- SPODNJE in ZGORNJE LIMITE OMEJENIH ZAPOREDIJ:
  - (x_n) je konvergentno $\Rightarrow \liminf x_n = \limsup x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
  - $\liminf x_n = -\limsup(-x_n)$; $\limsup x_n = -\liminf(-x_n)$
  - $\inf x_n \leq \liminf x_n \leq \limsup x_n \leq \sup x_n$
  - $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \inf(a_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\inf\limits_{k\geq n} (a_k))$

- $a \log_b c = \log_b c^a$
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

VRSTE

- def.: Če zaporedje delnih vsot s_n konvergira, imenujemo limito $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s}$ VSOTA VRSTE.
- GEOMETRIJSKA VRSTA: $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

  $s_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}$, če je $q \neq 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$, če je $q \in (-1,1)$
- IZREK: Vrsta $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ je konvergentna $\Leftrightarrow$

  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(n > m \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$ $\rightarrow$ ZBRIŠI: vsota med m-tim in n-tim členom (za dovolj pozne člene)

  ↳ Cauchyev izrek za konvergenco vrst
  - Vrsta je konv. $\Leftrightarrow$ zaporedje (s_n) je konvergentno. $\Leftrightarrow$ (s_n) je Cauchyjevo.
- Def.: Vrsta $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ je ABSOLUTNO KONVERGENTNA, če je konv. vrsta: $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$
  - Absolutno konv. vrsta je konvergentna.

  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(n > m > n_\varepsilon \Rightarrow |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n| < \varepsilon)$
- Vrsta $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ $(= A)$ je MAJORANTA za vrsto $(B) = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$, če je $\boxed{|b_n| \leq a_n \quad \forall n.}$

  (B) je MINORANTA ZA (A)
  - Če je (A) majoranta za (B) in je (A) konv., je (B) absolutno konv.
- Vrsta: $\underbrace{1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots}_{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}}$ konvergira, če je $s > 1$.
- Če je $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ konv., je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (členi konv. $\rightarrow 0$) (OBRATNO NE) za alter. vrsto: $|a_n| \rightarrow 0$
- ALTERNIRAJOČA VRSTA: če v taki vrsti $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ členi $a_n \geq 0$ padajo proti 0 ($a_{n+1} \leq a_n$ in $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), potem vrsta konv. $\rightarrow$ velja za vse vrste!
- konv. vrsta, ki ni abs. konv., je POGOJNO KONV. $\Rightarrow$ če zamenjamo vrst. red neskončno mnogo členov, je lahko vsota katerokoli realno št. (pri abs. konv. vrsti pa vsota ostane enaka)
- KVOCIENTNI KRITERIJ: $\exists R := \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ $\rightarrow$ če $R > 1$, vrsta div. $\rightarrow$ $R < 1$, vrsta abs. konv. $\left(R \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$

  $\underbrace{R>1;\ r\in(1,R)}$
  - $|a_{n_0+k}| > r^k |a_{n_0}|$ $(\forall k = 1, 2, \dots)$; $k\to\infty$: ∞, ∞ | $R < 1$, $r \in (R,1)$: $|a_{n_0+k}| < r^k |a_{n_0}|$ $(\forall k = 1, 2, \dots)$
- KORENSKI KRITERIJ: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R$ $\rightarrow$ $R > 1 \Rightarrow$ div. $\rightarrow$ $R < 1 \Rightarrow$ konv. (abs.)
  - Če je zaporedje real. št. (a_n) : navzgor neomejeno, pravimo, da je $\limsup a_n = \infty$ (LIMES SUPERIOR)
    - navzgor omejeno in ima kako stekališče: $\limsup a_n$ = največje stekališče
    - — || —, a nima stekališč v $\mathbb{R}$, je $\limsup(a_n) = -\infty$

  (in obratno: navzdol omejeno: $\liminf a_n \rightarrow$ najmanjše stekal. ...)

  $R = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ + zvezek! dokaz

- $n{,}999 = (n+1){,}000$
- $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ (narašča, gor. NE omej.)

  tudi: $a_n = \sqrt[n]{n!}$ $(n \geq 1)$
- $\alpha^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $(\alpha < 1)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\qquad \sqrt[n]{\varepsilon} \rightarrow 1$

  $a^n \rightarrow 0$ $(-1,1)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \cdot a^n = \begin{cases} 0; & \text{če } a<1 \\ \text{ne obst.}, & a\geq 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$
- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$ NARAŠČA

VRSTE:
- $\sum\limits_{n=0} a_n < \infty \Leftrightarrow (S_M)_n$ konverg.; $S_M = \sum\limits_{n=0}^{M} a_n$ (delne vsote)
- zaporedje z neneg. členi: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$: $\boxed{a_n \leq b_n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konv. $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ (konv.)

  harmon. vrsta $\frac{1}{n}$ $\qquad \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$

  $\boxed{a_n \geq b_n \geq 0}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ div. $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ div.

  } PRIMERJALNI KRITERIJ
- LEIBNIZ: če abs. vred. členov padajo proti 0, vrsta konv. (A ne absolutno)
- GEOMETRIJSKA VRSTA: $q < 1$: $S = \dfrac{1}{1-q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$
- $a_n > 0$, $a_n > a_{n+1}$:

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty$ (konv.)

  $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \log_e n} \Rightarrow$ (konv.)

REALNA ŠTEVILA: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

- omejenost množic: $m = \inf A = -\sup(-A)$
- abs. vrednost: $\boxed{\left.\begin{matrix} x \leq y \\ -x \leq y \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x| \leq y}$
- $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$
- $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}| = |P(\mathbb{N})|$ $\quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- „KONTINUM" $= c = 2^{\aleph_0}$ „ALEF 0"
- KVADRATNI KOREN: $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0, \exists b \in \mathbb{R} : b^2 = a$

- $|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ (bij.)
- $|A| \leq |B|, |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$
  - $\hookrightarrow \exists f : A \to B$ (inj.)
  - $\exists g : B \to A$ (surj.)

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^+|$

$|\mathbb{N}^k| = |\underbrace{\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{k}| = |\mathbb{N}|$

$|(0,1)| = |(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| = |\mathbb{R}| = |(x,y)| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}, x < y$

$0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$ TRIKOTNIŠKA ŠT.

$0^2 + 1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$n | 0$ za $\forall n \in \mathbb{N}$

- če $m_1 \nmid n_1$: $\exists$ prašt.: $p | m_1$, $p \nmid n_1$

$\sqrt{\text{nar. št.}}$ = celo št. (ne ulomek) $\qquad |a-b| \geq ||a|-|b|| \qquad x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 > 0$

KOMPLEKSNA ŠTEVILA: $\mathbb{C}$

- PRODUKT: $\alpha \cdot \beta = a \cdot c - b \cdot d + (ad + bc)i$
- INVERZ: $\underset{(\alpha \neq 0)}{\alpha \cdot \beta = 1} \Leftrightarrow \beta = \alpha^{-1}$; $(a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$
  - $\hookrightarrow \alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha \cdot \bar{\alpha}}$
  - $\boxed{|\alpha| \cdot |\alpha^{-1}| = 1}$

$i^{-1} = -i \qquad i = 0 + 1i$

- KONJUG. ŠT. (od α): $\operatorname{Re} \alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha})$
  - $\operatorname{Im} \alpha = \frac{1}{2i}(\alpha - \bar{\alpha})$
- $|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha}}$
- POLARNI ZAPIS: $\alpha = |\alpha| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$; $w = \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow |w| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$
- $\boxed{|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|} \to =$, če $\beta = k \cdot \alpha$, $k \geq 0$ (ali obratno)
- $\boxed{\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta| (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))}$; $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$; $\arg(\alpha\beta) = \arg\alpha + \arg\beta$

$\boxed{\tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}}$

- $\alpha^0 := 1$
- $\boxed{\alpha^n = |\alpha|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}$ $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ Moivrejeva formula
- $\beta = \sqrt[n]{\alpha} \Leftrightarrow \beta^n = \alpha$: $\boxed{\beta = \sqrt[n]{|\alpha|} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right)}$, $k \in \mathbb{Z} \to k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
- KORENI ENOTE: $\sqrt[n]{1}$; $\boxed{w = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}}$; $w^n = 1$

$\boxed{\alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{\alpha} = \alpha} \qquad \boxed{\bar{z} = |z| \cdot (\underset{(-\varphi)}{\cos\varphi} - i \underset{(-\varphi)}{\sin\varphi})}$

REALNA ŠT.: - AKSIOM O KONTINUMU: Vsaka navzgor omejena množica real. št. ima $\sup A (\in \mathbb{R}) \to$ ni nujno $\in A$.

ZAPOREDJA

- LIMITA real. št. ZAPOREDJA: $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$; $(a = \lim_{n\to\infty} a_n)$
  - $a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
  - $\Leftrightarrow$ —||— $\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$
  - $a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})$ $(n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$ $\Rightarrow$ DEF.
  - $n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} + 1$
- Vsako naraščajoče navzgor omejeno zaporedje (a_n) je konvergentno.
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim \sup a_n$
- Vsako padajoče navzdol omejeno zaporedje je konv. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim \inf a_n$
- geometrijsko zaporedje: a^n (npr.)
- Vsako konv. zaporedje je omejeno. (če ni omejeno, ni konv.) $\to$ obratno NE velja
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$
- EULERJEVO ŠT. (irac.): $e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\quad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e$ ②
  - 2.718...
- VSOTA (RAZLIKA) ZAPOREDIJ, LIMIT: $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- KVOCIENT: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ $(b_n \neq 0)$
- PRODUKT LIMIT: $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{a} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} b_n}_{b}$
- INVERZ: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}$
- Št. s je STEKALIŠČE ZAPOREDJA (a_n), če je v vsakem intervalu $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, ∞ mnogo členov (a_n).
- Heine-Borelov izrek: Vsako omejeno zaporedje real. št. ima vsaj 1 stekališče. ($\hookrightarrow m, M$) $\quad \lim (a_n)$ = stekališče
- Zaporedje (a_n) je CAUCHYJEVO, če je $\lim_{n,m\to\infty} (a_n - a_m) = 0$.
  - oz: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$
  - LEMA: Vsako Cauchyjevo zaporedje je omejeno. (gor in dol) $\to$ in ima kvečjemu 1 stekališče
  - IZREK: Zaporedje (a_n) je konvergentno $\Leftrightarrow$ ko je Cauchyjevo.
- $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $a^r = \lim_{n\to\infty} \underbrace{a^{r_n}}_{\text{zaporedje}} \to r_n$ je zaporedje PRIBLIŽKOV rac. št., ki konvergira proti r $(\lim_{n\to\infty} r_n = r)$
- Cauchyjev pogoj je potreben in zadosten za konvergenco zaporedja.
- $a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$ ②

④ Dovnik

- IZREK O OHRANJANJU NEENAKOSTI: $a_n \leq b_n \ \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$
- IZREK O SENDVIČU: $(\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n)(x_n \leq z_n \leq y_n)(\forall n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$
  - $\underset{a}{a_n} \leq \underset{a}{b_n} \leq \underset{a}{c_n} \ (\forall n)$
- BINOMSKI IZREK: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$ $\quad \boxed{\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}}$