# chpater 4 : Forms of the dynamic equations

| 시작 날짜 --> 미팅 날짜 | @2022년 9월 22일 → 2022년 10월 6일 |
|---|---|

## Introduction

- chapter 3 - kinematics

챕터 3에서는 kinematics적으로 시스템을 다뤘다. ⇒ DOF가 모두 specified, known 임.

따라서, 위속가를 구할때, force analysis가 필요없다.

- chapter 4 - dynamics

챕터 4부터는 DOF가 1개 이상 unknown이 되면서 force analysis가 필수적이다.

이때, 얻어야 하는 방정식의 수는 미지수의 개수와 같아야 한다.

- unconstrained motion, constrained motion

unconstrained motion은 시스템의 운동방정식 (EOM)을 Newton-Euler equation으로

constrained motion은 coordinate 수에 따른 다른 dynamic equation이 필요하다.

> constrained 중에 어떤 방정식을 쓰면 constraint force term으로, 어떤건  dof의 term으로 나옴.

- redundant(불필요한) coordinate  VS  terms of dof

redundant coordinate는 sparse matrix (0이 많은 행렬)에 좋음 (sparse 부족한)

terms of DOF로 나오는 식은 inertia와 힘의 계수가 복잡한 행렬에 좋음.

- Dynamic equation의 종류

(1) D'Alembert's principle

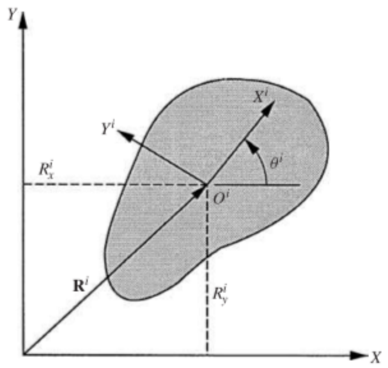
> 구속방정식의 수가 필요한 개수 보다 더 많이 나오는 경우가 있다.

(2) matrix formulations 3 개

augmented formulation, embedding technique, amalgamated formulation

(3) open-system, closed-chain system

▼ 4.1 D'Alembert's Principle / 178 ⇒ 달랑베르 : force+moment 전체의 외력과 내력이 같다.



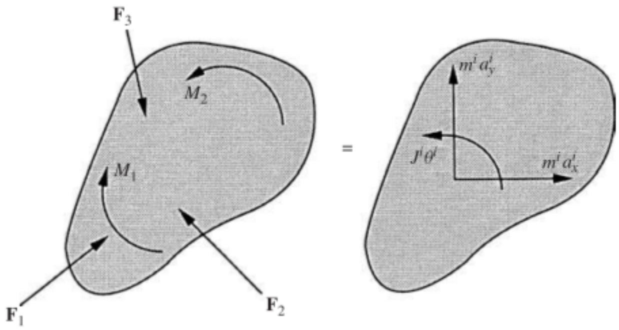




**Figure 4.2** D'Alembert's principle

unconstrained planar motion of a rigid body를 위와 같이 나타낼 수 있다.

3개의 독립좌표를 사용함.

reference point를 바디의 질량 중심으로 잡는다면, 힘을 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} m^i a_x^i &= F_x^i \\ m^i a_y^i &= F_y^i \\ J^i \ddot{\theta}^i &= M^i \end{aligned}\right\}$$

x,y 방향에 대한 식을 Newton's equation이라하고 inertia force라 함.

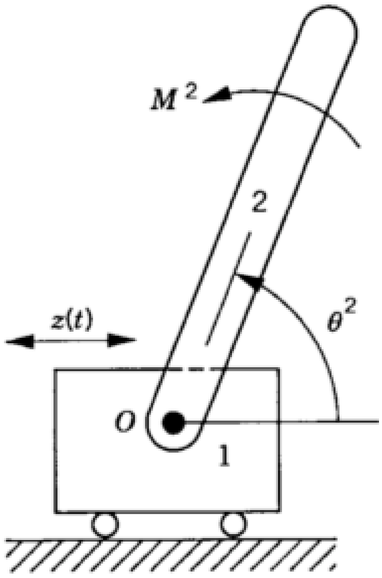
방향에 대한 식을 Euler's equation이라하고, inertia moment라 함.

⇒ D'Alembert's principle에 따르면 모든 inertia/effective force와 moment가 external force와 같아야 한다.

---

## D'Alembert's principle 예제

만약, external force와 moment가 주어진다면, forward dynamics로 해결한다.




위 움직이는 추를 단 base에서 각 Body 별 내력과 외력의 동적평형 상태를 diagram으로 나타내면 아래와 같다.

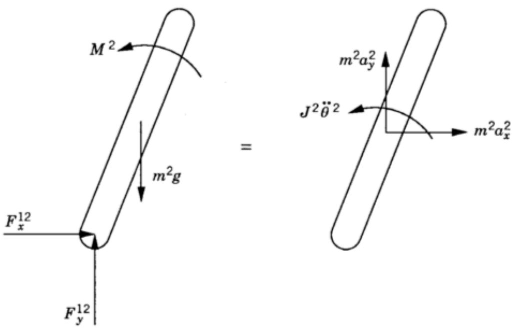



**Figure 4.4** Dynamic equilibrium

위 시스템의 inertia와 external force, moment를 정리하면 아래와 같다.

$$m^2 a_x^2 = F_x^{12}$$
$$m^2 a_y^2 = F_y^{12} - m^2 g$$
$$J^2 \ddot{\theta}^2 = M^2 + F_x^{12} \frac{l}{2} \sin \theta^2 - F_y^{12} \frac{l}{2} \cos \theta^2$$

위 시스템을 뉴턴법칙으로 direct하게 나타낸 것.

## Newton 제 2법칙으로 solve

(1) 현재 문제에서는 5개의 unknown이 있다.

$$a_x^2,\ a_y^2,\ \ddot{\theta}^2,\ F_x^{12},\ \text{and}\ F_y^{12}.$$

따라서 외력=내력 식 3개에 추가적으로 2개의 식이 더 필요하다.

(2) Rod와 Base 사이에 있는 Pin joint의 구속방정식을 사용한다.

$$R_x^2 = z(t) + \frac{l}{2} \cos \theta^2,\ R_y^2 = \frac{l}{2} \sin \theta^2$$

(3) 2번 바디의 위치 식을 2번 미분함으로 $a_x^2$와$a_y^2$를 구한다.

$$\dot{R}_x^2 = \dot{z}(t) - \dot{\theta}^2 \frac{l}{2} \sin \theta^2, \quad \dot{R}_y^2 = \dot{\theta}^2 \frac{l}{2} \cos \theta^2$$
$$a_x^2 = \ddot{R}_x^2 = \ddot{z}(t) - \ddot{\theta}^2 \frac{l}{2} \sin \theta^2 - (\dot{\theta}^2)^2 \frac{l}{2} \cos \theta^2$$
$$a_y^2 = \ddot{R}_y^2 = \ddot{\theta}^2 \frac{l}{2} \cos \theta^2 - (\dot{\theta}^2)^2 \frac{l}{2} \sin \theta^2$$

(4) 추가된 2개의 방정식을 이용해 unknown들을 풀어낸다.

$$m^2 \left[ \ddot{z}(t) - \ddot{\theta}^2 \frac{l}{2} \sin \theta^2 - (\dot{\theta}^2)^2 \frac{l}{2} \cos \theta^2 \right] = F_x^{12}$$
$$m^2 \left[ \ddot{\theta}^2 \frac{l}{2} \cos \theta^2 - (\dot{\theta}^2)^2 \frac{l}{2} \sin \theta^2 \right] = F_y^{12} - m^2 g$$
$$J^2 \ddot{\theta}^2 = M^2 + F_x^{12} \frac{l}{2} \sin \theta^2 - F_y^{12} \frac{l}{2} \cos \theta^2$$

$F_x^{12}$와$F_y^{12}$를 모멘트 식에 대입해 정리하면,

$$\left[J^2 + m^2 \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\ddot{\theta}^2 = M^2 - m^2 g \,\frac{l}{2}\, \cos\theta^2 + m^2 \ddot{z}\, \frac{l}{2}\, \sin\theta^2$$

## 위 풀이를 달랑베르로

- 좌측은 뉴턴식, 오일러식을 각자 품

달랑베르는 전체 inertia 모멘트가 전체 external 모멘트와 같다.

$$(M_e^2)_O = J^2\ddot{\theta}^2 - m^2 a_x^2\, \frac{l}{2}\, \sin\theta^2 + m^2 a_y^2\, \frac{l}{2}\, \cos\theta^2$$

$$(M_a^2)_O = M^2 - m^2 g\, \frac{l}{2}\, \cos\theta^2$$

e : effective moment = inertia moment

a : applied moment = external moment에서

원점으로부터의 inertia, external을 구하는 것이므로 자동으로 x,y방향도 고려됨.

한번에 식을 나타내면,

$$(M_e^2)_O = (M_a^2)_O$$

$$\boxed{J^2\ddot{\theta}^2 - m^2 a_x^2\, \frac{l}{2}\, \sin\theta^2 + m^2 a_y^2\, \frac{l}{2}\, \cos\theta^2 = M^2 - m^2 g\, \frac{l}{2}\, \cos\theta^2}$$

$$\left[J^2 + m^2 \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\ddot{\theta}^2 = M^2 - m^2 g \,\frac{l}{2}\, \cos\theta^2 + m^2 \ddot{z}\, \frac{l}{2}\, \sin\theta^2$$

---

## 결론

위 예제는 D’Alembert’s원리를 dynamic condition을 얻는데 적용한 예이다.

추가로, applied force와 moment가 주어진 값이면, 결과 동역학 방정식은 linear system이다.

linear system of algebraic인 경우, 가속도와 joint reaction force 식을 통해 해결할 수 있다.

▼ 4.2 D’Alembert’s Principle and Newton–Euler Equations / 182 ⇒ 달랑베르로 newton, euler 방정식 유도가능

- 뉴턴-오일러 방법을 도출하기 위해 달랑베르 원리를 사용하는 방법.

### Newton Equation 달랑베르로 얻기

body i의 질량은 $\rho^i dV^i$이다. (ρ는 밀도, dV는 극소부피)

position vector가 $r^i$라면, 내력(inertia force)는 $(\rho^i dV^i)\ddot{r}^i$이다.

즉, 뉴턴 방정식은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

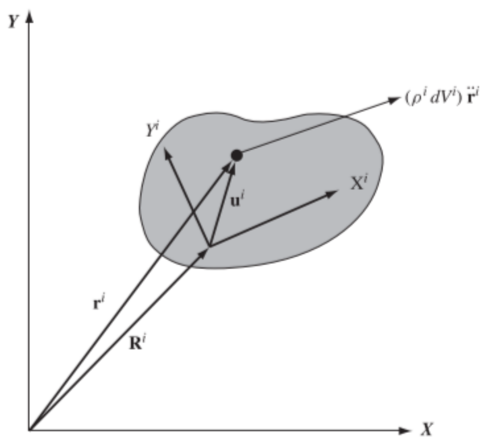


**Figure 4.5** Inertia forces of the rigid body

$$\int_{V^i} \rho^i \ddot{\mathbf{r}}^i \, dV^i = \mathbf{F}^i$$

$F^i$는 body에 적용되는 총 합력.

임의의 점$\ddot{r}^i$ 에서 가속도를 absolute acceleration으로 나타내는 법

$$\ddot{\mathbf{r}}^i = \ddot{\mathbf{R}}^i + \boldsymbol{\alpha}^i \times \mathbf{u}^i + \boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{u}^i)$$

$\ddot{R}^i$는 그 점의 Global position vector of the reference point

[달랑베르로 뉴턴 방정식 도출]

(1) 위 식을 이용하면, global position $u^i$를 $A^i\overline{u}^i$로 나타낼 수 있다.

$$\int_{V^i} \rho^i \mathbf{u}^i \, dV^i = \int_{V^i} \rho^i \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^i \, dV^i = \mathbf{A}^i \int_{V^i} \rho^i \bar{\mathbf{u}}^i \, dV^i = \mathbf{0}$$

[질량중심 정의]

질량x거리=모멘트인데 질량중심은 모멘트가 0인 지점이다.

(2) $\ddot{r}^i = \ddot{R}^i + ...$식을 (1) 식에 대입하면 아래와 같다.

⇒ 각속도와 각가속도는 임의의 점 position vector와 독립이므로

$$\int_{V^i} \rho^i \ddot{\mathbf{R}}^i dV^i = \mathbf{F}^i$$

(3) 앞서 질량은 $\rho^i dV^i$에서 뉴턴 제2법칙이 도출된다.

$$m^i = \int_{V^i} \rho^i dV^i$$

$$m^i \ddot{\mathbf{R}}^i = \mathbf{F}^i$$

---

## Euler equation 달랑베르로 얻기

모멘트의 내력=외력 (달랑베르)

$$\int_{V^i} \rho^i \mathbf{u}^i \times \ddot{\mathbf{r}}^i dV^i = \mathbf{M}_R^i$$

위는 $u^i$와$\omega^i \times (\omega^i \times u^i)$는 평행하므로

$$\int_{V^i} \rho^i \mathbf{u}^i \times (\boldsymbol{\alpha}^i \times \mathbf{u}^i) dV^i = \mathbf{M}_R^i$$

위 외적을 참고할 식에 따라 scalar로 나타내면,

참고할 식

$$\mathbf{M}_R^i = [0 \quad 0 \quad M^i]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^i = \ddot{\theta}^i \mathbf{k} \text{ and } \mathbf{u}^i = [\overline{x}^i \quad \overline{y}^i \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

mass moment(관성모멘트) 공식

$$J^i = \int_{V^i} \rho^i ((\overline{x}^i)^2 + (\overline{y}^i)^2) dV^i$$

$$\int_{V^i} \rho^i ((\overline{x}^i)^2 + (\overline{y}^i)^2)\ddot{\theta}^i dV^i = M^i$$

마지막으로, 관성모멘트 공식에 의해 J로 정리.

$$J^i \ddot{\theta}^i = M^i$$

오일러 방정식을 얻을 수 있다.

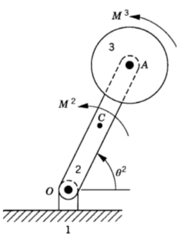
▼ 4.3 Constrained Dynamics / 186 $M\ddot{q} = Q_e + Q_c (Q_c 는 constraint force)$

- selection of coordinate / the form of the equation

효율, 일반화, 식 내는데 걸리는 시간 등 위 2개의 선정은 computational dynamics에서 중요한 요소이다.

- independent constraint forces의 수는 independent constraint equation의 수와 항상 같다.

## 예시 문제



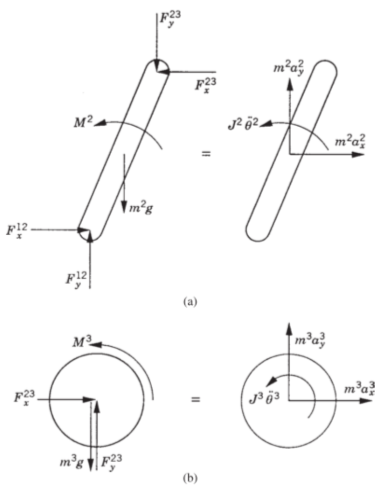



Figure 4.7 Dynamic equilibrium

$$\left.\begin{aligned}
m^2 a_x^2 &= F_x^{12} - F_x^{23} \\
m^2 a_y^2 &= F_y^{12} - F_y^{23} - m^2 g \\
J^2 \ddot{\theta}^2 &= M^2 + F_x^{12}\,\frac{l}{2}\,\sin\theta^2 - F_y^{12}\,\frac{l}{2}\,\cos\theta^2 \\
&\quad + F_x^{23}\,\frac{l}{2}\,\sin\theta^2 - F_y^{23}\,\frac{l}{2}\,\cos\theta^2 \\
m^3 a_x^3 &= F_x^{23} \\
m^3 a_y^3 &= F_y^{23} - m^3 g \\
J^3 \ddot{\theta}^3 &= M^3
\end{aligned}\right\}$$

위 시스템을 동적평형을 통해

direct하게 뉴턴, 오일러 방정식으로 나타내보자.

뉴턴-오일러 방정식 도출한 dynamic 식들 (6개)

10개의 unknowns

6개 가속도, 4개 반력

위 문제는 2자유도 시스템이다. 시스템을 자유도에 대해서 나타내면, (아래는$C(q,t)$구속방정식 2번 미분한 결과)

⇒ 공식은 $a = \ddot{R}+$아래식으로 임의의 고정된 점 가속도 공식이다.

!!!! 어떻게 나온지 모르겠음 !!!!!!!

$$\mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} a_x^2 \\ a_y^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}^2 \times \mathbf{u}_{CO}^2 + \boldsymbol{\omega}^2 \times (\boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{u}_{CO}^2)$$
$$= \ddot{\theta}^2 \frac{l}{2} \begin{bmatrix} -\sin\theta^2 \\ \cos\theta^2 \end{bmatrix} - (\dot{\theta}^2)^2 \frac{l}{2} \begin{bmatrix} \cos\theta^2 \\ \sin\theta^2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{a}^3 = \begin{bmatrix} a_x^3 \\ a_y^3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}^2 \times \mathbf{u}_{AO}^2 + \boldsymbol{\omega}^2 \times (\boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{u}_{AO}^2)$$
$$= \ddot{\theta}^2 l \begin{bmatrix} -\sin\theta^2 \\ \cos\theta^2 \end{bmatrix} - (\dot{\theta}^2)^2 l \begin{bmatrix} \cos\theta^2 \\ \sin\theta^2 \end{bmatrix}$$

---

## General constrained multibody system matrix

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_c$$

위 예제에서 알 수 있듯, 10개의 unknown이 있어도, 6개의 가속도 식 + 4개의 반력식으로 구할 수 있듯

위처럼 나타낼 수 있다.

$Q_e$는 applied force vector

$Q_c$는 constraint force vector

$M$은 시스템의 질량 matrix

$\ddot{q}$는 system coordinate vector

---

- Forward dynamics의 경우

unknown이 가속도와 constraint forces ($Q_C$)이다.

$Q_e$는 주어진다.

independent constraint forces의 수는 시스템의 motion을 나타내는 alegebraic equation의 수와 같다.

algebraic equation은 chapter 3에서 아래와 같다.

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$$

- 위 예제에 적용해 constraint equation 도출 과정.

$$\mathbf{q} = [\, R_x^2 \quad R_y^2 \quad \theta^2 \quad R_x^3 \quad R_y^3 \quad \theta^3 \,]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^3 \end{bmatrix}$$

The vector of applied forces $\mathbf{Q}_e$ and the vector of constraint forces $\mathbf{Q}_c$ can also be defined using Eq. 13 as

$$\mathbf{Q}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ -m^2 g \\ M^2 \\ 0 \\ -m^3 g \\ M^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} F_x^{12} - F_x^{23} \\ F_y^{12} - F_y^{23} \\ F_x^{12}\frac{l}{2}\sin\theta^2 - F_y^{12}\frac{l}{2}\cos\theta^2 + F_x^{23}\frac{l}{2}\sin\theta^2 - F_y^{23}\frac{l}{2}\cos\theta^2 \\ F_x^{23} \\ F_y^{23} \\ 0 \end{bmatrix}$$

위 6개의 식은 Direct한 Newton-Euler equation으로 유도되었고,

추가적인 4개의 방정식은 reaction force(joint equation)으로 유도

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^2 + \mathbf{A}^2\bar{\mathbf{u}}_O^2 \\ \mathbf{R}^2 + \mathbf{A}^2\bar{\mathbf{u}}_A^2 - \mathbf{R}^3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{u}}_O^2 = \begin{bmatrix} -l/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}}_A^2 = \begin{bmatrix} l/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta^2 & -\sin\theta^2 \\ \sin\theta^2 & \cos\theta^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} R_x^2 - \frac{l}{2}\cos\theta^2 \\ R_y^2 - \frac{l}{2}\sin\theta^2 \\ R_x^2 + \frac{l}{2}\cos\theta^2 - R_x^3 \\ R_y^2 + \frac{l}{2}\sin\theta^2 - R_y^3 \end{bmatrix}$$

---

# 결론

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_c$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$$

위 두 matrix를 가속도와 joint 반력에 대해서 푸는것은 동역학에서 굉장히 중요하고, 여러 풀이법이 있다.

⇒ 이 책에서는 (1) augmented formulation (2) embedding technique (3) amalgamated formulation 3개를 소개한다.

## ▼ 4.4 Augmented Formulation / 190

- augmented formulation 특징

(1) in terms of redundant coordinate 이다.

(2) differential EOM을 unknown 가속도와 constraint force를 풀기위해 사용함.

(3) sparse matrix (0이 많은 행렬)에 좋음 ⇒ 복잡하면 훨씬 어려운 알고리즘을 써야하는 불편함 있음 (다음챕터 자세히)

- augmented formulation 유도

$$\left.\begin{aligned}
m^2 a_x^2 &= F_x^{12} - F_x^{23} \\
m^2 a_y^2 &= F_y^{12} - F_y^{23} - m^2 g \\
J^2 \ddot{\theta}^2 &= M^2 + F_x^{12}\,\frac{l}{2}\,\sin\theta^2 - F_y^{12}\,\frac{l}{2}\,\cos\theta^2 \\
&\quad + F_x^{23}\,\frac{l}{2}\,\sin\theta^2 - F_y^{23}\,\frac{l}{2}\,\cos\theta^2 \\
m^3 a_x^3 &= F_x^{23} \\
m^3 a_y^3 &= F_y^{23} - m^3 g \\
J^3 \ddot{\theta}^3 &= M^3
\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} a_x^2 \\ a_y^2 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{\alpha}^2 \times \mathbf{u}_{CO}^2 + \boldsymbol{\omega}^2 \times (\boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{u}_{CO}^2) \\
&= \ddot{\theta}^2\,\frac{l}{2}\begin{bmatrix} -\sin\theta^2 \\ \cos\theta^2 \end{bmatrix} - (\dot{\theta}^2)^2\,\frac{l}{2}\begin{bmatrix} \cos\theta^2 \\ \sin\theta^2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{a}^3 = \begin{bmatrix} a_x^3 \\ a_y^3 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{\alpha}^2 \times \mathbf{u}_{AO}^2 + \boldsymbol{\omega}^2 \times (\boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{u}_{AO}^2) \\
&= \ddot{\theta}^2 l \begin{bmatrix} -\sin\theta^2 \\ \cos\theta^2 \end{bmatrix} - (\dot{\theta}^2)^2 l \begin{bmatrix} \cos\theta^2 \\ \sin\theta^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

위 2 식을 잘 combined 하면,

$$\begin{bmatrix}
m^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & m^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & J^2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{2}\sin\theta^2 & \frac{l}{2}\cos\theta^2 & -\frac{l}{2}\sin\theta^2 & \frac{l}{2}\cos\theta^2 \\
0 & 0 & 0 & m^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & m^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -\frac{l}{2}\sin\theta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & \frac{l}{2}\cos\theta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -l\sin\theta^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & l\cos\theta^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix} a_x^2 \\ a_y^2 \\ \ddot{\theta}^2 \\ a_x^3 \\ a_y^3 \\ \ddot{\theta}^3 \\ F_x^{12} \\ F_y^{12} \\ F_x^{23} \\ F_y^{23} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ -m^2 g \\ M^2 \\ 0 \\ -m^3 g \\ M^3 \\ (\dot{\theta}^2)^2 \frac{l}{2}\cos\theta^2 \\ (\dot{\theta}^2)^2 \frac{l}{2}\sin\theta^2 \\ (\dot{\theta}^2)^2 l\cos\theta^2 \\ (\dot{\theta}^2)^2 l\sin\theta^2 \end{bmatrix}$$

위와 같이 Augmented fomulation을 정리할 수 있다.

▼ 4.5 Lagrange Multipliers / 191 : 달랑베르를 사용하여 joint reaction force를 안 구해도 됨 (구속방정식으로 구함)

augmented fomulation은 Lagrangian dynamics에 기초했음.

- Lagrangian dynamics

(1) joint를 나누어 생각할 필요 없음. 실제 반력을 이미 고려한 것

- 증명과정 (이전 자유도 2개 rod, roller 예제)

(1) 자코비안

$$\mathbf{C_q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{l}{2}\sin\theta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{l}{2}\cos\theta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{l}{2}\sin\theta^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{l}{2}\cos\theta^2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 자코비안 matrix에 genralized coordinate를 두 번 미분한 벡터를 곱하면 $Q_d$이다.

$$\mathbf{C_q}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_d$$

(3) 1,2의 값을 대입해 $Q_d$를 구하면,

$$\mathbf{Q}_d = (\dot{\theta}^2)^2 \frac{l}{2} [\, -\cos\theta^2 \quad -\sin\theta^2 \quad \cos\theta^2 \quad \sin\theta^2 \,]^{\mathrm{T}}$$

- 결과

라그랑지 멀티플라이어를 아래와 같이 정의 (applied force 외력)

$F_x^{12}$는 joint 반력임. $-F_x^{12}$는 applied force임. 외력과 반력은 반대로 들어감.

$$\boldsymbol{\lambda} = [\, -F_x^{12} \quad -F_y^{12} \quad F_x^{23} \quad F_y^{23} \,]^{\mathrm{T}}$$

M, 자코비안, $\ddot{q}$, 라그랑지 멀티플라이어, $Q_e, Q_d$를 통해 augmented formulation을 아래와 같이 나타냄

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_\mathbf{q}^\mathrm{T} \\ \mathbf{C}_\mathbf{q} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e \\ \mathbf{Q}_d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & J^2 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{2}\sin\theta^2 & -\frac{l}{2}\cos\theta^2 & -\frac{l}{2}\sin\theta^2 & \frac{l}{2}\cos\theta^2 \\ 0 & 0 & 0 & m^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{l}{2}\sin\theta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{l}{2}\cos\theta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{l}{2}\sin\theta^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{l}{2}\cos\theta^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{R}_x^2 \\ \ddot{R}_y^2 \\ \ddot{\theta}^2 \\ \ddot{R}_x^3 \\ \ddot{R}_y^3 \\ \ddot{\theta}^3 \\ -F_x^{12} \\ -F_y^{12} \\ F_x^{23} \\ F_y^{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m^2 g \\ M^2 \\ 0 \\ -m^3 g \\ M^3 \\ -(\dot{\theta}^2)^2 \frac{l}{2}\cos\theta^2 \\ -(\dot{\theta}^2)^2 \frac{l}{2}\sin\theta^2 \\ (\dot{\theta}^2)^2 \frac{l}{2}\cos\theta^2 \\ (\dot{\theta}^2)^2 \frac{l}{2}\sin\theta^2 \end{bmatrix}$$

따라서, 위의 위 간단한 matrix를 Lagrange multipliers에 대해 정리하면,

$$\mathbf{Q}_c = -\mathbf{C}_\mathbf{q}^\mathrm{T}\boldsymbol{\lambda}$$

- 라그랑지 멀티플라이어의 수는 구속방정식의 수와 같다. = depedent variable 의 수
- 라그랑지 멀티플라이어는 independent reaction force를 대체한다. (joint 무시하는 이유)
- 라그랑지 멀티플라이어는 unknown이다. joint로 안구하고, 구속방정식으로 자코비안과 $Q_d$를 통해 구한다.
- Newton 방법과 lagrangian의 가장 큰 차이는 newton은 반력을 사용. 라그랑지는 구속방정식만 사용함.

▼ 4.6 Elimination of the Dependent Accelerations / 193 (임베딩의 base가 됨)

- embedding technique

depedent acceleration을 제거하기 위해 구속방정식을 사용한다.

종속 가속도란, 독립 가속도와 $Q_c$ (constraint force)로 나타낼 수 있는 가속도이다.

- 구속방정식을 2번 미분한 식 (rod, roller 예제)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} a_x^2 \\ a_y^2 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{\alpha}^2 \times \mathbf{u}_{CO}^2 + \boldsymbol{\omega}^2 \times (\boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{u}_{CO}^2) \\
&= \ddot{\theta}^2 \ \frac{l}{2} \ \begin{bmatrix} -\sin \theta^2 \\ \cos \theta^2 \end{bmatrix} - (\dot{\theta}^2)^2 \ \frac{l}{2} \ \begin{bmatrix} \cos \theta^2 \\ \sin \theta^2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{a}^3 = \begin{bmatrix} a_x^3 \\ a_y^3 \end{bmatrix} &= \boldsymbol{\alpha}^2 \times \mathbf{u}_{AO}^2 + \boldsymbol{\omega}^2 \times (\boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{u}_{AO}^2) \\
&= \ddot{\theta}^2 l \begin{bmatrix} -\sin \theta^2 \\ \cos \theta^2 \end{bmatrix} - (\dot{\theta}^2)^2 l \begin{bmatrix} \cos \theta^2 \\ \sin \theta^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

위 식에서 $a^2$와$a^3$는 independent term으로 나타낼 수 있으니 종속 가속도이다.

위 term들을 모두 제거해주면 아래 식이다.

$$
\left.
\begin{aligned}
-m^2 \ \tfrac{l}{2} \ \ddot{\theta}^2 \ \sin \theta^2 - F_x^{12} + F_x^{23} &= m^2 \ \tfrac{l}{2} \ (\dot{\theta}^2)^2 \ \cos \theta^2 \\
m^2 \ \tfrac{l}{2} \ \ddot{\theta}^2 \ \cos \theta^2 - F_y^{12} + F_y^{23} &= m^2 \ \tfrac{l}{2} \ (\dot{\theta}^2)^2 \ \sin \theta^2 - m^2 g \\
J^2 \ddot{\theta}^2 - F_x^{12} \ \tfrac{l}{2} \ \sin \theta^2 + F_y^{12} \ \tfrac{l}{2} \ \cos \theta^2 - F_x^{23} \ \tfrac{l}{2} \ \sin \theta^2 + F_y^{23} \ \tfrac{l}{2} \ \cos \theta^2 &= M^2 \\
-m^3 \ddot{\theta}^2 l \ \sin \theta^2 - F_x^{23} &= m^3 l (\dot{\theta}^2)^2 \ \cos \theta^2 \\
m^3 \ddot{\theta}^2 l \ \cos \theta^2 - F_y^{23} &= m^3 l (\dot{\theta}^2)^2 \ \sin \theta^2 - m^3 g \\
J^3 \ddot{\theta}^3 &= M^3
\end{aligned}
\right\}
$$

- Matrix form으로 변환

위 모든 등식들을 2개의 unkown 독립좌표 $\ddot{\theta}^2, \ddot{\theta}^3$과4 개의 unknown reaction force에 대해서 나타내면,

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
a_{21} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\
a_{41} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & a_{62} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta}^3 \\ F_x^{12} \\ F_y^{12} \\ F_x^{23} \\ F_y^{23} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ M^2 \\ b_4 \\ b_5 \\ M^3 \end{bmatrix}
$$

where

$$
\left.
\begin{aligned}
& a_{11} = -m^2 \ \frac{l}{2} \ \sin \theta^2, \ a_{21} = m^2 \ \frac{l}{2} \ \cos \theta^2, \ a_{31} = J^2 \\
& a_{41} = -m^3 l \ \sin \theta^2, \ a_{51} = m^3 l \ \cos \theta^2, \ a_{62} = J^3 \\
& a_{33} = a_{35} = -\frac{l}{2} \ \sin \theta^2, \ a_{34} = a_{36} = \ \frac{l}{2} \ \cos \theta^2
\end{aligned}
\right\}
$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= m^2 \frac{l}{2} (\dot{\theta}^2)^2 \cos\theta^2 \\ b_2 &= m^2 \frac{l}{2} (\dot{\theta}^2)^2 \sin\theta^2 - m^2 g \\ b_4 &= m^3 l (\dot{\theta}^2)^2 \cos\theta^2 \\ b_5 &= m^3 l (\dot{\theta}^2)^2 \sin\theta^2 - m^3 g \end{aligned}\right\}$$

따라서, 종속 가속도로 이루어진 식을 unknown independent angular acceleration과 joint 반력으로 나타낼 수 있다.

종속가속도는 가속도레벨의 구속방정식에 의해 결정된다.

## Embedding technique Generalization

- 라그랑지 방법으로 $Q_c$를 나타내면

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_e - \mathbf{C}_\mathbf{q}^\mathrm{T}\boldsymbol{\lambda}$$

- $\ddot{q}$를 시스템 가속도와 독립가속도 사이 관계로 나타내면

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}_i\ddot{\mathbf{q}}_i + \boldsymbol{\gamma}_i$$

$B_i$는 velocity transformation matrix ⇒ embedding에서 중요

$\gamma_i$는 vector이다. 항상 quadratic in the velocities이다.

위 두개의 식을 matrix로 정리하면,

$$[\,\mathbf{M}\mathbf{B}_i \quad \mathbf{C}_\mathbf{q}^\mathrm{T}\,]\begin{bmatrix}\ddot{\mathbf{q}}_i \\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix} = \mathbf{Q}_e - \mathbf{M}\boldsymbol{\gamma}_i$$

---

## 예제 (rod, roller 2자유도)

- generalized coordinate

$$\mathbf{q}_i = [\,\theta^2 \quad \theta^3\,]^\mathrm{T}$$

$$
\begin{bmatrix} \ddot{R}_x^2 \\ \ddot{R}_y^2 \\ \ddot{\theta}^2 \\ \ddot{R}_x^3 \\ \ddot{R}_y^3 \\ \ddot{\theta}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}\sin\theta^2 & 0 \\ \frac{l}{2}\cos\theta^2 & 0 \\ 1 & 0 \\ -l\sin\theta^2 & 0 \\ l\cos\theta^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta}^3 \end{bmatrix} + (\dot{\theta}^2)^2 l \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\cos\theta^2 \\ -\frac{1}{2}\sin\theta^2 \\ 0 \\ -\cos\theta^2 \\ -\sin\theta^2 \\ 0 \end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}\sin\theta^2 & 0 \\ \frac{l}{2}\cos\theta^2 & 0 \\ 1 & 0 \\ -l\sin\theta^2 & 0 \\ l\cos\theta^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_i = (\dot{\theta}^2)^2 l \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\cos\theta^2 \\ -\frac{1}{2}\sin\theta^2 \\ 0 \\ -\cos\theta^2 \\ -\sin\theta^2 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

▼ 4.7 Embedding Technique / 195

- Embedding Technique (결과 식이 시스템의 DOF의 수와 같음) 즉, any constraint force를 포함하지 않음.

아래 식이 성립함

$$
[\,\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\,] \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_i \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_e - \mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{\gamma}_i
$$

- 정리된 embedding technique 식 ($M_i, \ddot{q}_i, Q_i$에 대해서 나타냄.)

$$
\mathbf{M}_i\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{Q}_i
$$

where

$$
\mathbf{M}_i = \mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{B}_i, \quad \mathbf{Q}_i = \mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_e - \mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{\gamma}_i
$$

$M_i$는 generalized inertia matrix

$\ddot{q}_i$ 는 generalized coordinate

$Q_i$는 vector of generalized forces with DOF

- embedding technique에서 속도 transformation matrix $B_i$는 중요하다고 함.

  ⇒ chapter 5. virtual work에서 virtual displacement를 구하는 이유가 $B_i$를 구하기 위해서임.

▼ 4.8 Amalgamated Formulation / 197

- 동역학 식 (어떤 방법이든 아래와 같은 식으로 EOM 만들어야 함)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_c$$

- 가속도 벡터를 independent acceleration의 term으로 나타내면,

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \gamma_i$$

- 아래 식은 증명됨.

$$\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_c = \mathbf{0}$$

좌측 식은 embedding technique에서 증명됨.

$$\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$$

⇒ 위 세개의 식을 combined 하면,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_i \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ -\mathbf{Q}_c \\ \ddot{\mathbf{q}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e \\ \gamma_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

위 matrix는 가속도와 joint반력 뿐만 아니라 독립가속도에 대해서도 풀 수 있다.

▼ 4.9 Open-Chain Systems / 197 (바디나눠서 푸는 법, subsystem활용법) subsystem은 달랑베르 원리 씀. joint reaction안구해도됨

- augmented formulation은 open, closed kinematic chain이 똑같이 다뤄진다는 장점이 있음.

  원래 closed kinematic chain은 singular configuration이 발생하는 단점이 있었음.

- Open과 Closed의 차이점.

  (1) closed분석이 더 어렵다.

  (2) chapter 6 내용 : Lagrange multipliers의 이점이 있음.

# develop the dynamic equations of Open chain system

각 바디별 open chain system에서 dynamic condition develop하기.

(1) 방법 1

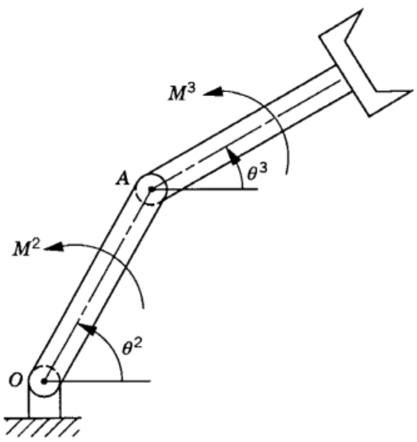
- 방정식들을 in terms of the joint reaction forces로 표현하기.
- 결과 방정식들의 수가 (시스템 DOF수+joint 반발력의 수) 와 같게 하기.

⇒ 모든 외력이 정해졌다면 (specified) 동역학 방정식 만들 때, reaction forces와 a number of unknown accelerations가 시스템의 DOF 수와 같게 해야함.

(2) 방법 2 (minimum number of equation)

- 이번 chapter에서 나온 내용임.
- 선택한 조인트에 cut을 함. dynamic condition이 정해진 subsystem을 공식화해서 최소 미분 방정식의 수로 계산 가능.
- joint 반력을 포함하지 않는 방정식의 수는 system의 DOF수와 같음.
- minumum number of equation은 방법 1에서 joint 반력을 제거함으로 얻을 수 있다.

# Equilibrium of the Separate Bodies



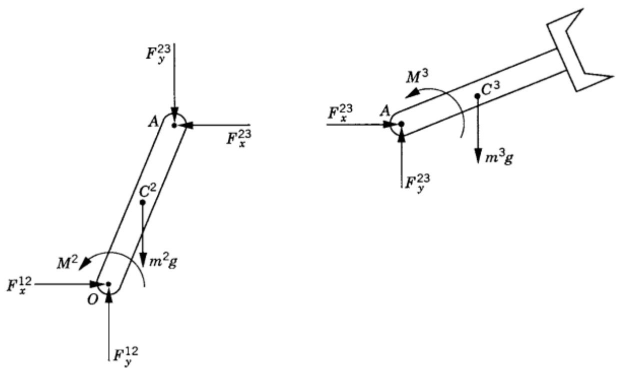




**Figure 4.9** Free-body diagram

위와 같은 open-chain system (2자유도 two-arm manipulator system)이 있다.

위 free-body diagram을 통해 얻을 수 있는 dynamic condition of body 2는 아래와 같다.

Body 1은 ground 또는 fixed link를 나타낸다.

Body 2는 first movable link in the manipulator를 나타낸다.

Body 3은 두 번째 움직이는 링크이다.

$$\left.\begin{aligned} F_x^{12} - F_x^{23} &= m^2 a_x^2 \\ F_y^{12} - m^2 g - F_y^{23} &= m^2 a_y^2 \\ F_x^{12} l_O^2 \sin\theta^2 - F_y^{12} l_O^2 \cos\theta^2 + M^2 + F_x^{23} l_A^2 \sin\theta^2 & \\ -F_y^{23} l_A^2 \cos\theta^2 &= J^2 \ddot{\theta}^2 \end{aligned}\right\}$$

Body 3의 dynamic condition은 아래와 같다.

$$\left.\begin{aligned} F_x^{23} &= m^3 a_x^3 \\ F_y^{23} - m^3 g &= m^3 a_y^3 \\ F_x^{23} l_A^3 \sin\theta^3 - F_y^{23} l_A^3 \cos\theta^3 + M^3 &= J^3 \ddot{\theta}^3 \end{aligned}\right\}$$

⇒ 이번 챕터에서는 inverse dynamics (kinematically driven system)을 공부할 것.

추가로, open 과 closed kinematic chain의 차이점을 공부할 것.

---

위 문제의 Body 2와 Body 3의 dynamic condition을 combine하면,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ l_O^2 \sin\theta^2 & -l_O^2 \cos\theta^2 & l_A^2 \sin\theta^2 & -l_A^2 \cos\theta^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_A^3 \sin\theta^3 & -l_A^3 \cos\theta^3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x^{12} \\ F_y^{12} \\ F_x^{23} \\ F_y^{23} \\ M^2 \\ M^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 a_x^2 \\ m^2 a_y^2 + m^2 g \\ m^3 a_x^3 \\ m^3 a_y^3 + m^3 g \\ J^2 \ddot{\theta}^2 \\ J^3 \ddot{\theta}^3 \end{bmatrix}$$

좌측 식은 $Ax = b$식으로 생각할 수 있다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A_{63} & A_{64} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= [F_x^{12} \quad F_y^{12} \quad F_x^{23} \quad F_y^{23} \quad M^2 \quad M^3]^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b} &= [m^2 a_x^2 \quad (m^2 a_y^2 + m^2 g) \quad m^3 a_x^3 \quad (m^3 a_y^3 + m^3 g) \quad J^2 \ddot{\theta}^2 \quad J^3 \ddot{\theta}^3]^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{51} &= l_O^2 \sin\theta^2, & A_{52} &= -l_O^2 \cos\theta^2 \\ A_{53} &= l_A^2 \sin\theta^2, & A_{54} &= -l_A^2 \cos\theta^2 \\ A_{63} &= l_A^3 \sin\theta^3, & A_{64} &= -l_A^3 \cos\theta^3 \end{aligned}\right\}$$

여기서 $l^i_O$와$l^i_A$는 각각 link i의 질량 중심부터 점 O와 A까지의 거리이다.

위 Body들의 dynamic condition을 통해 생성된 Ax=b를 inverse(A)를 통해 x를 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -A_{51} & -A_{52} & -(A_{51}+A_{53}) & -(A_{52}+A_{54}) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -A_{63} & -A_{64} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

결과적으로, solution x벡터를 아래와 같이 구할 수 있고, x의 아래 moment 2개의 식은 $F^{12}_x, F^{12}_y$ 등의 reaction force가 포함되지 않음을 알 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} F^{12}_x &= m^2 a^2_x + m^3 a^3_x \\ F^{12}_y &= m^2 a^2_y + m^2 g + m^3 a^3_y + m^3 g \\ F^{23}_x &= m^3 a^3_x \\ F^{23}_y &= m^3 a^3_y + m^3 g \\ M^2 &= J^2 \ddot{\theta}^2 - A_{51} m^2 a^2_x - A_{52}(m^2 a^2_y + m^2 g) - (A_{51}+A_{53}) m^3 a^3_x \\ &\qquad -(A_{52}+A_{54})(m^3 a^3_y + m^3 g) \\ M^3 &= J^3 \ddot{\theta}^3 - A_{63} m^3 a^3_x - A_{64}(m^3 a^3_y + m^3 g) \end{aligned}\right\}$$

---

## Equilibrium of the Subsystem

- open chain system의 서브시스템 특성을 활용하면, 위 결과 식 마지막 2개의 Moment식을 internal reaction force를 구하지 않고 구할 수 있음.

  [예시]

  위 open-chain system의 링크 3번 팔

- system의 The moment of external force and moment. ⇒ 외력과 외부 모멘트에 의해 생긴 총 외부 모멘트

$$M_e = M^3 - m^3 g l_A^3 \cos\theta^3$$

- moment of inertia abuot A

$$M_i = -m^3 a_x^3 l_A^3 \sin\theta^3 + m^3 a_y^3 l_A^3 \cos\theta^3 + J^3\ddot{\theta}^3$$

- 달랑베르 원리 (inertia moment = moment of the applied force) (internal이 아닌 inertia임)

$$M^3 - m^3 g l_A^3 \cos\theta^3 = -m^3 a_x^3 l_A^3 \sin\theta^3 + m^3 a_y^3 l_A^3 \cos\theta^3 + J^3\ddot{\theta}^3$$

Link 3이므로, 3의 moment에 대해 정리하면,

$$M^3 = J^3\ddot{\theta}^3 - m^3 a_x^3 l_A^3 \sin\theta^3 + (m^3 a_y^3 + m^3 g) l_A^3 \cos\theta^3$$

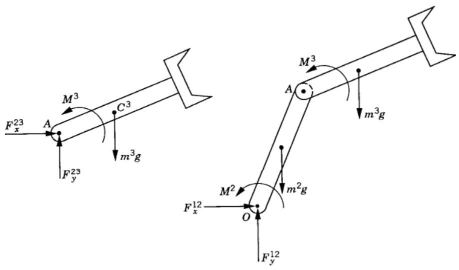


**Figure 4.10** Equilibrium of the subsystems

기존은 좌측처럼 subsystem하나씩 분해해서 계산함.

⇒internal force 계산 필요

그러나 subsystem의 평형 원리를 이용하면

internal force를 계산하지 않고 solution구하기 가능.

- external force and moment

$$M_e = M^2 + M^3 - m^2 g l_O^2 \cos\theta^2 - m^3 g (l^2 \cos\theta^2 + l_A^3 \cos\theta^3)$$

- moment of the inertia force and moment about O

$$
\begin{aligned}
M_i = {} & J^2\ddot{\theta}^2 + J^3\ddot{\theta}^3 - m^2a_x^2 l_O^2 \sin\theta^2 + m^2 a_y^2 l_O^2 \cos\theta^2 \\
& - m^3 a_x^3 (l^2 \sin\theta^2 + l_A^3 \sin\theta^3) + m^3 a_y^3 (l^2 \cos\theta^2 + l_A^3 \cos\theta^3)
\end{aligned}
$$

[결과]

위 두식에서 dynamic equilibrium condition for this subsystem을 구함.

$$
\begin{aligned}
& M^2 + M^3 - m^2 g l_O^2 \cos\theta^2 - m^3 g (l^2 \cos\theta^2 + l_A^3 \cos\theta^3) \\
& \quad = J^2\ddot{\theta}^2 + J^3\ddot{\theta}^3 - m^2 a_x^2 l_O^2 \sin\theta^2 + m^2 a_y^2 l_O^2 \cos\theta^2 \\
& \qquad - m^3 a_x^3 (l^2 \sin\theta^2 + l_A^3 \sin\theta^3) + m^3 a_y^3 (l^2 \cos\theta^2 + l_A^3 \cos\theta^3)
\end{aligned}
$$

[정리]

$$
\begin{aligned}
M^2 + M^3 = {} & J^2\ddot{\theta}^2 + J^3\ddot{\theta}^3 - m^2 a_x^2 l_O^2 \sin\theta^2 + (m^2 a_y^2 + m^2 g) l_O^2 \cos\theta^2 \\
& - m^3 a_x^3 (l^2 \sin\theta^2 + l_A^3 \sin\theta^3) + (m^3 a_y^3 + m^3 g) \\
& \cdot (l^2 \cos\theta^2 + l_A^3 \cos\theta^3)
\end{aligned}
$$

즉, 2자유도계 시스템의 dynamic condition을 나타낸 것이다.

2자유도계는 2unknown 2equation이 생긴다.

[예시1]에서 $M^3$의 식, [결과]에서 $M^2 + M^3$식을 도출했으므로 둘을 연립하여 $M^2$를 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
M^2 = {} & J^2\ddot{\theta}^2 - m^2 a_x^2 l_O^2 \sin\theta^2 + (m^2 a_y^2 + m^2 g) l_O^2 \cos\theta^2 \\
& - m^3 a_x^3 l^2 \sin\theta^2 + (m^3 a_y^3 + m^3 g) l^2 \cos\theta^2
\end{aligned}
$$

---

# 결론

방법 1은 Equilibirum of seperate bodies 를 사용함.

바디를 나누므로 joint reaction force가 생겨 internal force를 계산해줘야함.

방법 2는 Equilibrium of the Subsystem으로

달랑베르 원리를 이용해 전체 intertia moment = 전체 applied force moment이므로 반력과 내력 계산을 하지 않아도 됨.

전체 모멘트는 force+moment로 계산 됨.

결론은, 방법 1이든 2이든 결과 식은 같다.

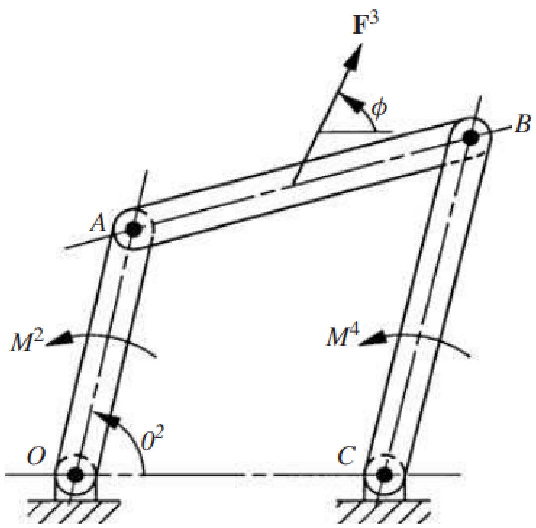
- 방법 2는 recursive method의 근간이 됨. (open kinematic system 분석법으로 joint 반력을 제거함)
- 방법 2는 아니지만 그 과정 중 inertia moment=applied force moment ($M_e = M_i$) 식은 virtual work의 근간이 됨.

▼ 4.10 Closed-Chain Systems / 203 open과 다른점

# Equilibrium of the separate bodies

- body 나눠서 계산 시, [방정식 수=reaction force의 수 + 시스템의 DOF] 이다.

[예시]




좌측 커플러의 dynamic equations는 아래와 같다.

$$\left.\begin{aligned} F_x^{23} + F_x^3 - F_x^{34} &= m^3 a_x^3 \\ F_y^{23} - m^3 g + F_y^3 - F_y^{34} &= m^3 a_y^3 \\ F_x^{23} l_A^3 \sin\theta^3 - F_y^{23} l_A^3 \cos\theta^3 + F_x^{34} l_B^3 \sin\theta^3 - F_y^{34} l_B^3 \cos\theta^3 &= J^3 \ddot{\theta}^3 \end{aligned}\right\}$$

where $F_x^3$ and $F_y^3$ are the components of the external force vector $\mathbf{F}^3$.

closed-chain mechanisems에 외력 $F^3$이 작용함.

---

$M^4$가 작용하는 rocket의 dynamic equation은 아래와 같다.

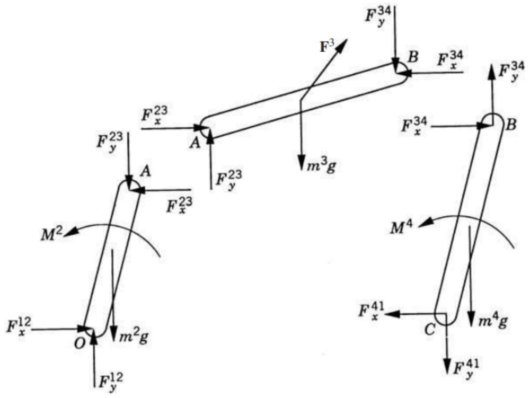


**Figure 4.12** Free-body diagrams

$$
\left.\begin{aligned}
F_x^{34} - F_x^{41} &= m^4 a_x^4 \\
F_y^{34} - m^4 g - F_y^{41} &= m^4 a_y^4 \\
F_x^{34} l_B^4 \sin\theta^4 - F_y^{34} l_B^4 \cos\theta^4 + M^4 + F_x^{41} l_C^4 \sin\theta^4 - F_y^{41} l_C^4 \cos\theta^4 &= J^4 \ddot{\theta}^4
\end{aligned}\right\}
$$

---

4절 기구의 dynamic conditions는 9개의 방정식과 9개의 미지수가 생긴다.

8개는 joint에서 반발력 (reaction force)

위의 총 9개의 식을 정리하면 우측과 같다.

(바디를 나눠서 풀므로 joint 반발력을 계산함)

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & A_{83} & A_{84} & A_{85} & A_{86} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & A_{95} & A_{96} & A_{97} & A_{98} & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
F_x^{12} \\ F_y^{12} \\ F_x^{23} \\ F_y^{23} \\ F_x^{34} \\ F_y^{34} \\ F_x^{41} \\ F_y^{41} \\ M^4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
m^2 a_x^2 \\
m^2 a_y^2 + m^2 g \\
m^3 a_x^3 - F_x^3 \\
m^3 a_y^3 + m^3 g - F_y^3 \\
m^4 a_x^4 \\
m^4 a_y^4 + m^4 g \\
J^2 \ddot{\theta}^2 - M^2 \\
J^3 \ddot{\theta}^3 \\
J^4 \ddot{\theta}^4
\end{bmatrix}
$$

where

$$
\left.\begin{aligned}
A_{71} &= l_O^2 \sin\theta^2, & A_{72} &= -l_O^2 \cos\theta^2 \\
A_{73} &= l_A^2 \sin\theta^2, & A_{74} &= -l_A^2 \cos\theta^2 \\
A_{83} &= l_A^3 \sin\theta^3, & A_{84} &= -l_A^3 \cos\theta^3 \\
A_{85} &= l_B^3 \sin\theta^3, & A_{86} &= -l_B^3 \cos\theta^3 \\
A_{95} &= l_B^4 \sin\theta^4, & A_{96} &= -l_B^4 \cos\theta^4 \\
A_{97} &= l_C^4 \sin\theta^4, & A_{98} &= -l_C^4 \cos\theta^4
\end{aligned}\right\}
$$

이때 좌측의 결과 matrix는

$Ax = b$와 같이 쓸 수 있다.

solution은 $x$벡터는

$x = A^{-1}b$로 계산할 수 있다.

---

## Equilibrium of the Subsystem

이전, open-chain에서는, 아래 식처럼 joint 식으로 방정식 수를 줄였음. ⇒예시 외력이 작용하는 open-chain system

## Equation 1

$$F_x^{12} l^2 \sin \theta^2 - F_y^{12} l^2 \cos \theta^2 + M^2 + m^2 g l_A^2 \cos \theta^2$$
$$= J^2 \ddot{\theta}^2 + m^2 a_x^2 l_A^2 \sin \theta^2 - m^2 a_y^2 l_A^2 \cos \theta^2$$

추가로, equilibrium of the subsystem을 연구하면서 아래 식을 얻을 수 있었다.

$$\begin{aligned} & F_x^{12}(l^2 \sin \theta^2 + l^3 \sin \theta^3) - F_y^{12}(l^2 \cos \theta^2 + l^3 \cos \theta^3) + M^2 \\ & \quad + m^2 g (l_A^2 \cos \theta^2 + l^3 \cos \theta^3) + F_x^3 l_B^3 \sin \theta^3 \\ & \quad + (m^3 g - F_y^3) l_B^3 \cos \theta^3 \end{aligned}$$

위를 정리하면,

## Equation 2

$$\begin{aligned} & F_x^{12} l^3 \sin \theta^3 - F_y^{12} l^3 \cos \theta^3 + m^2 g l^3 \cos \theta^3 + F_x^3 l_B^3 \sin \theta^3 \\ & \quad + (m^3 g - F_y^3) l_B^3 \cos \theta^3 \\ & = m^2 a_x^2 l^3 \sin \theta^3 - m^2 a_y^2 l^3 \cos \theta^3 + J^3 \ddot{\theta}^3 + m^3 a_x^3 l_B^3 \sin \theta^3 \\ & \quad - m^3 a_y^3 l_B^3 \cos \theta^3 \end{aligned}$$

마지막 세번째 방정식, 외부 Moment도 추가로 작용하므로 Moment에 대한 식도 구해주면,

$$\begin{aligned} & - F_y^{12} l^1 + M^2 + m^2 g (l_A^2 \cos \theta^2 + l^3 \cos \theta^3 + l^4 \cos \theta^4) \\ & \quad + F_x^3 (l_B^3 \sin \theta^3 + l^4 \sin \theta^4) + (m^3 g - F_y^3)(l_B^3 \cos \theta^3 + l^4 \cos \theta^4) \\ & \quad + M^4 + m^4 g l_C^4 \cos \theta^4 \\ & = J^2 \ddot{\theta}^2 + m^2 a_x^2 (l_A^2 \sin \theta^2 + l^3 \sin \theta^3 + l^4 \sin \theta^4) \\ & \quad - m^2 a_y^2 (l_A^2 \cos \theta^2 + l^3 \cos \theta^3 + l^4 \cos \theta^4) + J^3 \ddot{\theta}^3 \\ & \quad + m^3 a_x^3 (l_B^3 \sin \theta^3 + l^4 \sin \theta^4) \\ & \quad - m^3 a_y^3 (l_B^3 \cos \theta^3 + l^4 \cos \theta^4) + J^4 \ddot{\theta}^4 + m^4 a_x^4 l_C^4 \sin \theta^4 \\ & \quad - m^4 a_y^4 l_C^4 \cos \theta^4 \end{aligned}$$

where

$$l^1 = l^2 \cos \theta^2 + l^3 \cos \theta^3 + l^4 \cos \theta^4$$

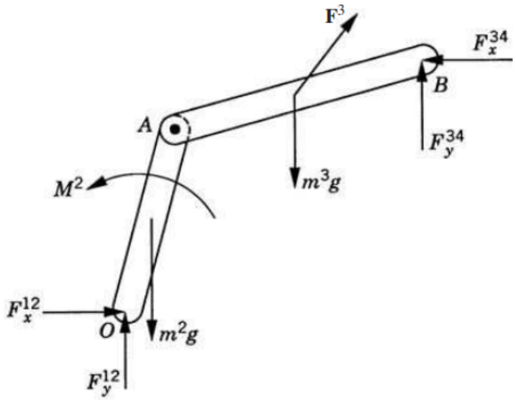
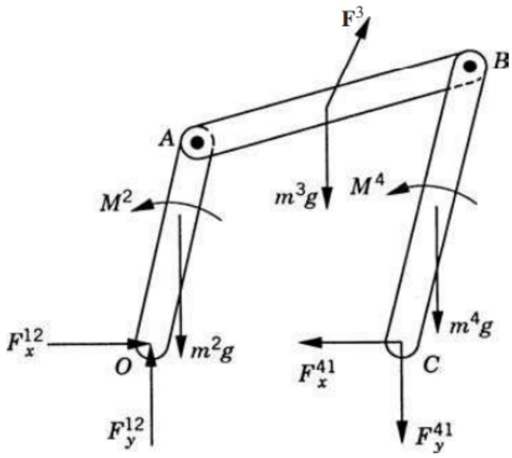



**Figure 4.13** Equilibrium of two bodies

Closed-chain system에서 2개의 바디만 떼서 본 것




3개의 바디를 한번에 본 것.

$M^2$와 $M^3$을 구한 2개의 moment equations에 따라 위 마지막 세 번째 방정식에 대입해주면,

아래와 같이 요약된다.

### Equation 3

$$
\begin{aligned}
&F_x^{12} l^4 \sin\theta^4 + (m^2 g - F_y^{12}) l^4 \cos\theta^4 + F_x^3 l^4 \sin\theta^4 \\
&\quad + (m^3 g - F_y^3) l^4 \cos\theta^4 + M^4 + m^4 g l_C^4 \cos\theta^4 \\
&\quad = (m^2 a_x^2 + m^3 a_x^3) l^4 \sin\theta^4 - (m^2 a_y^2 + m^3 a_y^3) l^4 \cos\theta^4 \\
&\quad + J^4 \ddot{\theta}^4 + m^4 a_x^4 l_C^4 \sin\theta^4 - m^4 a_y^4 l_C^4 \cos\theta^4
\end{aligned}
$$

---

# 결과

- 위 색칠된 3개의 Equation에 대해, 3개의 unknowns으로 solve될 수 있다.

2개의 reaction force $F_x^{12}, F_y^{12}$ , 1 개의 external moment $M^4$

- 같은 방식을 사용하여 다른 조합도 나타낼 수 있다.

$F_y^{12}$ and the external moment $M^4$. Using a similar procedure, another set of three equations in terms of $F_x^{23}$, $F_y^{23}$, and $M^4$, or in terms of $F_x^{34}$, $F_y^{34}$, and $M^4$, or in terms of $F_x^{41}$, $F_y^{41}$, and $M^4$ can be obtained. It is clear, however, that unlike the case of open kinematic chains

- open kinematic chain system과 다른점.

The equilibrium conditions of the subsystems of closed kinematic chain은

⇒ 조인트 반력 (reaction force)를 포함하는 방정식들을 갖는다.

- secondary joint 법

위 예제에서, closed system을 자른 사진이 있음. ⇒ 자르면 open system이 됨.

자른 점을 secondary joint라고 함.

거기서 얻은 open chain의 EOM과 augment한 방정식들은 closed-chain을 정의하는데 도움을 줌. (chpater 6에서 자세히)

depedent variable 종속변수가 algebraic constraint equations of the secondary joint로 제거될 수 있음.

▼ 4.11 Concluding Remarks / 209

- dynamic EOM의 서로 다른 Form을 developed 해봄. (Newtonian mechanics)
- Computational dynamics에서는 2개의 form을 크게 다룸.

  (1) Augmented formulation

  (2) Embedding technique

- Augmented formulation

  (1) redundant set of coordinate임. ⇒ 복잡한 계산할 때 좋음

  (2) redundancy때문에, coordinate가 구속방정식과 종속임.

  즉, augmented에 쓰인 종속coordinate의 수가독립 constraint force의 수와 같다.

  (3) EOM, 구속방정식, 방정식 수=미지수의 수 라는 점을 이용해 문제를 해결한다.

  (4) Augmented fomulation의 결과는 sparse matrix이다. (0이 많다.) 그리고 일반적인 목적의 multibody computer program할 때 좋음.

  (5) 차원 문제점이 생김. matrix가 엄청커서, 복잡한 수치 알고리즘이 필요함.

- Embedding Technique

  (1) 시스템 가속도 벡터를 독립 가속도 term으로만 나타냄. ⇒ velocity transformation matrix 사용

  (2) kinematic과의 관련은 minimum set of differential equations이다. (독립가속도로만 나타내기)

  (3) constraint force의 제거로 증명됨

- 다음단원

virtual work : constraint force를 시스템적으로 제거하는 법

minimum set of differential EOM을 얻는 법