20162874 이준협 5주차 추석연휴 대체과제.

1. 접근 방향

사칙연산만 가능한 디지털 컴퓨터는 일반적인 방법으로는 삼각함수 즉 sin, cos, tan를 계산할 수 없다. 그래서 우리는 삼각함수를 다항함수의 영역으로 데려와 근사하게 값들을 계산해낸다. 이때 다항함수 영역으로 데려오는 수단으로 "테일러 급수"를 활용한다.

2. 테일러 급수.

$f'(x)$를 a부터 x까지 정적분하면 $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$ 다음과 같이 표현된다.

$f'(t) = (-1)\cdot(-f'(t))$ 라고 생각하여 부분적분을 계속진행할 경우

$$\int_a^x f'(t)dt = \left(-(x-t)f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) - \frac{(x-t)^3}{3!}f'''(t) - \cdots\right)\Big|_a^x = f(x) - f(a)$$

t와 관계없는 x는 상수취급되므로 최종적으로 $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots$

$\therefore f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ (a에는 어떤수를 넣어도 근사값이 나온다)

3. 삼각함수에 적용하기

a에 0을 대입하고 $f(x) = \cos(x)$ 라고하면 위식에서부터

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

이로써 사칙연산만으로 $\cos(x)$에 근사한 값을 얻을 수 있는 다항함수를 식으로 표현했다.

식이 무한하므로 n차식을 구해 삼각함수 값을 구해줍니다.

이때 n이 커질수록 더욱 정밀하지만 계산량이 커지고

n이 작을수록 덜 정밀하지만 계산량이 작아지는 trade-off가 존재한다.

4. 오일러 공식 유도

2번에서 얻은 테일러급수 일반식을 사용한다.

$f(x) = e^x$, $a=0$ 대입해주면

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

x 대신 위 식에 ix를 대입해보면

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots\right)$$

3번에서 얻은식과 $f(x) = \sin(x)$를 통해 얻은식이 위식에 들어맞는것을 알 수있다.

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

다음과 같이 오일러 공식을 증명할 수 있다.