Lógica e Matemática Computacional

Proposições e conectivos

- Sentenças podem ser declarativas, interrogativas, exclamativas e imperativas.
- Nas sentenças declarativas, pode-se atribuir um valor-verdade (cada sentença será verdadeira ou falsa).
- Funções proposicionais: expressões que contém uma ou mais variáveis.
- Quando substitui-se as variáveis por constantes, torna-se uma proposição - sendo esta verdadeira ou falsa.
- As sentenças básicas que são verdadeiras são consideradas axiomas.
- Teoremas são novas sentenças verdadeiras que comprovam a veracidade de axiomas.
- Proposições: sentenças declarativas (representadas por letras minúsculas) que possuem valor-verdade bem estabelecido, qualificando-a como verdadeira ou falsa. A proposição que é a negação de outra, possui o valor-verdade oposto ao seu.
- Conectivos e proposições compostas
  - ^ : "AND" ("e") - a sentença p^q é verdadeira se as proposições p e q forem verdadeiras.
  - v: "OR" ("ou") - a sentença p v q é verdadeira se pelo menos uma das proposições for verdadeira. Logo, a sentença será falsa somente se ambas as proposições forem falsas.
  - ~: "NOT" ("não") - representa a negação de uma proposição.
- Princípios básicos da lógica de Aristóteles
  - Princípio da identidade: todo objeto é idêntico a si mesmo.
  - Princípio da contradição: o contrário de verdadeiro é falso.
- Duas proposições são contraditórias quando uma é a negação da outra.
- Quantificadores: expressões que aparecem no início das frases matemáticas, que indicam o *universo* sobre o qual será feita a afirmação.
- Quantificador universal: $\forall$ - representa todos os elementos de um conjunto. Exemplos: **para todo**[...],todo mundo[...], todas as pessoas[...], cada pessoa[...], qualquer pessoa[...].
- Quantificador existencial: $\exists$ - faz referência a pelo menos um elemento do conjunto. Exemplos: **existe**[...], alguma pessoa[...], pelo menos uma pessoa[...].
- Ao fazer a negação de uma proposição com quantificador universal, utiliza-se um quantificador existencial e vice-versa. Exemplo:
  - p: *Todo aluno* é estudioso.
  - ~p: *Existe aluno* não estudioso.

Tabelas-verdade

- Tabela-verdade: apresenta todas as possibilidades dos valores-verdade das proposições.
- Tabela-verdade p^q:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- Tabela-verdade ~p:

p	$\sim p$
V	F
F	V

- Tabela-verdade p v q:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Equivalência lógica: duas proposições são logicamente equivalentes quando têm os mesmos valores-verdade em todos os casos possíveis. A representação é feita por p ≡ q. Exemplo: ~(p^q) ≡ ~p v ~q

LEIS DA LÓGICA

- Lei da idempotência: para qualquer proposição p, p ∧ p ≡ p; p ∨ p ≡ p.
- Lei de comutatividade: dadas duas proposições p e q quaisquer: p ∧ q ≡ q ∧ p; p ∨ q ≡ q ∨ p
- Lei da associatividade: dadas três proposições quaisquer p, q e r: (p ∧ q) ∧ r ≡ p ∧ (q ∧ r); (p ∨ q) ∨ r ≡ p ∨ (q ∨ r)
- Lei de distributividade: dadas três proposições quaisquer p, q e r: p ∨ (q ∧ r) ≡ (p ∨ q) ∧ (p ∨ r); p ∧ (q ∨ r) ≡ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r).
- Leis de De Morgan: para quaisquer proposições p e q, ~ (p ∨ q) ≡ ~ p ∧ ~ q; ~ (p ∧ q) ≡ ~ p ∨ ~ q.
- Leis de absorção: para duas proposições quaisquer p e q: p ∨ (p ∧ q) ≡ p; p ∧ (p ∨ q) ≡ p.

IMPLICAÇÕES OU PROPOSIÇÕES CONDICIONAIS

- Sejam p e q duas proposições, chama-se a proposição "se p, então q" de implicação, indicando uma condição (através do conectivo "se... então").
- A notação é feita p ⇒ q, sendo p chamada de hipótese e q de conclusão ou tese.
- O valor-verdade da proposição é falso somente quando p é verdadeira, e q é falsa.
- A proposição p ⇒ q é logicamente equivalente à proposição ~p v q.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \Longrightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

- Quando se troca a hipótese pela consequência, é criada uma nova proposição (q⇒p) chamada de conversão de p⇒q.
- Dada a proposição p⇒q, a proposição ~q⇒~p é chamada de contrapositiva. Ambas são logicamente equivalentes.
- O símbolo ⟺ é um conectivo bicondicional que indica "se, e somente se", ou "p é necessário e suficiente para q". A proposição p⟺q é equivalente à proposição (p⇒q)^(q⇒p). É verdadeira quando ambas as proposições têm o mesmo valor-verdade.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Tautologias

- Uma tautologia é uma proposição composta que é verdadeira independente do valor-verdade das proposições que a compõem.
- Exemplos:
  - p v ~p

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

  - (p ∧ q) ⇒ p

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Argumentação

- É formada pela junção de proposições, chamadas de premissas, e uma proposição final, chamada de conclusão.
- Para uma argumentação ser logicamente válida, é necessário que a conclusão seja uma consequência das premissas.
- Exemplo:
  - Premissas: todo homem é mortal; Sócrates é homem.
  - Conclusão: Sócrates é mortal.
- O argumento será considerado válido se todas as premissas forem verdadeiras, e assim, a conclusão também será verdadeira.
- Ou seja, um argumento com premissas p1, p2, ..., pn e conclusão c é válido sempre que p1 ^ p2 ^ ... ^ pn for verdadeira, implicando na conclusão (p1 ^ p2 ^ ... ^ pn ⇒ c).
- Argumentação através do método direto (ou *modus ponens*):
  - Premissas: p⇒q; p
  - Conclusão: q

Tabela-verdade:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

- Lei do Silogismo:
  - Premissas: p⇒q; q⇒r
  - Conclusão: p⇒r

Tabela-verdade:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V