculo integral.

Sea $L = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$. Dado $\varepsilon > 0$, encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant k$ se cumplan

$$y_n > 0$$
$$L - \varepsilon < \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} < L + \varepsilon$$

Como $y_{n+1} - y_n > 0$, podemos multiplicar la expresión anterior por $y_{n+1} - y_n$ sin cambiar de sentido la desigualdad:

$$(L-\varepsilon)(y_{n+1}-y_n) < x_{n+1} - x_n < (L+\varepsilon)(y_{n+1}-y_n)\ \forall n \geqslant k$$

Particularizar la expresión anterior para $k, k+1, \ldots, n-1 = k + (n-1-k)$:

$$\begin{gathered}(L-\varepsilon)(y_{k+1}-y_k) < x_{k+1} - x_k < (L+\varepsilon)(y_{k+1}-y_k)\\ (L-\varepsilon)(y_{k+2}-y_{k+1}) < x_{k+2} - x_{k+1} < (L+\varepsilon)(y_{k+2}-y_{k+1})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (L-\varepsilon)(y_{n-1}-y_{n-2}) < x_{n-1} - x_{n-2} < (L+\varepsilon)(y_{n-1}-y_{n-2})\\ (L-\varepsilon)(y_n-y_{n-1}) < x_n - x_{n-1} < (L+\varepsilon)(y_n-y_{n-1})\end{gathered}$$

Sumando miembro a miembro, llegamos a

$$(L-\varepsilon)(y_n-y_k) < x_n - x_k < (L+\varepsilon)(y_n-y_k)$$

luego

$$(L-\varepsilon)(y_n-y_k) + x_k < x_n < (L+\varepsilon)(y_n-y_k) + x_k\ \forall n > k$$

Dividiendo por el término positivo y_n la desigualdad no cambia de sentido:

$$(L-\varepsilon)\left(1 - \frac{y_k}{y_n}\right) + \frac{x_k}{y_n} < \frac{x_n}{y_n} < (L+\varepsilon)\left(1 - \frac{y_k}{y_n}\right) + \frac{x_k}{y_n}\ \forall n > k$$

Esta expresión es válida para todo $n > k$, así que podemos tomar límites superiores e inferiores en $n \to \infty$. Observar que $y_n \to +\infty$, así que $\frac{y_k}{y_n} \xrightarrow{n} 0$ y $\frac{x_k}{y_n} \xrightarrow{n} 0$, luego

$$L - \varepsilon \leqslant \liminf_n \frac{x_n}{y_n} \leqslant L + \varepsilon$$
$$L - \varepsilon \leqslant \limsup_n \frac{x_n}{y_n} \leqslant L + \varepsilon$$

Ambas relaciones son válidas para todo $\varepsilon > 0$, luego en definitiva, los dos límites superior e inferior coinciden y por tanto la sucesión $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_n$ converge a L.

144. Calcular

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{a^n}$ $(a > 1)$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}$

SOLUCIÓN: Veamos (a). Poniendo $x_n = \frac{n^2}{a^n}$, se tiene

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1$$

luego $x_n \to 0$.

Veamos (b), aplicando el teorema de Stolz. Poner $x_n = \log n$, $y_n = n$. Entonces $(y_n)_n$ es estrictamente creciente e $y_n \to +\infty$, y además

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{\log(n+1) - \log n}{n+1-n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \log 1 = 0$$

luego se cumplen todas las condiciones del teorema de Stolz, y por tanto $\frac{\log n}{n} \to 0$.

145. Demostrar que, si p es un número natural, se tiene

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1} \right) = \dfrac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$

SOLUCIÓN: Aplicar el teorema de Stolz en los 3 casos.

Apartado (a). Sea $x_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$, $y_n = n^{p+1}$. Es claro que $(y_n)_n$ es estrictamente creciente y que $y_n \to +\infty$. Además:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{\binom{p}{0}n^p + \binom{p}{1}n^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1}n + \binom{p}{p}}{\binom{p+1}{1}n^p + \binom{p+1}{2}n^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{p}n + \binom{p+1}{p+1}}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{\binom{p}{0}}{\binom{p+1}{1}} = \frac{1}{p+1}$$

Se cumplen todos los requisitos del teorema del Stolz, luego $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{p+1}$

Apartado (b). Sea $x_n = (p+1)(1^p + 2^p + \cdots + n^p) - n^{p+1}$, $y_n = (p+1)n^p$. Es claro que $(y_n)_n$ es estrictamente creciente y que $y_n \to +\infty$. Además

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{(p+1)(n+1)^p + n^{p+1} - (n+1)^{p+1}}{(n+1)^p - n^p}$$

El denominador es un polinomimo cuyo término de mayor grado es $\binom{p}{1}n^{p-1} = pn^{p-1}$. En el numerador el término n^{p+1} se anula, y el de orden n^p es $(p+1)\binom{p}{0} - \binom{p+1}{1} = 0$ (también se anula). El término de orden n^{p-1} es

$$(p+1)\binom{p}{1} - \binom{p+1}{2} = p(p+1) - \frac{(p+1)p}{2} = \frac{(p+1)p}{2}$$

Por lo tanto se cumplen todas las condiciones del teorema de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{\frac{p(p+1)}{2}}{p} = \frac{1}{2}$$

Apartado (c). Sea $x_n = 1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p$, $y_n = n^{p+1}$. Es claro que $(y_n)_n$ es estrictamente creciente y que $y_n \to +\infty$. Además

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}$$

El numerador es polinomio de grado p, cuyo coeficiente es 2^p. El denominador también es un polinomio de grado p, de coeficiente $\binom{p+1}{1}$, luego se cumplen todas las hipótesis del teorema de Stolz y en consecuencia:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{2^p}{\binom{p+1}{1}} = \frac{2^p}{p+1}$$

146. Demostrar que la sucesión

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \ (n = 1, 2, \dots)$$

es convergente.

Por lo tanto, se verifica la fórmula

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\log n+\varepsilon_n,$$

donde $C=0,577216\ldots$ es la llamada constante de Euler y $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n\to\infty$.

SOLUCIÓN: Vamos a utilizar el resultado del problema **75**:

$$\frac{1}{n+1}<\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Particularizar esta expresión para $n=1,2,\ldots,n$, y sumar miembro a miembro:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}$$
$$<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

La suma de logaritmos del medio se puede simplificar:

$$\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\cdots+\log\frac{n}{n-1}+\log\frac{n+1}{n}=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\log(n+1)$$

luego

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \tag{5}$$

Vamos a demostrar que $(x_n)_n$ es estrictamente decreciente y $x_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}$:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\log(n+1)+\log n=\frac{1}{n+1}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$$

Por otro lado:

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n>\log(n+1)-\log n>0$$

Por lo tanto (x_n) es monótona decreciente y acotada inferiormente (por 0), así que es convergente. Si llamamos C al límite y $\varepsilon_n=x_n-C$, entonces $\varepsilon_n>0$ y

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n=C+\varepsilon_n$$

luego

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\log n+\varepsilon_n$$

Vamos a explotar la relación (5) para dar una estimación superior de $(x_n)_n$ con su límite (la constante de Euler). Sea

$$y_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)$$

Entonces

$$y_n=x_n+\log n-\log(n+1)=x_n-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<x_n \tag{6}$$

La sucesión $(y_n)_n$ es estrictamente creciente:

$$y_n-y_{n-1}=\frac{1}{n}-\log(n+1)+\log n=\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$$

La sucesión $(y_n)_n$ está acotada superiormente por x_1 en virtud de (6), luego es convergente. También en virtud de (6) el límite es igual a la constante de Euler C, y por lo tanto

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)=y_n<C<x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

Finalmente, para obtener una estimación superior de la diferencia de x_n con su límite:

$$0<x_n-C<x_n-y_n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

147. Calcular
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

SOLUCIÓN: Sea $(y_n)_n$ definida por $y_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$ para $n\in\mathbb{N}$, y sea $(x_n)_n$ la sucesión del ejercicio anterior **146**, que convergía a la constante de Euler. Entonces
$$x_{2n}-y_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(2n) = x_n-\log 2$$
por lo tanto
$$y_n = x_{2n}-x_n+\log 2 \xrightarrow{n} \log 2$$

148. La sucesión de números x_n $(n=1,2,\ldots)$ se determina por las siguientes fórmulas:
$$x_1=a,\ x_2=b,\ x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\ (n=3,4,\ldots).$$
Calcular
$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

SOLUCIÓN: La diferencia entre dos términos es la mitad que la anterior. Por ejemplo:
$$x_4-x_3=\frac{1}{2}(x_3+x_2)-x_3=-\frac{1}{2}(x_3-x_2)$$
De modo recursivo, esto sugiere que
$$x_{n+1}-x_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(b-a)$$
Vamos a probarlo por inducción. Para $n=3$ es cierto:
$$x_4-x_3=-\frac{1}{2}(x_3-x_2)=-\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-b\right)=\frac{1}{4}(b-a)=\frac{(-1)^2}{2^2}(b-a)$$
Si es cierto para n, entonces para $n+1$ se tiene la expresión
$$\begin{aligned}x_{n+2}-x_{n+1}&=\frac{1}{2}(x_{n+1}+x_n)-x_{n+1}\\&=-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(b-a)\\&=\frac{(-1)^n}{2^n}(b-a)\end{aligned}$$
luego también es cierto para $n+1$. En definitiva $x_{n+1}=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(b-a)+x_n$ y por lo tanto, de modo recursivo se obtiene:
$$\begin{aligned}x_{n+1}&=(b-a)\left[\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}+\cdots+\frac{(-1)^2}{2^2}+\frac{(-1)^1}{2^1}+\frac{(-1)^0}{2^0}\right]\\&=\frac{b-a}{1+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right)\to\frac{3(b-a)}{2}\end{aligned}$$

149. Sea x_n $(n=1,2,\ldots)$ una sucesión de números, definida por la siguiente fórmula:
$$x_0>0,\ x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\ (n=0,1,2,\ldots)$$
Demostrar que
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$
SOLUCIÓN: Dado que $x_0>0$, por inducción resulta claro que $x_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Por otro lado, para cualquier $a>0$ se tiene
$$0\leqslant(a-1)^2=a^2-2a+1 \iff 1\leqslant\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\ \forall a>0$$

En particular:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Si un número es mayor que 1, su inverso es inferior él mismo:

$$x_n \geqslant \frac{1}{x_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y como consecuencia de esto último:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant \frac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n$$

Es decir, $(x_n)_n$ está acotada inferiormente por 1, y es monóntona decreciente. Por lo tanto converge a algún $x \geqslant 1$, que deberá cumplir

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$$

150. Demostrar que las sucesiones x_n e y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ definidas por las siguientes fórmulas:

$$x_1 = a,\ y_1 = b,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},\ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

tienen un límite común

$$\mu(a, b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

(la media aritmético-geométrica de los números a y b).

SOLUCIÓN: Para todo α, β no negativos se verifica la siguiente desigualdad, consecuencia de que $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 \geqslant 0$:

$$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \leqslant \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Con ello se puede ver que las sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ son monótonas y acotadas: por un lado, por inducción se demuestra que x_n e y_n son no negativos para todo n, luego

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \leqslant \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

y en consecuencia

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leqslant \frac{y_n + y_n}{2} = y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

luego $(y_n)_n$ es monótona decreciente (y acotada inferiormente por 0).

Análogamente, para $(x_n)_n$ tenemos, usando de nuevo (7):

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} \cdot y_{n+1}} \geqslant \sqrt{x_{n+1} \cdot x_{n+1}} = x_{n+1}$$

luego $(x_n)_n$ es monótona creciente y acotada superiormente (por y_1). Por lo tanto, ambas sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ convergen a dos números reales x e y, respectivamente. Tomando límites en las expresión que definen $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ se obtiene

$$x = \sqrt{xy}$$
$$y = \frac{x+y}{2}$$

de donde se desprende $x = y$.