chapter 2 : Linear Algebra

시작 날짜 --> 미팅 날짜	@2022년 8월 16일 → 2022년 9월 5일

▼ 2.1 Matrices / 22

- 행렬

m x n, A 행렬

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A 행렬의 전치 (transpose of A)

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

symmetric matrix ($A = A^T$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.0 & -2.0 & 1.5 \\ -2.0 & 0.0 & 2.3 \\ 1.5 & 2.3 & 1.5 \end{bmatrix}$$

upper-triangular matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6.0 & 2.5 & 10.2 & -11.0 \\ 0 & 8.0 & 5.5 & 6.0 \\ 0 & 0 & 3.2 & -4.0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.2 \end{bmatrix}$$

lower-triangular matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6.0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & 8.0 & 0 & 0 \\ 10.2 & 5.5 & 3.2 & 0 \\ -11.0 & 6.0 & -4.0 & -2.2 \end{bmatrix}$$

diagonal matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.0 \end{bmatrix}$$

skew-symmetric matrix

$$\tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = -\tilde{\mathbf{A}}.$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -3.0 & -5.0 \\ 3.0 & 0 & 2.5 \\ 5.0 & -2.5 & 0 \end{bmatrix}$$

▼ 2.2 Matrix Operations / 24

Matrix Addition

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Matrix Multiplication

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \qquad (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC}$$

Matrix Partitioning

행렬 A를 4분할 하여 각각을 하나의 행렬로 보고 계산할 수 있다.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hdashline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} = [a_{41} \quad a_{42} \quad a_{43}], & \mathbf{A}_{22} = a_{44} \end{array}\right\}$$

Determinant

n x n 정사각행렬의 행렬식은 $|A|$으로 표기하고 다음과 같이 계산한다.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

[3 x 3 행렬인 경우]

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} C_{1j} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

where

$$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

That is, the determinant of $\mathbf{A}$ is

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Inverse of a Matrix

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{C}_t}{|\mathbf{A}|}$$

Orthogonal Matrix

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$$

▼ 2.3 Vectors / 33

- 벡터 : matrix가 행과 열 중 1 줄만 있는 거임. matrix의 연산과 Transpose를 똑같이 계산함.

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = [a_1 \quad a_2 \cdots a_n]$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1 \quad a_2 + b_2 \cdots a_n + b_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\alpha\mathbf{a} = [\alpha a_1 \quad \alpha a_2 \cdots \alpha a_n]^{\mathrm{T}}$$

- 유닛 벡터

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}} = [(a_1)^2 + (a_2)^2 + \cdots + (a_n)^2]^{1/2}$$

$$|\hat{\mathbf{a}}| = [(\hat{a}_1)^2 + (\hat{a}_2)^2 + \cdots + (\hat{a}_n)^2]^{1/2} = 1$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]^{\mathrm{T}}$$

$$
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = [a_1 \quad a_2 \cdots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

$$
= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i
$$

Differentiation

scalar function이든, vector function이든 1개 이상의 변수에 의해 값이 정해진다. 예를 들어, coordinate, velocity, acceleration등에 의해 값이 바뀌는 vector function이 있다면, 함수에 영향을 미치는 값들은 time에 영향을 받는다.

따라서 아래와 같이 표기할 수 있다.

$$
f = f(q_1, q_2, \ldots q_n, t)
$$

where $q_1, q_2, \ldots, q_n$ are functions of t, that is, $q_i = q_i(t)$.

[함수 f를 전미분 하는 경우]

$$
\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}
$$

$$
\frac{df}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_1} & \frac{\partial f}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dq_n}{dt} \end{bmatrix} + \frac{\partial f}{\partial t}
$$

[전미분한 함수를 편미분 함수로 표기하는 법]

This equation can be written as

$$
\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}\frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}
$$

in which $\partial f / \partial t$ is the partial derivative of f with respect to t, and

$$
\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \cdots q_n]^{\mathrm{T}}
$$

$$
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = f_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_1} & \frac{\partial f}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial q_n} \end{bmatrix}
$$

즉, f_q는 function에 대해 모든 q값들을 편미분한 값들을 모아둔 하나의 벡터라고 볼 수 있다.

[function도 벡터인 경우]

[vector function을 t로 편미분할 때를 구분할 것]

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{f}_t = \left[\frac{\partial f_1}{\partial t} \;\; \frac{\partial f_2}{\partial t} \;\; \cdots \;\; \frac{\partial f_m}{\partial t} \right]^{\mathrm{T}}$$

위는 vector function을 q가 아닌 t로 편미분한 결과이다.

function도 vector가 되면, f는 m개의 요소, q는 n개의 요소를 가질 때,

f를 q로 편미분하면 m x n의 행렬이 나타난다.

Linear Independence

$$e_1\mathbf{a}_1 + e_2\mathbf{a}_2 + \cdots + e_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

위 식에서 좌항의 값이 = 0 을 만족시켜주는 e1~en의 스칼라값이 존재한다면, 선형독립이라고 한다. matrix로 표기하면 아래와 같다.

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

▼ 2.4 Three-Dimensional Vectors / 42

- 기계공학에서는 position, velocity, acceleration을 3차원 벡터로 다루기 때문에 굉장히 중요하다.

Cross product

[외적의 특징]

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \end{aligned}\right\}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{c} = 0$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b})\mathbf{c} \end{aligned}\right\}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$$

[skew-symmetric matrix로 외적 계산하기 예시]

Let $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ be the three-dimensional vectors

$$\mathbf{a}=[-1 \quad 7 \quad 1]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{b}=[0 \quad -3 \quad 8]^{\mathrm{T}}$$

Determine the skew-symmetric matrices $\tilde{\mathbf{a}}$ and $\tilde{\mathbf{b}}$ associated, respectively, with the vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ and evaluate the cross product $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Solution. The skew-symmetric matrices $\tilde{\mathbf{a}}$ and $\tilde{\mathbf{b}}$ are

$$\tilde{\mathbf{a}}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix} 0 & -8 & -3 \\ 8 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The cross product $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ can be written as

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 59 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Cartesian coordinate system

[상대 좌표를 썼을 때, 외적 공식을 통해 i, j, k 벡터 증명]

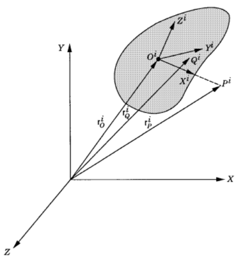

Figure 2.1 Cartesian coordinate system

O^i, P^i, and Q^i are known and defined in the XYZ coordinate system by the vectors $\mathbf{r}_O^i$, $\mathbf{r}_P^i$, and $\mathbf{r}_Q^i$, one can first define the unit vectors $\mathbf{i}^i$ and $\mathbf{i}_t^i$ as

$$\mathbf{i}^i=\frac{\mathbf{r}_P^i-\mathbf{r}_O^i}{|\mathbf{r}_P^i-\mathbf{r}_O^i|}, \quad \mathbf{i}_t^i=\frac{\mathbf{r}_Q^i-\mathbf{r}_O^i}{|\mathbf{r}_Q^i-\mathbf{r}_O^i|} \tag{2.102}$$

where $\mathbf{i}^i$ defines a unit vector along the X^i axis. It is clear that a unit vector $\mathbf{k}^i$ along the Z^i axis is defined as

$$\mathbf{k}^i=(\mathbf{i}^i\times\mathbf{i}_t^i)/|\mathbf{i}^i\times\mathbf{i}_t^i| \tag{2.103}$$

A unit vector along the Y^i axis can then be defined as

$$\mathbf{j}^i=\mathbf{k}^i\times\mathbf{i}^i \tag{2.104}$$

The vector $\mathbf{r}_O^i$ defines the position vector of the reference point O^i in the XYZ coordinate system, while the 3×3 matrix

$$\mathbf{A}^i=[\mathbf{i}^i \quad \mathbf{j}^i \quad \mathbf{k}^i] \tag{2.105}$$

as will be shown in Chapter 7, completely defines the orientation of the body coordinate system $X^iY^iZ^i$ with respect to the coordinate system XYZ. This matrix is called the *direction cosine transformation matrix*.

▼ 2.5 Solution of Algebraic Equations / 48

n개의 방정식과 n개의 unknown을 algebraic equation을 통해 해결해보자.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ax=b

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

and the vectors **x** and **b** are given by

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^{\mathrm{T}}$$

[결과]

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

x벡터를 A행렬의 역행렬과 b행렬로 구할 수 있음.

(+) Gaussian Elimination, Gauss-Joardan Method를 통해서도 x를 구할 수 있음.

Pivoting and Scaling

[pivoting]

가우스 소거법과 가우스조던 방법은 행렬의 요소들을 대각화하는 과정이 필요하다. 이 대각화하는 과정에서 생겨난 대각요소들을 ‘pivot’ 이라고 한다. (a11, a22, a33…)

이때, piviot의 값이 0이거나 작다면, 수치적인 오류가 날 가능성이 크다. ⇒ 해결법 두가지 (partial pivoting, full pivoting)

(1) partial pivoting : x_i의 계수 중 가장 큰 거 기준으로 식을 재정렬.

(2) full pivoting : 식과 변수들을 가장 큰 절대값을 가지는 pivot을 선택하기 위해 정렬함.

[Scaling]

계수행렬 A의 요소크기 (element size)가 다르면 오차가 존재함. 이때 scaling이 필요하다.

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}_1 \mathbf{A} \mathbf{B}_2 \tag{2.118}$$

where $\mathbf{B}_1$ and $\mathbf{B}_2$ are diagonal matrices whose diagonal elements are the scaling constants. Hence, one is interested in solving the following new system of algebraic equations:

$$\mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{z} \tag{2.119}$$

where

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{B}_1 \mathbf{b} \tag{2.120}$$

The solution of the system $\mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{z}$ defines the vector $\mathbf{y}$. This solution vector can be used to define the original vector of unknowns $\mathbf{x}$ as

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}_2 \mathbf{y} \tag{2.121}$$

[가우시안으로 rank와 독립변수들 찾는 법]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

좌측 식을 가우스 소거법 후 넘기면 위와 같이 됨.

x2, x4, x5가 주어지면 x1, x3는 정해지는 값이다. 따라서 x2, x4, x5는 독립변수이고, x1, x3는 종속 변수이다.

- ▼ 2.6 Triangular Factorization / 55

가우스소거법으로 algebraic equation을 풀면 (Ax=b), Upper-triangular matrix로 만들어야 과정이 편리함. ⇒ A=LU 로 분해함 : LU factorization

[예시]

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

[Crout's method]

LU 분해 시, unique한 값이 나오지는 않는다. 하지만 대각요소들이 모두 1인 LU분해는 unique한 값을 가진다. ⇒ 특별한 값을 가지는 LU분해 중, upper-triangular U 행렬의 대각값이 1인 경우.

(특별한 값을 가지는 LU분해를 얻는 것은 'Doolittle's method' 라고 한다.)

[Cholesky's method]

matrix A가 (1) symmetric이고 (2) postive definite ($X^TAX > 0$) 일 때, 사용할 수 있음.

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$$

$$\left.\begin{aligned} l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}} \qquad j = 1, \ldots, i-1 \\ l_{ii} &= \left[a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (l_{ik})^2 \right]^{1/2} \end{aligned}\right\}$$

▼ 2.7 QR Decomposition / 60

또 다른 중요한 factorization임. 모든 열이 선형독립인 행렬 A=QR 로 표기할 수 있음. (Q는 열들이 orthogonal, R은 upper-triangular matrix)

두 벡터 a, b는 orthogonal 함. ($a^Tb = 0$) 그리고 아래와 같으면

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

orthogonality에 의해서

$$\alpha_i \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{a}_i = 0.$$

가 성립함. ⇒ 이때 적절한 (알파)의 값을 찾으려면 선형 독립을 만족하는 스칼라값을 찾아야 한다. ⇒ Gram-Schmidt orthogonalization process를 이용할 수 있음.

Gram-Schmidt Orthogonalization

A matrix의 모든 열 벡터가 선형 독립일 때, 열 벡터의 수만큼 그 행렬과 orthonormal한 벡터를 찾아내는 방법이다.

[예시]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

orthogonal vector를 정의하기 위해 b1을 정의

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4264 \\ -0.2132 \\ 0.8528 \\ 0.2132 \end{bmatrix}$$

b1으로 b2’를 구해서 b2를 구함

$$\mathbf{b}'_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - (-2.5584) \begin{bmatrix} 0.4264 \\ -0.2132 \\ 0.8528 \\ 0.2132 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.0909 \\ 0.5455 \\ -2.1818 \\ -0.5455 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0909 \\ 1.4545 \\ -0.8182 \\ 0.5455 \end{bmatrix}$$

b2’로 부터 b2 구함.

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{b}'_2}{|\mathbf{b}'_2|} = \begin{bmatrix} 0.7658 \\ 0.5327 \\ -0.2997 \\ 0.1998 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}'_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1 - (\mathbf{a}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_2)\mathbf{b}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (1.9188) \begin{bmatrix} 0.4264 \\ -0.2132 \\ 0.8528 \\ 0.2132 \end{bmatrix} - (0.3330) \begin{bmatrix} 0.7658 \\ 0.5327 \\ -0.2997 \\ 0.1998 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.0732 \\ -0.7683 \\ -0.5366 \\ 1.5244 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{b}'_3}{|\mathbf{b}'_3|} = \begin{bmatrix} -0.0409 \\ -0.4290 \\ -0.2996 \\ 0.8512 \end{bmatrix}$$

[결과] three orthonormal vectors

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0.4264 \\ -0.2132 \\ 0.8528 \\ 0.2132 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0.7658 \\ 0.5327 \\ -0.2997 \\ 0.1998 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -0.0409 \\ -0.4290 \\ -0.2996 \\ 0.8512 \end{bmatrix}$$

Q and R Matrices

gram-schmidt orthogonalization과정은 모든 열이 선형독립인 A 행렬이 QR 분해될 수 있다의 증명과정이다.

Q : 모든 열들이 orthogonal or orthonormal한 벡터

R : upper-triangular matrix이다.

A행렬은 서로가 선형독립인 a벡터들의 행렬이다.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_m]$$

벡터 a들과 combination orthogonal한 벡터 b들을 m개 만큼 생성할 수 있음. (gram-schmidt)

행렬 A = QR 로 분해 됨.

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_j)\mathbf{b}_j + |\mathbf{b}_i'|\mathbf{b}_i$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_m]$$

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i^T \mathbf{a}_i = |\mathbf{b}_i'|$$

$$= [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_m \\ 0 & \mathbf{b}_2^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{b}_2^T\mathbf{a}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{b}_m^T\mathbf{a}_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_j)\mathbf{b}_j + (\mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_i)\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^{i} (\mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_j)\mathbf{b}_j = \sum_{j=1}^{i} (\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_i)\mathbf{b}_j$$

즉, QR분해는 Q를 gram-schmidt로 구하고, 구한 b벡터와 a벡터들로 R 행렬을 구할 수 있음.

QR분해 이외에도 Householder Transformation 등이 존재한다. (unit vector 를 사용하지만, 자세히는 모르겠음)

Important Identities for the QR factors

- A행렬이 QR분해가 되는 n x m 직사각행렬일 때, A를 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

이때 Q의 부분인 Q1의 전치와 Q2는 orthogonal vector이다.

$$\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}$$

$A = Q_1 R_1$이고, $A^T A = R_1^T Q_1^T Q_1 R_1 = R_1^T R_1$에서 A는 모두 선형독립인 열들의 벡터이고 $A^T A$는 positive definitive symmetric matrix이므로 Cholesky factorzation이 가능하다.

⇒ 따라서, R_1은 unique한 값을 가진다.

[결과]

Q_1과R_1은 unique한 값을 가지므로, Q_2에 대해서 다음과 같이 나타낼 수 있음.

$$\mathbf{Q}_2^T \mathbf{A} = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1 = \mathbf{0}$$

▼ 2.8 Singular Value Decomposition / 74

동역학 해석에 쓰이는 또다른 factorization, SVD임.

직사각행렬 A와 행렬 A를 크기가 같지만 대각 성분만 가지는 B행렬과 서로 orthogonal 한 두 행렬과의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\mathbf{B}\mathbf{Q}_2$$

Q_1과Q_2는$orthogonal$행렬.B는A와크기는같지만,$diagonal$행렬임.

사전정보 (Eigenvalue problem)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

기계 시스템에서는 위와 같은 system of equation을 보면 A가 정사각행렬일 때, 행렬식을 이용해 아래처럼 나타낼 수 있었다.

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

- 만약, A가 실수범위의 symmetric matrix라면 eigenvalue들은 모두 orthogonal하다는 것을 사용할 수 있다.

[증명]

If $\mathbf{A}$ is a real symmetric matrix, one can show that the eigenvectors associated with distinctive eigenvalues are orthogonal. To prove this fact, we use Eq. 196 to write

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j \tag{2.197}$$

Premultiplying the first equation in Eq. 197 by $\mathbf{x}_j^{\mathrm{T}}$ and postmultiplying the transpose of the second equation by $\mathbf{x}_i$, one obtains

$$\mathbf{x}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i, \quad \mathbf{x}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_j\mathbf{x}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i \tag{2.198}$$

Subtracting yields

$$(\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{x}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i = 0 \tag{2.199}$$

which implies that

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_j &= 0 \qquad \text{if } i \neq j \\ &\neq 0 \qquad \text{if } i = j \end{aligned}\right\} \tag{2.200}$$

This orthogonality condition guarantees that the eigenvectors associated with distinctive eigenvalues are linearly independent.

- 하지만, eigenvectors가 unique한 값을 가지지 않는다는 문제점이 있음.

따라서, real symmetric matrix면서, 각각의 eigenvector들을 자신의 길이로 나눈 orthonormal set of vectors로 표기해 unique하게 나타낸다.

$$\hat{\mathbf{x}}_1,\ \hat{\mathbf{x}}_2,\ \ldots,\ \hat{\mathbf{x}}_n.$$

- 위 orthonormal한 eigenvector를 양쪽에 곱해 주면 결과 값이 대각행렬이 된다.

$$\hat{\mathbf{x}}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_j = \begin{cases} \lambda_i & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{U} = [\hat{\mathbf{x}}_1 \quad \hat{\mathbf{x}}_2 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{x}}_n]$$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Singular Value Decomposition (SVD)

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\mathbf{B}\mathbf{Q}_2$$

A는 n x m의 직사각행렬, Q_1은 n x n의 정사각행렬, Q_2는 m x m의 정사각행렬, B는 n x m의 대각행렬임.

[factorization 과정]

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{x})$$

$$\lambda = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{x})}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$$

λ is indeed nonnegative and $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

를 만족하게 해야함.

따라서,

orthogonal matrix $\mathbf{U} = [\hat{\mathbf{x}}_1 \quad \hat{\mathbf{x}}_2 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{x}}_m]$

가 존재한다고 하면,

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

위가 만족함.

감마의 값들이 $A^T A$행렬의 eigenvector 값들이므로,

행렬 값들을 벡터로 가지는 b들을 아래처럼 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{b}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_j = \begin{cases} \lambda_i & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

b벡터를 orthonormal한 벡터들의 행렬로 만들었음.

$$\mathbf{Q}_1 = [\hat{\mathbf{b}}_1 \quad \hat{\mathbf{b}}_2 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{b}}_n]$$

r은 nonzero eigenvalue 이므로

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{b}_i \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

[결과]

$$\mathbf{AU} = [\sqrt{\lambda_1}\hat{\mathbf{b}}_1 \quad \sqrt{\lambda_2}\hat{\mathbf{b}}_2 \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_m}\hat{\mathbf{b}}_m] = \mathbf{Q}_1 \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\mathbf{B}\mathbf{Q}_2$, where $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{U}^T$, and $\mathbf{B}$ is the $n \times m$ matrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
