Lévyho lety

Heuristické algoritmy

Průcha Radek
19.05.2018

Úvod

Lévyho lety jsou typ náhodné procházky, kde je délka kroku určena symetrickým (stabilním) rozdělením pravděpodobnosti s těžkými konci. S jejich pomocí lze popsat všechny statistické procesy, které jsou velikostně invariantní. Lévyho lety lze aplikovat v široké škále oblastí, od popisu vzoru chování zvířat při krmení, přes rozdělení lidského cestování, po některé aspekty chování zemětřesení.[1]

V případě krmení zvířat fungují Lévyho lety následovně. Zvíře zůstává uvnitř malého prostoru při hledání jídla a jakmile věří, že již prohledala dostatečně velkou oblast, půjde po určitou dobu náhodným směrem, aby opět našla oblast, kde může nalézt potravu. Žraloci při lovu následují Brownův pohyb, nicméně pokud nenajdou žádnou kořist, vykazují chování Lévyho letů, tzn. střídají krátké náhodné pohyby s delšími trajektoriemi.[2]

V rámci své seminární práce jsem se rozhodl aplikovat Lévyho lety pro hledání cesty mezi dvěma body v 2D oblasti.

α-stabilní rozdělení

Pro nasimulování α-stabilního rozdělení lze použít explicitní vzorec, kde pro dvě nezávislé náhodné proměnné φ s rovnoměrným rozdělením na intervalu ($\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a ω s exponenciálním rozdělením.

$$c\,\frac{\sin\left[\alpha\varphi+\tan^{-1}\left(\beta\tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)\right]\cos^{\frac{1}{\alpha}-1}\left[(1-\alpha)\varphi-\tan^{-1}\left(\beta\tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)\right]}{\cos^{\frac{1}{\alpha}}\left[\tan^{-1}\left(\beta\tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)\right]\cos^{\frac{1}{\alpha}}(\varphi)\,\omega^{\frac{1}{\alpha}-1}}+\tau$$

kde α je hodnota špičatosti na intervalu (1,2], β je hodnota šikmosti na intervalu [-1,1], *c* je parametr definující velikost intervalu rozdělení a τ je parametr posunutí (lokace).

Délka kroku

Pro výpočet délky kroku se využívají tři algoritmy: Mantegnův algoritmus, McCullochův algoritmus a Odmítací algoritmus. V přiložených skriptech jsem použil McCullochův algoritmus, který generuje délku kroku *x* jako

$$x=c\left(\frac{\cos\big((1-\alpha)\varphi\big)}{\omega}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{\sin(\alpha\varphi)}{(\cos\varphi)^{\frac{1}{\alpha}}}+\tau$$

Uvedený vzorec vychází z vzorce pro α-stabilní rozdělení po upravení a dosazení β=0. Pro α=2 je výsledné rozdělení normální rozdělení, které při použití v náhodné procházce generuje Brownův pohyb. A pro α=1 je výsledné rozdělení Cauchyho rozdělení.

---

[1] https://www.nature.com/articles/nature06948

[2] https://seeingcomplexity.wordpress.com/2011/02/16/sharks-the-sp-500-and-levy-flights/

Implementace

Generátor náhodných jednotkových vektorů – *randomUnitDir.m*

```
function v=randomUnitDir(N)
  % N počet požadovaných vektorů
  % v výsledné vektory v matice Nx2
  v = (2*rand(N,2)-1);
  v2=diag(v*v');
  v(:,:)=v(:,:)./sqrt(v2);
  v(1,:) = 0;
end
```

Výsledkem je *Nx2* matice (kde *N* je počet vektorů), kde řádky reprezentují jednotlivé vektory a sloupce souřadnice *x* a *y*. Vektory mají normu rovnu 1 a náhodný směr.

Generátor náhodného kroku z Lévyho rozdělení – *levyFlight.m*

```
function [path, length]=levyFlight(n, start, c, alpha)
  % n počet požadovaných kroků
  % start souřadnice startovní pozice
  % c škálovací parametr
  % alpha parametr špičatosti
  % path výsledná cesta (vektor souřadnic)
  % length výsledná délka cesty
  u = pi*(rand(n,1)-0.5);
  v = -log(rand(n,1));
  t = sin(alpha*u)./(cos(u).^(1/alpha));
  s = (cos((1-alpha)*u)./v).^((1-alpha)/alpha);
  steps= t.*s.*c;
  directions = randomUnitDir(n).*steps;
  directions(1,:) = start;
  path = cumsum(directions);
  length = sum(abs(steps));
end
```

Výsledkem jsou souřadnice Lévyho letu o *n* krocích z pozice *start*. Rozdělení kroku je ovlivněno parametry *c* pro škálování a α pro špičatost. Druhá výsledná hodnota obsahuje délku celé cesty. Použitý algoritmus je McCullochův algoritmus, kde *u*=φ a v=ω. Proměnné *t* a *s* je rozepsání vzorce pro výpočet kroku. Následně délky kroků *steps* jsou násobeny s jednotkovými vektory z funkce *randomUnitDir*.

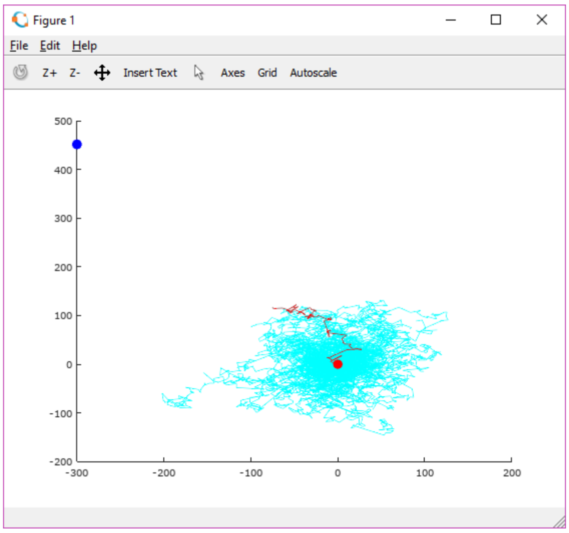
Simulace pohybu agentů – *singleSimulation.m*

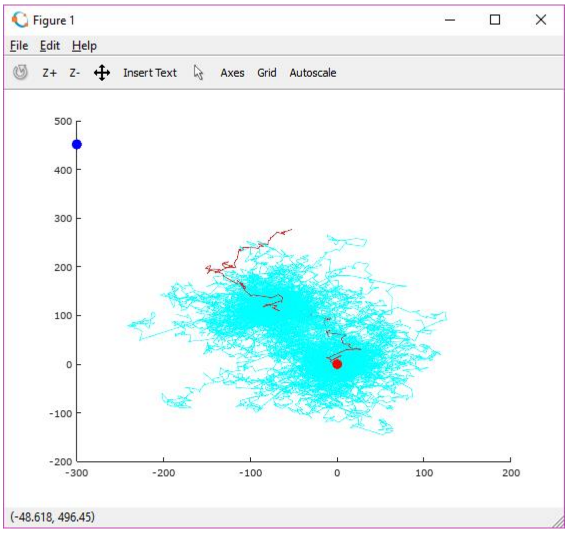
Z dané startovní pozice *origin* je vysláno *nActors* agentů po cestě vygenerované funkcí *levyFlight* o *nSteps* krocích. Jakmile všichni agenti dokončí cestu je vyhodnocen nejlepší dle vzdálenosti konce cesty od dané pozice cíle *target*. Následně se cyklus opakuje, ovšem noví agenti jsou vysláni z konce cesty nejlepšího agenta z minulé migrace. Simulace se takto opakuje, dokud jeden z agentů se nepřiblíží k cíli (cesta nemusí končit v cíli).

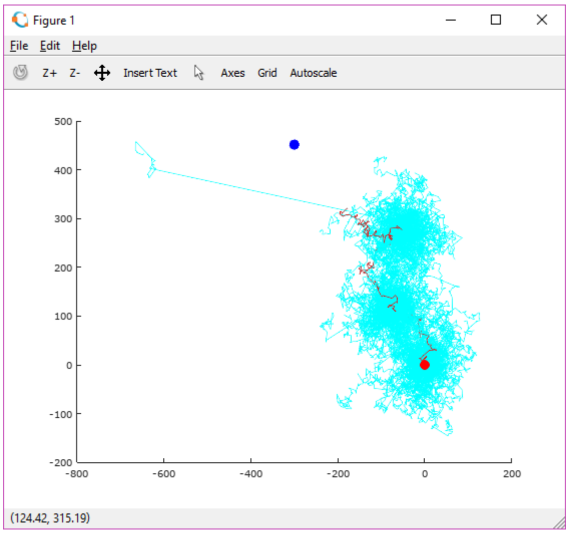
Rozdělení kroků lze ovlivňovat parametry *alpha* (šikmost) a *c* (škálování).

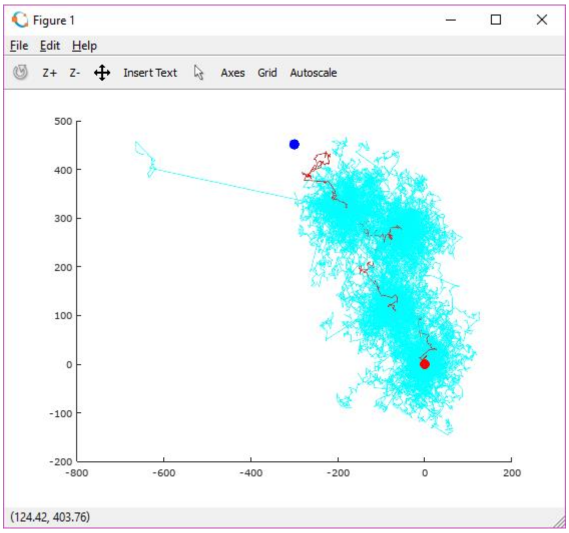
Vykreslen je graf zobrazující všechny cesty agentů (světle modrá), nejlepší cestu (červená), startovní bod a cílový bod. Dále je možné vyčíst hodnoty celkové délky cesty z parametru *finalLength* a počet migrací z parametru *migrations*. Nejlepší cesta je vyhodnocena z cest, které se nejrychleji přibližovali k cíli.

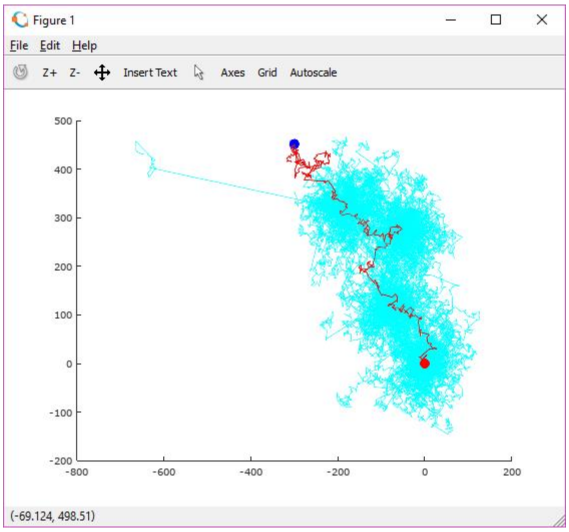
Ukázka simulace (jednotlivé iterace)











Kde simulace byla spuštěna pro 100 agentů se 100 kroky, parametrem škálování *c* = 5 a parametrem špičatosti *alpha* = 1.9. Výsledná délka cesty byla 618.89 a celkově bylo za potřebí migrovat pětkrát. Start byl v bodě [0, 0] a cíl v bodě [-300, 452].

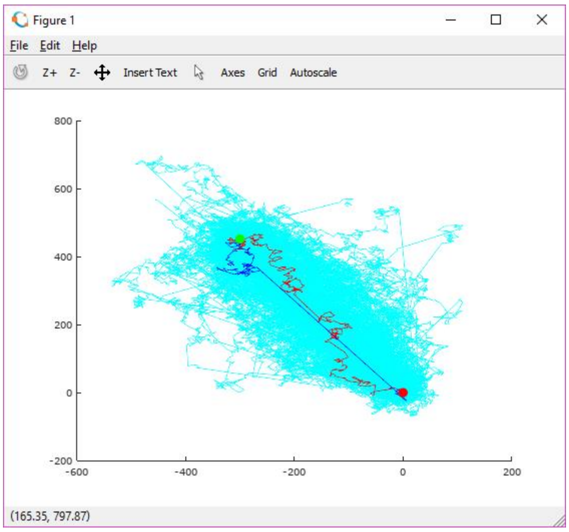
Vyhodnocení množiny výsledků simulace pohybu agentů – multiSimulation.m

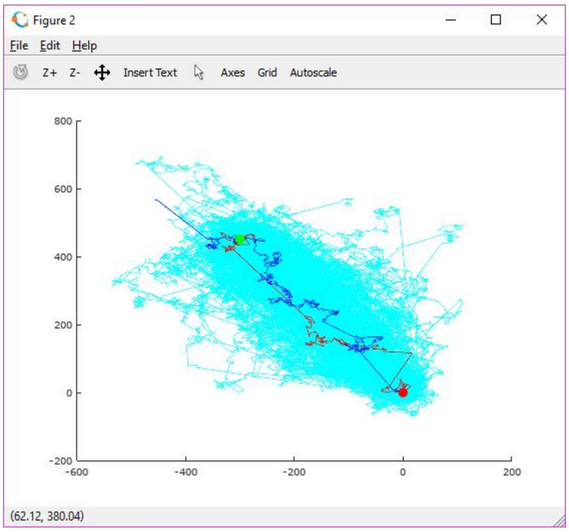
Provádí *nSimulations* simulací pohybu agentů. Samotné simulace jsou stejné jako simulace v *singleSimulation.m* s rozdílem, že výsledkem je více vítězných cest, které jsou následně statisticky prověřeny.

Vykresleny jsou dva grafy, kde v prvním je rudě vykreslena nejkratší cesta v modře cesta s nejmenším počtem migrací. V druhém je rudě vykreslena nejdelší cesta a modře cesta s největším počtem migrací.

Dále jsou vypsány statistické charakteristiky (průměr, rozptyl, minimum a maximum) pro počet migrací a délku cest.

Ukázka simulace





	vzdálenosti	migrace
průměr	609.7647	4.09
rozptyl	3778.3334	0.42402
minimum	466.3881	2
maximum	854.6326	5

Kde bylo spuštěno 200 simulací pro 100 agentů o 100 krocích s parametrem škálování *c* = 5 a parametrem špičatosti α = 1.9. Start byl v bodě [0, 0] a cíl v bodě [-300, 452].

Závěr

V rámce této seminární práce jsem implementoval Lévyho lety při hledání cesty mezi bodem *a* a bodem *b* v dvoudimenzionálním prostoru. Výsledkem je vizualizace vzniklých cest, včetně zvýraznění nejkratších cest. Vzniklá cesta by se dala interpretovat jako přirozený pohyb zvěře z bodu *a* do bodu *b*.