Optimizacijske metode, domača naloga 1

Janez Justin

April 14, 2020

1. Naloga

a) Odločite se, kaj bi bile primerne spremenljivke in za vsako napišite, kaj pomeni

Spremenljivka	Pomen
x_1	število izdelanih sprejemnikov v 1. tednu
x_2	število izdelanih sprejemnikov v 2. tednu
x_3	število izdelanih sprejemnikov v 3. tednu
x_4	število izdelanih sprejemnikov v 4. tednu
m_1	število mentorjev v 1. tednu
m_2	število mentorjev v 2. tednu
m_3	število mentorjev v 3. tednu
s_1	število študentov, ki se urijo v 1. tednu
s_2	število študentov, ki se urijo v 2. tednu
s_3	število študentov, ki se urijo v 3. tednu
n_2	študenti, ki se že izurjeni v 2. tednu
n_3	študenti, ki se že izurjeni v 3. tednu
n_4	študenti, ki se že izurjeni v 4. tednu

b) Zapišite kriterijsko funkcijo in omejitve (vsako od njih razložite)

Maximizirati želimo funkcijo:

$$\mathbf{50 \cdot (20 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2 + 16 \cdot x_3 + 14 \cdot x_4) - 132000 - 200 \cdot (n_2 + n_3 + n_4) - 100 \cdot (s_1 + s_2 + s_3)}$$

Sestavljeno iz:

- $20 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2 + 16 \cdot x_3 + 14 \cdot x_4$ predstavlja dobicek od prodanih sprejemnikov
- $132000 = 5 \cdot 20000 + 40 \cdot 200 \cdot 4 =$ Strošek proizvodnje postaj + Plače za 40 delavcev za 4 dni
- $200 \cdot (n_2 + n_3 + n_4) =$ Plača za študente, ki delajo
- $100 \cdot (s_1 + s_2 + s_3) =$ Plača za študente, ki se urijo

Pri pogojih:

$x1 + x2 + x3 + x4 = 20000$	Potrebujemo 20000 postaj
$m_1 \leq 40$	Prvi teden je max 40 mentorjev
$m_2 \leq 40 + n_2$	Drugi teden so mentorji lahko zaposleni in študenti 1.tedna
$m_3 \leq 40 + n_3$	Tretji teden so mentorji lahko zaposleni in študenti 1. ter 2. tedna
$s_i <= 3 * m_i$	Vsak mentor izobrazi max 3 študente. $i \in 1, 2, 3$
$x_1 \leq 50 \cdot (40 - m_1)$	Delavec, ki ni mentor, lahko naredi do 50 postaj
$x_2 \leq 50 \cdot (40 + n_2 - m_2)$	Delavec/izurjen študent, ki ni mentor, lahko naredi do 50 postaj
$x_3 \leq 50 \cdot (40 + n_3 - m_3)$	Delavec/izurjen študent, ki ni mentor, lahko naredi do 50 postaj
$x_4 \leq 50 \cdot (40 + n_4)$	Delavec/izurjen študent lahko naredijo do 50 postaj
$n_2 \leq s_1$	V 2. tednu je največ toliko študentov, kot jih je bilo izurjenih 1. teden
$n_3 \leq n_2 + s_2$	V 3. tednu je največ toliko študentov, kot jih je bilo izurjenih 1. in 2. tednu
$n_4 \leq n_3 + s_3$	V 4. tednu je največ toliko študentov, kot jih je bilo izurjenih v preteklih tednih
$x_{1,..,4} \geq 0$	Vsak teden dela 0 ali več delavcev
$m_{1,..,3} \geq 0$	Vsak teden imamo 0 ali več mentorjev
$s_{1,..,3} \geq 0$	Na uvajanju je lahko 0 ali več študentov
$n_{2,..4} \geq 0$	Izurjenih študentov imamo 0 ali več

opomba: prvi teden še ni študentov, ki delajo, zato n_1 ne obstaja. Zadnji teden ni smiselno izobraževati študentov, zato s_4 in m_4 ne obstajata.

c) Linearni program rešite s pomočjo računalnika

Rešeno s pomočjo mathematice:

```
In[4]:= program =
  {20 x1 + 18 x2 + 16 x3 + 14 x4 - 132000 - 200 (n2 + n3 + n4) -
    100 (s1 + s2 + s3),
   x1 ≥ 0, x2 ≥ 0, x3 ≥ 0, x4 ≥ 0, x1 + x2 + x3 + x4 ≤ 20000,
   50 (x1 + x2 + x3 + x4) ≥ 20000,
   m1 ≥ 0, m1 ≤ 40, s1 ≥ 0, s1 ≤ 3 * m1, x1 ≤ 50 (40 - m1),
   m2 ≥ 0, m2 ≤ 40 + n2, s2 ≥ 0, s2 ≤ 3 * m2, x2 ≤ 50 (40 + n2 - m2),
   m3 ≥ 0, m3 ≤ 40 + n3, s3 ≥ 0, s3 ≤ 3 * m3, x3 ≤ 50 (40 + n3 - m3),
   x4 ≤ 50 (40 + n4),
   n2 ≥ 0, n2 ≤ s1, n3 ≥ 0, n3 ≤ n2 + s2, n4 ≥ 0, n4 ≤ n3 + s3
  }

In[5]:= Maximize[program, {x1, x2, x3, x4, m1, m2, m3, s1, s2, s3,
   n2, n3, n4}]

Out[5]= {128000, {x1 → 0, x2 → 8000, x3 → 8000, x4 → 4000, m1 → 40, m2 → 0,
   m3 → 0, s1 → 120, s2 → 0, s3 → 0, n2 → 120, n3 → 120, n4 → 40}}
```

d) Komentirajte rešitev

Iz rešitve je razvidno, da se podjetu splača prvi teden porabiti vse delavce, da izurijo maksimalno število študentov in potem vsi skupaj delajo naslednja dva tedna. Zadnji teden pa $\frac{2}{3}$ študentov odposlijo.
Razvidno je tudi, da imamo najvec 128000 evrov profita in $\frac{128000}{20000} = 6,4$ evrov profita na izdelan radijski sprejemnik.

2. Naloga

Naj bo: $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ in $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Imamo:

$$\pi : \quad \max\ c^T,\ A_1 x \leq b_1,\ A_2 x \leq b_2,\ x \geq 0$$

torej:

$$\pi : \quad \max\ c^T,\ Ax \leq b,\ x \geq 0$$

optimalna rešitev tega programa je x*. In dual:

$$\pi' : \quad \min\ b^T,\ A^T y \geq c,\ y \geq 0$$

Po KID ima tudi π' optimalno rešitev $y^* = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix}$ in $c^T x^* = c_1^T x^* + c_2^T x^* = b_1^T y_1^* + b_2^T y_2^*$ (če $c_1 + c_2 = c$). Ker je y* optimalna je tudi dopustna. Torej: $A^T y \geq c \implies A_1^T y_1^* + A_2^T y_2^* \geq c$. To neenačbo lahko razdelimo na dva dela in izrazimo s c_1 in c_2. c_1 in c_2 izberemo taka, da je $c_1 + c_2 = c$ in da velja:

$$A_1^T y_1^* \geq c_1 \tag{1}$$
$$A_2^T y_2^* \geq c_2 \tag{2}$$

Iz navodil je:

$$\pi_1 : \quad \max\ c_1^T x,\ A_1 x \leq b_1,\ x \geq 0$$
$$\pi_2 : \quad \max\ c_2^T x,\ A_2 x \leq b_2,\ x \geq 0$$

in njuna duala:

$$\pi_1' : \quad \min\ b_1^T y_1,\ A_1^T y_1 \geq c_1,\ y_1 \geq 0$$
$$\pi_2' : \quad \min\ b_2^T y_2,\ A_2^T y_2 \geq c_2,\ y_2 \geq 0$$

x^* je dopustna rešitev za π_1 in π_2, ker velja $A_1 x \leq b_1$ in $A_2 x \leq b_2$. y_1^* je dopustna za π_1' ker velja: $A_1^T y_1^* \geq c_1$ (iz (1)) in y_2^* je dopustna za π_2' ker velja: $A_2^T y_2^* \geq c_2$(iz (2)). Ali sta x* in y_i^* tudi optimalna?
Če bo veljalo $c_i^T x^* = b_i^T y_i^*$, bo po posledici ŠID veljalo, da sta x^* in y_i^* optimalni rešitvi programov π_i in π_i'.
Iz ŠID sledi: $c_i^T x^* \leq b_i^T y_i^*$
Predpostavimo, da je $c_1^T x^* < b_1^T y_1^*$. Potem je $c_1^T x^* + c_2^T x^* < b_1^T y_1^* + c_2^T x^* < b_1^T y_1^* + b_2^T y_2^*$(Uporabili smo ŠID za $\pi_2 in \pi_2'$). To je v protislovju z $c_1^T x^* + c_2^T x^* = b_1^T y_1^* + b_2^T y_2^* \implies c_1^T x^* = b_1^T y_1^* \implies$ x* in y_1^* sta optimalni za π_1 in π_1'. Od predpostavke naprej podobno še za π_2.