chapter 3 : Kinematics

시작 날짜 --> 미팅 날짜	@2022년 9월 5일 → 2022년 9월 22일

[introduction]

- kinematics는 motion을 만드는 힘이 없다는 가정에서 공부하는 것임. (dynamics와 반대)
- kinematics의 목표는 알려진 motion으로 위치, 속도, 가속도를 구하는 것
- DOF와 time derivatives(위치, 속도, 가속도를 표현)을 알면 시스템을 DOF와 time derivative로 표현가능함. ⇒ kinematic relationship. (힘과 motion에 관계없이 solve 가능)
- (1) position analysis(displacement kinematic) : 시스템의 DOF가 구체화되어 있어야함. non-linear시스템은 Newton-Raphson법과 같은 iterative numerical방식으로 solution을 찾아야 함.
- (2) velocity and acceleration kinematics는 위치를 미분함으로 얻을 수 있음. (linear algebraic 필요)

▼ 3.1 Kinematics of Rigid Bodies / 88 ⇒ 고정된 점 좌표

[가정] rigid body이므로 변형이 없다.

Coordinate Tranformation

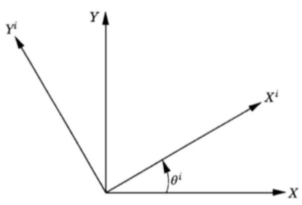


Figure 3.1 Rigid body rotation

XY좌표 축에 finite rotation이 생겼을 경우 새로운 상대좌표축 X^iY^i축을 생성할 수 있다.

$$\mathbf{i}^i = \cos\theta^i\ \mathbf{i} + \sin\theta^i\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j}^i = -\sin\theta^i\ \mathbf{i} + \cos\theta^i\ \mathbf{j}$$

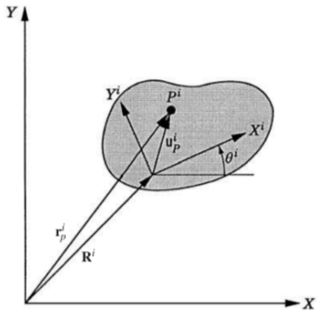
$$\cos\theta^i\ \mathbf{i}^i - \sin\theta^i\ \mathbf{j}^i = [(\cos\theta^i)^2 + (\sin\theta^i)^2]\mathbf{i}$$

따라서 절대좌표에선 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{i} = \cos\theta^i \ \mathbf{i}^i - \sin\theta^i \ \mathbf{j}^i$$

$$\mathbf{j} = \sin\theta^i \ \mathbf{i}^i + \cos\theta^i \ \mathbf{j}^i$$

Position Equations



- u_P^i를 상대좌표에서 나타내면?

$$\overline{\mathbf{u}}_P^i = \overline{x}^i_P \ \mathbf{i}^i + \overline{y}^i_P \ \mathbf{j}^i$$

$$\mathbf{u}_P^i = \overline{x}^i_P(\cos\theta^i \ \mathbf{i} + \sin\theta^i \ \mathbf{j}) + \overline{y}^i_P(-\sin\theta^i \ \mathbf{i} + \cos\theta^i \ \mathbf{j})$$

$$\mathbf{u}_P^i = (\overline{x}^i_P \cos\theta^i - \overline{y}^i_P \ \sin\theta^i)\mathbf{i} + (\overline{x}^i_P \ \sin\theta^i + \overline{y}^i_P \cos\theta^i)\mathbf{j}$$

절대좌표에서 상대좌표 원점사이점(R^i)+상대좌표에서 P^i점까지의 좌표(u_P^i)이다.

$$\mathbf{u}_P^i = \begin{bmatrix} \overline{x}^i_P \ \cos\theta^i - \overline{y}^i_P \ \sin\theta^i \\ \overline{x}^i_P \ \sin\theta^i + \overline{y}^i_P \ \cos\theta^i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_P^i = \begin{bmatrix} \cos\theta^i & -\sin\theta^i \\ \sin\theta^i & \cos\theta^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}^i_P \\ \overline{y}^i_P \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_P^i = \mathbf{A}^i \overline{\mathbf{u}}_P^i$$

평면(Planar)이고 절대좌표에서 θ^i만큼 회전한 상대좌표는 A^i행렬을 곱해주면 되고 이것을 “transformation matrix”라 한다.

회전행렬은 orthoronal matrix라는 특성을 가진다.

$$\mathbf{A}^i \mathbf{A}^{i^{\mathrm{T}}} = \mathbf{A}^{i^{\mathrm{T}}} \mathbf{A}^i = \mathbf{I}$$

- 좌측에 의해 $r^i_P = R^i + u^i_P$와 같이 나타낼 수 있다.

절대좌표에서 u^i_P를 상대좌표에서 $A^i\overline{u}^i_P$ (overline차이)로 나타낼 수 있으므로 아래와 같다.

$$\mathbf{r}^i_P = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i\overline{\mathbf{u}}^i_P$$

▼ 3.2 Velocity Equations / 92 ⇒ 고정된 점 좌표 미분으로 속도

3.1절에서 구한 절대좌표 → 상대좌표식을 미분함으로 속도 식 구함.

$$\dot{\mathbf{r}}^i_P = \dot{\mathbf{R}}^i + \dot{\mathbf{A}}^i\overline{\mathbf{u}}^i_P$$

여기서, 회전행렬은 아래처럼 각속도x편미분 행렬로 나타낼 수 있다.

$\dot{\mathbf{A}}^i = \dot{\theta}^i\mathbf{A}^i_\theta$

$$\mathbf{A}^i_\theta = \begin{bmatrix} -\sin\theta^i & -\cos\theta^i \\ \cos\theta^i & -\sin\theta^i \end{bmatrix}$$

[속도 식]

$$\dot{\mathbf{r}}^i_P = \dot{\mathbf{R}}^i + \dot{\theta}^i\mathbf{A}^i_\theta\overline{\mathbf{u}}^i_P$$

(좌측 외적 공식으로 좀 더 간단히 표현 가능. 계산은 속도식이 편함)

Angular veloctiy vector

상대좌표에서의 회전변환을 미분한 값은 아래와 같다.

$$\dot{\theta}^i\mathbf{A}^i_\theta\overline{\mathbf{u}}^i_P = \dot{\theta}^i \begin{bmatrix} -\sin\theta^i & -\cos\theta^i \\ \cos\theta^i & -\sin\theta^i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x}^i_P \\ \overline{y}^i_P \end{bmatrix}$$
$$= \dot{\theta}^i \begin{bmatrix} -\overline{x}^i_P\ \sin\theta^i - \overline{y}^i_P\ \cos\theta^i \\ \overline{x}^i_P\ \cos\theta^i - \overline{y}^i_P\ \sin\theta^i \end{bmatrix}$$

각속도 벡터 w^i를 k방향 유닛벡터로 정의하면,

$$\boldsymbol{\omega}^i = \dot{\theta}^i\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\omega}^i = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}^i]^{\mathrm{T}}$$

각속도 외적 절대좌표u^i_P는 회전변환 미분한 값과 같음을 알 수 있다.

$$\dot{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{u}}^i_P = \dot{\theta}^i\mathbf{A}^i_\theta\overline{\mathbf{u}}^i_P = \boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{u}^i_P = \boldsymbol{\omega}^i \times (\mathbf{A}^i\overline{\mathbf{u}}^i_P)$$

$$\dot{\mathbf{r}}^i_P = \dot{\mathbf{R}}^i + \boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{u}^i_P$$

[결과1] P점의 속도=P점이 있는 강체까지의 상대좌표 속도+상대좌표에서 P점까지 속도

$$\mathbf{v}_P^i = \mathbf{v}_O^i + \mathbf{v}_{PO}^i$$

[결과2] 상대좌표에서 P점까지 속도는 각속도 외적 절대좌표에서 P점 벡터

$$\mathbf{v}_{PO}^i = \boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{u}_P^i$$

▼ 3.3 Acceleration Equations / 94 ⇒속도 미분으로 가속도 (상대가속도 =normal+tangential)

3.2절에서 구한 속도벡터를 한번 더 미분함.

$$\ddot{\mathbf{r}}_P^i = \ddot{\mathbf{R}}^i + \dot{\theta}^i \dot{\mathbf{A}}_\theta^i \overline{\mathbf{u}}_P^i + \ddot{\theta}^i \mathbf{A}_\theta^i \overline{\mathbf{u}}_P^i$$

회전행렬을 2번 미분하면 아래와 같고

$$\dot{\mathbf{A}}_\theta^i = -\mathbf{A}^i \dot{\theta}^i$$

[가속도 식]

$$\ddot{\mathbf{r}}_P^i = \ddot{\mathbf{R}}^i - (\dot{\theta}^i)^2 \mathbf{A}^i \overline{\mathbf{u}}_P^i + \ddot{\theta}^i \mathbf{A}_\theta^i \overline{\mathbf{u}}_P^i$$

(좌측 외적 공식으로 좀 더 간단히 표현 가능. 계산은 가속도식이 편함)

Angular acceleration vector

$$\boldsymbol{\alpha}^i = \ddot{\theta}^i \mathbf{k}$$

w^i는 angular velocity (각속도) α^i 는 angular acceleration (각가속도) 벡터임.

각속도와 각가속도가 아래를 만족하므로

$$\left.\begin{aligned} -(\dot{\theta}^i)^2 \mathbf{A}^i \overline{\mathbf{u}}_P^i &= \boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{u}_P^i) \\ \ddot{\theta}^i \mathbf{A}_\theta^i \overline{\mathbf{u}}_P^i &= \boldsymbol{\alpha}^i \times \mathbf{u}_P^i \end{aligned}\right\}$$

가속도식을 아래처럼 외적으로 표현할 수 있다.

$$\ddot{\mathbf{r}}_P^i = \ddot{\mathbf{R}}^i + \boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{u}_P^i) + \boldsymbol{\alpha}^i \times \mathbf{u}_P^i$$

$$\mathbf{a}_P^i = \mathbf{a}_O^i + (\mathbf{a}_{PO}^i)_n + (\mathbf{a}_{PO}^i)_t$$

P점에 대해서 $a_P^i = \ddot{\mathrm{r}}_P^i$이고 $a_O^i = \ddot{\mathrm{R}}^i$이다.

$(a_{PO}^i)_n, (a_{PO}^i)_t$는 각각 normal, tangential components of the acceleration of point P^i이다.

$$\left.\begin{aligned}(\mathbf{a}_{PO}^i)_n &= \boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{u}_P^i) \\ (\mathbf{a}_{PO}^i)_t &= \boldsymbol{\alpha}^i \times \mathbf{u}_P^i\end{aligned}\right\}$$

$$\mathbf{a}_{PO}^i = (\mathbf{a}_{PO}^i)_n + (\mathbf{a}_{PO}^i)_t$$

각속도, 각가속도 공식은 spatial motion(3차원 공간)에서도 유효하다.

▼ 3.4 Kinematics of a Point Moving on a Rigid Body / 95 ⇒ (움직이는 점 좌표 $\dot{\bar{u}}$이 값을 가짐)

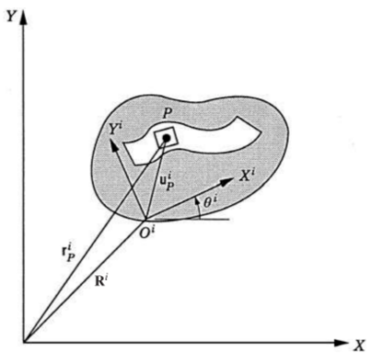


Figure 3.4 Motion of a point on a rigid body

여기서, $(v_P^i)_r$은 상대속도이고, (v_P^i)은 절대속도이다.

이전까지는 임의의 고정된 점에 대한 kinematic equation을 품(위치, 속도, 가속도)

이제부턴 moving kinematic equation of a point를 공부할 것.

- [위치벡터] 고정된 점이든 움직이는 점이든 위치는 같음.

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i$$

- [속도벡터] $\dot{\bar{u}}_P^i$에서 점 P가 변수이므로 미분한 값이 존재하게 됨. (항이 1개 늘어남)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_P^i &= \dot{\mathbf{R}}^i + \dot{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i + \mathbf{A}^i \dot{\bar{\mathbf{u}}}_P^i \\ &= \dot{\mathbf{R}}^i + \dot{\theta}^i \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}_P^i + \mathbf{A}^i \dot{\bar{\mathbf{u}}}_P^i\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_P^i = \dot{\mathbf{R}}^i + \boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{u}_P^i + (\mathbf{v}_P^i)_r$$

where $(v_P^i)_r = A^i \dot{\bar{u}}_P^i$

- [가속도 벡터] 모든 $\dot{\bar{u}}^i_P$에서 미분을 해야하므로 3개 항이 늘어남. (총 6개 항)

$$\ddot{\mathbf{r}}^i_P = \ddot{\mathbf{R}}^i + \dot{\theta}^i \dot{\mathbf{A}}^i_\theta \bar{\mathbf{u}}^i_P + \ddot{\theta}^i \mathbf{A}^i_\theta \bar{\mathbf{u}}^i_P + \dot{\theta}^i \mathbf{A}^i_\theta \dot{\bar{\mathbf{u}}}^i_P + \dot{\theta}^i \mathbf{A}^i_\theta \dot{\bar{\mathbf{u}}}^i_P + \mathbf{A}^i \ddot{\bar{\mathbf{u}}}^i_P$$

$$\ddot{\mathbf{r}}^i_P = \ddot{\mathbf{R}}^i + \boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{u}^i_P) + \boldsymbol{\alpha}^i \times \mathbf{u}^i_P + 2\dot{\theta}^i \mathbf{A}^i_\theta \dot{\bar{\mathbf{u}}}^i_P + \mathbf{A}^i \ddot{\bar{\mathbf{u}}}^i_P$$

각가속도를 아래처럼 나타내면,

$$\dot{\theta}^i \mathbf{A}^i_\theta \dot{\bar{\mathbf{u}}}^i_P = \boldsymbol{\omega}^i \times (\mathbf{A}^i \dot{\bar{\mathbf{u}}}^i_P) = \boldsymbol{\omega}^i \times (\mathbf{v}^i_P)_r$$

아래와 같이 정리 할 수 있다.

$$\mathbf{a}^i_P = \mathbf{a}^i_O + \boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{u}^i_P) + \boldsymbol{\alpha}^i \times \mathbf{u}^i_P + 2\boldsymbol{\omega}^i \times (\mathbf{v}^i_P)_r + (\mathbf{a}^i_P)_r$$

P점의 가속도를 a^i_P로, 상대좌표의 절대좌표로부터의 가속도를 a^i_O 로, 상대좌표를 $(a^i_P)_r$로 표기함.

$$\mathbf{a}^i_P = \ddot{\mathbf{r}}^i_P, \quad \mathbf{a}^i_O = \ddot{\mathbf{R}}^i, \quad (\mathbf{a}^i_P)_r = \mathbf{A}^i \ddot{\bar{\mathbf{u}}}^i_P$$

Coriolis Acceleration

a^i_P 의 4번째 term을 코리올리 가속도라고 함.

$$(\mathbf{a}^i_P)_c = 2\boldsymbol{\omega}^i \times (\mathbf{v}^i_P)_r$$

- 코리올리 component는 각속도 (w^i)와 속도 (v^i_P) 둘 다에게 수직인 방향을 가진다.
- 특수하게, 점이 고정된 경우에는 $(a^i_P)_r$ 과 $(a^i_P)_c$ 둘 다 zero vector 이다. 따라서, 움직이는 점 식을 구한 뒤, 고정됐다는 조건이 생기면 두 가속도를 =0으로 둘 수 있다. (좀 더 일반적)

▼ 3.5 Constrained Kinematics / 97 ⇒ 구속방정식 구하는 법

[용어]

1. 기계시스템 (Mechanical system)은 joint로 체결된 body의 조립체이다.

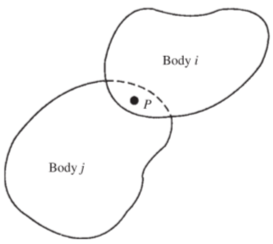
2. joint는 한 바디에서 특정 fashion으로 motion을 옮기기 위해 존재한다.

[constrainded kinematics]

1. joint constraint의 공식을 배움.
2. DOF의 수 찾기.
3. 3.9절에서 시스템의 coordinate에 대한 평면 joint 공식이 더 정확하게 기재.

Planar Kinematics

joint constraint를 kinematic으로 표기하는 법 ⇒ set of algebraic equations



(a) Revolute joint

[Revolute joint]

Body i와 Body j를 회전 joint를 P점에 설치하여 고정시킴.

이때, P점은 Body i와 Body j 둘 다에 존재함.

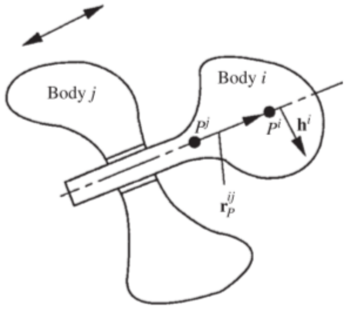
또한, global position vector의 값이 같으므로 아래와 같음.

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{r}_P^j$$

r_P^i는 P^i의 global position vector이고, r_P^j는 P^j의 global position vector이다.

회전 joint는 두 body사이 relative translation을 제거한다. (along two perpendicular axes)

Planar motion에서 DOF를 2 제거함. 1개의 자유도(회전)만 가짐.



(b) Prismatic joint

[Prismatic joint] =(translational joint)

마찬가지로 1자유도만 가지는 joint이다. (하나의 relative translation과 relative 회전 자유도가 제거됨)

수학적으론 아래와 같이 표기한다.

$$\theta^i - \theta^j = c, \quad \mathbf{h}^{i^{\mathrm{T}}} \mathbf{r}_P^{ij} = 0$$

Sptial Kinematics

평면에서는 구속되지 않으면 3개의 coordinate를 가짐. (x,y,θ)

공간에서는 구속되 않으면 6개의 independent coordinate (DOF)를 가짐. (3개는 서로 perpendicular axes, 3개는 independent rotational displacement)

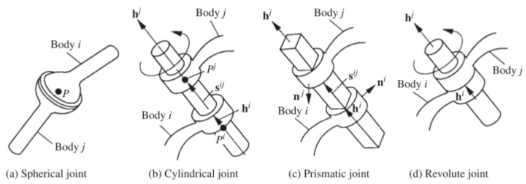


Figure 3.6 Spatial joints

[spherical joint] (구 조인트)

3개의 translation coordinate가 구속되고, 3개의 회전 좌표만 남음.

= no relative translation

따라서, 구속방정식은 아래와 같음.

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{r}_P^j$$

같은 점에 대해서 3개의 좌표(x,y,z)가 나옴.

[Cylindrical joint] (2자유도)

1개의 translation과 1개의 회전에 자유도를 가짐.

따라서 4개의 구속방정식 (kinematic constraint equation)을 가짐. 2개는 independent coordinate

$$\mathbf{h}^i \times \mathbf{h}^j = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}^i \times \mathbf{s}^{ij} = \mathbf{0}$$

[Prismatic joint] (Cylindrical의 특수 케이스) (1자유도)

두 body사이 relative rotation이 허용 안됨.

회전도 구속하기위해 구속방정식을 하나 추가함.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{h}^i \times \mathbf{h}^j &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}^i \times \mathbf{s}^{ij} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{n}^{i\mathrm{T}}\mathbf{n}^j &= 0 \end{aligned}\right\}$$

[Revolute joint] (Cylindrical의 특수 케이스) (1자유도)

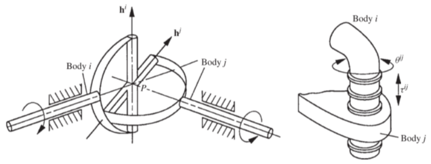
두 body 사이 relative translation이 허용 안됨.

병진운동을 구속하기위한 구속방정식 추가.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{h}^i \times \mathbf{h}^j &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}^i \times \mathbf{s}^{ij} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^{ij\mathrm{T}}\mathbf{s}^{ij} &= c \end{aligned}\right\}$$

[Universal (Hooke) joint] (2자유도)

2축에 대한 relative 회전만 허용함. (자유도를 가짐)



(a) Universal joint (b) Screw joint

Figure 3.7 Universal and screw joints

구속 방정식은 (spherical joint의 특수 케이스로 구할 수 있음)

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{r}_P^j, \quad \mathbf{h}^{i^\mathrm{T}} \mathbf{h}^j = 0$$

[screw joint] (Cylindrical의 특수 케이스) (1자유도)

joint축에 따른 translation과 rotation이 서로 not independent다. (서로 종속이다)

⇒ screw의 Pitch를 통해 연관되어 있음. (relative translation (τ)과 relative rotation (α) fomulated)

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{h}^i \times \mathbf{h}^j &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}^i \times \mathbf{s}^{ij} &= \mathbf{0} \\ \tau^{ij} - \boldsymbol{\alpha}\theta^{ij} &= c \end{aligned}\right\}$$

Mobility Criteria

- kinematic이든 dynamic이든 system의 DOF를 정하는 것은 가장 중요하고 1번째 step임.
- DOF는 system을 컨트롤하기 위해 필요한independent coordinate수와 같다.
- 0 DOF인 system을 ‘structure’이라 하고 힘을 받아도 움직이지 않음.
- motion control이 가능한 1 DOF system을 기계에서 많이 다룸. (Robotic manipulators)

Planar motion DOF를 구하는 방법은 아래와 같다.

$$n_d = 3 \times n_b - n_c$$

where nd is the number of the system degrees of freedom, nb is the number of the bodies in the system, and nc is the total number of linearly independent

constraint equations that
describe the joints in the system.

(예시)

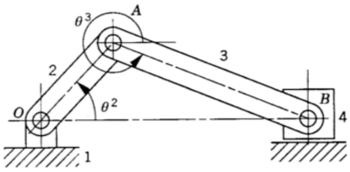


Figure 3.8 Slider crank mechanism

slider crank에서 body는 땅(fixed link) = body 1, crankshaft = body2, connecting rod = body3, slider block = body4

로 body는 총 4개

revolute O, A, B로 3개, prismatic이 slider block과 fixed link사이에 1개, fixed joint가 fixed link에 1개

$$n_c = 6(\text{revolute}) + 2(\text{prismatic}) + 3(\text{fixed link}) = 11$$

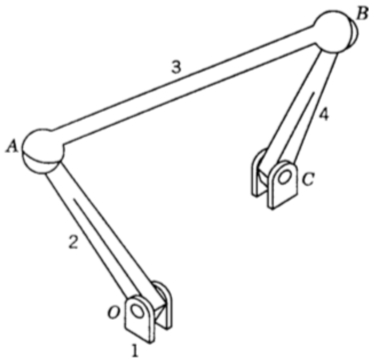
$$n_d = 3n_b - n_c = 3 \times 4 - 11 = 1$$

위와 같이 slider crank는 1자유도인 multi body system이다.

공간인 경우는 mobility criteria를 body에 대해 X6 을 해주면 됨.

$$n_d = 6 \times n_b - n_c$$

(예시)



[RSSR mechanism]

revolute, spherical, spherical, revolute로 이루어짐.

sphercial은 하나에 3자유도 제거, revolute는 하나에 5자유도 제거, body1이 ground임 (fixed) 6자유도 제거

$$n_c = 6(\text{spherical}) + 10(\text{revolute}) + 6(\text{fixed link}) = 22$$

ground를 포함해 body는 총 4개이므로

$$n_d = 6n_b - n_c = 6 \times 4 - 22 = 2$$

RSSR mechanism은 2자유도인 시스템이다.

▼ 3.6 Classical Kinematic Approach / 104 ⇒ slider crank예제로 위,속,가 구하기 (singularity)

- analytic 방법이니까 simple한거만 가능. 1자유도인 slider crank로 접근해보자.

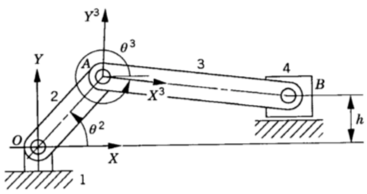
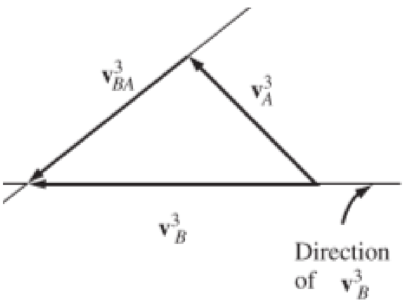


Figure 3.10 Offset slider crank mechanism

[step 1] position analysis

crank의 각도 θ^2주어졌다면, slider crank의 위치 방정식을 나타낼 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} l^2\cos\theta^2 + l^3\cos\theta^3 + x_B^4 &= 0 \\ l^2\sin\theta^2 + l^3\sin\theta^3 + h &= 0 \end{aligned}\right\}$$



l^2는 body 2의 길이라는 뜻.

θ^2는 절대좌표에서 body 2의 상대좌표가 기울어진 각도.

[step 2] velocity and acceleration analysis

DOF가 1인 system이므로 θ^2가 주어지면 모든 값을 알 수 있는 system이다. (x_B^4도 알게됨)

x_B^4를 다른 모든 미지수에 대해 정리하면 position analysis이다.

그 식을 1 번 미분하면 velocity analysis, 2 번 미분하면 accleration analysis이다.

좌측 그림과 같이 B에서의 속도벡터를 (A 속도벡터 + A에서 본 B의 상대속도벡터)로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{v}_B^3 = \mathbf{v}_A^3 + \mathbf{v}_{BA}^3$$

(예시) 위 slider crank의 모든 위치, 속도, 가속도를 θ^2 term으로 나타내봄. (아래는 정석이고, **<u>더 아래 코리올리 방법있는데 훨씬 쉬움</u>**)

Position vector

1. B의 position vector는 $r_B^3 = R^3 + A^3\overline{u}_B^3$ 이다.

$$\mathbf{r}_B^3 = \begin{bmatrix} l^2 \cos\theta^2 \\ l^2 \sin\theta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta^3 & -\sin\theta^3 \\ \sin\theta^3 & \cos\theta^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l^2 \cos\theta^2 + l^3 \cos\theta^3 \\ l^2 \sin\theta^2 + l^3 \sin\theta^3 \end{bmatrix}$$

2. Geometry적으로 r_B^3는 x_B^4와 아래와 같은 관계를 가지며 위의 값과 동일하다.

$$\mathbf{r}_B^3 = \begin{bmatrix} x_B^4 \\ h \end{bmatrix}$$

3. (1)과 (2)에서 아래와 같은 등식이 성립함.

$$x_B^4 = l^2 \cos\theta^2 + l^3 \cos\theta^3$$
$$h = l^2 \sin\theta^2 + l^3 \sin\theta^3$$

[position vector 결과]

$$x_B^4 = l^2 \cos\theta^2 \pm \sqrt{(l^3)^2 - (h - l^2 \sin\theta^2)^2}$$

$$\theta^3 = \sin^{-1} \frac{h - l^2 \sin\theta^2}{l^3}$$

Velocity vector

1. (한 점의 속도 = 다른 점의 속도 + 다른 점에서 본 그 점의 상대속도)

$$\mathbf{v}_A^2 = \mathbf{v}_O^2 + \mathbf{v}_{AO}^2$$

slider crank의 O점은 fixed이므로 v_O^2=0 이다. v_{AO}^2는 외적으로 나타낼 수 있다.

3. (1)과 (2)에서 아래와 같은 등식이 성립함.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_B^4 \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\theta}^2 l^2 \begin{bmatrix} -\sin\theta^2 \\ \cos\theta^2 \end{bmatrix} + \dot{\theta}^3 l^3 \begin{bmatrix} -\sin\theta^3 \\ \cos\theta^3 \end{bmatrix}$$

[velocity vector 결과]

$$\mathbf{v}_A^2 = \boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{u}_A^2 = \dot{\theta}^2 l^2 \begin{bmatrix} -\sin\theta^2 \\ \cos\theta^2 \end{bmatrix}$$

구해진 v^A를 통해 v^B를 나타낼 수 있다. (2점과, 3점의 coordinate위치 같으므로)

$$\mathbf{v}_B^3 = \mathbf{v}_A^3 + \mathbf{v}_{BA}^3 = \mathbf{v}_A^3 + \boldsymbol{\omega}^3 \times \mathbf{u}_B^3$$

$$\mathbf{v}_B^3 = \dot{\theta}^2 l^2 \begin{bmatrix} -\sin\theta^2 \\ \cos\theta^2 \end{bmatrix} + \dot{\theta}^3 l^3 \begin{bmatrix} -\sin\theta^3 \\ \cos\theta^3 \end{bmatrix}$$

2. 구한 B점의 속도와 $\dot{x}_B^4$의 속도가 geometry적으로 같으므로

$$\mathbf{v}_B^3 = [\dot{x}_B^4 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{bmatrix} l^3\sin\theta^3 & 1 \\ -l^3\cos\theta^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}^3 \\ \dot{x}_B^4 \end{bmatrix} = \dot{\theta}^2 l^2 \begin{bmatrix} -\sin\theta^2 \\ \cos\theta^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}^3 \\ \dot{x}_B^4 \end{bmatrix} = \frac{\dot{\theta}^2 l^2}{l^3\cos\theta^3} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ l^3\cos\theta^3 & l^3\sin\theta^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\theta^2 \\ \cos\theta^2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{\dot{\theta}^2 l^2}{l^3\cos\theta^3} \begin{bmatrix} -\cos\theta^2 \\ l^3\sin(\theta^3-\theta^2) \end{bmatrix}$$

slider crank는 분모가 0인 singularity가 생긴다. (closed loop의 문제점) (이후 추가 설명)

Acceleration vector

1. 한 점에서 relative 가속도는 normal과 tangential 성분으로 나눈 뒤 더해서 구함.

$$\mathbf{a}_A^2 = \mathbf{a}_O^2 + \mathbf{a}_{AO}^2$$

$$\mathbf{a}_A^2 = \mathbf{a}_{AO}^2 = (\mathbf{a}_{AO}^2)_n + (\mathbf{a}_{AO}^2)_t$$

normal과 tangential 성분 가속도 구하는 방법은 아래와 같음.

$$(\mathbf{a}_{AO}^2)_n = \boldsymbol{\omega}^2 \times (\boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{u}_A^2) = -l^2(\dot{\theta}^2)^2 \begin{bmatrix} \cos\theta^2 \\ \sin\theta^2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{a}_{AO}^2)_t = \boldsymbol{\alpha}^2 \times \mathbf{u}_A^2 = l^2\ddot{\theta}^2 \begin{bmatrix} -\sin\theta^2 \\ \cos\theta^2 \end{bmatrix}$$

3. B점의 가속도는 x_B^4를 2번 미분해서 얻은 값과 DOF로 나타낸 값이 서로 같으므로

$$\mathbf{a}_B^3 = [\ddot{x}_B^4 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

식을 좌측 B점 최종 가속도와 같다는 등식에서,

$$\ddot{x}_B^4 = -l^2(\dot{\theta}^2)^2\cos\theta^2 - l^2\ddot{\theta}^2\sin\theta^2 - l^3(\dot{\theta}^3)^2\cos\theta^3 - l^3\ddot{\theta}^3\sin\theta^3$$
$$0 = -l^2(\dot{\theta}^2)^2\sin\theta^2 + l^2\ddot{\theta}^2\cos\theta^2 - l^3(\dot{\theta}^3)^2\sin\theta^3 + l^3\ddot{\theta}^3\cos\theta^3$$

position과 veloctiy analysis를 통해 θ^3와 $\dot{\theta}^3$를 안다고 가정

$\theta^2, \dot{\theta}^2, \ddot{\theta}^2$ 는 DOF에서 given 값이다.

a_A^2의 값은 아래와 같고 2점의 상대좌표와 3점의 상대좌표의 위치가 같으므로 ($a_A^2 = a_A^3$)

$$\mathbf{a}_A^2 = \begin{bmatrix} -l^2(\dot{\theta}^2)^2 \cos\theta^2 - l^2\ddot{\theta}^2 \sin\theta^2 \\ -l^2(\dot{\theta}^2)^2 \sin\theta^2 + l^2\ddot{\theta}^2 \cos\theta^2 \end{bmatrix}$$

2. A점의 가속도로 B점의 가속도를 구하면 (2점과 3점 가속도 같음을 이용)

$$\mathbf{a}_B^3 = \mathbf{a}_A^2 + \mathbf{a}_{BA}^3 = \mathbf{a}_A^2 + (\mathbf{a}_{BA}^3)_n + (\mathbf{a}_{BA}^3)_t$$

A에서 본 B점의 상대 가속도도 normal과 tangential 성분으로 나눔

$$(\mathbf{a}_{BA}^3)_n = \boldsymbol{\omega}^3 \times (\boldsymbol{\omega}^3 \times \mathbf{u}_B^3) = -l^3(\dot{\theta}^3)^2 \begin{bmatrix} \cos\theta^3 \\ \sin\theta^3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{a}_{BA}^3)_t = \boldsymbol{\alpha}^3 \times \mathbf{u}_B^3 = l^3\ddot{\theta}^3 \begin{bmatrix} -\sin\theta^3 \\ \cos\theta^3 \end{bmatrix}$$

[B점의 최종적인 가속도 값]

$$\mathbf{a}_B^3 = \begin{bmatrix} -l^2(\dot{\theta}^2)^2 \cos\theta^2 - l^2\ddot{\theta}^2 \sin\theta^2 \\ -l^2(\dot{\theta}^2)^2 \sin\theta^2 + l^2\ddot{\theta}^2 \cos\theta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l^3(\dot{\theta}^3)^2 \cos\theta^3 - l^3\ddot{\theta}^3 \sin\theta^3 \\ -l^3(\dot{\theta}^3)^2 \sin\theta^3 + l^3\ddot{\theta}^3 \cos\theta^3 \end{bmatrix}$$

따라서, 모르는 두 값 ($\ddot{\theta}^3, \ddot{x}_B^4$)에 대해서 정리하면

$$\begin{bmatrix} l^3 \sin\theta^3 & 1 \\ -l^3 \cos\theta^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}^3 \\ \ddot{x}_B^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l^2(\dot{\theta}^2)^2 \cos\theta^2 - l^2\ddot{\theta}^2 \sin\theta^2 - l^3(\dot{\theta}^3)^2 \cos\theta^3 \\ -l^2(\dot{\theta}^2)^2 \sin\theta^2 + l^2\ddot{\theta}^2 \cos\theta^2 - l^3(\dot{\theta}^3)^2 \sin\theta^3 \end{bmatrix}$$

위 식을 정리 [accleration vector결과]

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}^3 \\ \ddot{x}_B^4 \end{bmatrix} = \frac{1}{l^3 \cos\theta^3} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ l^3 \cos\theta^3 & l^3 \sin\theta^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l^3 \cos\theta^3} \begin{bmatrix} -c_2 \\ c_1 l^3 \cos\theta^3 + c_2 l^3 \sin\theta^3 \end{bmatrix}$$

where

$$c_1 = -l^2(\dot{\theta}^2)^2 \cos\theta^2 - l^2\ddot{\theta}^2 \sin\theta^2 - l^3(\dot{\theta}^3)^2 \cos\theta^3$$
$$c_2 = -l^2(\dot{\theta}^2)^2 \sin\theta^2 + l^2\ddot{\theta}^2 \cos\theta^2 - l^3(\dot{\theta}^3)^2 \sin\theta^3$$

Singular Configurations

모든 DOF 시스템이 시간에 대해서 smooth하게 움직이지는 않음. lockup configuration이 발생한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}^3 \\ \dot{x}_B^4 \end{bmatrix} = \frac{\dot{\theta}^2 l^2}{l^3 \cos\theta^3} \begin{bmatrix} -\cos\theta^2 \\ l^3 \sin(\theta^3 - \theta^2) \end{bmatrix}$$

특수한 케이스로, 위와 같이 분모에 cos 값이 생기면서 분모에 0이 되는 경우가 생기는데 이런 문제를 singular configuration이라고 한다.

slider crank는 θ^3가 0일 때 coefficient matrix가 sinular가 된다.

이때 값으로는 가능한 motion 2개 중에 어느 것인지 유추가 불가능하다.

(1) 두 막대가 locked 되어 추처럼 회전만 하는 motion

(2) slider block이 왼쪽 오른쪽 왕복 운동 하는 motion

Mechanism Kinematics

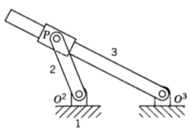
slider crank나 4 절기구 등이 완벽한 회전을 하도록 설계하는 법이 있음. (Grashof's law)

가장 짧은 link길이 (s) 와 가장 긴 link 길이 (l) 합 < 나머지 두 link 길이 합 (p, q)

$$s + l \leq p + q$$

pp. 118 증명도 있음.

Coriolis Acceleration



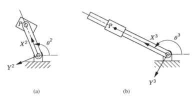


Figure 3.19 Motion of block P

(예시) Rod3의 각속도, 각가속도 구하라. slider block P의 Rod3에 대한 상대 속도와 상대 가속도를 구하라.

(1) velocity analysis로 2점의 속도 구하기 (2점 coordinate와 3점 coordinate는 P점에 같이 있음)

$$\mathbf{v}_P^2 = \mathbf{v}_O^2 + \mathbf{v}_{PO}^2$$

$$\mathbf{v}_{PO}^2 = \boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{u}_P^2 = \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} -l^2 \sin\theta^2 \\ l^2 \cos\theta^2 \end{bmatrix}$$

pp.123에 가속도도 있음.

$v_O^2 = 0$이므로

$$\mathbf{a}_P^2 = \mathbf{a}_O^2 + (\mathbf{a}_{PO}^2)_t + (\mathbf{a}_{PO}^2)_n$$

$$\mathbf{v}_P^2 = \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} -l^2 \sin\theta^2 \\ l^2 \cos\theta^2 \end{bmatrix}$$

처럼 상대속도를 normal , tangential로 잘 나눠주면 속도와 같은 방식임.

1. 2점 가속도 구하기
2. 3점 가속도 구하기
3. 2점, 3점 가속도는 사실 같음
4. 위 식을 간략화 ($\theta^3, \overline{x}^3$에 대해서 정리)

$$\begin{bmatrix} -\overline{x}_P^3 \sin\theta^3 & \cos\theta^3 \\ \overline{x}_P^3 \cos\theta^3 & \sin\theta^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}^3 \\ \ddot{\overline{x}}_P^3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}^2 l^2 \sin\theta^2 - (\dot{\theta}^2)^2 l^2 \cos\theta^2 + (\dot{\theta}^3)^2 \overline{x}_P^3 \cos\theta^3 + 2\dot{\theta}^3 \dot{\overline{x}}_P^3 \sin\theta^3 \\ \ddot{\theta}^2 l^2 \cos\theta^2 - (\dot{\theta}^2)^2 l^2 \sin\theta^2 + (\dot{\theta}^3)^2 \overline{x}_P^3 \sin\theta^3 - 2\dot{\theta}^3 \dot{\overline{x}}_P^3 \cos\theta^3 \end{bmatrix}$$

각가속도와 상대가속도 2개는 unkown이고 나머지 값들은 known 및 given 값이므로 정리해서 구할 수 있음

(2) 3점의 속도 구하기.

O^3에서부터 P점 까지로 속도를 구할 거임.

$$\mathbf{v}_P^3 = \mathbf{v}_O^3 + \mathbf{v}_{PO}^3 + (\mathbf{v}_P^3)_r$$

O^3부터 시작했으니 v_O^3=0 이다.

또한 slider block O^2에서 봤을 때와 달리 O^3에서 보면 위치가 변화하므로 속도가 존재함. $(v_P^3)_r$

⇒ $\dot{u}$의 미분 값과 회전행렬 미분을 통해서 algebraic 하게 구함.

$$\mathbf{v}_{PO}^3 = \boldsymbol{\omega}^3 \times \mathbf{u}_P^3 = \dot{\theta}^3 \begin{bmatrix} -\overline{x}_P^3 \sin\theta^3 \\ \overline{x}_P^3 \cos\theta^3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{v}_P^3)_r = \mathbf{A}^3 \dot{\overline{\mathbf{u}}}_P^3 = \begin{bmatrix} \cos\theta^3 & -\sin\theta^3 \\ \sin\theta^3 & \cos\theta^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\overline{x}}_P^3 \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\overline{x}}_P^3 \begin{bmatrix} \cos\theta^3 \\ \sin\theta^3 \end{bmatrix}$$

[3 점 속도 결과]

$$\mathbf{v}_P^3 = \dot{\theta}^3 \begin{bmatrix} -\overline{x}_P^3 \sin\theta^3 \\ \overline{x}_P^3 \cos\theta^3 \end{bmatrix} + \dot{\overline{x}}_P^3 \begin{bmatrix} \cos\theta^3 \\ \sin\theta^3 \end{bmatrix}$$

(3) (1)과 (2)에서 2점과 3점의 속도는 같다. (같은 점 P의 속도이므로)

$$\dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} -l^2 \sin\theta^2 \\ l^2 \cos\theta^2 \end{bmatrix} = \dot{\theta}^3 \begin{bmatrix} -\overline{x}_P^3 \sin\theta^3 \\ \overline{x}_P^3 \cos\theta^3 \end{bmatrix} + \dot{\overline{x}}_P^3 \begin{bmatrix} \cos\theta^3 \\ \sin\theta^3 \end{bmatrix}$$

matrix 적으로 표현 하면

$$\begin{bmatrix} -\bar{x}_P^3 \sin\theta^3 & \cos\theta^3 \\ \bar{x}_P^3 \cos\theta^3 & \sin\theta^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}^3 \\ \dot{\bar{x}}_P^3 \end{bmatrix} = \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} -l^2 \sin\theta^2 \\ l^2 \cos\theta^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}^3 \\ \dot{\bar{x}}_P^3 \end{bmatrix} = \frac{\dot{\theta}^2}{\bar{x}_P^3} \begin{bmatrix} l^2 \cos(\theta^3 - \theta^2) \\ \bar{x}_P^3 l^2 \sin(\theta^3 - \theta^2) \end{bmatrix}$$

▼ 3.7 Computational Kinematic Approach / 124

우리는 explicitly, implicitly algebraic kinematic equation을 사용한다. joint 체결과 motion trajectories를 표현할 때

(ex. slider crank에서)

$$\left. \begin{matrix} \dot{\mathbf{R}}^1 = \mathbf{0}, & \dot{\theta}^1 = 0, & \mathbf{v}_O^2 = \mathbf{0}, & \mathbf{v}_A^2 = \mathbf{v}_A^3, \\ \mathbf{v}_B^3 = \mathbf{v}_B^4, & \dot{R}_y^4 = 0, & \dot{\theta}^4 = 0, & \dot{\theta}^2 = \omega^2 \end{matrix} \right\}$$

Absolute coordinates

(1) 특정 점 P를 아래와 같이 나타내었다.

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i$$

(2) 특정 body i의 상대좌표 위치를 R_x^i, R_y^i, θ^i를 통해서 나타내었다. 이를 n_b개의 body 전체에 대해서 나타내면 R^{iT}는 Body i의 x,y좌표 벡터이다.

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= [R_x^1 \quad R_y^1 \quad \theta^1 \quad R_x^2 \quad R_y^2 \quad \theta^2 \cdots R_x^i \quad R_y^i \quad \theta^i \cdots R_x^{n_b} \quad R_y^{n_b} \quad \theta^{n_b}]^{\mathrm{T}} \\ &= [\mathbf{R}^{1^{\mathrm{T}}} \quad \theta^1 \quad \mathbf{R}^{2^{\mathrm{T}}} \quad \theta^2 \ \cdots \ \mathbf{R}^{i^{\mathrm{T}}} \quad \theta^i \cdots \mathbf{R}^{n_b^{\mathrm{T}}} \quad \theta^{n_b}]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

(3) 모든 상대좌표들을 벡터 q로 나타내었고 임의의 body i 좌표를 q^i로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}^{1^{\mathrm{T}}} \quad \mathbf{q}^{2^{\mathrm{T}}} \ \cdots \ \mathbf{q}^{i^{\mathrm{T}}} \ \cdots \ \mathbf{q}^{n_b^{\mathrm{T}}}]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{q}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^i \\ \theta^i \end{bmatrix}$$

Computational Approach

- system coordinate의 수 (n) 는 planar (3 x n_b), spatial (6 x n_b)이다.
- joint constraint 또는 driving constraint를 바디의 coordinate로 공식화한 개수로 n_c의 수를 알 수 있다.
- position level을 수치적으로 구하면, 미분을 통해 velocity, acceleration을 구할 수 있음. (수치적으로 구하는 법은 이후 단원에 나옴)
- 위치, 속도, 가속도를 선형적으로 구하기 위해 구속방정식을 system generalized coordinates로 나타내는 것은 굉장히 중요하다.

▼ 3.8 Formulation of the Driving Constraints / 126 ⇒ joint로 구속되는 것이 아니라, 각속도를 임의로 줘서 구속(driving constraint)

- joint constraint는 system coordinate에 지배되지만, driving constraints는 특정한 motion trajectories이다.
- 얘는 system generalized coordinate와 시간에 지배당함.

(예시)

Slider crank에 각속도 값이 주어짐 (driving constraints)

[각속도가 상수가 됐을 때 결과]

각변위가 시간에 대한 함수가 됐으므로, 각변위를 통해 나타내는 R_x, R_y 등이 시간에 대한 함수가 됨.

$$R_x^i = f_1(t), \quad R_y^i = f_2(t), \quad \theta^i = f_3(t)$$

물론, R_x, R_y는 θ를 통해 나타낼 수 있다.

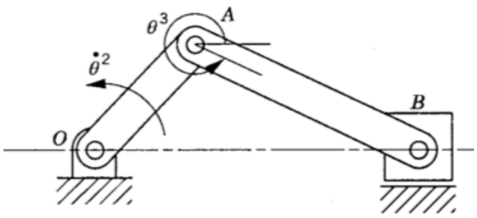


Figure 3.20 Slider crank mechanism

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2$$

각속도의 값이 constant가 됨.

각변위는 적분을 통해 구하면, 시간에 대한 함수가 됨.

$$\theta^2 = \omega^2 t + \theta_o^2$$

적분상수 (θ_O^2)는 initial angular position임.

$$\left.\begin{aligned} R_x^i + \bar{x}_P^i \cos\theta^i - \bar{y}_P^i \sin\theta^i = f_1(t) \\ R_y^i + \bar{x}_P^i \sin\theta^i + \bar{y}_P^i \cos\theta^i = f_2(t) \end{aligned}\right\}$$

[구속방정식에 영향을 줌]

(1)상대 회전에 대해서 아래와 같음.

$$\theta^i - \theta^j = f(t)$$

t에 따라 값이 달라지지만, t를 알면 f(t)의 값을 앎.

(2) Pin joint 구속방정식도 달라질 수 있음.

$$\mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i - \mathbf{R}^j - \mathbf{A}^j \bar{\mathbf{u}}_P^j = \mathbf{f}(t)$$

▼ 3.9 Formulation of the Joint Constraints / 128 ⇒ joint 별 구속 방정식 구하기

평면에서 joint constraint (구속방정식)을 배움. chapter 7에서 공간에 대한 구속방정식 배울 것.

Ground constraint (fixed) (구속 3개)

$$R_x^i - c_1 = 0, \quad R_y^i - c_2 = 0, \quad \theta^i - c_3 = 0$$

Revolute joint (구속 2개)

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{r}_P^j$$

P점이 Body i와 Body j 양쪽에 존재함. translation 두 좌표가 같다. (구속 2개) 아래처럼 일반화 할 수 있음.

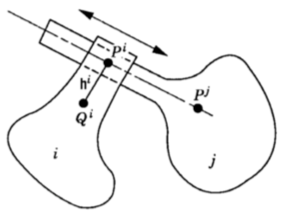
$$\mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i - \mathbf{R}^j - \mathbf{A}^j \bar{\mathbf{u}}_P^j = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} R_x^i \\ R_y^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta^i & -\sin\theta^i \\ \sin\theta^i & \cos\theta^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_P^i \\ \bar{y}_P^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_x^j \\ R_y^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\theta^j & -\sin\theta^j \\ \sin\theta^j & \cos\theta^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_P^j \\ \bar{y}_P^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 만약 한 Body가 Ground라면 (fixed) 상수로 취급 가능. (어떤 점에 구속 됐을 수 있음 ⇒ point constraints)

$$\mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i - \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

Prismatic joint (구속 2개)



(1) 절대좌표에서 상대좌표 i가 기울어진 정도와 상대좌표 j가 기울어진 정도가 일정하다. (서로 평행하거나 일정한 각도를 가짐)

$$\theta^i - \theta^j - c = 0$$

(2) 현재 joint가 움직이는 방향인 r_P^{ij}에 대하여 수직인 방향 상대좌표는 i이다.

이때, i 좌표의 (1,0) 또는 (0,1) (잡은 사람에 따라 방향이 다를 수 있음)을 h^i벡터라고 할 수 있음.

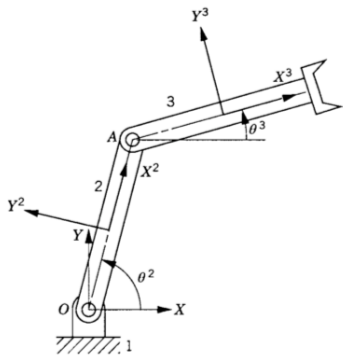
그럼 두 벡터는 수직이다.

$$\mathbf{h}^{i\mathrm{T}} \mathbf{r}_P^{ij} = 0$$

[결과]

$$\begin{bmatrix} \theta^i - \theta^j - c \\ \mathbf{h}^{i\mathrm{T}} \mathbf{r}_P^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(예시)



2 자유도계에 fixed 1개, revolute 2개 있음.

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \mathbf{q}^3) = \begin{bmatrix} R_x^1 - c_1 \\ R_y^1 - c_2 \\ \theta^1 - c_3 \\ R_x^2 - \dfrac{l^2}{2} \cos \theta^2 \\ R_y^2 - \dfrac{l^2}{2} \sin \theta^2 \\ R_x^2 + \dfrac{l^2}{2} \cos \theta^2 - R_x^3 + \dfrac{l^3}{2} \cos \theta^3 \\ R_y^2 + \dfrac{l^2}{2} \sin \theta^2 - R_y^3 + \dfrac{l^3}{2} \sin \theta^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

fixed에 의한 constraint 3개와 revolute에 의한 2개+2개

(A점 Revolute에 대한 joint constraint 식 구하는 법)

$$\mathbf{R}^2 + \mathbf{A}^2\bar{\mathbf{u}}_A^2 - \mathbf{R}^3 - \mathbf{A}^3\bar{\mathbf{u}}_A^3 = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{u}}_A^2 = \begin{bmatrix} \dfrac{l^2}{2} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \bar{\mathbf{u}}_A^3 = \begin{bmatrix} -\dfrac{l^3}{2} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{bmatrix} R_x^2 \\ R_y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta^2 & -\sin \theta^2 \\ \sin \theta^2 & \cos \theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{l^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_x^3 \\ R_y^3 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \cos \theta^3 & -\sin \theta^3 \\ \sin \theta^3 & \cos \theta^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{l^3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

pp.134 Cam joint (2자유도, 1개의 자유도 제거)

$$\bar{\mathbf{t}}^i = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_P^i}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} -d \sin \phi + \dfrac{\partial d}{\partial \phi} \cos \phi \\ d \cos \phi + \dfrac{\partial d}{\partial \phi} \sin \phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{t}}^i.$$

global coordinate tangent vector는 위와 같이 정의된다.

pp.139 Gear joint (spur, helical, bevel 기어의 차이)

$$(\theta^i - \theta_o^i)a^i + (\theta^j - \theta_o^j)a^j = 0$$

위는 sliding이 없는 spur, 랙과 피니언 등에서 쓰이는 constraint 식이다.

▼ 3.10 Computational Methods in Kinematics / 141 ⇒ 시간에 종속인 구속방정식과 자코비안 행렬 구하기.

- n개의 좌표를 잡는다면 (Body개수 (n_b)에 3배만큼임) $n = 3n_b$

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \cdots \quad q_n]^{\mathrm{T}}$$

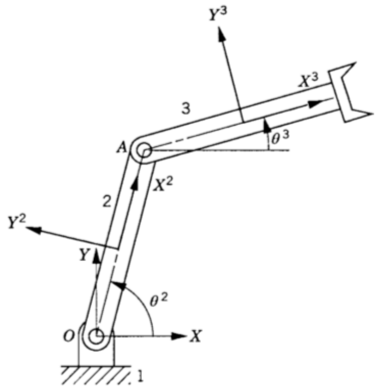
- joint에 따라 정해진 constraints 식을 가지고, driving constraint에 따라 총 구속방정식의 수를 n_c라고 함.

n_c개의 구속방정식을 모두 쓴 식을 C 라고 하는데, 이 식이 각가속도가 주어진다던지 해서, 시간에 종속적인 함수가 되면 아래와 같이 표현함. (C_q는 자코비안임. 편미분)

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = [C_1(\mathbf{q}, t) \quad C_2(\mathbf{q}, t) \quad \cdots \quad C_{n_c}(\mathbf{q}, t)]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$$

(예시)

이 문제에서 $\dot{\theta}^2 = w^2$, $\dot{\theta}^3 = w^3$ 이라는 각속도가



주어졌을 때, 구속방정식은?

$$\dot{\theta}^2 - \omega^2 = 0, \quad \dot{\theta}^3 - \omega^3 = 0$$

각속도를 적분해 각변위를 시간에대한 함수로 얻을 수 있다.

$$\theta^2 - \theta_o^2 - \omega^2 t = 0, \quad \theta^3 - \theta_o^3 - \omega^3 t = 0$$

⇒ 기존 θ^2, θ^3로 나타내던 값들이 모두 시간에 대한 함수가 되었으므로 구속방정식은 아래와 같다.

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} C_1(\mathbf{q}, t) \\ C_2(\mathbf{q}, t) \\ C_3(\mathbf{q}, t) \\ C_4(\mathbf{q}, t) \\ C_5(\mathbf{q}, t) \\ C_6(\mathbf{q}, t) \\ C_7(\mathbf{q}, t) \\ C_8(\mathbf{q}, t) \\ C_9(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x^1 - c_1 \\ R_y^1 - c_2 \\ \theta^1 - c_3 \\ R_x^2 - \dfrac{l^2}{2} \cos \theta^2 \\ R_y^2 - \dfrac{l^2}{2} \sin \theta^2 \\ R_x^2 + \dfrac{l^2}{2} \cos \theta^2 - R_x^3 + \dfrac{l^3}{2} \cos \theta^3 \\ R_y^2 + \dfrac{l^2}{2} \sin \theta^2 - R_y^3 + \dfrac{l^3}{2} \sin \theta^3 \\ \theta^2 - \theta_o^2 - \omega^2 t \\ \theta^3 - \theta_o^3 - \omega^3 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Position Analysis

- kinematics는 system이 0 DOF를 가져야하므로 constraint 식 개수 (n_c) = system coordinate 개수 (n) 이다.
  joint 구속식이 부족하다면, 각속도와 같은 driving constraint 구속식을 추가하여 $n_c = n$ 의 개수를 유지한다.
- equation이 항상 linear하지는 않음. (system이 non-linear 또는 time에 대해 non-linear할 수 있음)
  ⇒ 수치해석을 통해 해결해야함.
  ⇒ Newton-Raphson algorithm (NR법)
- Newton-Raphson법이란?
  시간이 t 이고, 특정 점을 q_i로 나타내면, exact solution을 $q_i + \Delta q_i$로 나타낼 수

있다.
이를 Taylor’s theorem에 적용해보면 아래 식과 같다.

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}_i + \Delta\mathbf{q}_i, t) = \mathbf{C}(\mathbf{q}_i, t) + \mathbf{C}_{\mathbf{q}_i}\ \Delta\mathbf{q}_i + \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\mathbf{q}_i}\ \Delta\mathbf{q}_i)_{\mathbf{q}_i}\ \Delta\mathbf{q}_i + \cdots$$

여기서, Δq 벡터를 Newton differences (차분법) 이라 하고, C_{q_i} 를 constraint Jacobian matrix (자코비안 행렬)이라 한다.

- 자코비안 행렬 (C_{q_i}) 이란?

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial q_1} & \frac{\partial C_1}{\partial q_2} & \frac{\partial C_1}{\partial q_3} & \cdots & \frac{\partial C_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial C_2}{\partial q_1} & \frac{\partial C_2}{\partial q_2} & \frac{\partial C_2}{\partial q_3} & \cdots & \frac{\partial C_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial C_{n_c}}{\partial q_1} & \frac{\partial C_{n_c}}{\partial q_2} & \frac{\partial C_{n_c}}{\partial q_3} & \cdots & \frac{\partial C_{n_c}}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

(1) kinematics에서는 $n_c = n$이므로 자코비안은 n x n의 정사각행렬이다.

(2) constraint equation이 linear라면, 자코비안은 nonsingular 행렬이다.

(3) 식을 정리하면 자코비안 x Δq_i = -(구속방정식) 이라는 관계를 가진다. (근사값)

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}_i}\ \Delta\mathbf{q}_i = -\mathbf{C}(\mathbf{q}_i, t)$$

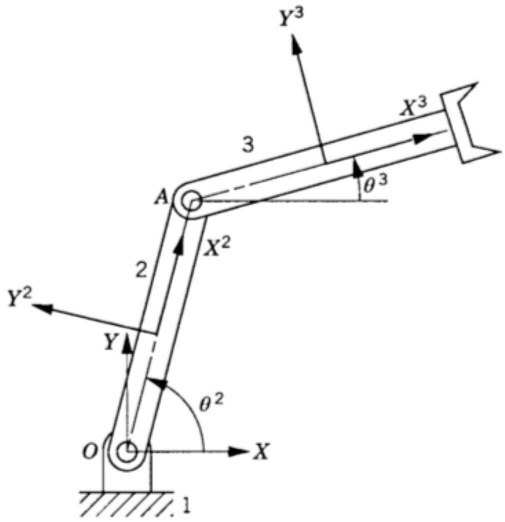
(4) 위 결과를 통해 뉴턴 차분법으로 q_i 다음 값이 q_{i+1} 임을 알 수 있다. (미분값으로 다음 값 유추, 근사값)

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \Delta\mathbf{q}_i$$

Jacobian matrix 구하는 예제

이전 예제 그림과 constraint equation을 가져옴.

(1) system generalized coordinate (vector q구하기)



$$\mathbf{q} = [R_x^1 \quad R_y^1 \quad \theta^1 \quad R_x^2 \quad R_y^2 \quad \theta^2 \quad R_x^3 \quad R_y^3 \quad \theta^3]^{\mathrm{T}}$$

Body 1, 2, 3의 coordinate vector 이다.

(2) Jacobian matrix구하기.

1행에서 열이 바뀌면, C_1 구속방정식에 대해 $q_1, q_2 \ldots q_n$에 으로 편미분함.

1열에서 행이 바꾸면 $C_1, C_2, \ldots C_n$ 구속방정식에 대해 q_1 벡터으로 편미분함.

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} C_1(\mathbf{q}, t) \\ C_2(\mathbf{q}, t) \\ C_3(\mathbf{q}, t) \\ C_4(\mathbf{q}, t) \\ C_5(\mathbf{q}, t) \\ C_6(\mathbf{q}, t) \\ C_7(\mathbf{q}, t) \\ C_8(\mathbf{q}, t) \\ C_9(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x^1 - c_1 \\ R_y^1 - c_2 \\ \theta^1 - c_3 \\ R_x^2 - \frac{l^2}{2} \cos \theta^2 \\ R_y^2 - \frac{l^2}{2} \sin \theta^2 \\ R_x^2 + \frac{l^2}{2} \cos \theta^2 - R_x^3 + \frac{l^3}{2} \cos \theta^3 \\ R_y^2 + \frac{l^2}{2} \sin \theta^2 - R_y^3 + \frac{l^3}{2} \sin \theta^3 \\ \theta^2 - \theta_o^2 - \omega^2 t \\ \theta^3 - \theta_o^3 - \omega^3 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C_q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{l^2}{2} \sin \theta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{l^2}{2} \cos \theta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{l^2}{2} \sin \theta^2 & -1 & 0 & -\frac{l^3}{2} \sin \theta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{l^2}{2} \cos \theta^2 & 0 & -1 & \frac{l^3}{2} \cos \theta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(참고)

kinematics에서는 joint constraint+driving constraint = n_c

와 system의 총 coordinate 개수인 n이 서로 같으므로

자코비안 matrix는 square matrix이다.

Velocity Analysis

구속방정식 자체는 위치를 나타낸다. 따라서, 구속방정식을 전미분함으로 속도를 알 수 있다.

이때, 구속방정식의 전미분을 자코비안으로 나타낼 수 있다.

(1) 구속방정식 원래 일반식

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = [C_1(\mathbf{q}, t) \quad C_2(\mathbf{q}, t) \quad \cdots \quad C_{n_c}(\mathbf{q}, t)]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$$

(2) 구속방정식 전미분한 식

$$\mathbf{C_q \dot{q}} + \mathbf{C}_t = \mathbf{0}$$

C_q는 자코비안으로, C를 q에 대해 편미분한 식.

C_t는 C를 시간에 대해 편미분한 식.

(3) 결과

$$\mathbf{C_q \dot{q}} = -\mathbf{C}_t$$

Accleration Analysis

(1) 속도 결과식을 미분함으로 가속도를 얻는다.

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{C_q \dot{q}} + \mathbf{C}_t\right) = \mathbf{0}$$

(2) Chain rule을 이용해 정리하면

$$\mathbf{C_q \ddot{q}} + (\mathbf{C_q \dot{q}})_{\mathbf{q}}\mathbf{\dot{q}} + 2\mathbf{C}_{\mathbf{q}_t}\mathbf{\dot{q}} + \mathbf{C}_{tt} = \mathbf{0}$$

(3) 가속도식 분석

- 1 번째 term ($C_q \ddot{q}$)을 Q_d로 표기하고, 다른 2,3,4번째 term을 넘겨서 표현할 수 있다.

$$\mathbf{Q}_d = -(\mathbf{C_q \dot{q}})_{\mathbf{q}}\mathbf{\dot{q}} - 2\mathbf{C}_{\mathbf{q}_t}\mathbf{\dot{q}} - \mathbf{C}_{tt}$$

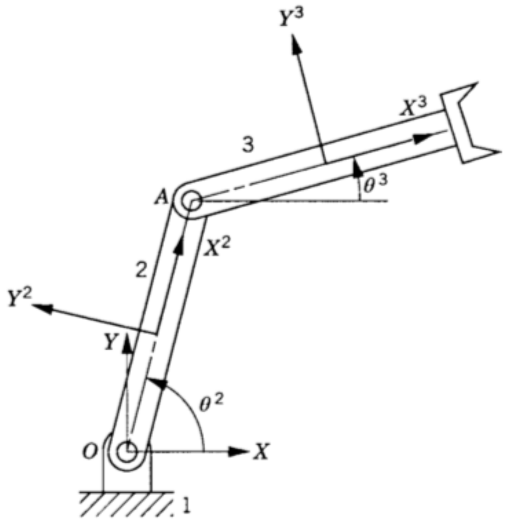
2,3번째 term은 속도 제곱으로 quadratic veloctiy라고 한다.

따라서 Q_d를 quadratic velocity로 표현할 수 있다.

- $\dot{q}$와q를 velocity analysis, position analysis로 구할 수 있으므로, Q_d, C_q를 둘의 term으로 나타낼 수 있다.
  ⇒ $\ddot{q}$을 solve 함.

가속도 분석 예제

(1) C_t 구하기. (원래 0인데, driving



$$\mathbf{C}(\mathbf{q},t) = \begin{bmatrix} C_1(\mathbf{q},t) \\ C_2(\mathbf{q},t) \\ C_3(\mathbf{q},t) \\ C_4(\mathbf{q},t) \\ C_5(\mathbf{q},t) \\ C_6(\mathbf{q},t) \\ C_7(\mathbf{q},t) \\ C_8(\mathbf{q},t) \\ C_9(\mathbf{q},t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x^1 - c_1 \\ R_y^1 - c_2 \\ \theta^1 - c_3 \\ R_x^2 - \frac{l^2}{2}\cos\theta^2 \\ R_y^2 - \frac{l^2}{2}\sin\theta^2 \\ R_x^2 + \frac{l^2}{2}\cos\theta^2 - R_x^3 + \frac{l^3}{2}\cos\theta^3 \\ R_y^2 + \frac{l^2}{2}\sin\theta^2 - R_y^3 + \frac{l^3}{2}\sin\theta^3 \\ \theta^2 - \theta_o^2 - \omega^2 t \\ \theta^3 - \theta_o^3 - \omega^3 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[결과]

(7)의 정리 값을 행렬로 표현하면 아래와 같음.

(0이 되는 값을 고려해 위치 벡터로 표현함)

equation을 각속도로 주면서 생김)

$$\mathbf{C}_t = \left[\frac{\partial C_1}{\partial t} \quad \frac{\partial C_2}{\partial t} \quad \cdots \quad \frac{\partial C_n}{\partial t} \right]^{\mathrm{T}}$$
$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\omega^2 \quad -\omega^3]^{\mathrm{T}}$$

(2) $\dot{q}$ 구하기. 2자유도 (θ^2, θ^3) 과 driving constraint 조건에 맞게 표현

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{R}_x^1 \quad \dot{R}_y^1 \quad \dot{\theta}^1 \quad \dot{R}_x^2 \quad \dot{R}_y^2 \quad \dot{\theta}^2 \quad \dot{R}_x^3 \quad \dot{R}_y^3 \quad \dot{\theta}^3]^{\mathrm{T}}$$
$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad h_1 \quad h_2 \quad \omega^2 \quad h_3 \quad h_4 \quad \omega^3]^{\mathrm{T}}$$

$$h_1 = -\frac{\omega^2 l^2}{2}\sin\theta^2, \quad h_2 = \frac{\omega^2 l^2}{2}\cos\theta^2,$$
$$h_3 = -\omega^2 l^2 \sin\theta^2 - \frac{\omega^3 l^3}{2}\sin\theta^3,$$
$$h_4 = \omega^2 l^2 \cos\theta^2 + \frac{\omega^3 l^3}{2}\cos\theta^3$$

(3) 가속도 성분 구하기 $C_q t, C_{tt}$

각변위는 시간에 종속이지만, 각속도는 상수값임.

$$\mathbf{C_q}t = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C}_{tt} = \mathbf{0}$$

(4) 따라서 Q_d를 아래처럼 정리할 수 있음.

$$\mathbf{Q}_d = -(\mathbf{C_q}\dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}$$

(5) $(C_q\dot{q})_q$ 구하기. 자코비안에 $\dot{q}$를 곱해서

$$\begin{bmatrix} R_x^2 \\ R_y^2 \\ R_x^3 \\ R_y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{l^2}{2}\cos\theta^2 \\ \dfrac{l^2}{2}\sin\theta^2 \\ l^2\cos\theta^2 + \dfrac{l^3}{2}\cos\theta^3 \\ l^2\sin\theta^2 + \dfrac{l^3}{2}\sin\theta^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C_q}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{R}_x^1 \\ \dot{R}_y^1 \\ \dot{\theta}^1 \\ \dot{R}_x^2 + \dfrac{\dot{\theta}^2 l^2}{2}\sin\theta^2 \\ \dot{R}_y^2 - \dfrac{\dot{\theta}^2 l^2}{2}\cos\theta^2 \\ \dot{R}_x^2 - \dfrac{\dot{\theta}^2 l^2}{2}\sin\theta^2 - \dot{R}_x^3 - \dfrac{\dot{\theta}^3 l^3}{2}\sin\theta^3 \\ \dot{R}_y^2 + \dfrac{\dot{\theta}^2 l^2}{2}\cos\theta^2 - \dot{R}_y^3 + \dfrac{\dot{\theta}^3 l^3}{2}\cos\theta^3 \\ \dot{\theta}^2 \\ \dot{\theta}^3 \end{bmatrix}$$

위 식을 q에 대해 편미분 하면

$$(\mathbf{C_q}\dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\dot{\theta}^2 l^2}{2}\cos\theta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\dot{\theta}^2 l^2}{2}\sin\theta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\dot{\theta}^2 l^2}{2}\cos\theta^2 & 0 & 0 & -\dfrac{\dot{\theta}^3 l^3}{2}\cos\theta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\dot{\theta}^2 l^2}{2}\sin\theta^2 & 0 & 0 & -\dfrac{\dot{\theta}^3 l^3}{2}\sin\theta^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(6) 위 값을Q_d에 대입하면

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_d &= -(\mathbf{C_q}\dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} \\ &= -\Bigg[0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{(\dot{\theta}^2)^2 l^2}{2}\cos\theta^2 \quad \frac{(\dot{\theta}^2)^2 l^2}{2}\sin\theta^2 \\ &\quad -\left(\frac{(\dot{\theta}^2)^2 l^2}{2}\cos\theta^2 + \frac{(\dot{\theta}^3)^2 l^3}{2}\cos\theta^3\right) \\ &\quad -\left(\frac{(\dot{\theta}^2)^2 l^2}{2}\sin\theta^2 + \frac{(\dot{\theta}^3)^2 l^3}{2}\sin\theta^3\right) \quad 0 \quad 0\Bigg]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

(7) 위 벡터값을 정리

$$\ddot{R}_x^1 = \ddot{R}_y^1 = \ddot{\theta}^1 = \ddot{\theta}^2 = \ddot{\theta}^3 = 0$$

$$\ddot{R}_x^2 = -(\dot{\theta}^2)^2 \frac{l^2}{2} \cos\theta^2$$

$$\ddot{R}_y^2 = -(\dot{\theta}^2)^2 \frac{l^2}{2} \sin\theta^2$$

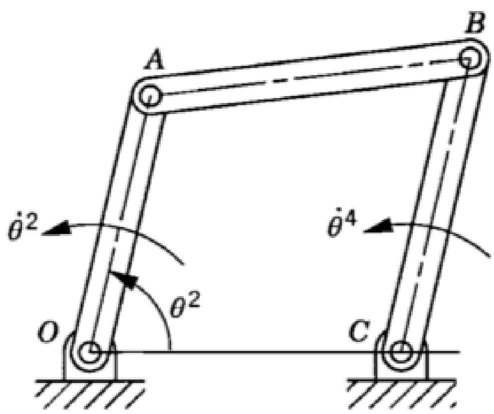
$$\ddot{R}_x^3 = -(\dot{\theta}^2)^2 l^2 \cos\theta^2 - (\dot{\theta}^3)^2 \frac{l^3}{2} \cos\theta^3$$

$$\ddot{R}_y^3 = -(\dot{\theta}^2)^2 l^2 \sin\theta^2 - (\dot{\theta}^3)^2 \frac{l^3}{2} \sin\theta^3$$

▼ 3.11 Computer Implementation / 150

- analytic의 경우 식으로 다 정리한 후 마지막에 값 넣음. ⇒ computer는 값 다 넣고 시작해서 계산하면 됨.

(예시)



(4 절 기구)

(1) 초기조건 ($l^1 = 0.35m, l^2 = 0.2m, l^3 = 0.35m, l^4 = 0.25m, \dot{\theta}^2 = 5rad/s$)

(2) 자유도의 term으로 나타낸 구속 방정식

[solution]

(1) 구속방정식을 문제 조건으로 $\theta^2, \theta^3, \theta^4$의 텀으로 나타냄.

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} C_1(\mathbf{q}, t) \\ C_2(\mathbf{q}, t) \\ C_3(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 \cos\theta^2 + l^3 \cos\theta^3 + l^4 \cos\theta^4 - l^1 \\ l^2 \sin\theta^2 + l^3 \sin\theta^3 + l^4 \sin\theta^4 \\ \theta^2 - \omega^2 t - \theta_o^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) 초기조건과 generalized coordinate (q)

- $w^2 = \dot{\theta}^2 = 5rad/s, \theta_O^2$(초기위치)=63도 를 앎.

$$\mathbf{q} = [\theta^2 \quad \theta^3 \quad \theta^4]^{\mathrm{T}}$$

$$\left.\begin{aligned} l^2\cos\theta^2 + l^3\cos\theta^3 + l^4\cos\theta^4 = l^1 \\ l^2\sin\theta^2 + l^3\sin\theta^3 + l^4\sin\theta^4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

(3) Q. 각변위, 각속도, 각가속도를 t=0.02s 일때를 구하라. 초기 crank shaft의 각은 63도이다.

$\theta^2, \theta^3, \theta^4$의 term으로 나타낼 것.

[알고 시작해야할 것]

system은 1자유도이다.

$\theta^2, \theta^3, \theta^4$는 서로 종속임 (not independent)

[문제흐름표]

(1~3) generalized coordinate로 자코비안 구함.

(4) 초기조건으로 각 term들의 초기값을 구함.

(5) Δq_0 (초기값 변화량)을 뉴턴 차분법으로 구한 반복식에 대입함.

$(q_1 = q_0 + \Delta q_0)$

(6) 구해진 다음 값 (q_1)으로 자코비안과 구속방정식에 대입함.

그 값으로 Δq_1을 구해 모든 θ에 대해 1번 인덱스 값을 안다.

(7) 1번 인덱스에서의 구속방정식, Δq_1의 norm 을 구함.

norm : 모든 값을 제곱해서 더한 후 루트 친 값을 그 값의 개수로 나눔.

(3) C와 q를 알므로 Jacobian matrix 구할 수 있음.

$$\mathbf{C_q} = \begin{bmatrix} -l^2\sin\theta^2 & -l^3\sin\theta^3 & -l^4\sin\theta^4 \\ l^2\cos\theta^2 & l^3\cos\theta^3 & l^4\cos\theta^4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4) 문제 조건에 맞게 수치해석 (numerical solution)을 구함.

- 조건 ($t = 0.02s, \theta^2 = 63^\circ = 1.0996rad$)

DOF=1인 system이므로 θ^2를 구하면 θ^3, θ^4를 구할 수 있음.

$$\mathbf{q}_0 = [63^\circ \quad 10^\circ \quad 245^\circ]^{\mathrm{T}} = [1.0996 \quad 0.1745 \quad 4.2761]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{rad}$$

- 초기조건에 의한 자코비안 행렬 (각도 값 대입)

$$\mathbf{C_q}(\mathbf{q}_0) = \begin{bmatrix} -0.1782 & -0.06077 & 0.22658 \\ 0.09079 & 0.34468 & -0.105646 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

- 초기조건에 의한 구속방정식 값 (각도 값 대입)

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}_0, t) = \begin{bmatrix} -0.020176 \\ 0.01239 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

- $C_q * \dot{q} = -C$ 식에서

$$\begin{bmatrix} -0.1782 & -0.06077 & 0.22658 \\ 0.09079 & 0.34468 & -0.105646 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_0^2 \\ \Delta\theta_0^3 \\ \Delta\theta_0^4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0.020176 \\ 0.01239 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

(8)속도 관련

- C_t를 안다.
- $C_q * \dot{q} = -C$ (속도 식)에 각속도 $\dot{q}$를 대입함.

⇒ $\theta^2, \theta^3, \theta^4$의 모든 각속도를 구할 수 있음.

(9) 가속도 관련

Q_d는$\theta^2, \theta^3, \theta^4$ 와$\dot{\theta}^2, \dot{\theta}^3, \dot{\theta}^4$ 로 표현되므로 모든 값을 대입해 구할 수 있음.

(10) 정리된 Q_d는 $C_q * \ddot{q} = -Q_d$ 로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -0.1782 & -0.05751 & 0.23486 \\ 0.09079 & 0.34524 & -0.08567 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta}^3 \\ \ddot{\theta}^4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1.153798 \\ 1.255206 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

결과적으로, 위치분석, 속도분석을 통해 얻은 모든 값을 이용해 가속도 값을 구할 수 있다.

$$[\ddot{\theta}^2 \quad \ddot{\theta}^3 \quad \ddot{\theta}^4]^{\mathrm{T}} = [0 \quad 5.1689 \quad 6.1784]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{rad/s^2}$$

위 값이 시스템의 가속도를 $\theta^2, \theta^3, \theta^4$ term으로 나타낸 결과 값이다.

θ_0^2 초기값의 변화량은 0이므로

$$\begin{bmatrix} -0.06077 & 0.22658 \\ 0.34468 & -0.105646 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_0^3 \\ \Delta\theta_0^4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0.020176 \\ 0.01239 \end{bmatrix}$$

$$\Delta\theta_0^3 = -9.4285 \times 10^{-3}, \qquad \Delta\theta_0^4 = 0.086517$$

(5)Δq_0 (초기값 변화량)을 뉴턴 차분법으로 구한 반복식에 대입함.

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 1.0996 \\ 0.1745 \\ 4.2761 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 \\ -9.4285 \times 10^{-3} \\ 0.086517 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0966 \\ 0.16507 \\ 4.362617 \end{bmatrix}$$

(6)

$$\mathbf{C_q}(\mathbf{q}_1) = \begin{bmatrix} -0.1782 & -0.05751 & 0.23486 \\ 0.09079 & 0.34524 & -0.08567 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}_1, t) = \begin{bmatrix} 3.6 \times 10^{-4} \\ 8.5 \times 10^{-4} \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

quation 116 yields

$$\begin{bmatrix} -0.1782 & -0.05751 & 0.23486 \\ 0.09079 & 0.34524 & -0.08567 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^2 \\ \Delta\theta_1^3 \\ \Delta\theta_1^4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3.6 \times 10^{-4} \\ 8.5 \times 10^{-4} \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

he solution of this system of equations yields

$$\Delta\mathbf{q}_1 = [\Delta\theta_1^2 \quad \Delta\theta_1^3 \quad \Delta\theta_1^4]^{\mathrm{T}} = [0.0 \quad -3.026 \times 10^{-3} \quad -2.2738 \times 10^{-3}]^{\mathrm{T}}$$

(7)

$$|\mathbf{C}(\mathbf{q}_1, t)| = \frac{10^{-4}}{3}\sqrt{(3.6)^2 + (8.5)^2 + (0)^2} = 3.077 \times 10^{-4}$$

$$|\Delta\mathbf{q}_1| = \frac{10^{-3}}{3}\sqrt{(0)^2 + (3.026)^2 + (2.2738)^2} = 1.261 \times 10^{-3}$$

(8)

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.1782 & -0.05751 & 0.23486 \\ 0.09079 & 0.34524 & -0.08567 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\theta}^3 \\ \dot{\theta}^4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -5.0 \end{bmatrix}$$

This equation defines the angular velocities $\dot{\theta}^2$, $\dot{\theta}^3$, and $\dot{\theta}^4$ at $t = 0.02$ s as

$$\dot{\theta}^2 = 5 \text{ rad/s}, \qquad \dot{\theta}^3 = -0.39764 \text{ rad/s}, \qquad \dot{\theta}^4 = 3.6964 \text{ rad/s}$$

(9)

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} (\dot{\theta}^2)^2 l^2 \cos\theta^2 + (\dot{\theta}^3)^2 l^3 \cos\theta^3 + (\dot{\theta}^4)^2 l^4 \cos\theta^4 \\ (\dot{\theta}^2)^2 l^2 \sin\theta^2 + (\dot{\theta}^3)^2 l^3 \sin\theta^3 + (\dot{\theta}^4)^2 l^4 \sin\theta^4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

값 대입해서 정리하면,

$$= \begin{bmatrix} 1.153798 \\ 1.255206 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Computer algorithm

Step 1 At a given point in time t, an estimate for the desired solution is made. This estimate must be close to the exact solution in order to avoid divergence.

Step 2 The Jacobian matrix $\mathbf{C_q}$ and the vector of constraint equations $\mathbf{C}$ of Eq. 135 can be evaluated.

Step 3 Equation 135 is solved for the vector of Newton differences $\Delta\mathbf{q}$.

Step 4 If the norm of the vector $\Delta\mathbf{q}$ or the norm of the vector of constraint equations $\mathbf{C}$ is small and less than specified tolerances (Eq. 118), proceed to step 5. Otherwise, update the vector of coordinates, that is, $\mathbf{q} = \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}$ and go to step 2 if the number of specified iterations is not exceeded.

Step 5 Having determined the vector of system coordinates, this vector can be used to evaluate the Jacobian matrix $\mathbf{C_q}$ and the vector $\mathbf{C}_t$ of Eq. 136.

Step 6 Equation 136 is a linear system of algebraic equations in the velocity vector. This system of equations can be solved for the vector $\dot{\mathbf{q}}$.

Step 7 Using the vectors $\mathbf{q}$ and $\dot{\mathbf{q}}$ determined from the position and velocity analyses, evaluate the Jacobian matrix $\mathbf{C_q}$ and the vector $\mathbf{Q}_d$ of Eq. 137.

Step 8 Equation 137 is a linear system of algebraic equations in the acceleration vector. This equation can be solved for the vector $\ddot{\mathbf{q}}$.

Step 9 Steps 1 through 8 are repeated until the simulation time ends.

▼ 3.12 Kinematic Modeling and Analysis / 161

1자유도 Slider crank를 컴퓨터로 어떻게 모델링하고, kinematic computer analysis를 하는지 알아볼 것.

- 초기 조건으로 body의 길이를 줌. 어떤 joint로 체결됐는지도 알려줌.
- 시뮬레이션 돌릴때, 하나의 driving equation만 알면 가능하다.
- computer program SAMS/2000 (Systematic Analysis of Multibody Systems)를 이용해 시뮬레이션 가능 (chapter 9에 소개함)
- 시뮬레이션 돌릴 때 간략히 설명

(1) 각속도 하나를 driving constraint로 줌.

$$\dot{\theta}^2 = f(t)$$

$$\theta^2 - \theta_0^2 = \int_0^t f(t)\ dt$$

$$g(t) = \int_0^t f(t)\ dt$$

(2) 구속 방정식

각속도가 아니라 각변위를 주어지면?

구속방정식에 g(t)=150t 가 아니라 특정 함수 f(t)가 주어진 경우 (motion을 모를 때)

(1) driving constraint 표기법

$$C_d = R_x^4 - f(t) = 0$$

(2) 구속방정식

$$
\mathbf{C}(\mathbf{q},t) = \begin{bmatrix} R_x^1 \\ R_y^1 \\ \theta^1 \\ \mathbf{R}^2 + \mathbf{A}^2\overline{\mathbf{u}}_O^2 \\ \mathbf{R}^2 + \mathbf{A}^2\overline{\mathbf{u}}_A^2 - \mathbf{R}^3 - \mathbf{A}^3\overline{\mathbf{u}}_A^3 \\ \mathbf{R}^3 + \mathbf{A}^3\overline{\mathbf{u}}_B^3 - \mathbf{R}^4 - \mathbf{A}^4\overline{\mathbf{u}}_B^4 \\ R_y^4 \\ \theta^4 \\ \theta^2 - \theta_O^2 - g(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}
$$

(3) 자코비안

$$
\mathbf{C}_\mathbf{q} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C_{4,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{5,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C_{6,6} & -1 & 0 & C_{6,9} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{7,6} & 0 & -1 & C_{7,9} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C_{8,9} & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{9,9} & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

(4) 각속도가 150 rad/s이면 g(t)=150t이다. where f(t)=150 이므로 C_t는 아래와 같다.

$$
\mathbf{C}_t = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad f(t)]^{\mathrm{T}}
$$

(5) 구속방정식 C와 자코비안 C_q로 변위, 각변위, 속도, 각속도를 그래프할 수 있음.

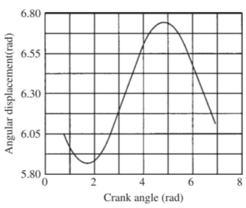


Figure 3.37a Orientation of the connecting rod

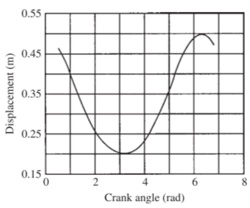


Figure 3.37b Displacement of the slider block

$$
\mathbf{C}(\mathbf{q},t) = \begin{bmatrix} R_x^1 \\ R_y^1 \\ \theta^1 \\ \mathbf{R}^2 + \mathbf{A}^2\overline{\mathbf{u}}_O^2 \\ \mathbf{R}^2 + \mathbf{A}^2\overline{\mathbf{u}}_A^2 - \mathbf{R}^3 - \mathbf{A}^3\overline{\mathbf{u}}_A^3 \\ \mathbf{R}^3 + \mathbf{A}^3\overline{\mathbf{u}}_B^3 - \mathbf{R}^4 - \mathbf{A}^4\overline{\mathbf{u}}_B^4 \\ R_y^4 \\ \theta^4 \\ R_x^4 - f(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}
$$

(3) C_t 가 달라져 Q_d에 편미분 값이 남는다.

$$
\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial t} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
$$

$$
\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\dot{\theta}^2)^2\mathbf{A}^2\overline{\mathbf{u}}_O^2 \\ (\dot{\theta}^2)^2\mathbf{A}^2\overline{\mathbf{u}}_A^2 - (\dot{\theta}^3)^2\mathbf{A}^3\overline{\mathbf{u}}_A^3 \\ (\dot{\theta}^3)^2\mathbf{A}^3\overline{\mathbf{u}}_B^3 - (\dot{\theta}^4)^2\mathbf{A}^4\overline{\mathbf{u}}_B^4 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} \end{bmatrix}
$$

(4) Q_d =~~ 식에 f(t) 2 번 편미분한 값을 대입하면 결과는 아래와 같다.

$$
f(t) = 0.35 - 0.8l^2 \sin 150t
$$

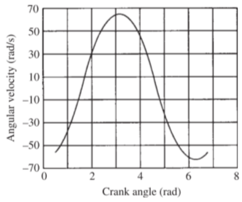


Figure 3.38a Angular velocity of the connecting rod

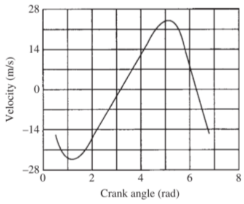


Figure 3.38b Velocity of the slider block

(6) C, C_q, C_t, 와 (5)의 결과를 통해 Q_d를 구할 수 있음. 또한 가속도, 각가속도를 그래프할 수 있음.

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\dot{\theta}^2)^2\mathbf{A}^2\bar{\mathbf{u}}_O^2 \\ (\dot{\theta}^2)^2\mathbf{A}^2\bar{\mathbf{u}}_A^2 - (\dot{\theta}^3)^2\mathbf{A}^3\bar{\mathbf{u}}_A^3 \\ (\dot{\theta}^3)^2\mathbf{A}^3\bar{\mathbf{u}}_B^3 - (\dot{\theta}^4)^2\mathbf{A}^4\bar{\mathbf{u}}_B^4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

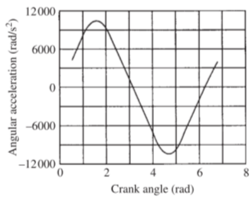


Figure 3.39a Angular acceleration of the connecting rod

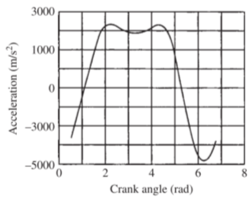


Figure 3.39b Acceleration of the slider block

(추가) singular configuration

slider crank의 θ^2, θ^3가 둘 다 0일 때 발생함. 이 특수 경우의 자코비안은 아래와 같다.

$$\mathbf{C_q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{l^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{l^2}{2} & 0 & -1 & \frac{l^3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{l^3}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6, 8, 12행의 합이 4번째 행과 같다. ⇒ singular configuration 발생

이것은 slider block의 motion을 특정할 때는 생기지만,

angular oriention을 특정하면서는 생기지 않는다.

(엥? 이부분 뭔지 모르겠음)

▼ 3.13 Concluding Remarks / 169

1. Classical approach

body사이 각도를 정의하는 trigonometric relationship 찾으면서 시작.

얘는 kinematic은 structure로 취급한다는 가정으로 해결 가능함.

non-linear인 경우 position variable로 해결한다.

위치를 알게 되면 미분으로 속도, 가속도를 안다.

2. more general approach

joint로 체결되거나, 특정 motion으로 구속 (driving constraint)된 non-linear constraint에서 공식화이다.

kinematic에서 구속방정식 수=시스템 좌표 수이다. ⇒ 정사각행렬이므로 numerical, computer method 사용이 가능하다.

구속방정식을 시간에대해서 1번, 2번 미분함으로 linear algebraic velocity, acceleration 식을 얻을 수 있다. ⇒ 얘도 kinematic에서 컴퓨터 사용 가능

3. 정리

kinematic의 가장 큰 특징은 구속방정식 수=시스템 좌표 수여서 특정 미분방정식으로 값을 얻을 필요없다.

dynamic은 구속방정식 수가 적기에 미분방정식으로 값을 얻어낸다는 특징이 있음.

미분방정식은 inertia, applied joint force등으로 이루어짐.

만약 구속방정식 수가 적다면 laws of motion (dynamically driven systems)이 필요하다. 다음 단원부터 dynamic구속 방정식을 fomulating하는 방법에 대해 배우겠다.