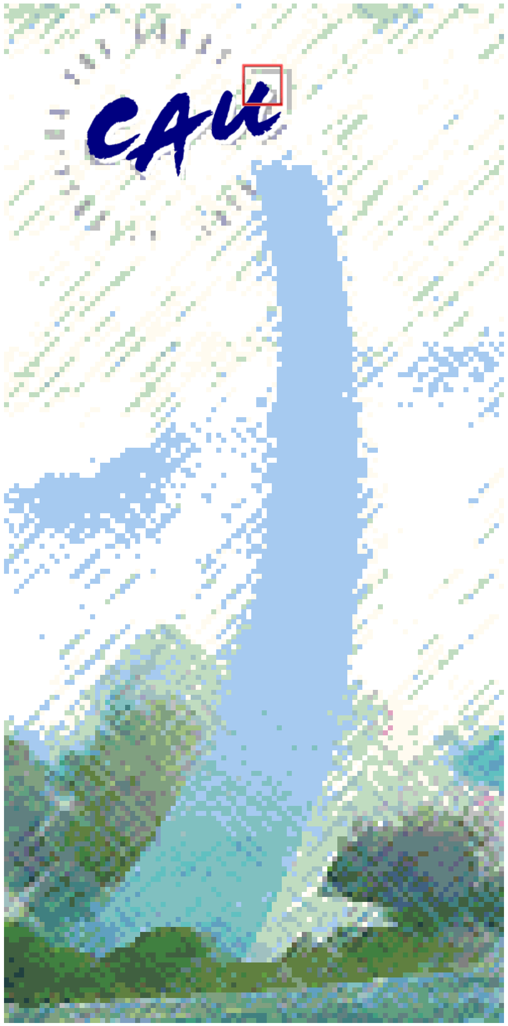


휴먼인터페이스 미디어
Human Interface Media

강의 5
푸리에 급수

2020년 가을

지금까지 공부한 것

- 사람의 청각
  - 압력변화 → 고막 → 달팽이관 → 청신경 → 뇌
  - 달팽이관: 파동 → 스펙트럼으로
  - 뇌는 시간의 흐름에 따르는 스펙트럼의 변화로 소리를 구별한다.

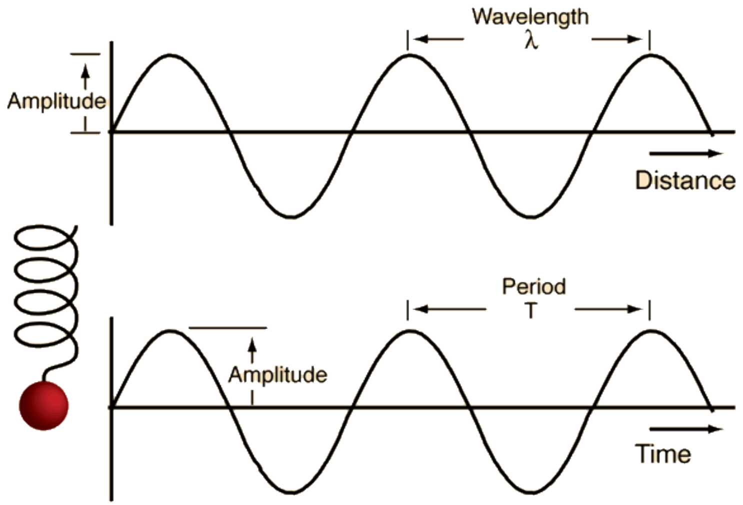
- 청각을 컴퓨터에서 흉내 내려면
  - 소리를 스펙트럼으로 바꾸어야해!
  - 소리는 파동 → 파동을 어떻게 계산식 형태로?

- 이번에 공부할 내용
  - 파동을 어떻게 스펙트럼으로 계산해서 바꾸나?

파동 Wave의 표현

- 기본 변수

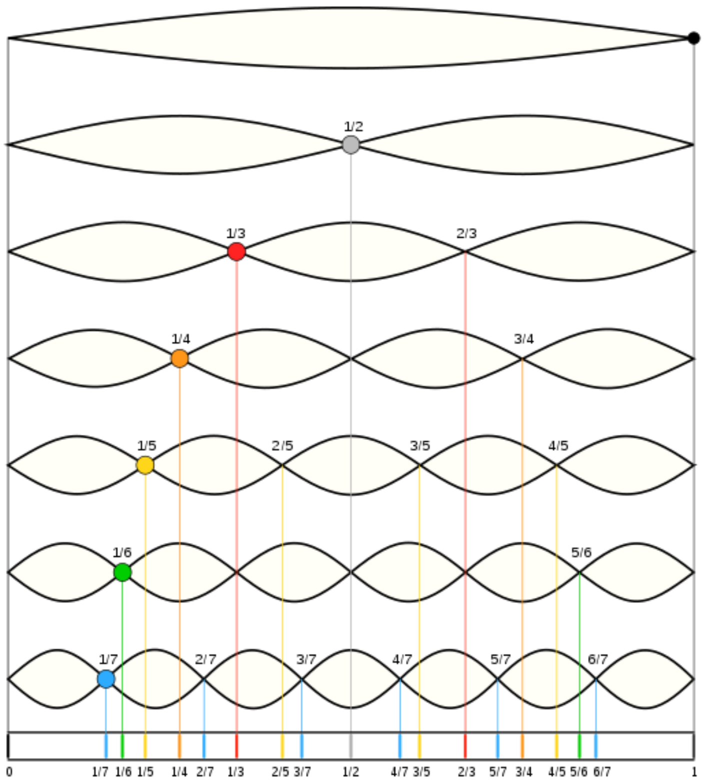
- 인자(파라미터)



- 파동의 기본 표현:
  - $x(t) =$

- 우리가 쓰는 기본형:

고조파 harmonic wave

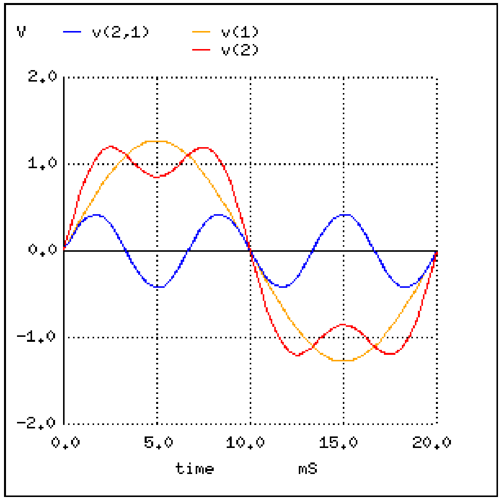


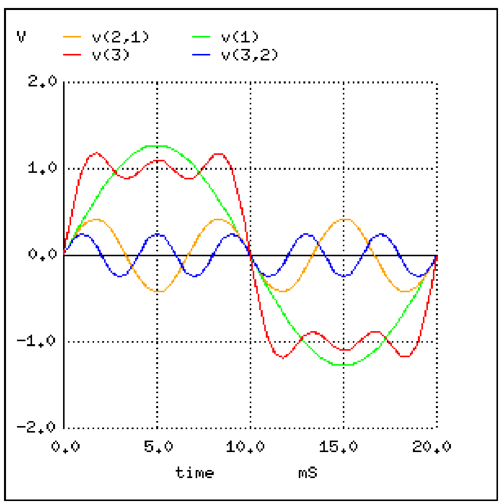
- 고조파
  - 주파수가 기본파의 주파수(f_0) 정수배인 파동
  - f_0 : 기본 주파수 (fundamental frequency)
  - k차 고조파 (k^th harmonic)

- k 차 고조파: f_k의 표현

  $x_k(t) =$

고조파의 합





- 두 고조파의 합성파
  - $x_1(t) = A_1 e^{\,i(2\pi f_1 t)}$
  - $x_2(t) = A_2 e^{\,i(2\pi f_2 t)} = A_2 e^{\,i(2\pi 3 f_1 t)}$
  - $x_{sum}(t) = A_1 e^{\,i(2\pi f_1 t)} + A_2 e^{\,i(6\pi f_1 t)}$

- N개 고조파의 합성파

파동의 일반화 – 푸리에 급수

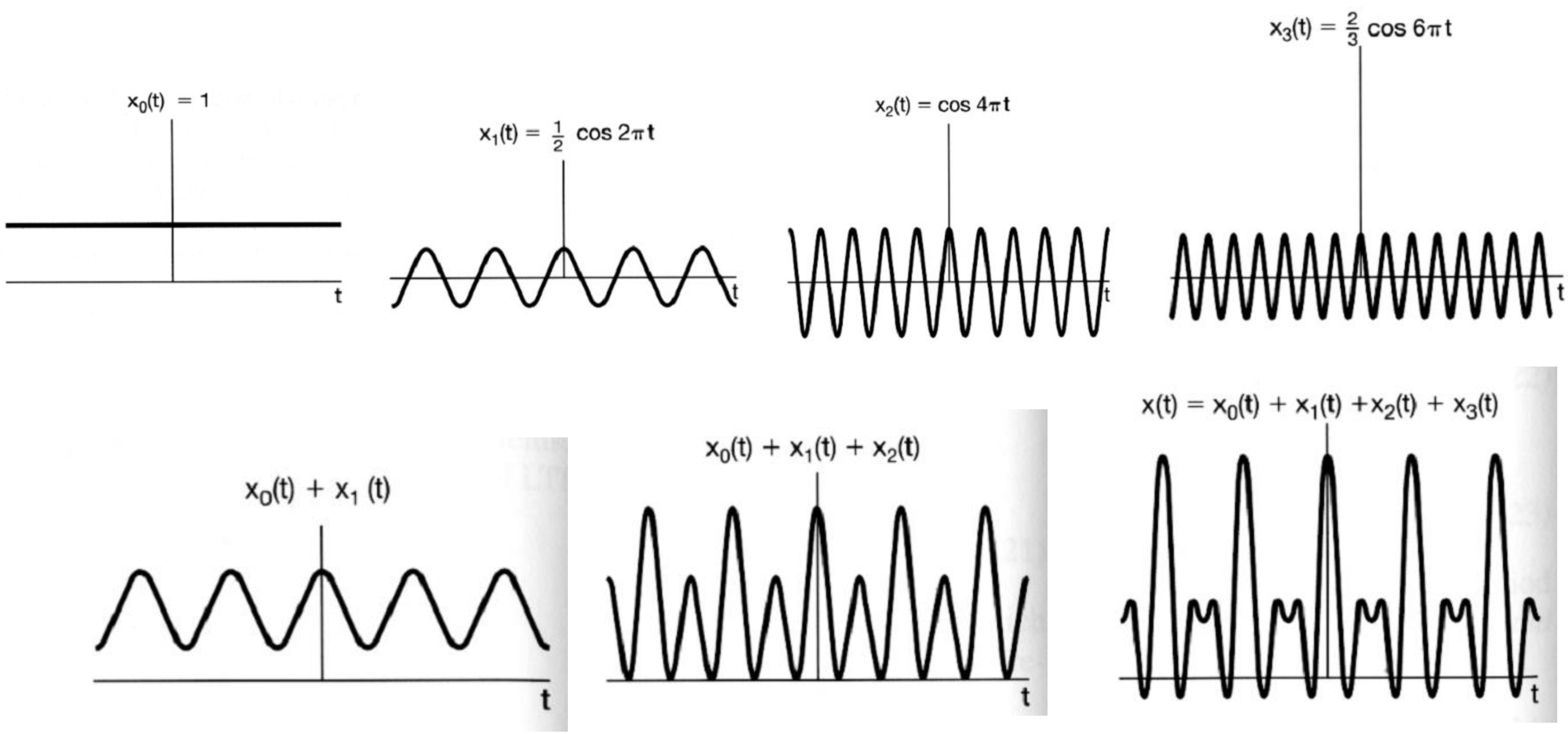
- 주파수: $f = 1/T$, $w = 2\pi f$
- 주기 : T
- 주기 함수 : $x(t) = x(t + T)$ *for all t*

- 하모닉 관계인 주기 함수
  - $\omega_0 = 2\pi f_0 \;\; T_0 = \frac{1}{f_0}$, k를 정수 영역으로 확대

- 하모닉 관계인 주기함수의 선형 합 : 푸리에 급수

푸리에 급수의 예

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}, \qquad a_0 = 1,\ a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4},\ \ a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2},\ \ a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}.$$



푸리에 급수의 계수 구하기

- 모든 주기 함수는 푸리에 급수로 표현할 수 있다.

- x(t)가 주기 함수하면 x(t)를 푸리에 급수로 나타내려면?
  - 계수를 구해야 한다. 어떻게?

푸리에 급수

- 모든 주기 함수는 그 함수의 기저 주파수와 하모닉 관계에 있는 주기 함수들의 선형 합으로 나타낼 수 있다.

- 합성식

- 분해식

- a_k는 무엇을 의미하는가 ?

예 1

$$x(t) = \sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}$$

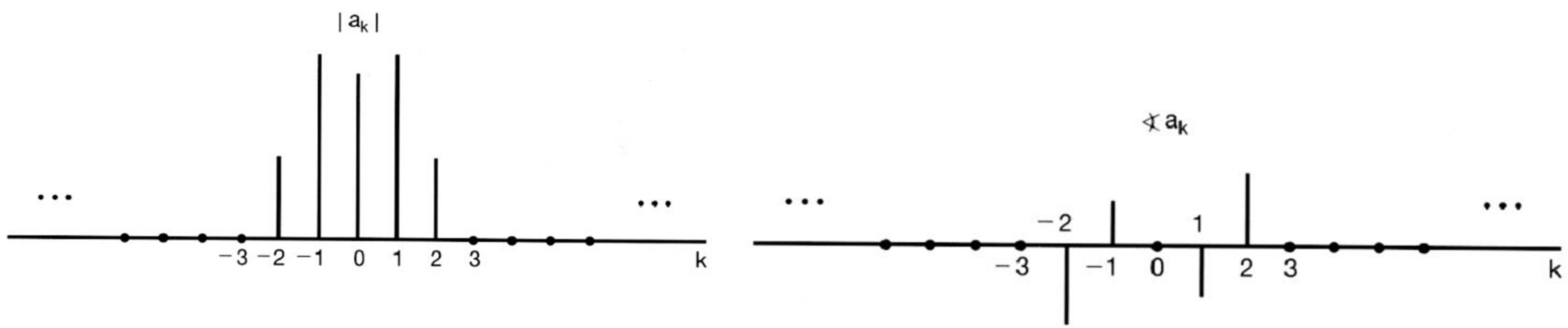
$$a_1 = \frac{1}{2j}, \qquad a_{-1} = -\frac{1}{2j},$$

- $x(t) = \cos w_0 t$?

예 2

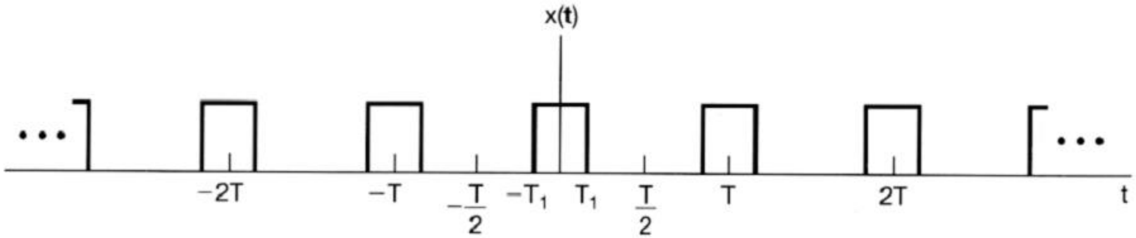
$$x(t) = 1 + \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] + [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}[e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}].$$



예 3

- Periodic square wave $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$



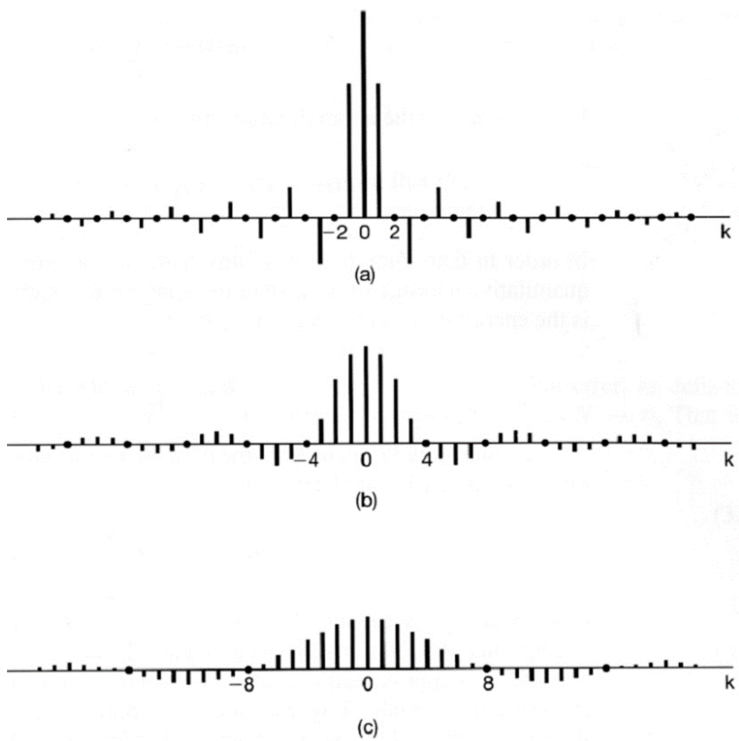
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}.$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}\,dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

예 3 - 계속

- For $T=4T_1$ → $\omega_0 T_1 = \pi/2,$

$a_0 = \frac{1}{2}.$ $a_k = \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi},$ k가 짝수 = 0 홀수 = 1또는 -1



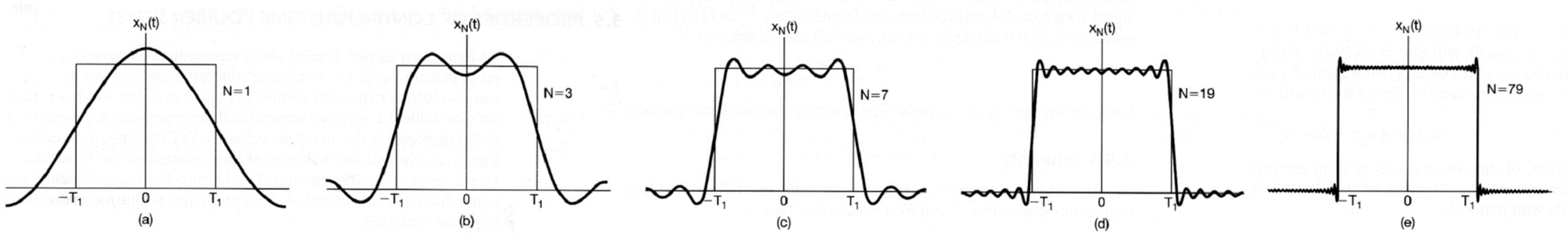
(a) $T = 4T_1$

(b) $T = 8T_1$

(c) $T = 16T_1$

유한 푸리에 급수

- Finite Fourier Series
- N 항 까지의 푸리에 급수 $$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}.$$
- 근사 오차
-



푸리에 급수 요약

- 주기 함수를 기본 주파수와 하모닉 관계의 정현파(sin & cos)의 선형합으로 분해

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t},$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}\,dt.$$

- 시간 영역의 주기 함수를 기본 주파수의 정수배 주파수의 분포인 스펙트럼 (주파수의 함수)으로 변환
- a_k 계수는 기본주파수의 k배되는 주파수 성분의 에너지 크기를 표현
- 각 계수가 특정 주파수의 성분이므로 불연속 스펙트럼