

Chryzodes : de l'élémentaire au révolutionnaire

Colin Thibault, Colinet Victoria, Junné Jonathan, Langouche Sophie
2016

Table des matières

1 La géométrie du cercle	4
1.1 Notions d'arithmétique modulaire	4
1.1.1 Concepts élémentaires	4
1.2 Constructions dans le cercle	4
1.2.1 Le phénomène des pétales	4
1.2.2 Histoire des chryzodes	8
1.2.3 D'autres lois, d'autres phénomènes	9
1.3 Formes et figures dans le cercle	11
1.3.1 Le cas des polygones	11
2 Voyage dans les réels	16
2.1 La multiplication	16
2.1.1 La multiplication dans les rationnels	16
2.1.2 La multiplication dans les irrationnels	17
2.2 Les polynômes dans tous leurs états	18
2.2.1 Ordre 1	18
2.2.2 Ordre 2	20
2.2.3 Ordre 3	20
2.2.4 Ordre n	21
3 Les courbes enveloppes	23
3.1 Les polynômes : les pétales sous le regard de l'analyse	23
3.1.1 Approche analytique	23
3.1.2 Les équations de la multiplication	23
4 La physique des chryzodes	26
4.1 Les harmoniques et matrices : un pas en dehors du cercle	26
4.1.1 Des tables étendues	26
4.1.2 À la base de notre fonctionnement	28
4.2 L'optique	30
4.2.1 Les caustiques	30
4.3 Les mouvements des planètes et les épicycloïdes	33
4.3.1 Les épicycloïdes	33
4.3.2 Révolution des planètes	34

5 Compléments mathématiques	37
5.1 L'analyse des fonctions de la multiplication	37
5.1.1 La cardioïde	37
5.1.2 La néphroïde	39
5.2 Les résidus quadratiques	40
5.2.1 Le chryzode final des relations quadratiques	40

Préambule

Ce travail est destiné à fournir un ensemble vaste d'informations concernant la géométrie du cercle, en particulier les chryzodes selon une question très spécifique : *Comment peut-on allier la géométrie aux opérations élémentaires telles que l'addition ou la multiplication ?*

Il constitue un point de départ pour la recherche mathématique sur ces différentes courbes dans le cadre des études des opérations arithmétiques au travers de la géométrie. Il s'agit de pistes pour les lecteurs intéressés qui désirent mener une recherche dans le but de découvrir de nouveaux résultats sur cette branche de la géométrie. En tant qu'élèves de rhétorique, nous sommes cependant tout à fait conscients de l'étendue du sujet et donc de la complexité et des compétences que requiert une étude poussée de cette thématique d'un point de vue formel...

Notre travail se veut tout de même innovant, et suit l'esprit de la recherche mathématique tout en donnant un sens physique par des applications concrètes de cette géométrie ainsi qu'un sens historique montrant l'évolution ou plutôt l'échafaudage de cette thématique par les grands mathématiciens.

À la découverte des chryzodes

1 La géométrie du cercle

1.1 Notions d'arithmétique modulaire

1.1.1 Concepts élémentaires

1.1.1.1 Définition “L’arithmétique modulaire est une branche moderne des mathématiques qui utilise un espace fini de nombres entiers”. Si nous voulons représenter des nombres à virgules (ou nombres flottants), nous devrons envisager par la suite comment étendre l’arithmétique modulaire. Mais avant d’envisager de pareils cas, essayons de comprendre de quoi il s’agit. Le modulo est un rapport qui s’applique à n’importe quel nombre suivant la division euclidienne à laquelle on prend le reste. Dans l’arithmétique modulaire, on ne parle pas d’égalités mais de congruence modulo un nombre m et qui se note usuellement $a \equiv b \pmod{m}$. Par exemple,

$$19 \equiv 3 \pmod{8}$$

Le module valant 8 correspond à un cercle modulaire divisé en 8 parties identiques de 0 à 7, et ce par construction de 8 points équidistants. Le nombre 19 sera dès lors placé sur à la position 3, puisqu’il aura fallu effectuer 2 tours complets de cercle pour arriver à 16 et ensuite compter les 3 points restants.

1.1.1.2 Applications L’arithmétique modulaire permet d’étudier des questions très théoriques comme les nombres premiers de Mersenne ou les résidus quadratiques¹ mais elle aussi utile dans la vie quotidienne. Le système d’horloge actuelle est une des nombreuses applications de l’arithmétique modulaire. On ne lit les heures qu’entre 0 et 11 sur le cadran, et pourtant nous parlons de 14, 15 ou 16 h. C’est parce que ces heures sont modulo 12, ce qui permet d’économiser de la place pour les minutes modulo 60. Cette idée de cercle divisé en un nombre d’heures est similaire au cercle modulaire qui est la base de la géométrie du cercle.

1.2 Constructions dans le cercle

1.2.1 Le phénomène des pétales

1.2.1.1 Définition Un chryzode est une figure obtenue par un ensemble de points équidistants reliés entre-eux dans un cercle préalablement gradué. Nous retrouvons dès lors notre cercle modulaire. Ce chryzode est caractérisé par son module (nombre d’intervalles divisant le cercle) et une loi mathématique (opération arithmétique déterminée par une suite, une fonction, relation entre nombres de même famille, etc) qui est souvent appelée la clef du chryzode.

1. Les résidus quadratiques sont utilisés dans la cryptographie notamment dans le *problème de la résiduosité quadratique*. Ce point est repris dans l’annexe.

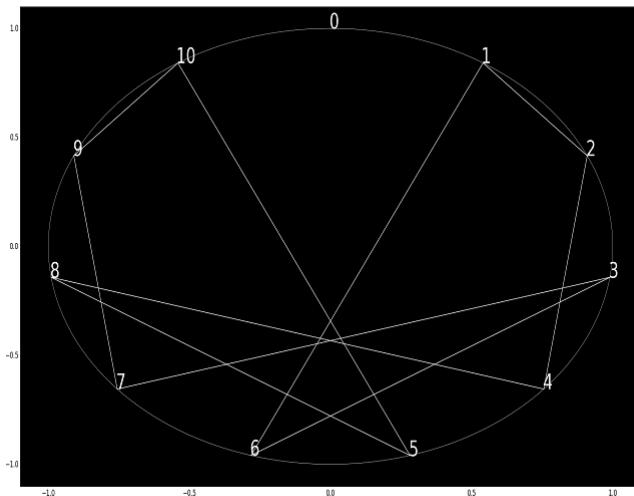
1.2.1.2 Notation Dans le cadre d'une simple loi par exemple une suite arithmétique S_A pour un cercle de module m , on note ce chryzode

$$C_{S_A}^m$$

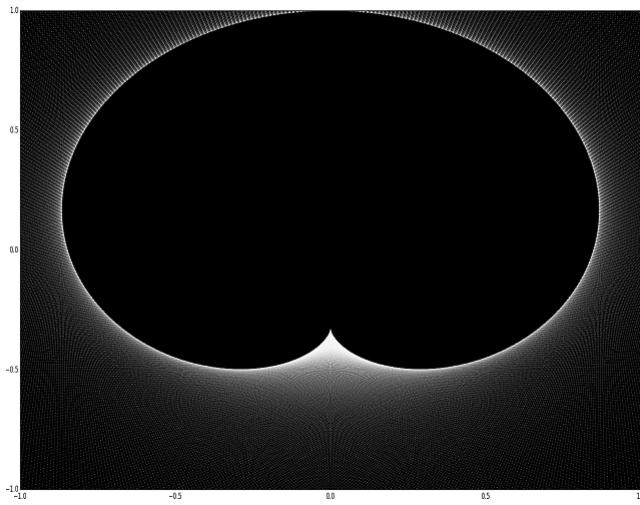
1.2.1.3 Les tables de multiplication Nous pouvons construire la table de 2 pour un module de 11

n	$2n$	$2n \pmod{11}$
1	2	2
2	4	4
3	6	6
4	8	8
5	10	10
6	12	1
7	14	3
8	16	5
9	18	7
10	20	9
11	22	0
\vdots	\vdots	\vdots

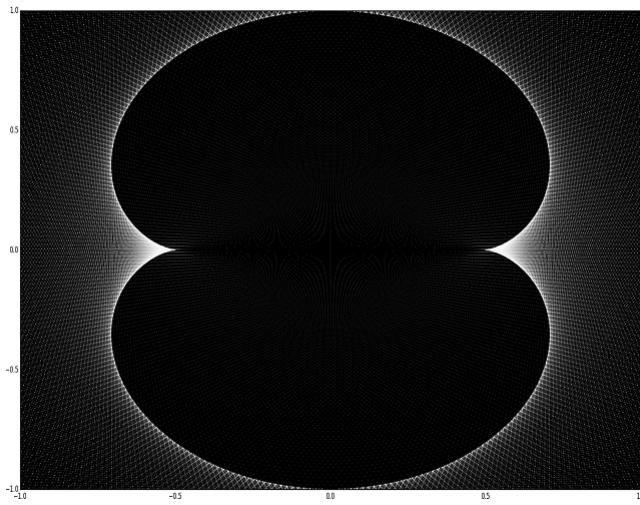
Le chryzode est construit selon les vecteurs reliant les points du cercle à l'application $2n \pmod{11}$. Autrement dit, le point 1 sera relié au 2, le 2 au 4, le 3 au 6 et ainsi de suite. La figure engendrée suivant ces vecteurs est la suivante.

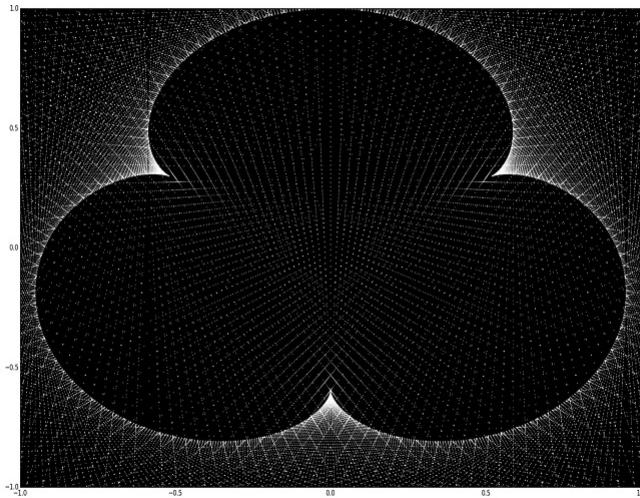


Évidemment, nous pouvons augmenter le module tout en gardant la même clef. Seulement, l'image risque de ne pas être interprétable. C'est pour cela que lorsque le module est très grand, on ne garde que les intersections des vecteurs. Pour notre chryzode, on le note $C_{\times 2}^{m \rightarrow \infty}$.



La figure générée par cette clef est une cardioïde. Maintenant que nous nous sommes lancés dans l'exploration de la construction dans le cercle modulaire, nous pouvons continuer en changeant la clef et voir ce que ces nouvelles figures nous réservent.





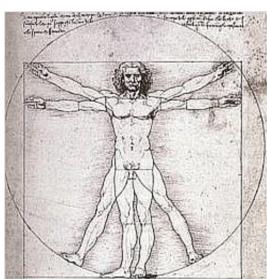
Le chryzode dont la clef vaut 3, c'est à dire où l'on relie chaque nombre au résultat de sa multiplication par 3, est une néphroïde qui possède 2 pétales, alors qu'une clef de 4 engendre 3 pétales. Quels sont les règles qui unissent ces courbes et qui forment des pétales de manières successives ? L'étude des chryzodes permettra de comprendre tous ces aspects étonnantes de la construction de figures dans le cercle². Ces figures en tant que courbes enveloppes sont étudiées dans la partie recherche.

2. L'étude des fonctions de la cardioïde et de la néphroïde sont reprises dans l'annexe.

1.2.2 Histoire des chryzodes

1.2.2.1 L'utilisation du cercle pour représenter les nombres Platon avait déjà utilisé ce concept dans ses ouvrages car en effet, ce procédé permet de rendre compte et de décrire de nombreux objets mathématiques, que sont les suites numériques ou les équations algébriques. Les bâtisseurs de cathédrales, au Moyen-âge, semblaient également recourir au cercle pour représenter les nombres dans leur plans.

En peinture, ce procédé connut pareillement son heure de gloire, notamment lors de la Renaissance. L'un des exemples les plus connus est le célèbre "Homme de Vitruve" de Léonard de Vinci où il utilise le cercle pour représenter les proportions de l'être humain qui, selon lui, est la plus grande création de Dieu.



Le cercle gradué est en outre très présent dans les œuvres de Albrecht Durer, artiste peintre, sculpteur et mathématicien (1471-1528). Sa gravure d'Adam et Ève fut par exemple préparée par un faisceau de droites et de cercles.



Par ailleurs, Durer est l'auteur du traité "Instructions pour la mesure à la règle et au compas" dans lequel il développe notamment la spirale d'Archimète, la spirale logarithmique, l'épicycloïde, la conchoïde, la quadrature du cercle, etc.

1.2.2.2 Apparition et utilité des chryzodes Ce qui fait la popularité des chryzodes et la fascination à leur égard, c'est certainement la simplicité enfantine de l'idée de base - relier différents points d'un cercle - et l'étonnant esthétisme des résultats ainsi obtenus. En effet, ce processus permet de créer des figures et des rosaces surprenantes, en partant seulement d'un cercle gradué dans lequel sont représentées par des lignes les suites de nombres issus d'opérations arithmétiques telles que l'addition, la multiplication, etc.

Les chryzodes permettent donc d'étonnantes réalisations en art, ce qui rejoint l'idéal des mathématiques antiques à savoir, le mariage entre proportion et beauté ou encore l'harmonie et l'organisation à la place du chaos, du désordre et du hasard.

Par ailleurs, les chryzodes sont utiles en géométrie analytique pour représenter un processus ou une transformation, mais aussi lorsqu'il s'agit de représenter des phénomènes physiques de nature périodique ou ondulatoire (ex. : par un champ d'ondes lors de la diffraction des cristaux aux rayons X).

1.2.3 D'autres lois, d'autres phénomènes

1.2.3.1 Voyage dans les inverses Un des grands résultats sur les nombres premiers (nombres possédant exactement 2 diviseurs - 2, 3, 5, 7, 11, ...) est le petit théorème de Fermat, qui s'énonce ainsi : “*Si p est un nombre premier et si a est un entier premier avec p , alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ et $a^{p-2} \equiv 1/a \pmod{p}$* ”.

Le nombre $1/a$ représente bien l'inverse modulaire et non une fraction, il s'agit donc d'un nombre entier qui partage des propriétés avec a , le nombre initial (notamment $a \cdot 1/a \equiv 1 \pmod{b}$).

Nous pouvons dès lors appliquer ce théorème au cas des chryzodes. Deux chryzodes sont dits inverses l'un de l'autre s'ils génèrent des figures identiques. Nous observons dès lors que le chryzode $C_{\times 2}^{23}$ est inverse du chryzode $C_{\times 12}^{23}$ (on vérifie que $2^{22} - 1 \equiv 0 \pmod{23}$: 4194303 modulo 23 et $2^{21} \equiv 12 \pmod{23}$: 2097152 modulo 23 avec 23 étant un nombre premier). Pour caractériser ces chryzodes inverses, suivons les vecteurs générés par les suite géométriques S_G de raisons 2 et 12.

n	$n \pmod{23}$	$2n$	$2n \pmod{23}$
1	1	2	2
2	2	4	4
2^2	4	2^3	8
2^3	8	2^4	16
2^4	16	2^5	9
2^5	9	2^6	18
2^6	18	2^7	13
2^7	13	2^8	3
2^8	3	2^9	6
2^9	6	2^{10}	12
2^{10}	12	2^{11}	1
2^{11}	1	2^{12}	2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

La période est 1, 2, 4, 8, 16, 9, 18, 13, 3, 6, 12. Il s'agit des chemins des vecteurs au travers du chryzode. Maintenant, comparons-les à ceux générés par la raison 12 afin de comprendre ce qui se cache derrière les inverses modulaires.

n	$n \pmod{23}$	$12n$	$12n \pmod{23}$
1	1	12	12
12	12	12^2	6
12^2	6	12^3	3
12^3	3	12^4	13
12^4	13	12^5	18
12^5	18	12^6	9
12^6	9	12^7	16
12^7	16	12^8	8
12^8	8	12^9	4
12^9	4	12^{10}	2
12^{10}	2	12^{11}	1
12^{11}	1	12^{12}	12
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

La période est 12, 6, 3, 13, 18, 9, 16, 8, 4, 2, 1. Les chemins des vecteurs des tables de 2 et 12 sont donc bien inverses et engendreront les mêmes figures.

1.2.3.2 La rencontre avec les quotients Les chryzodes quotients sont générées par les vecteurs reliant les parties décimales d'un quotient (la clef est donc la suite des parties décimales). Le module de ceux-ci correspond au nombre de chiffres de la base employée pour représenter cette fraction notée n_b auquel on retire 1. Ils sont notés $C_{SQ}^{n_b-1}$. Évidemment, chaque fraction possède une période dans sa partie décimale : période utilisée pour ce chryzode. Le quotient $1/13 = 0,0769230769230\dots$ forme donc un chryzode dont on relie le 7 au 6, le 6 au 9, le 9 au 2, etc. Libre choix au lecteur de réaliser un chryzode pour un tout autre quotient avec une période bien plus longue.

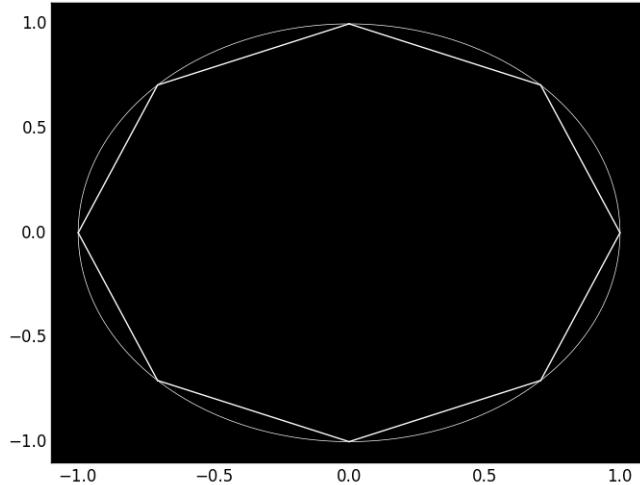
1.3 Formes et figures dans le cercle

1.3.1 Le cas des polygones

1.3.1.1 Des chryzodes en addition L'idée est de relier les points selon une addition dans un module donné. Imaginons que nous relions simplement des points consécutifs, nous formons alors des polygones réguliers dont le nombre de côtés vaut le module (un exemple pratique de construction selon cette méthode est l'hexagone à la règle et au compas). Prenons les chryzodes C_{+1}^8 et C_{+7}^8

n	$n \pmod{8}$	$n + 1 \pmod{8}$	$n + 7 \pmod{8}$	
1	1	2	0	
2	2	3	1	
3	3	4	2	
4	4	5	3	
5	5	6	4	
6	6	7	5	
7	7	0	6	
8	0	1	7	
:	:	:	:	

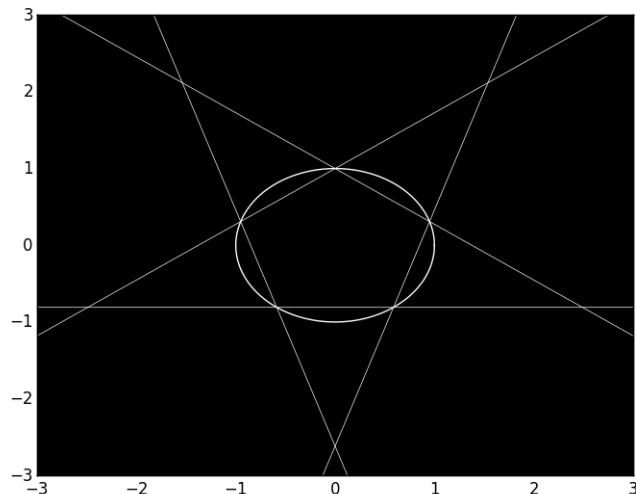
On obtient donc les mêmes chryzodes de période $0 \dots 7$ qui forment un octogone régulier.



Au final, tout polygone régulier à c cotés peut être formé par le chryzode C_{+1}^c ainsi que par le chryzode $C_{+(c-1)}^c$. On peut également former des polygones étoilés avec une addition par une autre clef que $+1$ ou $+(c-1)$. Évidemment, si le module c est pair, une clef addition par $c/2$ ne fera que diviser le cercle en c parties égales. Notre octogone peut être remplacé par un octogramme ou de manière plus générale par un polygone étoilé avec des angles saillants ($\alpha \in]0, \pi]$) et des angles rentrants ($\alpha \in [\pi, 2\pi]$) en alternance.

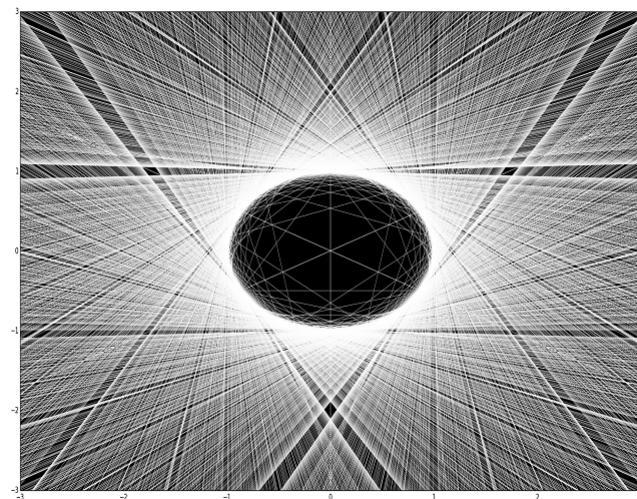
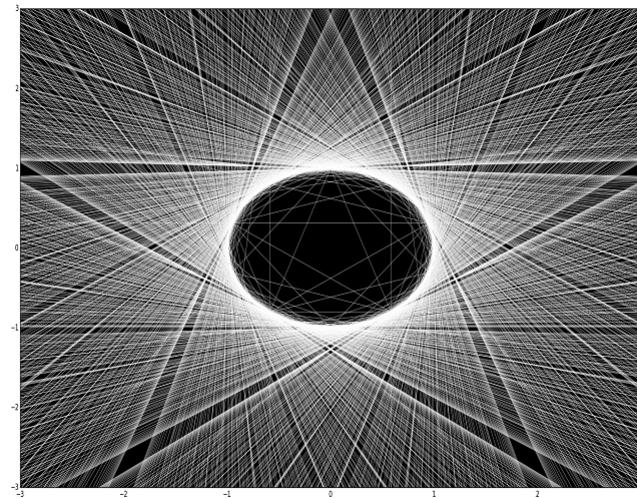
1.3.1.2 Les étoiles par faisceaux de droites Il est plus intéressant d'explorer les formes générées en dehors du cercle grâce aux lignes droites qui relient les points. Prenons le cas particulier d'un pentagone régulier formé par le chryzode C_{+1}^5 . On forme ainsi un pentagone régulier inscrit et également une étoile à 5 branches externes au cercle aussi appelée pentagramme. Les chryzodes addition par +1 forment donc également des polygones étoilés mais en dehors du cercle.

n	$n \pmod{5}$	$n + 1$	$n + 1 \pmod{5}$
1	1	2	2
2	2	3	3
3	3	4	4
4	4	5	0
5	5	6	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots



Afin d'explorer les propriétés de chryzodes de même clefs mais de modules différents, nous pouvons superposer ces chryzodes et observer leurs similitudes ou leurs différences³.

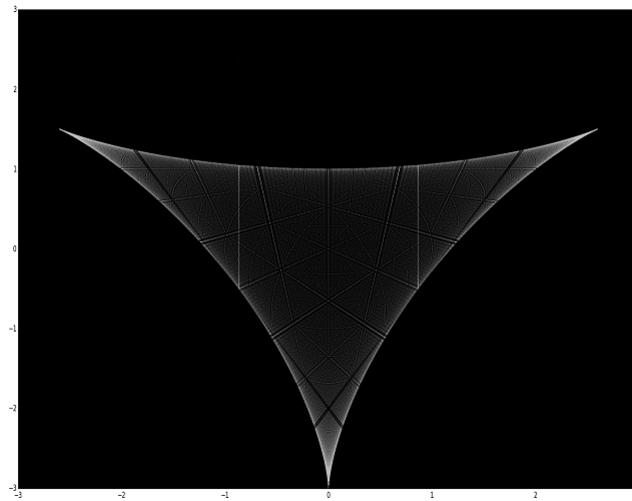
3. Ce procédé s'appelle la superposition des harmoniques et est repris dans la partie des applications physiques au paragraphe 4.1.1.1.



Les chryzodes des additions respectivement par 5 et par 3 montrent bien ces polygones externes au cercle selon des faisceaux de droites. Les chryzodes ont donc des zones de convergence pour une même clef.

1.3.1.3 Quand les figures sortent du cercle Les pentagrammes formés par les chryzodes addition sont les zones de convergence de nouveaux chryzodes. Notre parcours nous a montré les différentes représentations que l'on peut retrouver dans la géométrie du cercle au travers de la multiplication, des quotients, des inverses et de l'addition. Mais, pour clôturer cette première partie sur la découverte des chryzodes, il faut entrer dans la partie négative des nombres, multiplier par un nombre négatif ($C_{\times -n}^m$). Prenons les superpositions des chryzodes multiplications par -2 . Un problème immédiat se pose : comment prendre le modulo d'un nombre négatif n ? Sur un cercle modulaire de module m , -1 correspond à $m-1$, -2 à $m-2$ et ainsi de suite. Il suffit d'ajouter le reste de la division euclidienne de n par m au module m . Nous pouvons désormais construire notre tableau de valeurs.

n	$-2n$	$-2n \pmod{m}$
1	-2	$m-2$
2	-4	$m-4$
3	-6	$m-6$
4	-8	$m-8$
\vdots	\vdots	\vdots
$m/2$	$-m$	0
$m/2 + 1$	$-m-2$	$m-2$
$m/2 + 2$	$-m-4$	$m-4$
\vdots	\vdots	\vdots



On remarque que la table de multiplication par -2 possède 3 points de rebroussements externes et forme une deltoïde alors que la table de multiplication par 2 formant la cardioïde possède 1 point de rebroussement. Il sera envisageable par la suite de donner une réponse à cette question grâce à l'analyse mathématique⁴. Les chryzodes ayant des points de rebroussements externes au cercle sont appelés polychryzodes et se forment avec des tables de multiplication négatives. Si ces figures ont reçu un tel nom, c'est par leurs liens étroits avec les polygones étoilés. Ces figures partagent les mêmes faisceaux de droites que les superpositions des chryzodes addition.

Ainsi s'achève ici notre voyage à la découverte des opérations élémentaires au travers de la géométrie du cercle sous tous ses aspects majeurs. La prochaine partie se veut plus formelle et présente le fruit d'un travail de recherche mathématique et de questionnement sur l'aspect continu des chryzodes ainsi qu'une mise en lien avec le monde physique et les applications pratiques.

4. Cette question est développée dans la partie des courbes enveloppes au paragraphe 3.1.2.2.

À la Recherche de nouveaux chryzodes

2 Voyage dans les réels

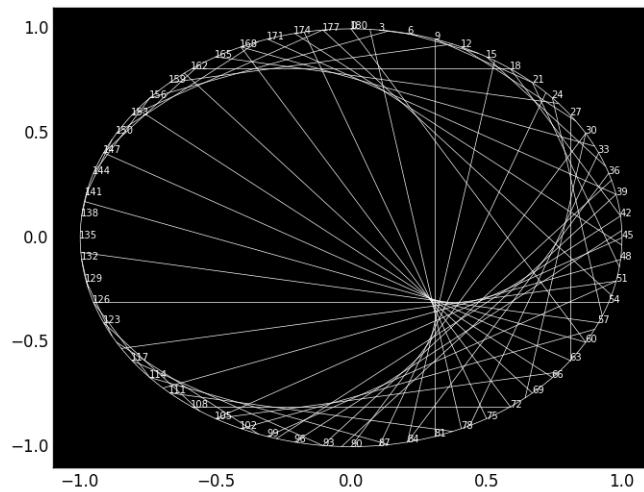
2.1 La multiplication

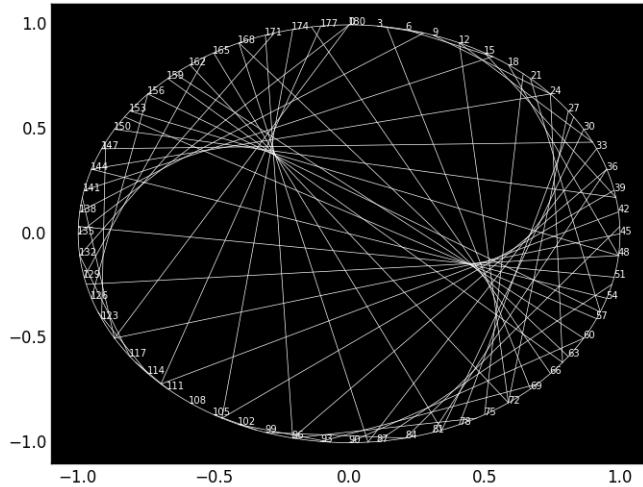
2.1.1 La multiplication dans les rationnels

2.1.1.1 Construction Nous ne travaillons plus dans les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ - un des ensembles des nombres entiers - mais dans les anneaux $\mathbb{Q}/n\mathbb{Q}$, permettant d'étendre le modulo aux rationnels et ainsi dépasser le cadre des entiers. Une question primordiale se pose pour la construction du chryzode. Comment multiplier par un nombre rationnel, ici le quotient n_1/n_2 , dans un cercle de m points équidistants ? En considérant un cercle à $m \cdot n_2$ points équidistants que nous notons p_i . Le chryzode est construit selon le même processus en ne créant des vecteurs que tous les n_2 points p_i . Il ne faut pas pour autant se dire que le module du cercle augmente, car même si celui-ci contient plus de points, certains points ne sont là que pour apporter une subdivision entre deux points consécutifs tout comme un nombre à virgule vient apporter une précision entre deux entiers. Nous obtenons l'ensemble des vecteurs

$$P = \{\overrightarrow{p_i, p_{(i \cdot (n_1/n_2)) \pmod{n_2 \cdot m}}}\} \quad \forall i \equiv 0 \pmod{n_2} \quad (1)$$

2.1.1.2 Observations Représentons la table de $7/3$ et $8/3 \pmod{60}$ pour comprendre le passage entre la cardioïde ($C_{\times 2}^{m \rightarrow \infty}$) et la néphroïde ($C_{\times 3}^{m \rightarrow \infty}$).





Au fur et à mesure que le rationnel s'approche de l'entier supérieur, le chryzode obtenu forme des pétales identiques. Ces nouveaux chryzodes permettent de comprendre l'ajout systématique d'un pétale en augmentant la table de multiplication d'une unité.

2.1.2 La multiplication dans les irrationnels

2.1.2.1 Construction L'évolution du chryzode est donc continue entre un entier n et l'entier suivant $n + 1$ si l'on admet qu'il est possible de construire un chryzode dans les anneaux $\mathbb{R}/n\mathbb{R}$. Un irrationnel r peut être encadré par des rationnels q_n . Il suffit de ne considérer qu'une des deux bornes rationnelles de l'encadrement pour ramener le problème au cas des rationnels.

2.1.2.2 Le développement en fraction continue Cette représentation des réels permet d'obtenir des quotients s'approchant de r .

$$r = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}} = [a_0, a_1, a_2, \dots] \quad (2)$$

Ainsi, il est possible de construire un quotient limite aux réels formé par tous les termes de l'ensemble (2).

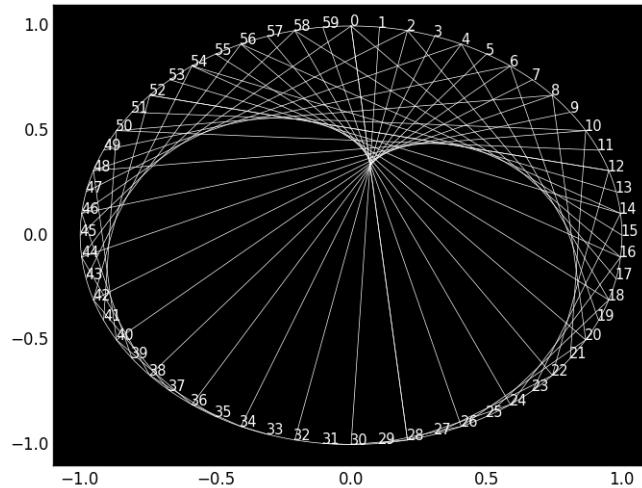
2.1.2.3 Erreurs et approximations Notre recherche de continuité dans le chryzode nous fait voyager le long de la droite des réels. Il faut garder à l'esprit qu'il s'agit d'un infini potentiel et non actuel. Une machine ne sait pas comprendre un irrationnel et encore moins le représenter. Tout est approximation avec une précision de l'ordre de 16 chiffres significatifs par défaut après la virgule sous les machines en 64 bits (selon la norme IEE 754).

2.2 Les polynômes dans tous leurs états

2.2.1 Ordre 1

2.2.1.1 Le terme indépendant L'argument de continuité évoqué dans la recherche de l'évolution du chryzode peut également être utilisé pour appliquer une transformation continue telle que la fonction affine $P_1 \equiv y = ax + b$. Pour un b non entier, il faut considérer le dénominateur commun entre le quotient q représentant a , ou sa fraction continue si a est irrationnel, et le terme indépendant b .

2.2.1.2 Impacts On se dit intuitivement que l'application affine sur le chryzode ne fait que décaler tous ses éléments car chaque élément aura été déplacé d'un même nombre. Afin de confronter nos idées à la réalité, prenons arbitrairement l'application $(2n + 28) \pmod{60}$



Pour nous convaincre qu'il s'agit de la même figure ayant subi une rotation, nous allons numérotter le cercle à partir de b selon la bijection

$$b \rightarrow (b - 32) \pmod{60}.$$

$$32 \rightarrow 0$$

$$33 \rightarrow 1$$

⋮

$$59 \rightarrow 27$$

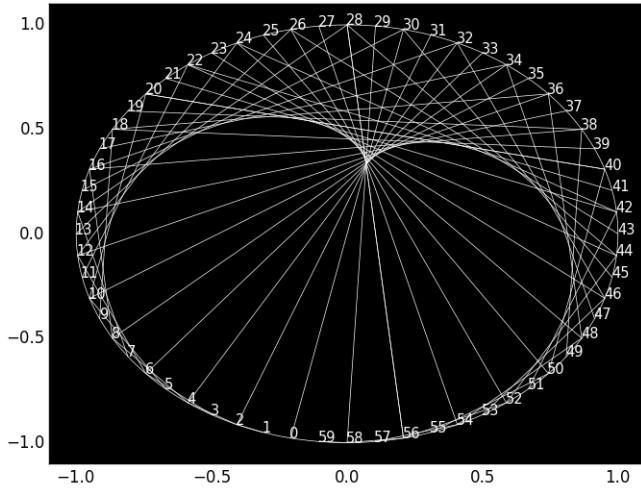
$$0 \rightarrow 28$$

$$1 \rightarrow 29$$

⋮

$$30 \rightarrow 58$$

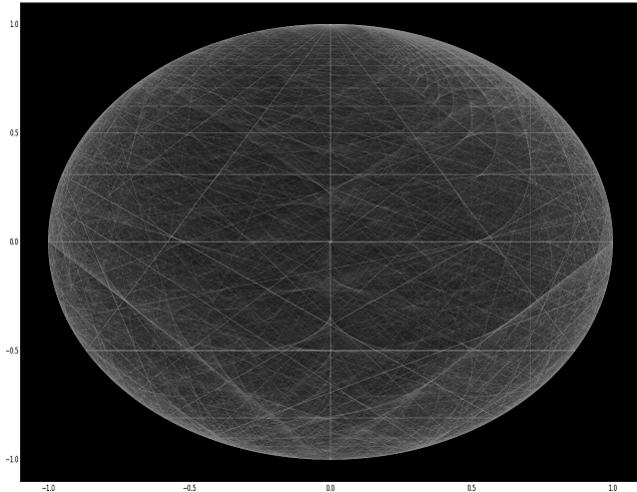
$$31 \rightarrow 59$$



Nous obtenons les mêmes vecteurs et la figure obtenue n'est donc rien d'autre qu'une cardioïde ayant subi une rotation d'un angle α . Vu que l'on a remplacé 32 par 0, $\alpha = 2\pi \cdot 28/60$ (l'angle orienté étant dans le sens anti horloger avec 28 complémentaire de 32 pour un module de 60). Alors que l'on utilise les matrices de rotation pour appliquer une rotation dans les courbes paramétrées pour un angle α donné, les chryzodes disposent d'une rotation bien moins complexe à mettre en place : l'addition par k tel que $\alpha = 2\pi \cdot k/m$ pour un module m .

2.2.2 Ordre 2

2.2.2.1 L'élévation au carré Le chryzode est construit selon l'application $n^2 \pmod{m}$ pour un cercle de m points. Considérons cette application pour n'importe quel m entier. Il s'agit donc d'une superposition de chryzodes.

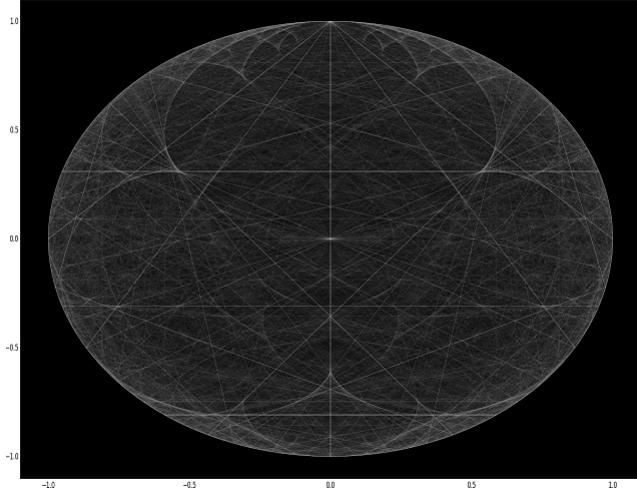


On peut se demander si la figure présente des symétries quelconques. Comment expliquer tous ces triangles s'éloignant à l'infini dont les bases sont parallèles et comment expliquer tous ces points de rebroussement au nord et au sud du chryzode ?

2.2.2.2 L'application d'un second degré Soit le polynôme de la forme $P_2 \equiv y = ax^2 + bx + c$. À la transformation affine $bx + c$ s'ajoute l'élévation au carré. Que se passe-t-il si l'on prend une application dont la partie affine est directement dépendante de n et m comme $(n^2 + mn + m) \pmod{m}$? Il suffit de factoriser la partie affine $m \cdot (n+1)$. Or, nous savons que $x \equiv x + km \pmod{m}$. Nous obtenons donc exactement la même figure.

2.2.3 Ordre 3

2.2.3.1 L'élévation au cube Si l'on suit le même procédé mais avec l'application $n^3 \pmod{m}$, le chryzode formé suivra-t-il également cette fréquence de points de rebroussement ? Nous avions vu qu'avec les chryzodes d'ordre 1, les variations étaient continues au fur et à mesure que n augmentait. Seulement, ces transformations étaient ordonnées alors que les ordres de chryzodes supérieurs n'offrent pas la même continuité comme nous aurions pu le penser en se basant sur l'ordre 1.

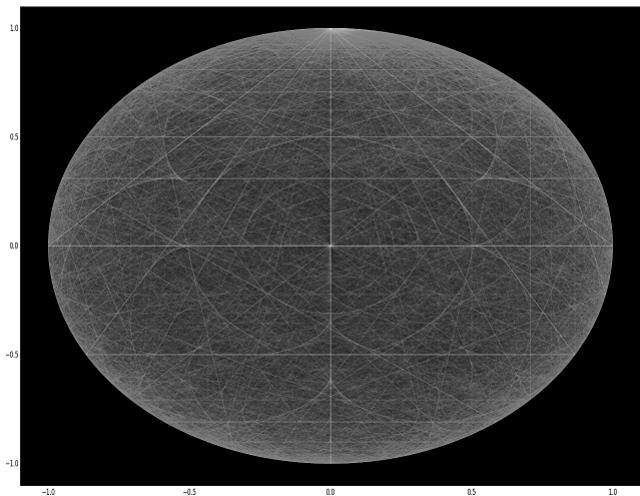


Celui-ci est parfaitement symétrique par rapport à l'axe y et possède également un enchevêtrement de points de rebroussement qui s'éloignent à l'infini. Le chrysode n'est pas une fractale à proprement parler car malgré le caractère cyclique des points de rebroussement, ceux-ci sont accompagnés de droites qui dépendent directement de n . Par contre, on voit apparaître la table de multiplication de 4.

2.2.3.2 L'application d'un troisième degré Soit le polynôme de la forme $P_3 \equiv y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. À l'application d'un second degré s'ajoute une élévation au cube. Il est difficile de se représenter mentalement une application d'ordre 3. Prenons une application de la forme $(n^3 + k \cdot (n^2 + n + 1)) \pmod{m}$. Nous pouvons nous dire que la figure restera similaire, légèrement déformée, mais lorsque que n tend vers l'infini, le second degré devient asymptotiquement négligeable.

2.2.4 Ordre n

2.2.4.1 Observations Le phénomène cyclique des points de rebroussement continue. Il se forme une infinité de cercles concentriques autour de l'origine des axes. Les courbes enveloppes se chevauchent dans ce qui semble être une symétrie suivant l'axe Y . Les coordonnées de la pétale de la cardioïde centrale semble coïncider avec ceux de la cardioïde obtenue par la table de 2.



2.2.4.2 Exploration Ces différents chryzodes permettent donc d'observer des liens entre les puissances et les multiplications dans le cercle. Il s'agit d'une extension de la géométrie euclidienne qui met en relation les propriétés arithmétiques. Cette méthode montre bien le caractère cyclique des puissances d'un ordre donné et est une porte d'entrée pour la recherche mathématique.

3 Les courbes enveloppes

3.1 Les polynômes : les pétales sous le regard de l'analyse

3.1.1 Approche analytique

3.1.1.1 Construction Dans le cas des chryzodes, une méthode itérative est nécessaire à la création des figures attendues. Chaque vecteur obtenu par un lien donné entre deux nombres est dessiné séparément, demandant un travail titanique pour un humain et acceptable pour un ordinateur. Cette méthode a cependant des limites physiques, car elle ne peut jouer ni avec l'infiniment grand ni avec l'infiniment petit.

Une généralisation aux figures créées par les chryzodes permet une étude plus complète du phénomène.

3.1.1.2 Potentiel Cette approche permet tant de confirmer ou d'infirmier certaines de nos observations ou suggestions à la vue des phénomènes cycliques que de découvrir de nouveaux aspects liés aux figures.

3.1.2 Les équations de la multiplication

3.1.2.1 Équations paramétriques Souvenons-nous que le chryzode est formé à partir de l'ensemble P de vecteurs (1). Nous pouvons donner des coordonnées aux points formant ces vecteurs car ils appartiennent au cercle unitaire mais nous devons prendre en compte que l'on définit le zéro en haut du cercle. Par conséquent, un point p_i du cercle a comme coordonnées le couple $(\sin(\theta), \cos(\theta))$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. L'ensemble P peut donc se caractériser par les vecteurs issus des couples $p_i(\sin(\theta), \cos(\theta))$ et $p_{ni}(\sin(n\theta), \cos(n\theta))$. C'est la génération de Cremona, où la vitesse de l'angle croît d'un facteur n ($\theta \rightarrow n\theta$). Les équations paramétriques pour un paramètre t réel des droites caractérisant ces vecteurs sont données par

$$\begin{cases} x(t) = \sin(\theta) + t \cdot (\sin(n\theta) - \sin(\theta)) \\ y(t) = \cos(\theta) + t \cdot (\cos(n\theta) - \cos(\theta)) \end{cases} \quad (3)$$

En définissant ces équations paramétriques sous la forme d'une égalité vectorielle, nous pouvons déterminer le paramètre t grâce à une condition sur les équations aux dérivées partielles.

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{p}_i + t \cdot \vec{p}_i p_{ni} \\ \det\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) + t \cdot (n \cos(n\theta) - \cos(\theta)) & \sin(n\theta) - \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) - t \cdot (n \sin(n\theta) - \sin(\theta)) & \cos(n\theta) - \cos(\theta) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \cos(\theta) \cos(n\theta) - \cos^2(\theta) + tn \cdot \cos^2(n\theta) - tn \cdot \cos(\theta) \cos(n\theta) - t \cdot \cos(\theta) \cos(n\theta) \\ &\quad + \sin(\theta) \sin(n\theta) - \sin^2(\theta) + tn \cdot \sin^2(n\theta) - tn \cdot \sin(\theta) \sin(n\theta) - t \cdot \sin(\theta) \sin(n\theta) \\ &\quad + t \cdot \cos^2(\theta) + t \cdot \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

En factorisant les termes quadratiques et en appliquant la relation fondamentale ainsi que le cosinus d'une différence, nous pouvons simplifier l'équation et isoler le paramètre t afin de l'exprimer en fonction de n .

$$(1 - t - tn) \cdot (\cos(\theta) \cos(n\theta) + \sin(\theta) \sin(n\theta)) = (1 - t - tn) \cdot (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))$$

$$(1 - t - tn) \cdot (\cos(\theta - n\theta) - 1) = 0$$

$$t = \frac{1}{n+1}$$

Nous pouvons désormais remplacer le t dans les équations paramétriques (3).

$$\begin{cases} x(\theta) &= \sin(\theta) + \frac{1}{n+1} \cdot (\sin(n\theta) - \sin(\theta)) \\ y(\theta) &= \cos(\theta) + \frac{1}{n+1} \cdot (\cos(n\theta) - \cos(\theta)) \end{cases} \quad (4)$$

Représenter un chryzode revient désormais à associer à chaque angle $\theta \in [0, 2\pi[$ un point aux relations en x et en y données par les équations paramétriques. Une des premières conclusions notables de notre parcours sur la géométrie du cercle supposait que tout chryzode de la table de n admettait $n - 1$ pétales. En effet, en partant de la cardioïde formant 1 pétale, en passant par la néphroïde formant 2 pétales, il semblait acceptable de conjecturer que tout chryzode de la table de n formerait $n - 1$ pétales.

3.1.2.2 Étude de courbes Nous pouvons enfin confronter l'intuition d'ordre plus géométrique avec le regard de l'analyse, en s'intéressant notamment aux points singuliers et aux éventuelles symétries ou périodicités.

Les points singuliers des courbes paramétrées sont des points de la courbe où les vitesses instantanées en X et en Y sont nulles en même temps.

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= \frac{n}{n+1} \cdot (\cos(\theta) + \cos(n\theta)) \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot 2 \cos(\theta/2 - n\theta/2) \cos(\theta/2 + n\theta/2) \\ 0 &= \frac{n}{n+1} \cdot 2 \cos(\theta/2 - n\theta/2) \cos(\theta/2 + n\theta/2) \\ \theta_1 &= \frac{\pi + 2k\pi}{n-1}, k \in \mathbb{N} \\ \theta_2 &= \frac{\pi + 2k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(\theta) &= \frac{-n}{n+1} \cdot (\sin(\theta) + \sin(n\theta)) \\ &= \frac{-n}{n+1} \cdot 2 \cos(\theta/2 - n\theta/2) \sin(\theta/2 + n\theta/2) \\ 0 &= \frac{-n}{n+1} \cdot 2 \cos(\theta/2 - n\theta/2) \sin(\theta/2 + n\theta/2) \\ \theta_3 &= \frac{\pi + 2k\pi}{n-1}, k \in \mathbb{N} \\ \theta_4 &= \frac{2k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Nous avons bien une annulation simultanée des vitesses pour les angles θ de la forme $(\pi + 2k\pi)/(n-1)$ en commençant en $(1, 0)$. En effet, il ne s'agit que d'une rotation d'un angle $\pi/2$ en considérant le sin en X et le cos en Y . Nous devons cependant nous restreindre à $[0, 2\pi[$ afin d'effectuer un seul tour de cercle. Il est donc possible de déterminer k en fonction de n grâce à une double inégalité.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\pi + 2k\pi)/(n-1) < 2\pi \\ 0 &\leq \pi + 2k\pi < (n-1) \cdot 2\pi \\ 0 &\leq 1 + 2k < 2(n-1) \\ -1/2 &\leq k < n - 3/2 \end{aligned}$$

Sachant que k est entier, il advient que $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$. Nous avons donc bien $n-1$ points singuliers de la forme $\pi/2 + (\pi + 2k\pi)/(n-1)$. L'analyse ne fait ici que vérifier toutes les observations directes sur les chryzodes. Pour un n négatif on trouve, que le polychryzode possède $|n-1|$ points singuliers (en s'assurant d'inverser le sens des inéquations lors de la multiplication ou division par un négatif).

4 La physique des chryzodes

4.1 Les harmoniques et matrices : un pas en dehors du cercle

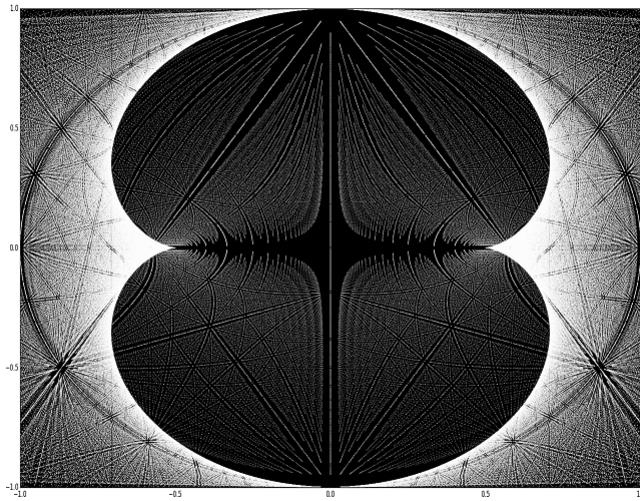
4.1.1 Des tables étendues

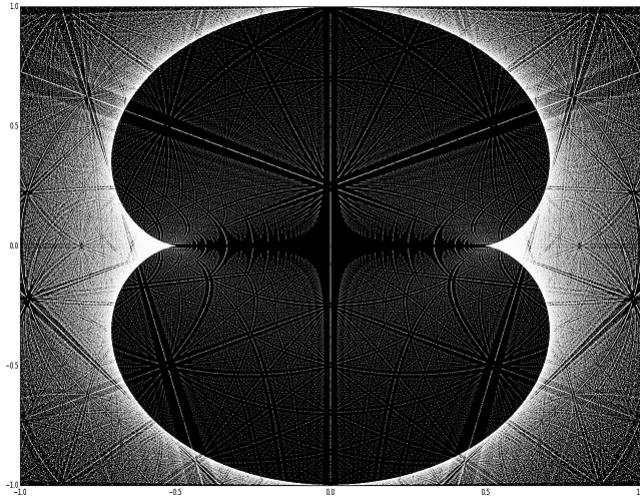
4.1.1.1 Définitions Les harmoniques de n dans les nombres km d'un chryzode sont la superposition des chryzodes de la table de n dans un cercle divisé en un nombre de points équidistants multiples de m . Les matrices d'ordre n d'un chryzode sont l'ensemble de polygones réguliers inscriptibles dans un cercle divisé en n points équidistants.

On peut se demander si la superposition d'harmoniques ou de matrices permet d'observer de nouvelles propriétés d'interactions entre nombres ainsi que de nouvelles topologies.

4.1.1.2 Application aux harmoniques de 3 dans les multiples de 3 et 7

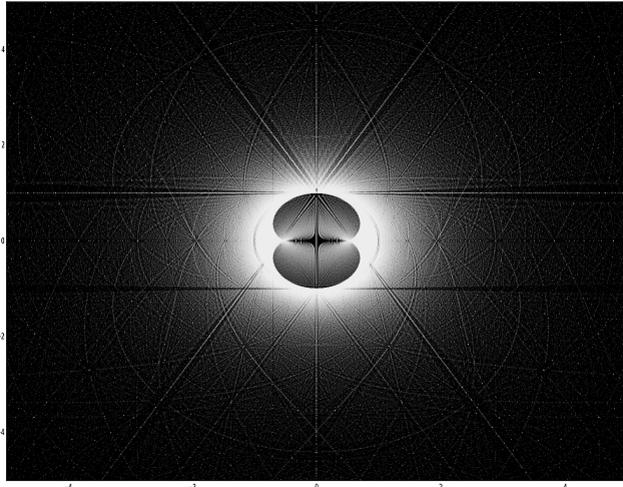
Le procédé de construction demande de réitérer la construction de chryzodes. Afin de distinguer au mieux les figures générées, nous ne considérerons que les points d'intersection des vecteurs de l'ensemble $P(1)$.





Nous pouvons aussi prolonger ces vecteurs en dehors du cercle unitaire afin d'étudier les topologies apparentes au delà du cercle.

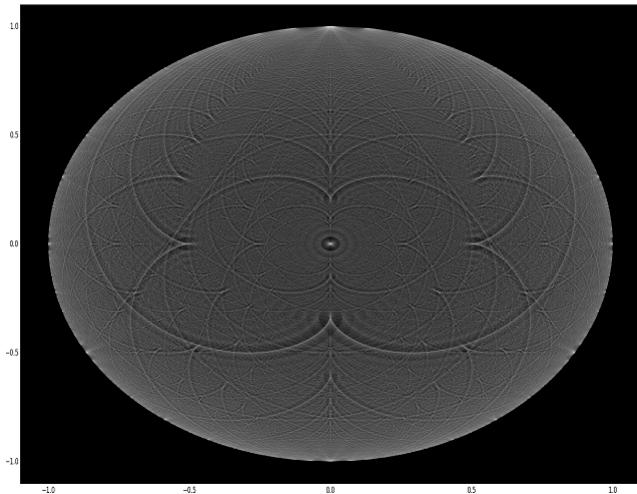
Les harmoniques permettent d'avoir une vue d'ensemble sur les chryzodes d'une même table tout en observant un caractère cyclique hors du cercle. Nous devons noter que ces figures extérieures au cercle continuent au loin au plus n tend vers l'infini. On s'aperçoit que certains faisceaux de droites apparaissent le long de points particuliers au chryzode. Ceux-ci forment les harmoniques du chryzode et définissent des figures tant esthétiques qu'utiles pour comprendre certains phénomènes vibratoires ou chimiques comme les interactions neuronales ou la nature de certaines protéines. Dans le cas des phénomènes vibratoires, les interférences et harmoniques des fréquences pour une onde suivent le même procédé que les harmoniques des chryzodes. Les faisceaux peuvent être comparés au lignes de repos dans les superpositions d'ondes de même fréquence. Or, tout comme les ondes, le chryzode continue bel et bien à l'infini au dehors du cercle unitaire avec de nouveaux faisceaux suivant les même topologies mais de plus en plus écartés (comme les interférences au loin des sources ponctuelles selon le principe de propagation des ondes de Huygens).



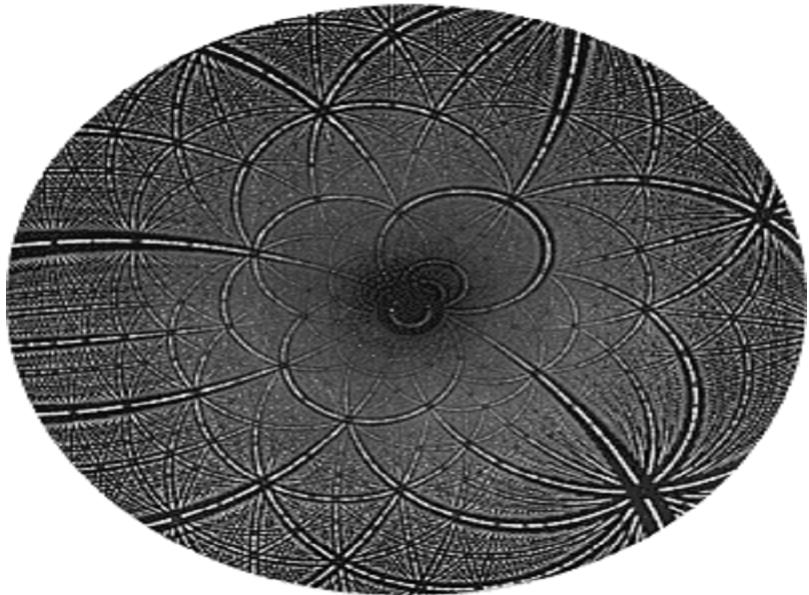
Une étude plus restreinte permet quant à elle d'analyser en profondeur les faisceaux propres au chryzode.

4.1.2 À la base de notre fonctionnement

4.1.2.1 Faisceaux au sein des molécules et du réseau neuronal Le réseau neuronal est extrêmement dense mais organisé. Les harmoniques du chryzode sont similaires du point de vue de la densité, et, tout comme le réseau neuronal, elles régissent des connections. Les harmoniques du chryzode permettent d'étudier des interactions complexes dans un ensemble dense en faisant ressortir l'information pertinente de par l'abstraction fournie avec la méthode des points d'intersection alors que les matrices du chryzode permettent d'étudier les interactions possibles entre plusieurs points discrets. Il est surprenant de voir que les différents points de rebroussement d'abscisses positives des matrices d'ordre n du chryzode coïncident avec les points de rebroussement des chryzodes d'ordre 2. Il y a donc un caractère cyclique dans les polynômes du second degré sur le cercle.



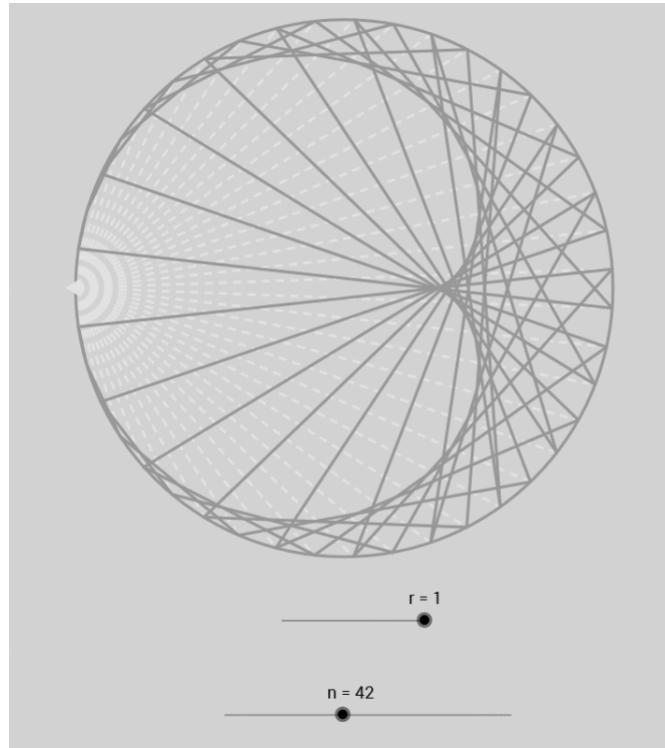
4.1.2.2 La radiocristallographie Nous pouvons observer des similitudes entre la protéine de Rubisco et les harmoniques d'un chryzode. La représentation proposée pour la protéine est la méthode de radiocristallographie. L'image est obtenue par la diffraction des rayons X sur la matière. Notons que cette diffraction n'a lieu que si la matière est cristalline d'où le nom de radiocristallographie. Les faisceaux lumineux se dispersent selon des angles spécifiques et sont la base des images formées via le diagramme de diffraction. L'image de la radiocristallographie de la protéine de Rubisco laisse présager que les harmoniques sont un outil majeur dans le décryptage de certaines molécules grâce aux formations systématiques de faisceaux.



4.2 L'optique

4.2.1 Les caustiques

4.2.1.1 Quand les rayons se réfléchissent sur les courbes Il est possible de générer des caustiques par l'intersection de faisceaux lumineux provenant de différentes sources. La cardioïde est l'enveloppe des rayons réfléchis sur un cercle pour une source lumineuse fixée sur ce même cercle, tandis que la demi-néphroïde sera générée pour une source lumineuse en dehors, au loin du cercle.



On remarque très clairement qu'une cardioïde est formée pour 42 faisceaux lumineux partant de la source et se réfléchissant le long du cercle. La loi de Snell-Descartes permet d'affirmer que l'angle réfléchi \hat{r} est égal à l'angle d'incidence \hat{i} selon la normale à la surface - ici la perpendiculaire au rayon du cercle - et peut se caractériser par la relation

$$\sin(\hat{i}) = \sin(\hat{r})$$

4.2.1.2 Histoire des caustiques L'invention des caustiques (du grec ancien *kaustikos*=brûlant) est souvent attribuée au physicien et mathématicien allemand Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (ou Tschirnhausen, l'orthographe peut varier en fonction des sources), né à Kieslingswalde en 1651 et mort à Dresde en 1708.



C'est lui qui est à l'origine de l'appellation des caustiques. Le mot vient du grec "brûlant" car les rayons étant ramassés sur la caustique en plus grande quantité qu'ailleurs peuvent y brûler si la caustique est d'une fort petite étendue. Dans les miroirs paraboliques, la caustique des rayons parallèles à l'axe est un point que l'on nomme "foyer de la parabole". Pourtant, cette rectification des caustiques étant antérieures au calcul infinitésimal, l'académie des sciences nomma un comité, composé de Cassini, Mariotte et de La Hire, chargé d'examiner ces nouvelles courbes. Et heureusement d'ailleurs, car de La Hire montre dans son "traité des épicycloïdes" que Tschirnhaus s'était bel et bien trompé dans la description de la caustique du quart de cercle - la caustique formée par les rayons réfléchis sur 1/4 de cercle qui, selon Tschirnhaus, serait égale aux 3/4 du diamètre -.

Philippe de La Hire est un mathématicien, physicien, architecte et astronome français, né en 1640 à Paris et mort dans cette même ville en 1718.



Il se consacra notamment à l'étude de l'épicycle qui faisait partie, avec le déférent, d'un modèle géométrique employé en astronomie pour expliquer les mouvements apparents des corps spatiaux tels que la Lune, le Soleil et les planètes. Élu à l'académie des sciences en 1678, il continua les travaux de son éminent confrère Christian Huygens (mathématicien, astronome et physicien néerlandais, 1629-1695) au sujet du calcul infinitésimal, de la cycloïde (courbe tracée par un point fixé d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite) et en astronomie.

Par la suite, le concept de caustique fut étudié par le marquis Guillaume François Antoine de L'Hospital, né à Paris en 1661.



Son nom est resté célèbre parmi les étudiants pour la règle qui porte son nom et qui permet de calculer la valeur de la limite d'un quotient en dérivant séparément le numérateur et le dénominateur en cas de forme d'indétermination. En 1693, il fut élu à l'académie des sciences et proposa cette même année une "méthode facile pour déterminer les points des caustiques par réfraction". Guillaume de L'Hospital mourut d'apoplexie en 1704 et ses proches, hébétés par cette mort soudaine, l'expliquèrent par une pratique excessive de la mathématique...

Enfin, il serait impossible de retracer l'histoire des caustiques sans évoquer la famille Bernoulli et plus particulièrement Jacques Bernoulli (mathématicien et physicien suisse né et mort à Bâle, 1654-1705) qui fut le professeur du marquis de L'Hospital. Lui aussi membre de l'Académie des sciences (depuis 1699), il se consacra notamment à l'étude du calcul infinitésimal, entraîné par poindre à cette époque. Il étudia par ailleurs les caustiques et en particulier les courbes associées à la parabole et aux épicycloïdes.



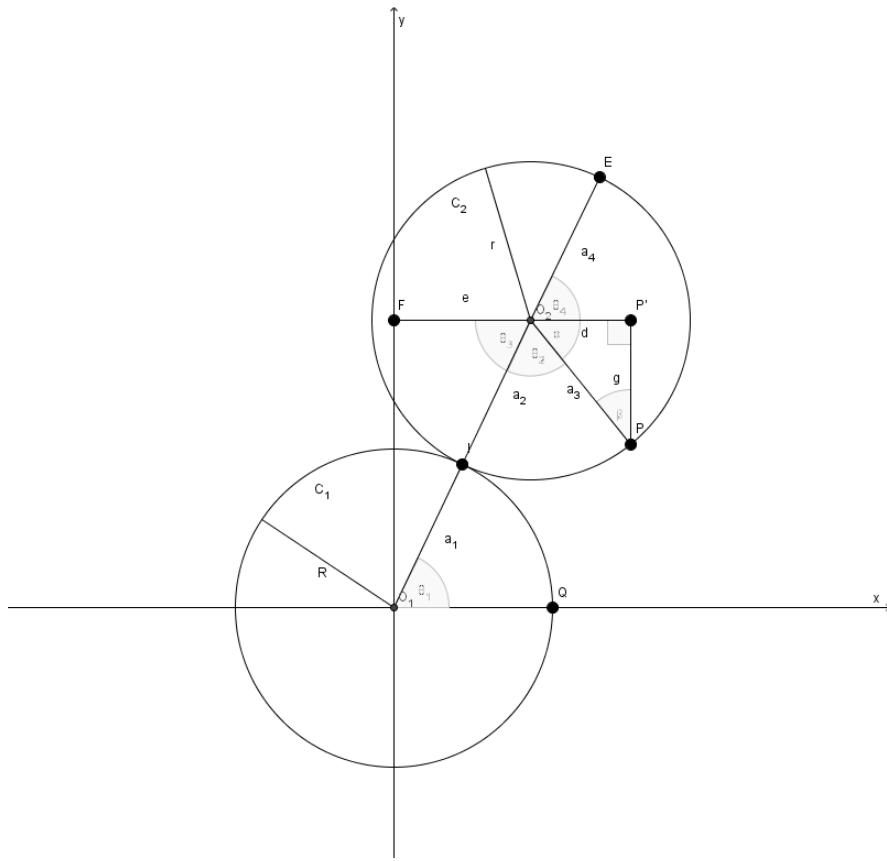
Ainsi, les physiciens et les mathématiciens dès l'Antiquité s'intéressaient déjà aux phonèmes optiques en général. On peut également constater que les caustiques, ce phénomène optique étroitement lié aux chryzodes et si simple à observer (il suffit par exemple d'exposer sa tasse de thé le matin au soleil) fascina de nombreux mathématiciens, notamment au cours des XVIIe et XVIIIe siècles et, à l'heure où les chryzodes font leur apparition sur la scène de la mathématique. Les caustiques vont sans doute encore beaucoup faire parler d'elles...

4.3 Les mouvements des planètes et les épicycloïdes

4.3.1 Les épicycloïdes

4.3.1.1 Définition La cardioïde recèle de multiples caractéristiques qui la définissent. Dans notre travail sur les chryzodes, nous nous sommes intéressés à la génération de Cremona. Mais cette courbe se distingue également par le fait qu'elle appartient à la famille des épicycloïdes. “Une épicycloïde est une courbe plane algébrique qui est la trajectoire d'un point fixé à un cercle qui roule sans glisser sur un autre cercle appelé cercle directeur”.

4.3.1.2 Études de courbes La cardioïde est une épicycloïde où les cercles ont un rayon de même longueur.



Afin de trouver l'équation de la courbe engendrée par le cercle C_2 de centre O_2 roulant sans glisser autour de C_1 centré en O_1 , il suffit de déterminer les coordonnées du centre O_2 et ensuite déterminer les distances d et g . Les angles θ_i sont tous égaux, car les deux cercles d'intersection I ont les mêmes rayons. Donc, les arcs \widehat{IQ} et \widehat{IP} , avec P point fixe du cercle qui roule partant de l'origine, engendrent les mêmes angles ($\theta_1 = \theta_2$, $\theta_1 = \theta_3$ par angles alternes-internes et $\theta_3 = \theta_4$ par angles opposés par le sommet).

$$\begin{cases} x(\theta) &= 2r \cdot \cos(\theta) \\ y(\theta) &= 2r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Il faut désormais trouver d et g (l'angle $\widehat{P' O_2 P}$: $\alpha = \pi - 2\theta$ par angle plat). En appliquant la loi des sinus au triangle $O_2 P P'$, nous pouvons déterminer ces distances avec des rapports.

$$\begin{aligned} r / \sin(\pi/2) &= d / \sin(\beta) \\ d &= r \cdot \cos(\pi - 2\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r / \sin(\pi/2) &= g / \sin(\alpha) \\ g &= r \cdot \sin(\pi - 2\theta) \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant déterminer les équations paramétriques de la courbe ($x = X_{C_2} + d, y = Y_{C_2} - g$) (et simplifier en appliquant les différences de sinus et cosinus). Remarquons que la cardioïde formée par un chryzode n'aura pas la même équation car les X et Y sont intervertis mais aussi parce qu'elle se situe à l'intérieur du cercle alors que celle-ci est externe au cercle.

$$\begin{cases} x(\theta) &= r \cdot (2 \cos(\theta) - \cos(2\theta)) \\ y(\theta) &= r \cdot (2 \sin(\theta) - \sin(2\theta)) \end{cases}$$

Il est possible d'étendre ce résultat pour des cercles ayant toutes sortes de rapport de rayons. La vitesse de l'angle θ_2 changera avec ce rapport mais les angles θ_1, θ_3 et θ_4 seront toujours égaux. $\theta_2 = R/r \cdot \theta_1$ et donc $\alpha = \pi - (1 + R/r)\theta$ par angle plat.

$$\begin{aligned} r / \sin(\pi/2) &= d / \sin(\beta) \\ d &= r \cdot \cos(\pi - (1 + R/r)\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r / \sin(\pi/2) &= g / \sin(\alpha) \\ g &= r \cdot \sin(\pi - (1 + R/r)\theta) \end{aligned}$$

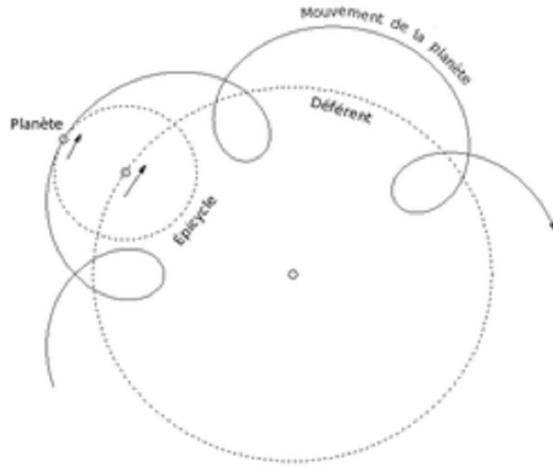
Ce qui donne les équations paramétriques d'une épicycloïde en général.

$$\begin{cases} x(\theta) &= (R + r) \cdot \cos(\theta) - r \cdot \cos((1 + R/r)\theta) \\ y(\theta) &= (R + r) \cdot \sin(\theta) - r \cdot \sin((1 + R/r)\theta) \end{cases} \quad (5)$$

4.3.2 Révolution des planètes

4.3.2.1 Le phénomène de rétrogradation Kepler montre en 1609 dans sa troisième loi que les planètes ne font pas exactement de trajectoires circulaires mais bien elliptiques avec une très faible excentricité. Cependant, cette trajectoire est souvent assimilée à un mouvement circulaire uniforme dans le cadre de la cinématique. C'est dans cette optique que nous étudions de manière simplifiée le mouvement des planètes. La rétrogradation des planètes est un phénomène de recul que décrit une planète par rapport à un observateur terrestre (le recul étant dans le sens inverse du mouvement naturel des planètes). Depuis la Terre, le mouvement des planètes est un épicycle - un cas particulier d'épicycloïdes - qui permet d'expliquer les variations de vitesses observées.

4.3.2.2 Histoire des épicycles C'est dans l'Antiquité que l'on introduit les épicycles. En effet, Aristote et Ptolémée l'ont utilisée pour décrire le mouvement des planètes dans leur modèle géocentrique et pour expliquer les rebroussements qui apparaissent dans ces trajectoires (ce qui est appelé la "rétrogradation"). Attention toutefois, ils ne parlaient pas de la courbe en elle-même mais la voyaient seulement comme la conséquence du mouvement suivant un épicycle tournant autour d'un déférant.



Il faudra attendre 1674 pour que l'astronome danois Ole Christiensen Romer (1644-1710) baptise ainsi l'épicycloïde. Par la même occasion, il proposa un engrenage dans lequel les dents sont dessinées à partir de segments d'épicycloïde, ce qui minimise la friction.

L'épicycloïde fut par la suite notamment étudiée par le médecin, mathématicien et physicien Daniel Bernoulli, le neveu de Jacques Bernoulli. Né à Groningue en 1700 et mort à Bâle en 1782, il est à l'origine de la démonstration du théorème de la double génération de la courbe, qu'il publia en 1725. C'est cette double génération de la courbe qui est à l'origine de la génération de Cremona utilisée pour les chryzodes. Il existe différents types d'épicycloïdes, baptisés chacun en fonction de leur forme, elle-même déterminée par leur nombre de "pétales". Lorsque l'épicycloïde ne compte qu'un seul pétale et a ainsi la forme d'un cœur, il s'agit d'une cardioïde, du grec "kardia", le cœur. Ce nom lui a été donné par Jean Castillon (Giovanni Francesco Salvemini de Castiglione), né en 1708 à Castiglion et mort à Berlin en 1791. Mathématicien, géomètre et même homme de lettres, il étudia la cardioïde comme un cas particulier du limaçon de Pascal, la décrivit plus en détail et la baptisa dans un traité publié en 1741. Romer, comme dit précédemment, l'étudia dans le cadre de ses recherches sur les formes les plus optimales possibles des engrenages. En 1708, la Hire détermina son périmètre par rapport au diamètre du cercle directeur et démontra ainsi que le périmètre de la cardioïde était huit fois plus élevé que le rayon de son cercle directeur. Par ailleurs, lorsque l'épicycloïde compte deux pétales et a donc la forme d'un rein, il s'agit d'une néphroïde, du grec "nephros" qui signifie "rein". Ce nom lui a été donné en 1878 par Richard Proctor (1837-1888), un astronome anglais connu notamment pour avoir réalisé l'une des premières cartes de Mars. Il est également

important de souligner que la néphroïde fut beaucoup étudiée dans le cadre des caustiques, notamment par Huygens, Trinshauren et les Bernoulli mais aussi par Durer, le marquis de l'Hospital et même par Newton qui mesura sa longueur dans son célèbre ouvrage “Philosophia Naturalis Principia Mathematica”.

Annexe

5 Compléments mathématiques

5.1 L'analyse des fonctions de la multiplication

5.1.1 La cardioïde

5.1.1.1 Étude de fonction Une cardioïde pouvant être définie comme un chryzode $C_{\times 2}^{m \rightarrow \infty}$, les équations paramétriques (4) sont

$$\begin{cases} x(\theta) = \sin(\theta) + \frac{1}{3} \cdot (\sin(2\theta) - \sin(\theta)) \\ y(\theta) = \cos(\theta) + \frac{1}{3} \cdot (\cos(2\theta) - \cos(\theta)) \end{cases}$$

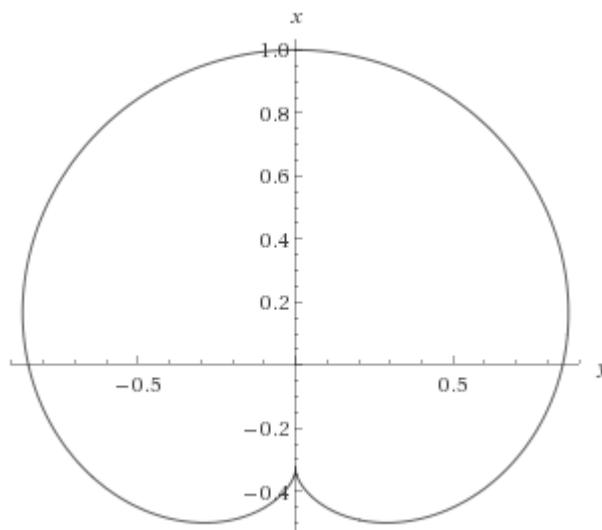
Étant donné que cette courbe est symétrique par rapport à l'axe y , il est possible de restreindre le domaine d'étude aux $x(\theta)$ et $y(\theta)$ positifs.

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= \frac{2}{3} \cdot (\cos(2\theta) + \cos(\theta)) \\ y'(\theta) &= \frac{-2}{3}(\sin(2\theta) + \sin(\theta)) \end{aligned}$$

En dressant le tableau des variations, nous pouvons déterminer les points singuliers (tout en ajoutant $\pi/2$ au résultat car le sin est en X et le cos est en Y).

θ	0	\rightarrow	$\pi/3$	\rightarrow	$2\pi/3$	\rightarrow	π
$x'(\theta)$	$4/3$	+	0	-	$-2/3$	-	0
$x(\theta)$	0	\nearrow	max	\searrow	\searrow	\searrow	min
$y'(\theta)$	0	-	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-	0	+	0
$y(\theta)$	max	\searrow	\searrow	\searrow	min	\nearrow	max

Les dérivées s'annulent simultanément avec $\theta = \pi$ auquel on rajoute $\pi/2$ ce qui donne un point de rebroussement unique en $3\pi/2$.



5.1.1.2 Les différences métriques La cardioïde classique est définie comme une épicycloïde dont les rayons des deux cercles sont de longueur R . Le vecteur limite dérivé en tout point de la courbe peut être traité comme un infinitésimal⁵ à condition de considérer des points rapprochés, autant que l'on souhaite, les uns des autres. L'intégrale définie est limite d'une somme infinie de terme qu'ici nous assimilons aux norme des vecteurs dérivés consécutifs dans un découpage régulier ou non formant ainsi les sommes de Riemann ou les sommes de Darboux. La longueur d'un arc paramétré est donc donnée par

$$\int_b^a \left\| \begin{pmatrix} x'(\theta) \\ y'(\theta) \end{pmatrix} \right\| d\theta \quad (6)$$

En remplaçant les équations générales des épicycloïdes (5), en appliquant le résultat (6) et en observant une symétrie d'axe x

$$\begin{aligned} L &= 2 \cdot \int_{\pi}^0 \sqrt{R^2(\sin(2\theta) - \sin(\theta))^2 + R^2(\cos(\theta) - \cos(2\theta))^2} d\theta \\ L &= 2R \cdot \int_{\pi}^0 \sqrt{2 - 2 \sin(\theta) \sin(2\theta) - 2 \cos(\theta) \cos(2\theta)} d\theta \\ L &= 2R \cdot \int_{\pi}^0 \sqrt{2 - 2 \cos(\theta)} d\theta \\ L &= 4R \cdot \int_{\pi}^0 \sqrt{\sin^2(\theta/2)} d\theta \\ L &= 8R \end{aligned}$$

Dans le chryzode, le point de rebroussement a une distance de $1/3$ par rapport à l'origine du repère. Dès lors, la longueur de la courbe ne sera plus $8R$ mais $8/3 \cdot R$ et son aire aura diminué d'un facteur 9.

5. Une étude rigoureuse des vecteurs limites n'est pas l'objet d'étude de ce travail. C'est pour cela que la théorie proposée n'est pas à proprement parler formelle mais bien représentative d'un point de vue cinématique.

5.1.2 La néphroïde

5.1.2.1 Étude de fonction Une néphroïde pouvant être définie comme un chryzode $C_{\times 3}^{m \rightarrow \infty}$, les équations paramétriques (4) sont

$$\begin{cases} x(\theta) = \sin(\theta) + \frac{1}{4} \cdot (\sin(3\theta) - \sin(\theta)) \\ y(\theta) = \cos(\theta) + \frac{1}{4} \cdot (\cos(3\theta) - \cos(\theta)) \end{cases}$$

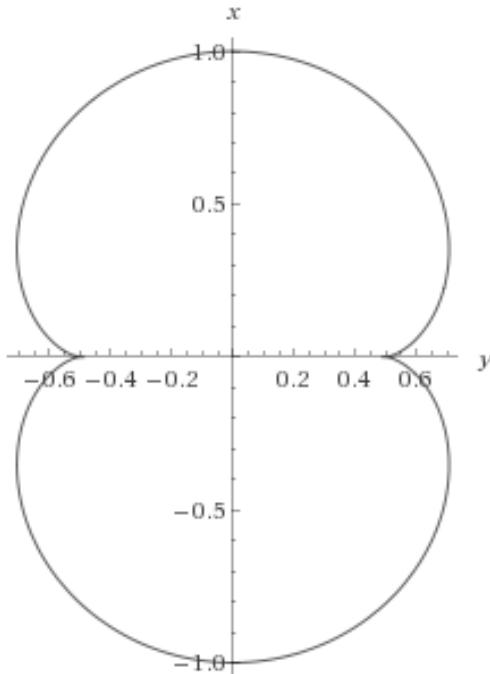
Étant donné que cette courbe est symétrique par rapport à l'axe x et y , il est possible de restreindre le domaine d'étude aux $x(\theta)$ et $y(\theta)$ dans le premier quadrant.

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= \frac{3}{4} \cdot (\cos(3\theta) + \cos(\theta)) \\ y'(\theta) &= \frac{-3}{4} (\sin(3\theta) + \sin(\theta)) \end{aligned}$$

En dressant le tableau des variations, nous pouvons déterminer les points singuliers (tout en ajoutant $\pi/2$ au résultat car le sin est en X et le cos est en Y).

θ	0	\rightarrow	$\pi/4$	\rightarrow	$\pi/2$
$x'(\theta)$	3/2	+	0	-	0
$x(\theta)$	\nearrow	\nearrow	max	\searrow	min
$y'(\theta)$	0	-	-	-	0
$y(\theta)$	max	\searrow	\searrow	\searrow	min

Les dérivées s'annulent simultanément avec $\theta = \pi/2$ auquel on rajoute $\pi/2$ ce qui donne 2 points de rebroussements en 0 et en π .



5.1.2.2 Du point de vue de l'optique La demi-néphroïde est la courbe enveloppe des rayons lumineux réfléchis sur un cercle pour une source lumineuse au loin. On comprend directement que pour que la vitesse d'angle triple comme c'est le cas du chryzode via la génération de Cremona ($\theta \rightarrow 3\theta$), la source doit être la plus éloignée possible du cercle. Dès lors, les rayons du soleil par exemple, sont un faisceau de droites parallèles et c'est pour cela que la demi-néphroïde apparaît en tant que caustique dans la vie quotidienne.

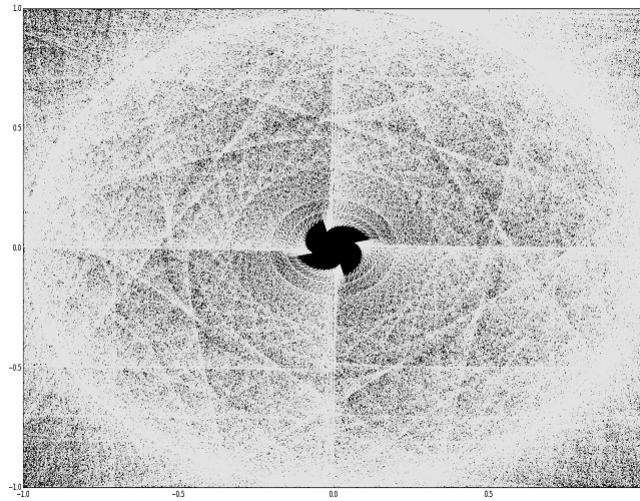
5.2 Les résidus quadratiques

5.2.1 Le chryzode final des relations quadratiques

5.2.1.1 Définition On dit qu'un entier q est un résidu quadratique modulo p s'il existe un entier x tel que

$$x^2 \equiv q \pmod{p}$$

5.2.1.2 Problèmes de cryptographie Étant donné p un nombre premier suffisamment grand⁶, il est difficile d'un point de vue calculatoire ($O(\log^2(n))$) de factoriser un n quelconque suivant x et ainsi décrypter la clef de cryptage. On remarque donc leur utilité pratique dans notre sécurité quotidienne. Le chryzode suivant est réalisé à partir des solutions en x pour la suite des premiers entre 0 et 10^6 et montre déjà des formes cycliques et surprenantes...



6. Aujourd'hui des nombres premiers de l'ordre de 100 chiffres sont utilisés dans le RSA afin de sécuriser nos mails, photos, sms, etc.

Remerciements

Nous tenons à remercier notre titulaire et professeur de mathématiques, Pierre Bolly, pour ses conseils avisés tant sur le choix du sujet de notre travail de fin d'études que sur sa réalisation.

Nous remercions également le colloque mathématique “Dedra-mathisons” ainsi que l'événement “Expo-sciences” organisé par les “Jeunesses Scientifiques de Belgique”, qui promeuvent la vulgarisation scientifique auprès des jeunes et ainsi stimulent leur intérêt pour les sciences et les mathématiques.