Poglavje 5

Osnovno o grafih

Teorija grafov je, na kratko povedano, matematična disciplina, ki se ukvarja z *omrežji*. Omrežja, takšna in drugačna, so v zadnjih letih postala vseprisoten pojav, brez katerega si sodobnega načina življenja ne znamo več predstavljati. Čeprav pri besedi "omrežje" najprej pomislimo na svetovni splet ter na njem temelječa *družbena omrežja*, se različna omrežja pojavljajo na skoraj vseh področjih znanosti in siceršnjega človekovega delovanja: v kemiji, kjer si zapletene molekule predstavljamo kot omrežja atomov, v biologiji, kjer si razvoj vrst predstavljamo kot posebno drevesno omrežje, v psihologiji in nevroznanosti, kjer proučujemo nevronska omrežja ipd. Seveda so pomembna tudi cestna omrežja, telefonska omrežja, omrežja prodajnih poti, omrežja kriminalnih združb in še bi lahko naštevali.

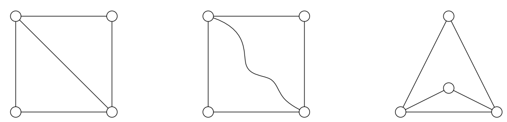
Kot je pri matematiki običajno, nas ne bo zanimala nobena od teh konkretnih pojavnih oblik pojma omrežje, temveč zgolj tisto, kar je omrežjem skupno; zanimala nas bo abstrakcija pojma omrežje.

5.1 Osnovni pojmi

V matematiki omrežju navadno rečemo *graf*. Določa ga *množica vozlišč* in pa podatek, kateri pari vozlišč so med seboj *sosednji* oziroma povezani s *povezavo*. Graf lahko torej formalno definiramo kot urejeni par (V, E), kjer je V neprazna množica objektov, ki jim rečemo *vozlišča*, in E podmnožica množice $\binom{V}{2} = \{e \mid e \subseteq V, |e| = 2\}$, ki je rečemo *množica povezav*. Če je G graf, potem njegovo množico vozlišč označimo z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$. Čeprav so grafi, za katere je množica vozlišč neskončna, zelo zanimivi objekti, se bomo mi ukvarjali le s *končnimi grafi*, torej z grafi, katerih množica vozlišč je končna. Od tod dalje torej za vsak graf predpostavljamo, da je končen.

Če je $\{u, v\}$ povezava grafa G, tedaj pravimo, da sta vozlišči u in v *sosednji v grafu* G in pišemo $u \sim v$ (ali tudi $u \sim_G v$, če želimo poudariti, da gre za sosednost v grafu G in ne morda kakem drugem grafu). Hkrati pravimo, da sta vozlišči u in v *krajišči povezave* $\{u, v\}$ oziroma da se povezava $\{u, v\}$ *dotika* vozlišč u in v. Povezavo $\{u, v\}$ včasih pišemo krajše kot uv ali vu. Če imata povezavi e in f skupno krajišče, rečemo, da sta *incidenčni*.

Kadar je množica vozlišč prikladno maloštevilna, graf radi predstavimo z risbo. Pri tem vozlišča grafa predstavimo kot točke ravnine (vsako vozlišče s svojo točko), povezavo med sosednjima vozliščema pa kot krivuljo (običajno kar kot daljico) s krajiščema v točkah ravnine, ki ustrezata krajiščema povezave; paziti moramo le, da točke, ki predstavljajo vozlišča grafa, ne ležijo v notranjosti kake take krivulje.



Slika 5.1: Tri predstavitve istega grafa.

Opazimo, da je relacija sosednosti $\sim_G$ na množici vozlišč $V(G)$ simetrična in irefleksivna. Velja tudi obrat: če je relacija $\sim$ simetrična in irefleksivna na neprazni množici V, je relacija sosednosti nekega grafa – namreč grafa (V, E), kjer je $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \sim v\}$.

Če je G graf in v njegovo vozlišče, tedaj z $N_G(v)$ označimo množico

$$N_G(v) = \{u \mid u \in V(G), u \sim_G v\},$$

ki ji rečemo *soseščina* vozlišča v v grafu G. Moč množice $N_G(v)$ označimo z $\deg_G(v)$ in ji rečemo *stopnja vozlišča* ali tudi *valenca vozlišča* v v grafu G. Opazimo, da je $\deg_G(v)$ enaka številu povezav grafa G, ki se vozlišča v dotikajo.

Vozliščem stopnje 0 pravimo *izolirana vozlišča*, vozliščem stopnje 1 pa *listi*. Graf G je *regularen*, če obstaja tako število k, da je $\deg_G(v) = k$ za vsak $v \in V(G)$. V tem primeru rečemo tudi, da je graf G k-regularen oziroma da je regularen stopnje k.

Grafe lahko predstavimo tudi z matrikami. Ena od možnosti je *matrika sosednosti*. Za graf G z vozlišči $v_1, \ldots, v_n$ je matrika sosednosti matrika

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definirana z

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j \\ 0, & v_i \not\sim v_j \end{cases}.$$

Druga možnost je *incidenčna matrika*. Če ima graf G vozlišča $v_1, \ldots, v_n$ in povezave $e_1, \ldots, e_m$, je to matrika $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, podana s predpisom

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \in e_j \\ 0, & v_i \notin e_j \end{cases}.$$

5.2 Lema o rokovanju

Stopnje vozlišč in število povezav grafa veže naslednja enakost, ki ji rečemo *lema o rokovanju.*

LEMA 5.1. *Za vsak graf G velja*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|\,.$$

DOKAZ: Lemo dokažemo s pomočjo dvojnega preštevanja. Naj bo $\mathcal{M}$ množica vseh urejenih parov $(v, e) \in V(G) \times E(G)$, za katere se povezava e dotika vozlišča v. Če elemente množice $\mathcal{M}$ preštejemo tako, da združimo tiste urejene pare, ki se ujemajo na prvi komponenti, nato pa moči teh skupin seštejemo, dobimo:

$$|\mathcal{M}| = \sum_{v \in V(G)} |\{e \mid e \in E(G), e \text{ se dotika } v\}| = \sum_{v \in V(G)} \deg(v).$$

Če združimo tiste pare, ki se ujemajo na drugi komponenti, ter seštejemo moči teh skupin, pa dobimo:

$$|\mathcal{M}| = \sum_{e \in E(G)} |\{v \mid v \in V(G), e \text{ se dotika } v\}| = \sum_{e \in E(G)} 2 = 2 \cdot |E(G)|.$$

S tem je trditev dokazana. □

POSLEDICA 5.2. *Vsak graf ima sodo mnogo vozlišč lihe stopnje.*

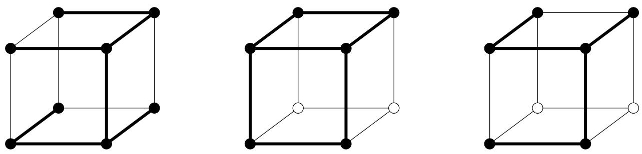
5.3 Podgrafi

Kadar v matematiki definiramo kako strukturo (kot je na primer grupa, obseg, vektorski prostor, topološki prostor ipd.), hkrati definiramo tudi pojem podstrukture (na primer podgrupo, podobseg, vektorski podprostor, topološki podprostor ipd.). Tako tudi v teoriji grafov definiramo pojem *podgrafa*.

DEFINICIJA 5.3. *Naj bosta G in H grafa. Če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$, tedaj rečemo, da je H* podgraf *grafa G, in pišemo $H \leq G$.*

Vsak podgraf grafa G lahko dobimo tako, da v grafu G najprej odstranimo vse povezave, za katere ne želimo, da so v podgrafu prisotne, nato pa še vsa neželena vozlišča. Če drugi korak izpustimo, torej, če za podgraf H grafa G velja $V(H) = V(G)$, rečemo, da je podgraf H *vpet podgraf* grafa G.

Vrstni red odstranjevanja lahko tudi obrnemo: najprej lahko odstranimo nezaželena vozlišča skupaj s povezavami, ki se teh vozlišč dotikajo, nato pa še poljubno mnogo povezav. Če v tem primeru drugi korak (odstranjevanje povezav) izpustimo, dobimo *induciran podgraf*. Z drugimi besedami, podgraf H grafa G je induciran, če velja $E(H) = \{uv \in E(G) \mid u, v \in V(H)\}$. Seveda je induciran podgraf določen s svojo množico vozlišč. Induciran podgraf H grafa G z množico vozlišč U zato lahko enolično označimo s simbolom $G[U]$. Če je kak podgraf grafa G hkrati vpet in induciran, potem je seveda enak grafu G.

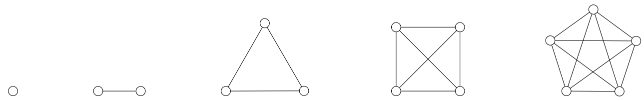


Slika 5.2: Podgraf, ki je vpet, pa ni induciran, podgraf, ki je induciran, pa ni vpet, in podgraf, ki ni ne induciran ne vpet. Bela vozlišča in ožje povezave so v osnovnem grafu, ne pa v podgrafu, črna vozlišča in krepkejše povezave pa v obeh.

5.4 Nekatere družine grafov

Oglejmo si nekaj preprostih družin grafov, ki jih bomo v nadaljevanju pogosto srečevali.

Polni grafi. Naj bo V poljubna neprazna množica. Tedaj grafu z množico vozlišč V in množico povezav $\binom{V}{2}$ vseh neurejenih parov elementov iz V rečemo *polni graf* z množico vozlišč V. Označimo ga s K_V, kadar pa je $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, pa tudi s K_n.



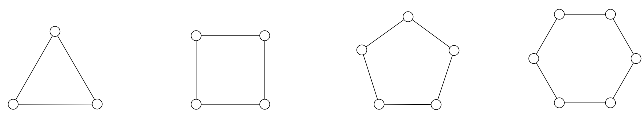
Slika 5.3: Polni grafi K_1, K_2, K_3, K_4 in K_5.

Prazni grafi. Naj bo V poljubna neprazna množica. Tedaj grafu z množico vozlišč V in prazno množico povezav rečemo *prazni graf* z množico vozlišč V. Označimo ga s $\overline{K}_V$, kadar pa je $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, pa tudi s $\overline{K}_n$.

Poti. Grafu z množico vozlišč $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ in množico povezav $E(P_n) = \{i(i+1) \mid i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}\}$ rečemo *pot dolžine* n in ga označimo s P_n.

Slika 5.4: Poti P_1, P_2, P_3 in P_4.

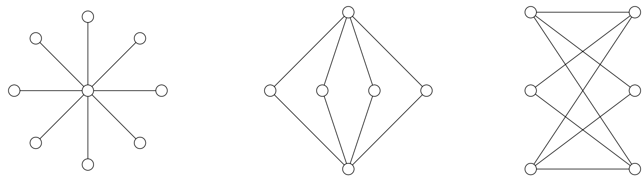
Cikli. Za naravno število n, $n \geq 3$, s C_n označimo graf z množico vozlišč $\mathbb{Z}_n$ in množico povezav $E(C_n) = \{i(i+1) \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$ (kjer seveda vsoto $i+1$ razumemo po modulu n). Grafu C_n rečemo *cikel dolžine* n (tudi n*-kotnik*).



Slika 5.5: Cikli C_3, C_4, C_5 in C_6.

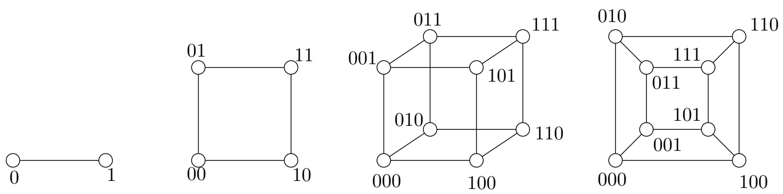
Polni dvodelni grafi. Naj bosta A in B poljubni disjunktni neprazni množici. Grafu $K_{A,B}$ z množico vozlišč $A \cup B$ in množico povezav $E(K_{A,B}) = \{uv \mid u \in A, v \in B\}$ rečemo *polni dvodelni graf* na paru množic A, B. Če nas zanimata le moči množic A in B, tedaj graf $K_{A,B}$ označimo tudi s $K_{|A|,|B|}$. Grafom $K_{1,n}$ pravimo tudi *zvezde*.

Hiperkocke. Za naravno število d naj $\mathbb{Z}_2^d$ predstavlja množico vseh urejenih d-teric ničel in enic. Skupaj z operacijo seštevanja po komponentah in po modulu 2 lahko na množico $\mathbb{Z}_2^d$ pogledamo kot na Abelovo grupo. Za $i \in$



Slika 5.6: Polni dvodelni grafi $K_{1,8}$, $K_{2,4}$ in $K_{3,3}$.

$\{1, 2, \ldots, d\}$ naj bo e_i tisti element množice $\mathbb{Z}_2^d$, ki ima na i-tem mestu enico, povsod drugod pa ničlo. Pišimo $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$. *Hiperkocka razsežnosti* d je graf z množico vozlišč $\mathbb{Z}_2^d$ in z dvema vozliščema $u, v \in \mathbb{Z}_2^d$ sosednjima, če in samo če je $u + v \in S$. Z drugimi besedami, u je soseden v, če in samo če se u in v razlikujeta v natanko eni komponenti. Običajno med hiperkocke štejemo tudi 0-razsežno kocko Q_0, ki ima eno samo vozlišče in nič povezav. Opazimo tudi, da je Q_1 polni graf na dveh vozliščih, Q_2 pa cikel dolžine 4. Hiperkocka Q_d je d-regularen graf z 2^d vozlišči in $d \cdot 2^{d-1}$ povezavami.



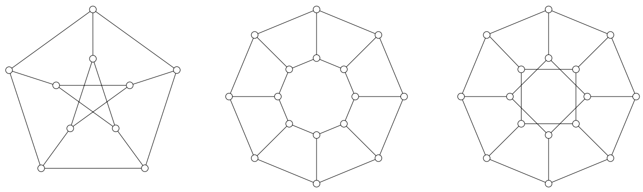
Slika 5.7: Hiperkocki Q_1 in Q_2 ter dve sliki hiperkocke Q_3.

Posplošeni Petersenovi grafi. Naj bosta n in k naravni števili, ki zadoščata pogojema $n \geq 3$ in $2k < n$. Naj bosta $U = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ in $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ dve disjunktni n-elementni množici. *Posplošeni Petersenov graf* $P_{n,k}$ je graf z množico vozlišč $V(P_{n,k}) = U \cup V$ in množico povezav enako $E(P_{n,k}) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, kjer je

$$E_1 = \{u_i u_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}, \quad E_2 = \{v_i v_{i+k} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}, \quad E_3 = \{u_i v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$$

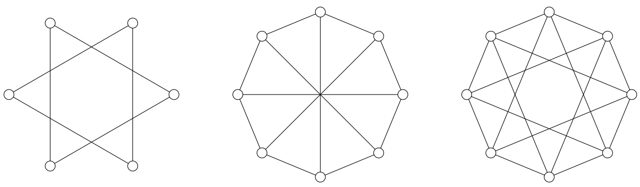
(pri tem indekse pri vozliščih računamo po modulu n). Povezavam iz množice E_1 rečemo *zunanje povezave*, povezavam iz E_2 *notranje povezave*, povezavam iz E_3 pa *napere* (tudi špice ali "šprikle"). Posplošenim Petersenovim grafom $P(n, 1)$ rečemo *prizme*. Med grafi $P_{n,k}$ je še posebej imeniten graf $P_{5,2}$, ki mu rečemo *Petersenov graf*.

Krožni grafi. Naj bo S poljubna podmnožica aditivne grupe $\mathbb{Z}_n$, ki ne vsebuje elementa 0 in ki z vsakim elementom $s \in S$ vsebuje tudi nasprotni



Slika 5.8: Petersenov graf in posplošena Petersenova grafa $P_{8,1}$ in $P_{8,2}$.

element $n - s$. *Krožni graf* $\mathrm{Cir}(n; S)$ na n vozliščih in s *simbolom* S je graf z množico vozlišč $\mathbb{Z}_n$ in množico povezav $\{uv \mid v - u \in S\}$. Med krožne grafe med drugim sodijo polni grafi in cikli: $K_n = \mathrm{Cir}(n; \{1, 2, \ldots, n-1\})$ in $C_n = \mathrm{Cir}(n; \{1, n-1\})$.



Slika 5.9: Krožni grafi $\mathrm{Cir}(6; \{2, 4\})$, $\mathrm{Cir}(8; \{1, 4, 7\})$ in $\mathrm{Cir}(8; \{1, 3, 5, 7\})$.

Cayleyjevi grafi. Če grupo $\mathbb{Z}_n$ v definiciji krožnega grafa nadomestimo s poljubno grupo, dobimo pojem Cayleyjevega grafa: Naj bo X poljubna grupa in S poljubna podmnožica grupe X, ki ne vsebuje enote grupe X in ki z vsakim elementom $s \in S$ vsebuje tudi nasprotni element s^{-1}. *Cayleyjev graf* $\mathrm{Cay}(X; S)$ grupe X s *simbolom* S je določen takole:

$$V(\mathrm{Cay}(X; S)) = X \qquad \text{in} \qquad E(\mathrm{Cay}(X; S)) = \{uv \mid uv^{-1} \in S\}.$$

Med Cayleyjeve grafe spadajo tudi hiperkocke, saj lahko graf Q_d predstavimo kot Cayleyjev graf grupe $\mathbb{Z}_2^d$ s simbolom

$$S = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}.$$

Cayleyjev graf $\mathrm{Cay}(X; S)$ je $|S|$-regularen graf.

5.5 Drugačne definicije grafov

Včasih se pojavi potreba po opisu omrežij, ki imajo med nekaterimi pari vozlišč več različnih povezav ali pa imajo povezave, ki imajo obe krajišči enaki; prvim rečemo *vzporedne povezave*, drugim pa *zanke*. Takim grafom bomo rekli *multigrafi*. Če se domenimo, da zanka prispeva 2 k stopnji vozlišča, potem lema 5.1 (lema o rokovanju) velja tudi za multigrafe.

Poleg multigrafov je grafom sorodna struktura *usmerjenega grafa*. Neformalno si ga lahko predstavljamo kot graf (ali celo kot multigraf), kjer vsako povezavo usmerimo. Namesto o krajiščih povezave v tem primeru govorimo o *začetku* in *koncu* povezave (tudi *repu* in *glavi* povezave). Če je u rep in v glava neke povezave, potem napišemo $u \to v$ in rečemo, da je uv usmerjena povezava grafa G. Formalno je uv seveda urejen par (u, v).

V usmerjenih grafih namesto stopnje $\deg(v)$ definiramo *vhodno stopnjo* $\deg^-(v)$ in *izhodno stopnjo* $\deg^+(v)$ vozlišča v, pri čemer prva predstavlja število vozlišč u grafa G, za katere je uv usmerjena povezava grafa G, druga pa število vozlišč u grafa G, za katere je vu usmerjena povezava grafa G. V kontekstu usmerjenih grafov lema o rokovanju preide v enakost

$$\sum_{v \in V(G)} \deg^-(v) = \sum_{v \in V(G)} \deg^+(v) = |E(G)|.$$

Povezave ali vozlišča grafa lahko tudi utežimo; dana je torej lahko preslikava $w\colon E(G) \to \mathbb{R}$ ali $\omega\colon V(G) \to \mathbb{R}$. Takim grafom rečemo *uteženi grafi*.

Zaradi enostavnosti se bomo v nadaljevanju omejili na neusmerjene neutežene grafe brez zank in vzporednih povezav, čeprav marsikatera od trditev, ki jih bomo izpeljali, velja tudi v tem širšem kontekstu. Takim grafom včasih rečemo *enostavni grafi*.

5.6 Sprehodi, poti in cikli

Zaporedje vozlišč $v_0 v_1 \dots v_k$ grafa G je *sprehod* dolžine k, če velja $v_i \sim v_{i+1}$ za vsak $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Za povezave $v_i v_{i+1}$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$, tedaj rečemo, da *ležijo* na sprehodu, ali tudi, da jih sprehod *prehodi*. Seveda se lahko zgodi, da se kaka povezava grafa pojavi v zaporedju $v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_k$ tudi večkrat. V tem primeru rečemo, da sprehod takšno povezavo prehodi večkrat.

Sprehod je *enostaven*, če vsako povezavo grafa prehodi največ enkrat. Sprehod $v_0 v_1 \dots v_k$ je *sklenjen*, če je $v_0 = v_k$. Sprehod, na katerem so vsa vozlišča med seboj različna, je *pot v grafu*. Enostaven sklenjen sprehod dolžine vsaj 3, na katerem sta enaki le prvo in zadnje vozlišče, pa je *cikel grafa*. Zaradi enostavnosti dopuščamo tudi sprehode dolžine 0, tj. sprehode oblike v_0. Sprehod dolžine 0 je seveda hkrati tudi pot, domenimo pa se, da ga ne bomo imeli za cikel.

Dokažimo tri preproste trditve o sprehodih, na katere se bomo sklicevali v nadaljevanju.

Lema 5.4. *Sprehod, ki ima med vsemi sprehodi med dvema vozliščema najmanjšo dolžino, je pot. Če med dvema vozliščema obstaja sprehod dolžine k, potem med njima obstaja tudi pot dolžine kvečjemu k.*

Dokaz: Opazimo najprej, da druga trditev leme sledi neposredno iz prve. Zato zadošča dokazati slednjo.
Naj bosta u in v poljubni vozlišči grafa G in $S = v_0v_1 \dots v_m$, $u = v_0$, $v = v_m$, kak izmed najkrajših sprehodov med njima. Če je $u = v$, tedaj je S pot dolžine 0.
Predpostavimo sedaj, da $u \neq v$ in da S ni pot. Tedaj se v zaporedju $v_0, v_1, \dots, v_m$ kako vozlišče ponovi, denimo $v_i = v_j$, $0 \leq i < j \leq m$. Tedaj pa je $S' = v_0v_1 \dots v_iv_{j+1} \dots v_m$ sprehod med u in v, ki je krajši od sprehoda S. To pa nasprotuje naši izbiri sprehoda S in dokazuje, da je S pot. □

Lema 5.5. *Denimo, da med vozliščema u in v grafa G obstajata dve različni poti. Tedaj graf G vsebuje cikel.*

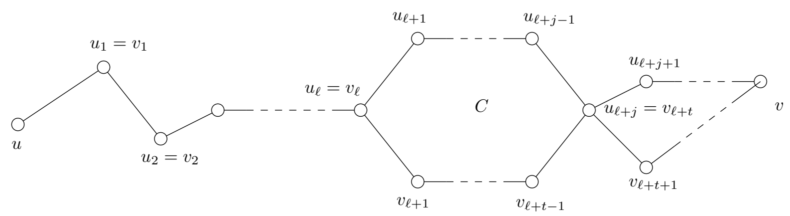
Dokaz: Naj bosta $P = u_0u_1 \dots u_k$ in $Q = v_0v_1 \dots v_m$ dve različni poti med $u = u_0 = v_0$ in $v = u_k = v_m$. Naj bo ℓ najmanjši indeks, za katerega je $u_\ell = v_\ell$ in hkrati $u_{\ell+1} \neq v_{\ell+1}$; ker sta poti P in Q različni, takšen ℓ res obstaja. Dalje, naj bo j najmanjše pozitivno naravno število, da $u_{\ell+j}$ leži na sprehodu Q; ker je $u_{\ell+(k-\ell)} = u_k = v_m = v_{\ell+(m-\ell)}$, takšen j res obstaja. Naj bo t takšen, da je $u_{\ell+j} = v_{\ell+t}$. Ker je P pot, je število t pozitivno. Oglejmo si sklenjeni sprehod

$$C = u_\ell u_{\ell+1} \dots u_{\ell+j-1} v_{\ell+t} v_{\ell+t-1} \dots v_{\ell+1} v_\ell.$$

Ker po definiciji nobeno od vozlišč $u_{\ell+1}, u_{\ell+2}, \dots, u_{\ell+j-1}$ ne leži na Q in ker sta P in Q poti, je C cikel. □

Lema 5.6. *Če ima graf sklenjen sprehod lihe dolžine, tedaj ima tudi cikel lihe dolžine.*

Dokaz: Dokažimo to trditev z indukcijo po dolžini sklenjenega sprehoda. Trditev je na prazno resnična za sklenjene sprehode dolžine 1, saj takšnih ni. Podobno lahko premislimo, da je vsak sklenjen sprehod dolžine 3 v resnici že cikel. Baza indukcije je s tem dokazana.



Slika 5.10: Poti P in Q ter cikel C iz dokaza leme 5.5.

Naj bo n liho naravno število in denimo, da trditev velja za vse sklenjene sprehode dolžine strogo manj kot n. Naj bo $S = v_0 v_1 \dots v_n$, $v_0 = v_n$, sklenjen sprehod dolžine n. Če S ni cikel, obstajata indeksa i, j, $0 \leq i < j < n$, za katera je $v_i = v_j$. Oglejmo si sedaj sklenjena sprehoda $P = v_i v_{i+1} \dots v_{j-1} v_j$ in $Q = v_0 v_1 \dots v_i v_{j+1} v_{j+2} \dots v_n$. Opazimo, da je vsota njunih dolžin enaka n, zato je dolžina vsaj enega od njiju liha. Ker sta oba sprehoda P in Q strogo krajša od S, lahko za tistega lihe dolžine uporabimo indukcijsko predpostavko in zaključimo, da ima G cikel lihe dolžine. $\square$

Pripomnimo, da analogna trditev za sode sprehode ne velja nujno.

5.7 Povezane komponente, razdalja in premer

Za dve vozlišči u in v rečemo, da sta v isti *povezani komponenti*, če med njima obstaja sprehod. Ni težko videti, da je relacija "biti v isti povezani komponenti" ekvivalenčna. Njenim ekvivalenčnim razredom rečemo *povezane komponente grafa* (včasih tudi podgrafu, ki je induciran z množico vozlišč povezane komponente, rečemo povezana komponenta). Število povezanih komponent grafa G označimo z $\Omega(G)$. Graf je *povezan*, če ima eno samo povezano komponento.

Razdaljo $d_G(u, v)$ med vozliščema u in v v grafu G definiramo kot dolžino najkrajše poti od u do v v grafu G; če taka pot ne obstaja, za razdaljo vzamemo vrednost ∞. Kot pove lema 5.4, bi lahko razdaljo ekvivalentno definirali tudi kot dolžino najkrajšega sprehoda med danima vozliščema.

Največji razdalji med parom vozlišč grafa pravimo *premer* (ali *diameter*) grafa,

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{d_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\},$$

pri čemer za nepovezane grafe G pišemo $\mathrm{diam}(G) = \infty$. Dolžini najkrajšega cikla v grafu pravimo tudi *notranji obseg* (ali *ožina*) grafa (angl. *girth*).

Za zaključek razdelka dokažimo še naslednje.

TRDITEV 5.7. *Naj bo G povezan graf. Tedaj je $(V(G), d_G)$ metrični prostor.*

DOKAZ: Neposredno iz definicije razdalje sledi, da je $d_G(u, v) \geq 0$ za poljubni vozlišči u in v ter da je $d_G(u, v) = 0$, če in samo če je $u = v$.
Naj bosta u in v poljubni vozlišči grafa G. Ker za vsako pot $uv_1 \ldots v_{k-1}v$ dolžine k od u do v velja, da je njej obratna pot $vv_{k-1} \ldots v_1u$ pot dolžine k od v do u, velja $d_G(u, v) = d_G(v, u)$.
Dokazati moramo še trikotniško neenakost. Naj bodo u, v in w poljubna vozlišča grafa G in naj bo $d_G(u, v) = k$ in $d_G(v, w) = m$. Tedaj obstajata poti $uv_1 \ldots v_{k-1}v$ in $vw_1 \ldots w_{m-1}w$ od u do v ter od v do w dolžin k in m. Njun spoj $uv_1 \ldots v_{k-1}vw_1 \ldots w_{m-1}w$ je sprehod od u do w dolžine $k + m$. Iz leme 5.4 in definicije razdalje pa sedaj sledi, da je $d_G(u, w) \leq k + m$. S tem je trikotniška neenakost dokazana. □

5.8 Dvodelnost

Graf G je *dvodelen*, če lahko množico vozlišč $V(G)$ zapišemo kot disjunktno unijo dveh nepraznih podmnožic $A, B \subseteq V(G)$ tako, da je za vsako povezavo $uv \in E(G)$ eno od vozlišč u, v vsebovano v množici A, drugo pa v množici B. Množici A in B imenujemo *množici dvodelne razdelitve* grafa G, par $\{A, B\}$ pa *dvodelna razdelitev*.

Dvodelni grafi igrajo pomembno vlogo pri modeliranju različnih praktičnih problemov in za razliko od splošnih grafov omogočajo opis relacij med objekti dveh različnih tipov. Zamislimo si na primer, da imamo množico A nekih dobrin in množico B ljudi, ki bi si radi te dobrine razdelili med seboj. Pri tem si posamezna oseba iz množice B želi le nekatere izmed dobrin iz A, za druge pa ji ni mar. Dano situacijo lahko predstavimo tako, da zgradimo dvodelni graf, katerega množica vozlišč je unija $A \cup B$, pri čemer je dobrina $a \in A$ sosednja osebi $b \in B$, če in samo če si oseba b dobrino a želi. Vprašanja, kot so, ali je možno dobrine iz A razdeliti med osebe iz B tako, da vsaka oseba dobi vsaj eno dobrino, ki si jo želi, se tedaj prevedejo na vprašanja o tako zgrajenem grafu.

Dvodelni grafi tvorijo zanimiv in pomemben razred grafov tudi s povsem teoretičnega vidika, saj jih krasi več lepih lastnosti, ki za splošne grafe ne veljajo nujno. Nekaj teh lastnosti bomo spoznali v prihajajočih razdelkih.

Ugotoviti, ali je dani graf G dvodelen, je preprosta naloga. Če G ni povezan, potem se lahko osredotočimo na vsako od njegovih povezanih komponent posebej, saj je graf očitno dvodelen, če in samo če je dvodelna vsaka od njegovih povezanih komponent (izdelati podrobnosti tega razmisleka je dobra vaja!). Predpostavimo torej, da je G povezan. Če je G dvodelen z dvodelno razdelitvijo $\{A, B\}$, potem si lahko mislimo, da so vozlišča iz A pobarvana modro, ona iz B pa rdeče. Vozlišča grafa G torej lahko pobarvamo z dvema barvama tako, da dve sosednji vozlišči nista iste barve (o tovrstnih barvanjih vozlišč bomo govorili v razdelku 6.4). Obratno, če vozlišča grafa lahko pobarvamo z dvema barvama tako, da nobeni istobarvni vozlišči nista sosednji, je graf dvodelen, saj barvna razreda vozlišč tvorita dvodelno razdelitev grafa.

Oglejmo si še preprost postopek, ki najde takšno barvanje, če obstaja. Izberimo vozlišče v_0 danega grafa G in ga pobarvajmo rdeče. Če so vsa vozlišča s tem pobarvana, potem barvanje zaključimo. Sicer izberimo kakega nepobarvanega soseda v kakega že pobarvanega vozlišča u (takšni sosednji vozlišči v in u obstajata zaradi predpostavke o povezanosti grafa G). Preverimo, ali so vsi že pobarvani sosedi vozlišča v enake barve. Če temu ni tako, potem postopek zaključimo, sicer pa vozlišče v pobarvajmo z drugo barvo (saj nimamo druge izbire) in ponovimo postopek z vrnitvijo na točko, kjer se vprašamo, ali so vsa vozlišča že pobarvana.

Če so ob zaključku tega postopka vsa vozlišča pobarvana, tedaj smo graf G ustrezno pobarvali z dvema barvama in je zato dvodelen. Če pa se barvanje zaključi, preden so pobarvana vsa vozlišča, to pomeni, da graf ni dvodelen, saj, kot se z lahkoto prepričamo, pri postopku barvanja, ki smo ga izvajali, nismo imeli nobene svobode.

Za zaključek tega razdelka navedimo še naslednjo zelo uporabno karakterizacijo dvodelnih grafov.

TRDITEV 5.8. *Graf je dvodelen, če in samo če ne vsebuje cikla lihe dolžine.*

DOKAZ: Kot zgoraj se tudi v tem dokazu lahko omejimo na primer, ko je G povezan. Denimo najprej, da je G dvodelen z dvodelno razdelitvijo $\{A, B\}$, in predpostavimo, da ima cikel $C = v_0v_1 \dots v_{2k+1}$, $v_0 = v_{2k+1}$, lihe dolžine. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $v_0 \in A$. Tedaj je $v_1 \in B$, $v_2 \in A$ in s ponavljanjem tega premisleka tudi $v_{2k} \in A$. Vendar je vozlišče v_{2k} sosednje vozlišču v_{2k+1}, ki je tudi vsebovano v A, saj je enako v_0. To protislovje pomeni, da G ne vsebuje cikla lihe dolžine.
Denimo sedaj, da G ni dvodelen; dokazati želimo, da ima tedaj cikel lihe dolžine. Izberimo vozlišče v_0 grafa G in definirajmo:

$$L = \{v \in V(G) \mid d_G(v_0, v) \text{ je liho}\} \quad \text{in} \quad S = \{v \in V(G) \mid d_G(v_0, v) \text{ je sodo}\}.$$

Ker G ni dvodelen, $\{L, S\}$ ni dvodelna razdelitev, in zato za neki $A \in \{L, S\}$ obstajata vozlišči $v, u \in A$, ki sta sosednji. Naj bo $v_0v_1 \dots v_{m-1}v$ najkrajša pot od v_0 do v in $v_0u_1 \dots u_{k-1}u$ najkrajša pot od v_0 do u. Tedaj sta števili

$m = d_G(v_0, v)$ in $k = d_G(v_0, u)$ obe sodi ali obe lihi, in zato je sklenjeni sprehod $v_0 v_1 \ldots v_{m-1} v u u_{k-1} \ldots u_1 u_0$ lihe dolžine (namreč dolžine $m+k+1$). Po lemi 5.6 ima tedaj graf G tudi cikel lihe dolžine. $\square$

5.9 Homomorfizmi grafov

Naj bosta G in G' poljubna grafa. *Homomorfizem* iz grafa G v graf G' je poljubna takšna preslikava $\varphi\colon V(G) \to V(G')$, da za vsaki dve vozlišči $u, v \in V(G)$ velja:

$$u \sim_G v \;\;\Rightarrow\;\; \varphi(u) \sim_{G'} \varphi(v).$$

Povedano preprosteje, homomorfizem grafov je preslikava med množicama vozlišč, ki ohranja sosednost. Kadar je φ homomorfizem iz grafa G v graf G', to s simboli napišemo tudi takole: $\varphi\colon G \to G'$.

Čeprav je homomorfizem $\varphi\colon G \to G'$ po definiciji preslikava iz $V(G)$ v $V(G')$, pa nam hkrati določa tudi preslikavo $\varphi\colon E(G) \to E(G')$, določeno s predpisom $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$ za poljubno povezavo $uv \in E(G)$.

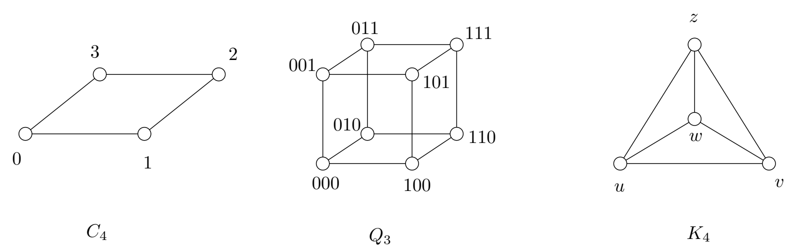
Če sta obe preslikavi $\varphi\colon V(G) \to V(G')$ in $\varphi\colon E(G) \to E(G')$ surjektivni, tedaj homomorfizmu $\varphi\colon G \to G'$ rečemo *epimorfizem*.

Podobno, če je preslikava $\varphi\colon V(G) \to V(G')$ (in tedaj tudi preslikava $\varphi\colon E(G) \to E(G')$) injektivna, tedaj homomorfizmu $\varphi\colon G \to G'$ rečemo *vložitev* grafa G v graf G' (tudi *monomorfizem* iz G v G'). Če je $\varphi\colon G \to G'$ vložitev, ki ohranja razdaljo med vozlišči, torej če za poljuben par vozlišč $u, v \in V(G)$ velja

$$d_G(u, v) = d_{G'}(\varphi(u), \varphi(v)),$$

tedaj rečemo, da je φ *izometrična vložitev*. Izometrične vložitve igrajo v teoriji grafov še posebej pomembno vlogo.

Za zgled si oglejmo tri grafe na sliki 5.11: prvi graf je cikel C_4, drugi je hiperkocka Q_3, tretji pa polni graf K_4.



Slika 5.11: Grafi C_4, Q_3 in K_4.

Če definiramo preslikavo $\varphi\colon V(C_4) \to V(Q_3)$ takole:

x	0	1	2	3
$\varphi(x)$	000	100	110	010

ugotovimo, da je φ homomorfizem, saj res vse štiri pare sosednjih vozlišč v C_4 preslika v pare sosednjih vozlišč v Q_3. Homomorfizem φ ni epimorfizem, je pa vložitev. Še več, z lahkoto se prepričamo, da gre za izometrično vložitev.

Definirajmo še preslikavo $\psi\colon V(Q_3) \to V(K_4)$ takole:

x	000	100	110	010	111	011	001	101
$\psi(x)$	u	v	z	w	u	v	z	w

Tudi to je homomorfizem, saj je graf K_4 poln, praslika vsakega od vozlišč u, v, w, z pa vsebuje nesosednji (celo antipodni) vozlišči grafa Q_3. Preslikava $\psi\colon V(Q_3) \to V(K_4)$ je očitno surjektivna, ni pa se težko prepričati, da je surjektivna tudi pripadajoča preslikava $\psi\colon E(Q_3) \to E(K_4)$; na primer, povezava uv je slika kar dveh povezav iz Q_3, namreč povezave $\{000, 100\}$ in povezave $\{111, 011\}$. Zato je ψ epimorfizem.

Kompozitum dveh homomorfizmov grafov je tudi homomorfizem grafov. V našem primeru je kompozitum $\psi \circ \varphi\colon C_4 \to K_4$ homomorfizem, ki vozlišča $0, 1, 2, 3$ v tem vrstnem redu preslika v vozlišča u, v, z, w. Homomorfizem $\psi \circ \varphi$ je vložitev, ki pa ni izometrična, saj je $d_{C_4}(0, 2) = 2$, medtem ko je $d_{K_4}(u, w) = 1$.

5.10 Izomorfnost grafov

Če je $\varphi\colon V(G) \to V(G')$ bijekcija in sta $\varphi\colon G \to G'$ in $\varphi^{-1}\colon G' \to G$ homomorfizma, je φ *izomorfizem grafov* G in G'. Povedano drugače, bijektivna preslikava $\varphi\colon V(G) \to V(G')$ je izomorfizem, če in samo če za vsaki dve vozlišči $u, v \in V(G)$ velja:

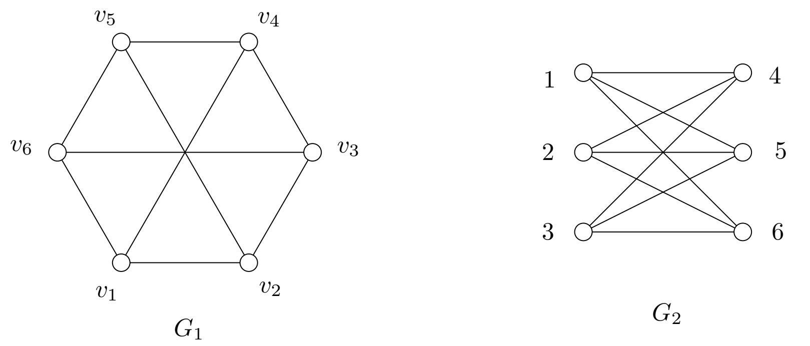
$$u \sim_G v \;\Leftrightarrow\; \varphi(u) \sim_{G'} \varphi(v).$$

Grafa G in G' sta *izomorfna*, če med njima obstaja kakšen izomorfizem; v tem primeru pišemo $G \cong G'$.

Izomorfna grafa se med seboj razlikujeta zgolj v poimenovanju vozlišč: poljuben grafu G izomorfen graf lahko dobimo iz grafa G tako, da vozlišča grafa G preimenujemo. Če nam poimenovanje vozlišč grafa ni pomembno, lahko torej izomorfne grafe med seboj kar enačimo.

Preverjanje, ali sta grafa izomorfna, je algoritmično zahtevna naloga. Če za dva grafa G in G' domnevamo, da sta izomorfna, potem to dokažemo tako, da med njima poiščemo izomorfizem.

Zgled. draft *Dokažimo, da sta grafa G_1 in G_2 s slike 5.12 izomorfna.*



Slika 5.12: Izomorfna grafa G_1 in G_2.

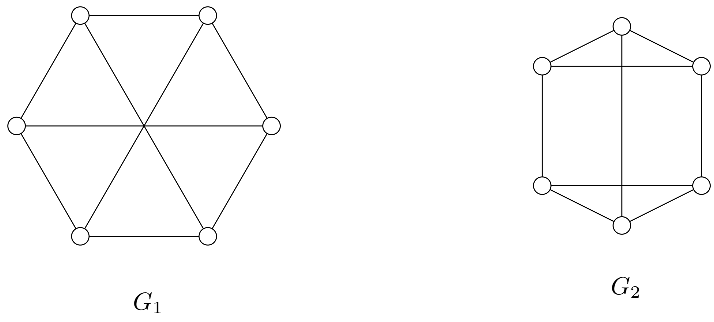
Rešitev: Graf G_2 je polni dvodelni graf z razdelitvijo $\{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$. Če želimo dokazati, da je G_1 izomorfen grafu G_2, bomo morali tudi v G_1 poiskati dvodelno razdelitev. Postopek, opisan v razdelku 5.8, nam hitro vrne dvodelno razdelitev $\{\{v_1,v_3,v_5\},\{v_2,v_4,v_6\}\}$. Opazimo tudi, da je vsako vozlišče iz prve množice razdelitve sosednje vsakemu vozlišču iz druge množice, zato je tudi G_1 polni dvodelni graf. Izomorfizem med G_1 in G_2 je poljubna preslikava iz $V(G_1)$ v $V(G_2)$, ki množico $\{v_1,v_3,v_5\}$ bijektivno preslika na množico $\{1,2,3\}$, množico $\{v_2,v_4,v_6\}$ pa bijektivno na $\{4,5,6\}$; na primer preslikava φ, podana s predpisom:

x	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$\varphi(x)$	1	4	2	5	3	6

Če za dva grafa G in G' domnevamo, da nista izomorfna, tedaj to najlažje dokažemo tako, da poiščemo neko številsko karakteristiko grafov, v kateri se G in G' razlikujeta, pri izomorfizmu pa se ohranja. Taki karakteristiki rečemo *invarianta grafa*. Preproste invariante grafov so: število vozlišč, število povezav, ožina, število podgrafov izbrane vrste (npr. trikotniki ali cikli dolžine 4), urejeno zaporedje stopnje vozlišč itd. Podobno si lahko pomagamo z lastnostjo grafov, ki jo en graf ima, drugi pa ne, a se pri izomorfizmu ohranja; taki lastnosti sta npr. povezanost in dvodelnost.

Zgled. draft *Dokažimo, da grafa G_1 in G_2 s slike 5.13 nista izomorfna.*

Rešitev: Oba grafa G_1 in G_2 sta povezana, imata šest vozlišč, devet povezav in sta 3-regularna. Teh invariant torej ne moremo uporabiti za dokaz, da nista izomorfna. Opazimo pa, da ima graf G_2 cikle dolžine 3



Slika 5.13: Neizomorfna grafa G_1 in G_2.

(njegova ožina je 3), graf G_1 pa ne (njegova ožina je 4). Grafa torej nista izomorfna. Prav tako bi lahko opazili, da je graf G_1 dvodelen, graf G_2 pa ne.

5.11 Grupa avtomorfizmov grafa

Izomorfizmu $\varphi\colon G \to G$ grafa G vase rečemo tudi *avtomorfizem grafa*. Množico vseh avtomorfizmov grafa G označimo z $\mathrm{Aut}(G)$. Če $\mathrm{Aut}(G)$ opremimo z operacijo komponiranja preslikav, dobimo grupo, ki ji pravimo *grupa avtomorfizmov* grafa G.

Določati grupo avtomorfizmov grafa je načeloma težak problem, za nekatere posebne družine grafov pa je naloga dokaj lahka. Oglejmo si nekaj primerov.

Grupa avtomorfizmov polnega grafa K_V je kar grupa, ki vsebuje vse permutacije množice V, torej simetrična grupa množice V.

Poiščimo sedaj grupo avtomorfizmov cikla C_n. Spomnimo se, da je $V(C_n) = \mathbb{Z}_n$ in $E(C_n) = \{i(i+1) \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$. Brez težav preverimo, da je za vsak $i \in \mathbb{Z}_n$ permutacija $\rho_i\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\rho_i(x) = i + x$, avtomorfizem cikla C_n. Če si C_n predstavljamo kot pravilni n-kotnik, potem avtomorfizem ρ_i ustreza vrtenju cikla okoli njegovega težišča za kot $2i\pi/n$. Podobno je za poljuben $i \in \mathbb{Z}_n$ permutacija $\tau_i\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\tau_i(x) = i - x$ avtomorfizem grafa C_n, ki ustreza zrcaljenju n-kotnika preko simetrale daljice med ogliščema 0 in i (za $i = 0$ pa ustreza zrcaljenju preko premice, ki poteka skozi 0 in deli n-kotnik na pol). Množica avtomorfizmov ρ_i in τ_i, $i \in \mathbb{Z}_n$, tvori diedrsko grupo D_n moči $2n$, zato je D_n podgrupa grupe $\mathrm{Aut}(C_n)$. Dokažimo, da je D_n kar enaka grupi $\mathrm{Aut}(C_n)$.

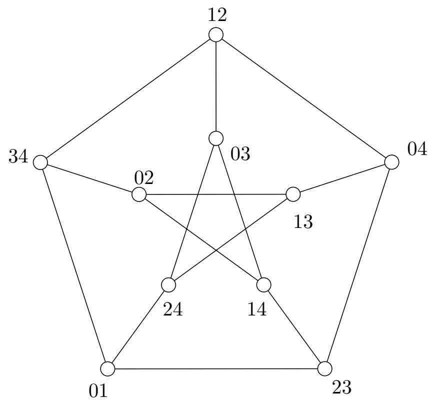
Naj bo φ poljuben avtomorfizem grafa C_n in naj bo $i = \varphi(0)$. Ker je vozlišče 1 sosed vozlišča 0, je tudi $\varphi(1)$ sosed vozlišča i, in je zato enak $i+1$ ali $i-1$ (vse operacije so seveda računane po modulu n).

Če je $\varphi(1) = i+1$, tedaj je $\varphi(2)$, kot sosed $\varphi(1)$, bodisi enak i bodisi $i+2$. Vendar ker je i že enak sliki $\varphi(0)$ in je φ bijektivna preslikava, prva možnost vodi do protislovja, zato je $\varphi(2) = i+2$. Z enakim razmislekom potem sledi, da je $\varphi(3) = i+3$, $\varphi(4) = i+4$ in v splošnem, $\varphi(x) = i+x$ za vsak $x \in \mathbb{Z}_n$. V tem primeru je torej φ enak avtomorfizmu ρ_i. Če pa je $\varphi(1) = i-1$, tedaj je po podobnem premisleku kot zgoraj $\varphi(2) = i-2$ in v splošnem $\varphi(x) = i-x$. V tem primeru je torej φ enak zrcaljenju τ_i. S tem smo dokazali, da je $\mathrm{Aut}(C_n) = D_n$.

Nekoliko zanimivejše je določanje grupe avtomorfizmov Petersenovega grafa $\mathrm{Pet} = P_{5,2}$, za katero se izkaže, da je izomorfna simetrični grupi S_5. Najprej opazimo, da lahko Petersenov graf predstavimo takole:

$$V(\mathrm{Pet}) = \{\{i,j\} : i,j \in \mathbb{Z}_5, i \neq j\}, \quad \{i,j\} \sim \{s,t\} \Leftrightarrow \{i,j\} \cap \{s,t\} = \emptyset.$$

Sedaj je očitno, da vsaka permutacija σ množice $\mathbb{Z}_5$ porodi avtomorfizem $\tilde{\sigma}$



Slika 5.14: Petersenov graf z vozlišči kot pari elementov iz $\mathbb{Z}_5$.

grafa Pet, ki je definiran s predpisom $\tilde{\sigma}(\{i,j\}) = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$. Na ta način smo simetrično grupo S_5 vložili v grupo Aut(Pet).

Z razmislekom, ki temelji na nekaterih osnovnih pojmih iz teorije delovanj grupe na množici, se da dokazati, da Petersenov graf ne premore drugih avtomorfizmov. Z drugimi besedami, velja $\mathrm{Aut}(\mathrm{Pet}) \cong S_5$.

Kot smo videli pri zgornjih zgledih, določanje grupe avtomorfizmov grafa poteka v dveh korakih: Najprej poiščemo dovolj avtomorfizmov, da zanje domnevamo, da tvorijo celotno grupo avtomorfizmov. V drugem koraku dokažemo, da drugih avtomorfizmov ni.

5.12 Operacije z grafi

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj operacij z grafi, ki nam omogočajo iz danih grafov zgraditi nove. Omejili se bomo zgolj na najosnovnejše operacije, s katerimi se bomo srečevali v nadaljevanju.

Komplementarni graf

Komplement $\overline{G}$ grafa G je graf z isto množico vozlišč kot G in z dvema vozliščema sosednjima v $\overline{G}$, če in samo če nista sosednji v grafu G. Iz definicije neposredno sledi, da je operacija komplementiranja grafov involucija:

$$\overline{(\overline{G})} = G.$$

Dokažimo naslednjo preprosto trditev o komplementarnih grafih.

TRDITEV 5.9. *Če graf G ni povezan, potem je* $\mathrm{diam}(\overline{G}) \leq 2$.

DOKAZ: Denimo, da graf G ni povezan. Vzemimo par različnih vozlišč $u, v \in V(\overline{G})$. Če u in v ležita v isti komponenti za povezanost grafa G, potem vzemimo poljubno vozlišče w kake komponente grafa G, v kateri u in v ne ležita. Tedaj $u \not\sim_G w \not\sim_G v$, in zato $u \sim_{\overline{G}} w \sim_{\overline{G}} v$. To pa pomeni, da sta u in v v grafu $\overline{G}$ na razdalji največ 2.
Če pa u in v ne ležita v isti komponenti za povezanost grafa G, potem v G nista sosednja, kar pomeni, da sta sosednja v $\overline{G}$. Tudi v tem primeru torej velja $d_{\overline{G}}(u, v) \leq 2$. □

Ta trditev ima naslednjo dobro znano in koristno posledico.

POSLEDICA 5.10. *Za poljuben graf G je vsaj eden od grafov G in $\overline{G}$ povezan.*

Odstranjevanje vozlišč in povezav

Naj bo G graf in $U \subset V(G)$. Podgraf grafa G, ki je induciran na množici vozlišč $V(G) \setminus U$, označimo z $G - U$ in rečemo, da je $G - U$ dobljen iz G z odstranitvijo vozlišč iz U; seveda smo morali pri tem odstraniti tudi vse povezave, ki imajo vsaj eno krajišče v U.

Podobno, če je $F \subseteq E(G)$, potem z $G - F$ označimo vpet podgraf grafa G, katerega množica povezav je $E(G) \setminus F$. Graf $G - F$ torej dobimo iz G tako, da iz njega odstranimo povezave iz F. Kadar odstranimo le eno vozlišče oziroma povezavo, oklepaje izpuščamo (pišemo $G - x$ namesto $G - \{x\}$).

Kot smo omenili, je vsak vpet podgraf grafa G enak grafu $G - F$ za neko množico povezav F grafa G. Splošneje, vsak podgraf grafa G je enak grafu

$(G - U) - F$, kjer je U neka množica vozlišč in F neka množica povezav grafa G. V primeru, ko je F prazna množica, je podgraf $G - U$ induciran.

Skrčitev povezav in minorji

Naj bo e povezava grafa G. Z G/e označimo graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da identificiramo krajišči povezave e in odstranimo zanko (ta nastane iz povezave e) ter morebitne vzporedne povezave (te nastanejo, če je povezava e vsebovana v trikotnikih grafa G). Pri tem rečemo, da smo G/e dobili s *skrčitvijo povezave e*.

Formalno lahko graf G/e definiramo tako, da za njegovo množico vozlišč vzamemo množico $V(G) \setminus \{u, v\} \cup \{e\}$, kjer sta u in v krajišči povezave e, za množico povezav pa $(E(G) \setminus F) \cup K$, kjer so F vse povezave grafa G, ki se v G dotikajo kakega od vozlišč u in v, množica K pa vsebuje vse povezave oblike ew, kjer je w sosed kakega od vozlišč u in v v grafu G.

Če sta e_1 in e_2 dve različni povezavi grafa G, potem ni težko videti, da je graf $(G/e_1)/e_2$ izomorfen grafu $(G/e_2)/e_1$. Pri tem moramo v primeru, da imata e_1 in e_2 kako skupno krajišče (torej če je $e_1 = uv$ in $e_2 = vw$), povezavo e_2 v grafu G/e_1 interpretirati kot povezavo e_1w grafa G/e_1 in podobno povezavo e_1 v grafu G/e_2 kot povezavo ue_2 grafa G/e_2. V tem smislu lahko za poljubno množico povezav $F = \{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$ grafa G definiramo graf $G/F = (\ldots((G/e_1)/e_2)/\ldots)/e_t$.

Opozorimo še, da je včasih operacijo krčenja povezav primerneje opazovati na razredu multigrafov namesto na razredu grafov. V tem primeru potem, ko povezavo skrčimo, morebitnih nastalih vzporednih povezav ne odstranjujemo. Tako bomo na primer postopali v razdelku 5.14.

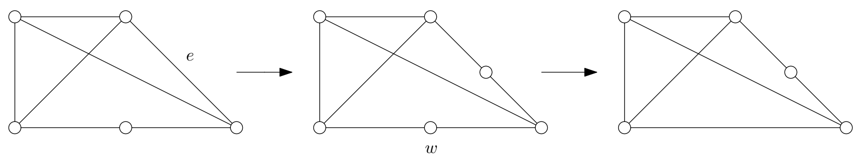
Graf M je *minor* (tudi *podrejeni graf*) grafa G, če ima graf G podgraf H in množico povezav $F \subseteq E(H)$, za katero je M izomorfen grafu H/F (pri tem je množica F lahko tudi prazna in tako M kar podgraf grafa G). Če v Petersenovem grafu skrčimo napere, dobimo polni graf K_5, torej je K_5 minor Petersenovega grafa in zato tudi minor vsakega grafa, ki vsebuje Petersenov graf kot svoj podgraf.

Subdivizije povezav in glajenje vozlišč

Če v grafu G povezavo e nadomestimo s potjo dolžine 2, pravimo, da smo povezavo e *subdividirali*. Dobljeni graf označimo z $G^+(e)$. Formalno lahko graf $G^+(e)$ definiramo tako, da za njegovo množico vozlišč vzamemo množico $V(G) \cup \{v_0\}$, kjer je v_0 element, ki ni vsebovan v $V(G)$, za množico povezav pa $(E(G) \setminus \{e\}) \cup \{uv_0, v_0v\}$, kjer sta u in v krajišči povezave e. Opazimo, da je stopnja "novega" vozlišča v_0 v grafu $G^+(e)$ enaka 2.

Graf H je *subdivizija* grafa G, če ga dobimo iz grafa G z zaporedjem subdivizij posameznih povezav. Neformalno si lahko subdivizije grafa G predstavljamo kot grafe, ki jih dobimo iz G, če nekatere povezave grafa G nadomestimo s potmi dolžine vsaj 2 (različne povezave lahko nadomestimo z različno dolgimi potmi). Grafa G in G' sta *homeomorfna*, če obstaja graf, ki je subdivizija tako grafa G kot grafa G'. Vsaka subdivizija grafa G je homeomorfna grafu G.

Subdiviziji obratna operacija je glajenje vozlišč stopnje 2. Denimo, da je w vozlišče stopnje 2 v grafu G in da sta u in v njegova soseda. Tedaj lahko definiramo graf $G^-(w)$ tako, da vozlišče w odstranimo, pot uwv v grafu G pa nadomestimo s povezavo med u in v. Rečemo, da je graf $G^-(w)$ dobljen iz G z *glajenjem vozlišča* w. Če povezavo e grafa G najprej subdividiramo, nato pa "novo" vozlišče (ki je stopnje 2 po definiciji) zgladimo, dobimo ponovno graf, ki je izomorfen grafu G. Podobno: če grafu G zgladimo vozlišče stopnje 2, nato pa "novo" povezavo subdividiramo, dobimo grafu G izomorfen graf.



Slika 5.15: Subdividiranje in glajenje.

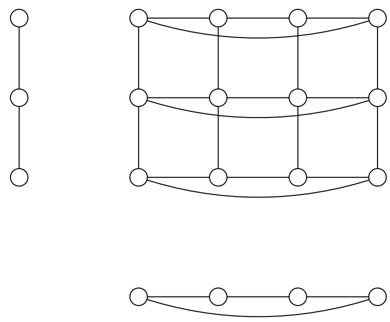
Kartezični produkt

V teoriji grafov poznamo več produktnih konstrukcij, ki za dana grafa G_1 in G_2 vrnejo "produktni graf" G, katerega množica vozlišč je kar kartezični produkt $V(G_1) \times V(G_2)$ množic vozlišč grafov G_1 in G_2. Te konstrukcije se torej med seboj razlikujejo v definiciji množice povezav. V tem podrazdelku si bomo ogledali eno izmed teh konstrukcij, imenovano kartezični produkt.

Kartezični produkt grafov $G_1 = (V_1, E_1)$ in $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf $G = G_1 \square G_2$ z množico vozlišč $V(G) = V_1 \times V_2$ in relacijo sosednosti $\sim$ določeno s predpisom

$$(u_1, v_1) \sim_G (u_2, v_2) \iff (u_1 \sim_{G_1} u_2 \ \wedge\ v_1 = v_2) \vee (u_1 = u_2 \ \wedge\ v_1 \sim_{G_2} v_2)\,.$$

Na sliki 5.16 si lahko ogledamo kartezični produkt cikla C_4 in poti P_3 – za lažjo predstavo sta "faktorja" C_4 in P_3 narisana pod oziroma levo od produktnega grafa. Opazimo, da se vsak od faktorjev v produktnem



Slika 5.16: Kartezični produkt $C_4 \Box P_3$.

grafu pojavi kot induciran podgraf vsaj tolikokrat, kolikor je število vozlišč drugega faktorja. Res, če je $v \in V(G_1)$, tedaj je podgraf grafa $G_1 \Box G_2$, induciran z množico vozlišč $\{v\} \times V(G_2)$, izomorfen grafu G_2. Podobno je za vsako vozlišče $u \in V(G_2)$ graf G_1 izomorfen podgrafu, induciranemu z množico vozlišč $V(G_1) \times \{u\}$. Kartezični produkt grafov ima nekaj lastnosti, ki nas spominjajo na običajni produkt naravnih števil:

TRDITEV 5.11. *Naj bodo G_1, G_2 in G_3 poljubni grafi in naj bo K_1 polni graf z enim vozliščem. Tedaj velja naslednje:*

- $G_1 \Box G_2 \cong G_2 \Box G_1$*;*
- $(G_1 \Box G_2) \Box G_3 \cong G_1 \Box (G_2 \Box G_3)$*;*
- $G_1 \Box K_1 \cong G_1$*.*

DOKAZ: Izomorfizme med zgornjimi pari grafov je lahko najti. Za izomorfizem iz $G_1 \Box G_2$ v $G_2 \Box G_1$ vzamemo preslikavo, ki vozlišče (v_1, v_2) grafa $G_1 \Box G_2$ preslika v vozlišče (v_2, v_1) grafa $G_2 \Box G_1$. Bralec se bo z lahkoto prepričal, da gre za bijektivno preslikavo, ki ohranja sosednost in nesosednost.
Za izomorfizem iz $(G_1 \Box G_2) \Box G_3$ v $G_1 \Box (G_2 \Box G_3)$ vzamemo preslikavo, ki vozlišče $((v_1, v_2), v_3)$, $v_i \in V(G_i)$ za $i = 1, 2, 3$, prvega grafa preslika v vozlišče $(v_1, (v_2, v_3))$ drugega grafa. Tudi tu je dokaz, da gre za izomorfizem, stvar potrpežljive uporabe definicij.
Bralcu prepustimo tudi premislek, da je preslikava $\varphi\colon G_1 \to G_1 \Box K_1$, $\varphi\colon v \mapsto (v, v_0)$, kjer je v_0 edino vozlišče grafa K_1, izomorfizem iz G_1 v $G_1 \Box K_1$. $\Box$

Zgornjo trditev lahko povzamemo v algebraičnem jeziku tudi takole: *Množica izomorfnostnih razredov grafov skupaj z operacijo kartezičnega produkta tvori komutativen monoid.*

Lastnost asociativnosti nam omogoča, da definiramo pojem *kartezične potence grafa*. Za graf G in naravno število n naj bo

$$G^{\square d} = \underbrace{G \square G \square \cdots \square G}_{d \text{ kopij}}.$$

Za zaključek dodajmo, da se več pomembnih družin grafov izraža kot kartezični produkt manjših grafov. Tako so, na primer, hiperkocke izomorfne kartezični potenci polnega grafa K_2, $Q_d = K_2^{\square d}$, prizme pa so izomorfne produktom $C_n \square K_2$.

5.13 Prerezna vozlišča in k-povezanost

Vozlišče v grafa G je *prerezno vozlišče*, če ima graf $G - v$ več komponent za povezanost kot graf G. Podobno definiramo pojem prerezne povezave: povezava e grafa G je *prerezna povezava* (tudi *most*), če ima graf $G - e$ več komponent za povezanost kot graf G.

Spomnimo se, da $\Omega(G)$ označuje število povezanih komponent grafa G. Pojma prereznega vozlišča in prerezne povezave lahko posplošimo s posameznega vozlišča ali povezave na množico vozlišč ali povezav takole: Množica $S \subseteq V(G)$ je *prerez* grafa G, če velja $\Omega(G - S) > \Omega(G)$. Podobno: množica $F \subseteq E(G)$ je *povezavni prerez* grafa G, če velja $\Omega(G - F) > \Omega(G)$.

Povezan graf G je *k-povezan*, če ima vsaj $k + 1$ vozlišč in ne premore nobenega prereza moči strogo manj kot k. Če je graf G k-povezan, je seveda tudi ℓ-povezan za vsako naravno število $\ell \leq k$. Največje število k, za katero je graf G k-povezan, imenujemo *povezanost* grafa G in ga označimo s $\kappa(G)$. Iz definicije sledi, da graf bodisi nima nobenega prereza (v tem primeru je graf poln, kot se z lahkoto dokaže), ali pa ima njegov najmanjši prerez natanko $\kappa(G)$ vozlišč.

Brez težav se prepričamo, da je povezanost ciklov C_n, $n \geq 4$, enaka 2, saj C_n res nima prereznega vozlišča, ima pa prerez velikosti 2. Podobno vidimo, da je $\kappa(K_n) = n - 1$, saj K_n nima nobenega prereza, zato je njegova povezanost navzgor omejena s tehnično zahtevo, da mora k-povezan graf imeti vsaj $k + 1$ vozlišč. Dalje, ni se težko prepričati, da je $\kappa(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$.

S pojmom povezanosti je tesno povezan *Mengerjev izrek*. Obstaja več različic tega izreka, morda najbolj osnovna pa je naslednja, ki jo bomo tu navedli brez dokaza (najdemo ga lahko v [11, izrek 4.2.17]).

Izrek 5.12 (Mengerjev izrek). *Naj bosta u in v dve nesosednji vozlišči povezanega grafa G. Tedaj je največje število notranje disjunktnih poti med u in v (torej poti, ki razen vozlišč u in v nimajo nobenih drugih skupnih vozlišč) v grafu G enako moči najmanjšega prereza S, za katerega sta vozlišči u in v v različnih komponentah grafa $G - S$.*

Mengerjev izrek ima več pomembnih posledic. Mednje sodi tudi spodnja karakterizacija k-povezanih grafov.

Izrek 5.13 (Opis k-povezanih grafov). *Naj bo G graf z vsaj $k+1$ vozlišči. Graf G je k-povezan natanko tedaj, ko za vsak par različnih vozlišč $u, v \in V(G)$ obstaja vsaj k notranje disjunktnih poti med u in v.*

S pomočjo Mengerjevega izreka lahko dokažemo naslednjo karakterizacijo 2-povezanih grafov.

Trditev 5.14. *Naj bo G povezan graf z vsaj tremi vozlišči. Tedaj so naslednje trditve ekvivalentne:*

(1) *graf G je 2-povezan;*

(2) *vsak par vozlišč grafa G leži na kakem skupnem ciklu;*

(3) *vsak par povezav grafa G leži na kakem skupnem ciklu.*

5.14 Drevesa

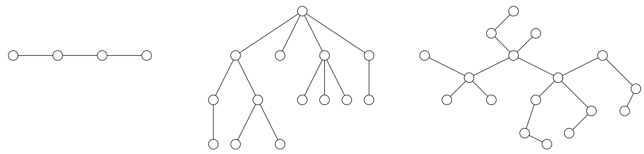
Povezanost grafov je pomemben pojem tako s teoretičnega kot s praktičnega vidika. Na primer, kadar z grafom ponazorimo omrežje (računalniško, cestno ali kako drugo), nam povezanost pove, da lahko katerikoli del omrežja komunicira s katerimkoli drugim delom omrežja. Po drugi strani pa izgradnja in vzdrževanje povezav v omrežju predstavlja strošek, ki ga želijo načrtovalci omrežij minimizirati. Zato so posebej zanimivi grafi, ki so "ravno še povezani". Takih grafom rečemo drevesa.

Natančneje: rečemo, da je graf *drevo*, če je povezan in ne vsebuje nobenega cikla. Med drevesa tako sodijo poti P_n in polni dvodelni grafi $K_{1,n}$, pa tudi vrsta drugih grafov.

Navedimo sedaj nekaj karakterizacij pojma drevesa. Spomnimo se, da povezavi e grafa G rečemo most, če in samo če ima graf $G-e$ več komponent za povezanost kot graf G.

Trditev 5.15. *Za poljuben graf G so ekvivalentne naslednje trditve:*

(1) *G je drevo;*



Slika 5.17: Nekaj dreves.

(2) *med poljubnima vozliščema grafa G obstaja natanko ena pot;*

(3) *G je povezan, vsaka njegova povezava pa je most;*

(4) *G je povezan, velja $|E(G)| = |V(G)| - 1$;*

(5) *G ne vsebuje cikla, velja $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*

DOKAZ: Dokaz poteka z indukcijo po številu vozlišč. Trditev očitno drži za vse grafe na največ dveh vozliščih (takšni grafi so samo trije, K_1 ter K_2 in njegov komplement). Naj bo $n \geq 3$ in denimo, da trditev drži za vse grafe na manj kot n vozliščih. Dokažimo, da trditev tedaj velja tudi za poljuben graf G na n vozliščih.

(1) $\Rightarrow$ (2): Predpostavimo, da je G drevo, torej povezan graf brez ciklov. Naj bosta u in v poljubni vozlišči grafa G. Zaradi povezanosti grafa G obstaja med u in v vsaj ena pot. Če bi med njima obstajala dve poti, bi po lemi 5.5 graf G premogel cikel, kar pa je protislovje. Med u in v torej obstaja natanko ena pot.

(2) $\Rightarrow$ (3): Naj bo e poljubna povezava grafa G in naj bosta u in v njeni krajišči. Tedaj je uv edina pot med u in v in zato v grafu $G - e$ ni nobene poti med u in v. Torej G ni povezan, kot smo želeli dokazati.

(3) $\Rightarrow$ (4): Predpostavimo, da je G povezan, za poljubno povezavo $e \in E(G)$ pa je $G-e$ nepovezan. Dokazujemo enakost $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Izberimo povezavo e. Tedaj je $G - e$ unija povezanih komponent X in Y (premisli, da sta povezani komponenti res dve in ne morda tri ali več). Grafa X in Y sta povezana, če pa odstranimo kakšno njuno povezavo, razpadeta (saj če ne bi razpadla, tudi graf G ob odstranitvi te iste povezave ne bi razpadel). Grafa X in Y sta torej grafa, ki zadoščata točki (3), hkrati pa imata manj kot n vozlišč. Zato lahko uporabimo indukcijsko predpostavko in dobimo $|E(X)| = |V(X)| - 1$ in $|E(Y)| = |V(Y)| - 1$. Tedaj pa velja

$$|E(G)| = |E(X)| + |E(Y)| + 1 = (|V(X)| - 1) + (|V(Y)| - 1) + 1 = |V(G)| - 1,$$

kot smo želeli dokazati.

(4) $\Rightarrow$ (5): Predpostavimo, da je G povezan in da zadošča pogoju $|E(G)| =$

$|V(G)|-1$. Dokazujemo, da G nima ciklov. Pa recimo, da v grafu G obstaja cikel C. Za vsak $v \in V(G) \setminus V(C)$ poiščemo prvo povezavo e_v na kaki najkrajši poti med v in C; označimo dolžino takšne poti z $d(v, C)$.
Premislimo, da sta za poljubni dve različni vozlišči $u, v \in V(G) \setminus V(C)$ tudi povezavi e_u in e_v različni. Res: če je $e_u = e_v$, tedaj sta vozlišči u in v ravno krajišči povezave e_u. To pa pomeni, da neka najkrajša pot med u in C vodi skozi v, in zato je $d(u, C) > d(v, C)$. Po drugi strani pa neka najkrajša pot med v in C vodi skozi u, zato je $d(v, C) > d(u, C)$. To protislovje kaže, da je res $e_u \neq e_v$, brž ko $u \neq v$. Od tod sledi, da je $|E(G) \setminus E(C)| \geq |V(G) \setminus V(C)|$. Ker je $|E(C)| = |V(C)|$, $E(C) \subseteq E(G)$ in $V(C) \subseteq V(G)$, to pomeni, da je $|E(G)| \geq |V(G)|$, kar je v protislovju s predpostavko $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Graf G torej res ne vsebuje cikla.
(5) $\Rightarrow$ (1): Predpostavimo, da je graf G brez ciklov in da zanj velja $|E(G)| = |V(G)|-1$. Dokazati moramo, da je G povezan. Naj bodo $X_1, \ldots, X_k$, $k \geq 2$, komponente za povezanost. Vsak izmed grafov X_i zadošča točki (1), zato (po že dokazanem) zadošča tudi pogojem (2), (3), (4) in (5). Tedaj pa je $|E(X_i)| = |V(X_i)| - 1$. Po drugi strani pa velja

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E(X_i)| = \sum_{i=1}^{k} |V(X_i)| - k = |V(G)| - k.$$

Ker je $|E(G)| = |V(G)| - 1$, sledi $k = 1$, torej je G povezan. □

Posledica 5.16. *Drevo z vsaj dvema vozliščema vsebuje vsaj dve vozlišči stopnje* 1.

Dokaz: Naj bo G drevo in naj bo $n = |V(G)|$. Denimo, da trditev ne velja. Tedaj ima vsaj $n-1$ vozlišč stopnjo vsaj 2. Če ima natanko $n-1$ vozlišč stopnjo vsaj 2, ima preostalo vozlišče stopnjo 1, saj bi sicer tvorilo komponento za povezanost; sicer ima vseh n vozlišč stopnjo vsaj 2. V vsakem primeru iz trditve 5.15 in iz leme o rokovanju sledi

$$n - 1 = |E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq \frac{1}{2}(2(n-1)+1) = n - \frac{1}{2},$$

kar je protislovje. □

Opomba. Spomnimo se, da vozlišču stopnje 1 rečemo tudi *list* grafa. Zgornja posledica torej pravi, da ima drevo vsaj dva lista. Če ima drevo natanko dva lista, potem se neenakost v dokazu zgornje trditve izide le, če ima vsako drugo vozlišče stopnjo natanko 2. Takšen graf je izomorfen poti.

Posledica 5.16 nam omogoča, da marsikatero trditev o drevesih dokažemo z indukcijo po številu vozlišč. Za zgled dokažimo naslednjo trditev, ki neformalno povedano pravi, da vsako drevo zraste iz semena z rastjo vej. Za graf, ki ga dobimo iz danega grafa G tako, da mu dodamo novo vozlišče in povezavo od tega vozlišča do kakega vozlišča iz G, rečemo, da je dobljen iz G z *dodajanjem novega vozlišča.*

TRDITEV 5.17. *Vsako drevo dobimo iz grafa K_1 z zaporednim dodajanjem novega vozlišča.*

DOKAZ: Trditev dokažimo z indukcijo po številu vozlišč. Trditev očitno velja za drevesa z enim vozliščem (torej za K_1) – v tem primeru nam ni potrebno dodati nobenega novega vozlišča. Naj bo $n \geq 2$ in naj bo G drevo z n vozlišči. Predpostavimo, da trditev velja za vsa drevesa z manj kot n vozlišči. Kot pravi posledica 5.16, ima drevo G list, recimo mu v. Naj bo u edini sosed vozlišča v in definirajmo $H = G - v$. Očitno je drevo G dobljeno iz grafa H z dodajanja novega vozlišča. Zadošča torej dokazati, da je H dobljen iz K_1 z zaporednim dodajanja novega vozlišča.

Graf H je povezan, saj je skupaj z vsakima dvema vozliščema v grafu H vsebovana tudi vsaka pot med njima v grafu G. Po drugi strani pa graf H ne vsebuje cikla, saj bi sicer cikel vseboval že graf G. To pa pomeni, da je H drevo. Ker ima H manj kot n vozlišč, zanj lahko uporabimo indukcijsko predpostavko in zaključimo, da je H dobljen iz K_1 z zaporednim dodajanjem novega vozlišča. □

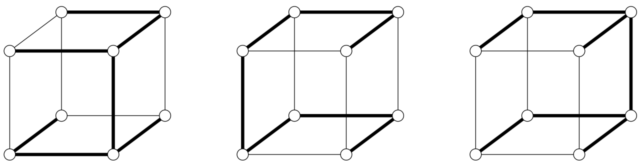
5.15 Vpeta drevesa

Vpet podgraf grafa G, ki je drevo, se imenuje *vpeto drevo* grafa G. Vpeta drevesa imajo med vsemi podgrafi grafa G najmanj povezav, saj vsa vsebujejo $|V(G)| - 1$ povezav, graf na n vozliščih in z manj kot $n-1$ povezavami pa – kot pokaže tudi naslednja trditev – ne more biti povezan.

TRDITEV 5.18. *Graf je povezan, če in samo če vsebuje vpeto drevo.*

DOKAZ: Če graf vsebuje vpeto drevo, obstaja pot med poljubnima dvema vozliščema grafa že v vpetem drevesu. Zato je tak graf povezan. Naj bo sedaj G povezan graf. Če je G drevo, je trditev dokazana. Sicer obstaja povezava e, ki ni most, torej za katero je $G - e$ povezan. Odstranimo e iz G in postopek nadaljujemo, dokler ne dobimo (vpetega) drevesa. □

Povezan graf, ki ni drevo, ima več kot eno vpeto drevo. *Število vpetih dreves* v grafu G označimo s $\tau(G)$. Parameter $\tau(G)$ v nekem smislu meri



Slika 5.18: Nekaj vpetih dreves kocke Q_3. Ožje povezave so v kocki in ne v vpetem drevesu, krepkejše pa v obeh.

odpornost grafa G proti razpadu na več komponent pri odstranjevanju povezav: več kot imamo na razpolago vpetih dreves, težje z odstranjevanjem povezav prekinemo vsa vpeta drevesa in s tem razbijemo graf G na več povezanih komponent. Tovrstni koncepti odpornosti grafa proti razpadu so zelo pomembni tako s praktičnega kot s teoretičnega vidika. O njih smo že govorili v razdelku 5.13.

Pri računanju števila $\tau(G)$ je priročno razširiti naš pogled na družino multigrafov. Za povezavo e multigrafa G naj $G-e$ označuje multigraf, ki ga dobimo iz G z odstranitvijo povezave e, G/e pa multigraf, ki ga dobimo iz G, če povezavo e skrčimo, tj. identificiramo njeni krajišči (pri tem obdržimo morebitne novo nastale vzporedne povezave, ne pa tudi zanke, ki nastane iz e).

TRDITEV 5.19. *Naj bo e poljubna povezava multigrafa G. Tedaj velja*

$$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G/e).$$

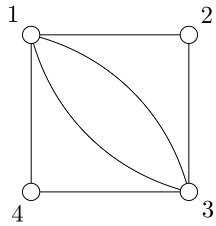
DOKAZ: Vpetih dreves multigrafa G, ki povezave e ne vsebujejo, je natanko toliko kot vpetih dreves multigrafa $G-e$. Po drugi strani pa iz vpetega drevesa multigrafa G, ki vsebuje povezavo e, s skrčitvijo te povezave dobimo vpeto drevo multigrafa G/e. Ta postopek nam očitno da bijekcijo med vpetimi drevesi multigrafa G, ki vsebujejo povezavo e, z vpetimi drevesi multigrafa G/e. □

Število vpetih dreves grafa lahko preštejemo s pomočjo linearne algebre. V ta namen potrebujemo pojem Laplaceove matrike grafa.

Laplaceova matrika $L(G)$ multigrafa G je kvadratna matrika, katere stolpci in vrstice so indeksirani z vozlišči grafa, v presečišču vrstice u in stolpca v, $u \neq v$, je $-a_{uv}$, kjer je a_{uv} število povezav med u in v, diagonalni element na presečišču vrstice in stolpca, indeksiranega z vozliščem v, pa je enak stopnji vozlišča v, pri čemer zank grafa ne štejemo. Za graf G na sliki

5.19 je torej

$$L(G) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$



Slika 5.19: Graf G.

IZREK 5.20 (Kirchhoffov izrek). *Število vpetih dreves multigrafa G je enako determinanti matrike, ki jo dobimo iz $L(G)$ tako, da odstranimo vrstico in stolpec, ki pripadata nekemu vozlišču v.*

DOKAZ: Razmislimo najprej naslednje: če je A matrika velikosti $n \times n$, $A^{(j)}$ matrika, ki jo dobimo iz A, če izbrišemo j-to vrstico in j-stolpec, in E_{jj} matrika, ki ima na položaju (j, j) enico, drugod pa ničle, potem je

$$\det(A + E_{jj}) = \det A + \det A^{(j)}.$$

To najlažje vidimo, če primerjamo razvoja determinante matrik $A + E_{jj}$ in A po j-ti vrstici. Opazimo, da dobimo različen prispevek le takrat, ko vzamemo element v j-tem stolpcu (ki je enkrat $a_{jj} + 1$, drugič pa a_{jj}) in ga pomnožimo z determinanto matrike $A^{(j)}$. Razlika v doprinosu je ravno $\det A^{(j)}$.

Nadalje opazimo, da je vsota vseh vrstic v $L(G)$ enaka 0: v stolpcu, ki pripada vozlišču v, vsaka povezava med u in v prispeva -1 v vrstici, ki pripada vozlišču u, in 1 v vrstici, ki pripada vozlišču v. To pomeni, da je matrika $L(G)$ izrojena in da je zato $\det L(G) = 0$.

Uporabimo indukcijo po številu povezav grafa G. Če je $|E(G)| = 0$, je G prazni graf $\overline{K}_n$. Če je $n = 1$, ima $\overline{K}_n$ eno vpeto drevo, sicer jih nima. Po drugi strani je $L(\overline{K}_n)$ ničelna matrika velikosti $n \times n$, če ji odstranimo vrstico in stolpec, dobimo ničelno matriko velikosti $(n-1) \times (n-1)$, ki ima determinanto enako 0, razen če je $n = 1$, ko je 1 (kot determinanta prazne matrike). To dokaže bazo indukcije.

Naredimo sedaj indukcijski korak. Predpostavimo, da je $|E(G)| > 0$ in da Kirchhoffov izrek velja za vse grafe, ki imajo manj povezav kot G. Naj bo v poljubno vozlišče. Če v nima sosedov, je G nepovezan graf in $\tau(G) = 0$. Hkrati je matrika $L(G)^{(v)}$ (torej matrika $L(G)$, ki ji izbrišemo vrstico in stolpec, ki pripadata vozlišču v) enaka $L(G - v)$, katere determinanta je po zgornjem razmisleku enaka 0.
Ogledati si moramo še primer, ko v G obstaja povezava e med v in nekim drugim vozliščem u. Po prejšnji trditvi je $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G/e)$. Tako $G-e$ kot G/e imata manj povezav kot G, zato je po indukcijski predpostavki $\tau(G - e) = \det L(G - e)^{(v)}$ in $\tau(G/e) = \det L(G/e)^{(v)}$. Pri tem v grafu G/e vozlišče, ki ga dobimo z identifikacijo v in u, spet imenujemo v.
Enostavno je videti, da je $L(G)^{(v)} = L(G-e)^{(v)} + E_{uu}$. Po prvem razmisleku v dokazu je zato

$$\det L(G)^{(v)} = \det L(G - e)^{(v)} + \det \Big(L(G - e)^{(v)}\Big)^{(u)}.$$

Ker je $\big(L(G - e)^{(v)}\big)^{(u)} = L(G/e)^{(v)}$, dobimo $\tau(G) = \det L(G)^{(v)}$. □

Izrek je znan tudi kot *izrek o številu vpetih dreves*. Za graf s slike 5.19 (če izbrišemo prvo vrstico in prvi stolpec) dobimo

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

Zgled. draft *Izračunajmo število vpetih dreves v polnem grafu K_n.*

Rešitev: Stopnja vsakega vozlišča je $n - 1$, vsa vozlišča so povezana med sabo (z eno povezavo), kar pomeni, da je

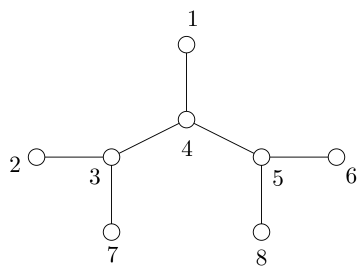
$$L(K_n) = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

Če odstranimo prvo vrstico in prvi stolpec, dobimo matriko B_n velikosti $(n - 1) \times (n - 1)$ z $n - 1$ na diagonali in -1 izven diagonale. Determinanto take matrike se da izračunati s pomočjo nekaj spretnosti pri računanju z determinantami, lahko jo pa izračunamo tudi na naslednji način. Naj bo J_n matrika velikosti $n\times n$ s samimi enicami. Očitno je ena njena lastna vrednost n (z lastnim vektorjem $(1, \ldots, 1)$). Prav tako očitno je rang te matrike enak

1, kar pomeni, da je razsežnost njenega jedra enaka $n-1$. To pomeni, da je 0 $(n-1)$-kratna lastna vrednost; skupaj z n so to vse lastne vrednosti. Lahko je videti tudi naslednje: če ima $n \times n$ matrika A lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ima $c \cdot I_n - A$ lastne vrednosti $c - \lambda_1, \ldots, c - \lambda_n$ (z istimi lastnimi vektorji kot A). To sedaj uporabimo za matriko $B_n = nI_{n-1} - J_{n-1}$. Ker ima J_{n-1} $(n-2)$-kratno lastno vrednost 0, ima B_n $(n-2)$-kratno lastno vrednost n. Ker ima J_{n-1} lastno vrednost $n-1$, ima B_n lastno vrednost $n-(n-1) = 1$. Vemo, da je determinanta enaka produktu lastnih vrednosti. To pomeni, da je

$$\tau(K_n) = \det B_n = n^{n-2}.$$

Ta rezultat je znan kot *Cayleyjev izrek*, ki ima celo vrsto lepih dokazov. Posebno znan je bijektivni dokaz s pomočjo Prüferjevega kodiranja dreves. *Prüferjev kod* drevesa z množico vozlišč $[n]$ skonstruiramo tako, da na vsakem koraku odstranimo list z najmanjšo oznako in v seznam vpišemo oznako njegovega (edinega) soseda. Končamo takrat, ko imamo v drevesu samo še dve vozlišči. Na primer, pri drevesu na sliki 5.20 po vrsti odstranimo liste $1, 2, 6, 7, 3, 4$, Prüferjev kod je $(4, 3, 5, 3, 4, 5)$.
Na ta način iz drevesa z n vozlišči skonstruiramo seznam $n-2$ števil v $[n]$, izkaže se, da je to bijekcija med množico vpetih dreves grafa K_n in množico $[n]^{n-2}$. Podrobnosti prepuščamo bralcu.



Slika 5.20: Vpeto drevo grava K_8.

Opomba. Izkaže se, da je število vpetih dreves multigrafa do predznaka enako determinanti matrike, ki jo iz $L(G)$ dobimo tako, da izbrišemo poljubno vrstico in poljuben stolpec. Natančneje, vsi kofaktorji Laplaceove matrike so enaki številu vpetih dreves grafa.
Pripomnimo še, da lahko število vpetih dreves izračunamo tudi s pomočjo lastnih vrednosti Laplaceove matrike. Naj bodo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike $L(G)$. Ker je $L(G)$ simetrična matrika, so vse lastne vrednosti realne, ker je izrojena, ima lastno vrednost 0, brez škode za splošnost je

$\lambda_n = 0$. Potem je

$$\tau(G) = \frac{1}{n}\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}.$$

Poglavje 6

Nekaj klasičnih problemov v teoriji grafov

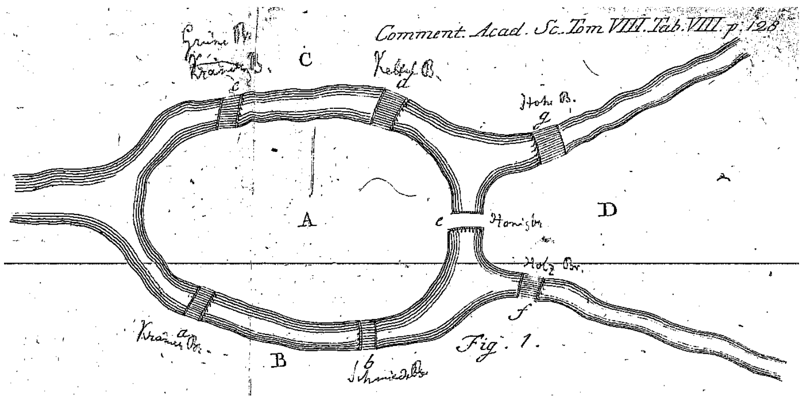
Teorija grafov je, podobno kot številne druge veje matematike, v 20. stoletju dosegla izjemen razcvet in dokazala mnoge pomembne rezultate. V tem poglavju si bomo ogledali nekaj pomembnih primerov; nekatere težje izreke bomo navedli brez dokaza.

6.1 Eulerjevi grafi

V tem in naslednjem razdelku bomo spoznali dva klasična problema iz teorije grafov, ki sprašujeta po obstoju "najbolj ekonomičnega" sprehoda po grafu, ki "obišče vse dele grafa". Pomen pojmov v narekovajih bomo natančneje pojasnili v nadaljevanju.

Ne moremo začeti drugače kot z legendo o sedmih königsberških mostovih. Königsberg, danes Kaliningrad, je mesto v Prusiji (danes del Ruske federacije), skozi katero teče reka Pregel (rusko *Pregolja*). Reka se v mestu razcepi in s tem tvori dva otoka, ki sta s celino in med seboj povezana s sedmimi mostovi (glej sliko 6.1).

Zgodba pravi, da so v začetku 18. stoletja meščani preživljali nedeljske popoldneve s sprehajanjem ob reki in po otokih, pri čemer so poskušali vsakega od sedmih mostov prehoditi natanko enkrat. Vprašanje obstoja takšnega sprehoda naj bi meščane tako vznemirjalo, da je župan bližnjega poljskega mesta Gdansk o tem poročal slovitemu matematiku Leonhardu Eulerju, ki je v tistem času živel v Petrogradu (Sankt Peterburg) v Rusiji. Euler je hitro odkril preprost dokaz, da iskanega sprehoda po mestu ne more biti. Čeprav se je ta naloga zdela Eulerju tako preprosta, da se je čudil, da



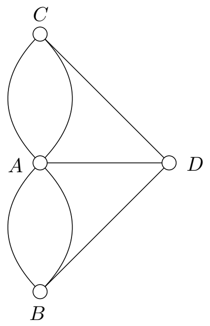
Slika 6.1: Sedem königsberških mostov, kot jih je upodobil Euler v svojem delu "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis", objavljenem leta 1741 (vir: MAA Euler Archive, `http://Eulerarchive.maa.org`).

so morali za pomoč prositi matematika, ga je vzpodbudila, da je ideje, ki jih je uporabil pri rešitvi problema königsberških mostov, razvijal dalje in s tem postavil temelje temu, čemur danes rečemo teorija grafov. Ključna misel, ki je Eulerju omogočila rešitev problema königsberških mostov, je bilo opažanje, da del sprehoda, ki ga prebivalci opravijo po ulicah med zaporednima prehodoma mostov, ne igra nobene vloge pri iskanju želenega sprehoda. To mu je omogočilo, da je oba bregova reke in vsakega od otokov "stisnil" v točko (danes bi temu rekli *vozlišče*), sedem mostov, ki povezujejo dele mesta, pa v črte (mi bi rekli *povezave*) med točkami. S tem je namesto zemljevida mesta dobil sliko, ki bi ji danes rekli graf (natančneje, multigraf), nalogo pa prevedel v iskanje sprehoda v tem grafu, ki vsako povezavo prehodi natanko enkrat (glej sliko 6.2). Če se želimo pri tem izogniti vzporednim povezavam in nalogo modelirati z enostavnimi grafi, si lahko mislimo, da vsako povezavo v multigrafu subdividiramo.

Sprehod v grafu, ki prehodi vsako povezavo natanko enkrat, se imenuje *eulerjev sprehod*, sklenjen eulerjev sprehod pa je *eulerjev obhod*. Povezan graf je *eulerjev*, če vsebuje eulerjev obhod. Kot je opazil že Euler sam, je za dani graf zelo enostavno preveriti, ali je eulerjev, saj velja naslednji izrek.

Izrek 6.1. *Povezan graf je eulerjev, če in samo če so vsa njegova vozlišča sode stopnje.*

Dokaz: Naj bo G povezan graf. Denimo, da je G eulerjev, in naj bo $S = v_0 v_1 \ldots v_{m-1} v_0$ eulerjev obhod v grafu G. Opazimo, da za vsak



Slika 6.2: Multigraf, ki modelira problem königsberških mostov.

$i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ sprehod S na i-tem koraku obišče vozlišče v_i tako, da prehodi dve povezavi, ki se dotikata v_i, namreč povezavi $v_{i-1}v_i$ in v_iv_{i+1}. Nekoliko drugače je ob začetku in na koncu sprehoda: na začetku S prehodi le eno povezavo ob v_0, namreč povezavo v_0v_1, na koncu pa le povezavo $v_{m-1}v_0$ – na začetku in na koncu skupaj torej S prav tako prehodi dve povezavi, ki se dotikata vozlišča v_0.

Ker S prehodi vsako povezavo grafa G natanko enkrat in ker se v zaporedju $v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$ zaradi povezanosti grafa G pojavi vsako vozlišče grafa G, to pomeni, da se vsakega vozlišča grafa dotika sodo mnogo povezav. S tem smo dokazali, da imajo res vsa vozlišča grafa G sodo stopnjo.

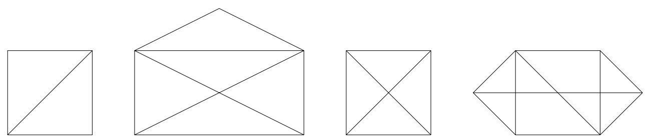
Dokažimo sedaj še, da je vsak povezan graf, v katerem ima vsako vozlišče sodo stopnjo, eulerjev. Denimo, da temu ni tako, in naj bo G protiprimer z najmanj povezavami, tj. povezan graf, v katerem ima vsako vozlišče sodo stopnjo in ki nima eulerjevega obhoda, hkrati pa ima med vsemi takimi grafi najmanj povezav.

Naj bo W najdaljši med enostavnimi sklenjenimi sprehodi v grafu G in naj bo G' graf, ki ga dobimo iz G, če odstranimo vse povezave sprehoda W. Ker G ni eulerjev, ima G' vsaj eno povezavo. Po drugi strani ima vsako vozlišče grafa G' sodo stopnjo, saj nam podoben razmislek, kot smo ga opravili v prvem delu dokaza, pove, da smo stopnjo vsakega vozlišča z odstranjevanjem povezav iz W zmanjšali za sodo število. Še več, ker je G povezan, ima vsaj eno vozlišče (denimo w) na sprehodu W v grafu G' stopnjo večjo ali enako 2. Naj bo G'' povezana komponenta grafa G', ki vsebuje to vozlišče w. Tedaj je G'' povezan graf, v katerem ima vsako vozlišče sodo stopnjo. Ker ima manj povezav kot graf G, zaradi minimalnosti grafa G lahko sklepamo, da je graf G'' eulerjev. Naj bo W'' njegov eulerjev obhod, ki se začne v vozlišču w. Če ta sklenjeni sprehod W'' vrinemo v sprehod W (sprehod W prekinemo ob prvem obisku vozlišča w, nadaljujemo po sprehodu W'' vse do konca, nato pa nadaljujemo po preostanku sprehoda W), dobimo sklenjen sprehod v G, ki je daljši od W. To pa je v protislovju z izbiro sprehoda W. $\square$

Za konec razdelka dodajmo še, da je obstoj eulerjevega sprehoda, ki ni sklenjen, prav tako enostavno preveriti. Velja namreč naslednji izrek, katerega dokaz je povsem podoben dokazu prejšnjega izreka.

IZREK 6.2. *Naj bo G povezan graf in u ter v dve različni vozlišči grafa G. Tedaj v grafu G obstaja eulerjev sprehod z začetkom v u in koncem v v, če in samo če imajo vsa vozlišča v množici $V(G) \setminus \{u, v\}$ sodo stopnjo.*

Pogosto interpretiramo problem iskanja eulerjevega sprehoda kot nalogo tipa "nariši lik z eno potezo".



Slika 6.3: Prva dva lika se da narisati z eno potezo, drugih dveh pa ne.

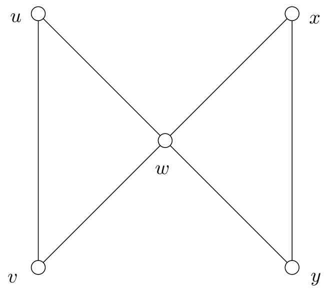
6.2 Hamiltonovi grafi

V tem razdelku si bomo ogledali iskanju eulerjevega obhoda na videz zelo podobno nalogo. Iskali bomo cikel, ki vsebuje vsa vozlišča grafa. Definirajmo najprej nekaj pojmov.

Pot P v grafu G je *hamiltonova*, če velja $V(P) = V(G)$. Cikel C v grafu G je *hamiltonov*, če velja $V(C) = V(G)$. Hamiltonova pot in cikel sta torej vpeta pot oziroma vpet cikel grafa. Graf je *hamiltonov*, če ima hamiltonov cikel.

Čeprav je definicija hamiltonovega grafa sorodna definiciji eulerjevega grafa, je prepoznavanje hamiltonovih grafov bistveno težja naloga kot pa prepoznavanje eulerjevih grafov. Znan ni noben preprost, hitro preverljiv potreben in hkrati zadosten pogoj za hamiltonskost grafa. Znanih pa je več pogojev, ki so potrebni (pa ne zadostni), in več pogojev, ki so zadostni (pa ne potrebni). V nadaljevanju si jih bomo nekaj ogledali.

Oglejmo si najprej nekaj načinov, ki nam omogočijo dokazati, da kak graf ni hamiltonov. Za zgled vzemimo najprej graf na sliki 6.4, ki mu včasih rečemo *metuljček*. Ta graf je sestavljen "iz dveh delov", levega



Slika 6.4: Metuljček kot primer grafa, ki ni hamiltonov.

(vozlišči u, v) ter desnega (vozlišči x, y), ki se stikata v skupnem vozlišču w. Vsak hamiltonov cikel (predpostavimo lahko, da se začne in konča v levem delu) bi moral prej ali slej zapustiti levi del in obiskati vozlišča v desnem delu. To lahko stori le tako, da prečka "srednje" vozlišče w. Ker pa se mora hamiltonov cikel zaključiti tam, kjer se je začel, se bo moral cikel iz desnega dela vrniti v levi del – to pa lahko spet stori le tako, da ponovno obišče vozlišče w. Ker sme hamiltonov cikel vsako vozlišče (razen začetnega) obiskati le enkrat, pa to pripelje do protislovja. Graf metuljček torej ni hamiltonov.

Seveda bi povsem analogen razmislek veljal za vsak graf, ki ima vozlišče, podobno vozlišču w, namreč vozlišče, katerega odstranitev povzroči, da graf razpade na več povezanih komponent. Spomnimo se, da takšnim vozliščem pravimo *prerezna vozlišča.* Graf, ki premore prerezno vozlišče, gotovo ni hamiltonov. S tem smo dobili naš prvi potrebni pogoj za hamiltonskost.

TRDITEV 6.3. *Če je graf G hamiltonov, potem nima prereznega vozlišča.*

Ta pogoj pa se da nekoliko izboljšati.

IZREK 6.4. *Naj bo S neprazna množica vozlišč grafa G. Če je $\Omega(G-S) > |S|$, potem G ni hamiltonov.*

DOKAZ: Naj bodo $G_1, \ldots, G_k$ povezane komponente grafa $G - S$ in naj bo $C = v_0 v_1 \ldots v_{n-1} v_0$ hamiltonov cikel grafa G. Dokazati moramo, da je $|S| \geq k$.

Za $i \in \{1, \ldots, k\}$ naj bo n_i največji indeks, za katerega je $v_{n_i} \in V(G_i)$; z drugimi besedami, vozlišče v_{n_i} je torej zadnje vozlišče na ciklu C, ki še leži v komponenti G_i. Vozlišče v_{n_i+1} tedaj ne leži v G_i, ne more pa ležati niti v kaki drugi komponenti G_j, $j \neq i$, saj med komponentami za povezanost grafa $G - S$ ni nobene povezave (premisli, zakaj!). Zato za vsak $i \in \{1, \ldots, k\}$

vozlišče v_{n_i+1} leži v množici S. Ker vozlišča v_{n_i+1}, $i \in \{1, \dots, k\}$, ležijo na ciklu C, so paroma različna, in zato je $|S| \geq k$. $\square$

Zgornji potrebni pogoj za hamiltonskost grafa pa žal ni tudi zadostni pogoj, kot kaže primer Petersenovega grafa. Kot se lahko s potrpežljivim preverjanjem prepričamo, v Petersenovem grafu Pet za vsako neprazno množico $S \subseteq V(\mathrm{Pet})$ velja $\Omega(G - S) \leq |S|$, hkrati pa velja:

TRDITEV 6.5**.** *Petersenov graf ni hamiltonov.*

DOKAZ: V dokazu se bomo oprli na dejstvo, da Petersenov graf ne premore nobenega cikla dolžine 3 ali 4 (torej da je ožina Petersenovega grafa 5). Denimo, da ima Petersenov graf hamiltonov cikel; označimo ga z $v_0 v_1 v_2 \dots v_9$. Tedaj je vsako od vozlišč v_i, $i \in \mathbb{Z}_{10}$, sosednje še natanko enemu vozlišču v_j za $j \notin \{i-1, i, i+1\}$ (pri čemer indekse računamo po modulu 10). Še več, ker Petersenov graf nima ciklov dolžine 3 in 4, je v_i soseden v_j za $j \notin \{i-3, i-2, i-1, i, i+1, i+2, i+3\}$, torej za $j \in \{i+4, i+5, i+6\}$. Denimo, da za neki $i \in \mathbb{Z}_{10}$ velja $v_i \sim v_{i+5}$. Tedaj je $v_{i+1} \sim v_j$ za neki $j \in \{i+6, i+7\}$ (vozlišče v_{i+5} je že sosednje v_i). Če je $v_{i+1} \sim v_{i+6}$, tedaj vozlišča $v_i, v_{i+1}, v_{i+6}, v_{i+5}$ tvorijo cikel dolžine 4; zato je $v_{i+1} \sim v_{i+7}$. Tedaj pa je v_{i+2} soseden bodisi v_{i+6} bodisi v_{i+8} (saj je v_{i+7} že soseden v_{i+1}). Opazimo pa, da oba primera porodita cikel dolžine 4; v prvem primeru na vozliščih $v_{i+7}, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+6}$, v drugem pa na vozliščih $v_{i+7}, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+8}$. To protislovje pomeni, da za noben $i \in \mathbb{Z}_{10}$ vozlišče v_i ni sosednje vozlišču v_{i+5}. Konkretno, $v_0 \sim v_4$ ali $v_0 \sim v_6$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $v_0 \sim v_6$ (če bi slučajno veljalo $v_0 \sim v_4$, lahko vse indekse pomnožimo z -1). Tedaj je v_1 soseden bodisi v_5 bodisi v_7. Vendar obe možnosti porodita cikel dolžine 4, v prvem primeru na vozliščih v_0, v_1, v_5, v_6, v drugem primeru pa na vozliščih v_0, v_1, v_7, v_6. To protislovje pomeni, da Petersenov graf nima hamiltonovega cikla. $\square$

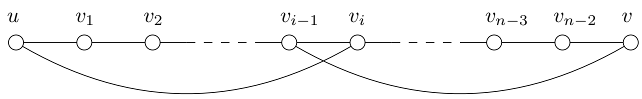
Posvetimo se sedaj še zadostnim pogojem za hamiltonskost danega grafa. Teh ni enostavno najti in večina jih v praksi ni zelo uporabnih, so pa zato zanimivi s teoretičnega vidika. V nadaljevanju bomo dokazali znameniti Diracov izrek ter njegovo posplošitev, Orejev izrek, začnimo pa z naslednjo pomožno trditvijo. Za dani graf G in nesosednji vozlišči $u, v \in V(G)$ naj $G + uv$ označuje graf, ki ga dobimo iz G, če mu dodamo povezavo uv.

TRDITEV 6.6**.** *Naj bosta u in v takšni nesosednji vozlišči grafa G, da velja* $\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|$. *Če je graf $G + uv$ hamiltonov, potem je hamiltonov tudi graf G.*

Dokaz: Naj n označuje število vozlišč grafa G in predpostavimo, da je graf $G+uv$ hamiltonov, G pa ni hamiltonov. Potem obstaja hamiltonova pot $uv_1v_2\ldots v_{n-2}v$ v grafu G. Naj bo

$$U = \{i \mid u \sim_G v_i\} \quad \text{in} \quad V = \{i \mid v \sim_G v_i\}.$$

Obe množici U in V sta tedaj podmnožici množice $\{1,2,\ldots,n-2\}$. Oglejmo si še množico $V' = \{i \mid i-1 \in V\} \subseteq \{2,3,\ldots,n-1\}$. Ker u in v v grafu G nista sosednja, je $|U| = \deg_G(u)$ in $|V'| = |V| = \deg_G(v)$, zato je $|U|+|V'| \geq n$. Po drugi strani pa velja $U, V' \subseteq \{1,2,\ldots,n-1\}$, in zato $|U \cup V'| \leq n-1$. Tedaj je $|U \cap V'| = |U|+|V'|-|U\cup V'| \geq n-(n-1) \geq 1$, kar pomeni, da je presek $U \cap V'$ neprazen. Naj bo i poljuben element tega preseka. Tedaj je $u \sim v_i$ in $v_{i-1} \sim v$, in zato je $uv_1\ldots v_{i-1}vv_{n-2}\ldots v_iu$ hamiltonov cikel v grafu G. To je seveda protislovje. □



Slika 6.5: Hamiltonov cikel grafa G v dokazu trditve 6.6.

Izrek 6.7 (Orejev izrek). *Če za vsak par nesosednjih vozlišč u, v grafa G z vsaj tremi vozlišči velja $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq |V(G)|$, potem je graf G hamiltonov.*

Dokaz: Če G ni polni graf, obstajata u in v, ki nista sosednja, po predpostavki je $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq |V(G)|$. Po prejšnji trditvi je G hamiltonov natanko tedaj, ko je $G+uv$ hamiltonov. Ker so stopnje vozlišč v $G+uv$ kvečjemu večje kot v G, predpostavka izreka velja tudi za graf $G+uv$, kar pomeni, da je $G+uv$ hamiltonov natanko tedaj, ko je $G+uv+u'v'$ hamiltonov (za vozlišči u' in v', ki nista sosednji v grafu $G+uv$). Tako nadaljujemo; vidimo, da je (pod predpostavkami izreka) graf hamiltonov natanko tedaj, ko je hamiltonov polni graf z istim številom vozlišč, kar je res, ker ima graf vsaj tri vozlišča. □

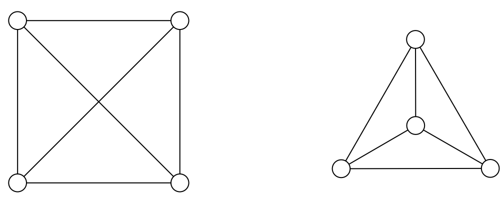
Kot očitno posledico Orejevega izreka navedimo še zgodovinsko starejši Diracov izrek.

Izrek 6.8 (Diracov izrek). *Če ima graf G vsaj tri vozlišča in ima vsako vozlišče stopnjo vsaj $\frac{|V(G)|}{2}$, potem je graf G hamiltonov.*

6.3 Ravninski grafi

Kot smo že omenili v razdelku 5.1, grafe radi rišemo v ravnini tako, da vozlišče grafa predstavimo kot točko ravnine, povezavo med vozliščema pa kot ravno (ali pa tudi krivo) črto s krajišči v točkah, ki ustrezata krajiščema povezave. Pri tem pazimo, da povezava (oziroma, natančneje, črta, ki ponazarja povezavo) ne seka same sebe in ne poteka skozi nobeno drugo vozlišče kot le svoji krajišči. Seveda ima lahko dani graf več različnih risb.

Če obstaja risba grafa, pri kateri se nobeni dve povezavi med seboj ne sekata (razen v skupnem krajišču, če ga imata), rečemo, da je graf *ravninski*, takšni risbi pa *ravninska risba grafa*. Tako so, na primer, ravninski vsi cikli C_n, vse poti P_n, vsa drevesa, pa tudi polna grafa K_3 in K_4 ter polni dvodelni grafi $K_{1,n}$, $K_{2,n}$, $n \in \mathbb{N}$. Kasneje bomo videli, da polni grafi K_n za $n \geq 5$ in polni dvodelni grafi $K_{m,n}$ za $m, n \geq 3$ niso ravninski. Opozorimo še, da lahko graf, ki sicer je ravninski, seveda narišemo tudi tako, da se povezave v njem sekajo. Na primer, če K_4 narišemo kot kvadrat z diagonalama, to ni ravninska risba, če pa ga narišemo kot tetraeder (projiciran na ravnino vzdolž telesne višine), dobimo ravninsko risbo; glej sliko 6.6.



Slika 6.6: Graf K_4, narisan na dva načina.

Zgornja definicija ravninskosti je sicer intuitivno jasna, ni pa povsem korektna z matematičnega vidika, saj vključuje nedefinirane pojme, kot so "narisati graf", "črta" ipd. V izogib tehničnim zapletom, ki bi oteževali razumevanje bistva, bomo v tem razdelku kljub temu uporabljali zgolj to intuitivno predstavo pojma risbe grafa v ravnini, zato bo tudi večina dokazov v tem razdelku zgolj intuitivnih in ne povsem matematično korektnih. Pred tem pa vseeno podajmo eno od možnih formalnih definicij ravninskosti grafa in bralcu zagotovimo, da bi lahko vse dokaze v nadaljevanju izvedli tudi povsem korektno z uporabo te definicije in nekaterih pojmov in rezultatov iz geometrijske topologije.

Vložitev grafa G v metrični prostor Σ je določena z injektivno preslikavo $\varphi\colon V(G) \to \Sigma$, ki vsakemu vozlišču grafa priredi točko prostora Σ, in takšno družino injektivnih zveznih preslikav $\{\varphi_e\}_{e\in E(G)}$, $\varphi_e\colon [0,1] \to \Sigma$, da za vsako povezavo $e \in E(G)$ s krajiščema u in v velja naslednje:

- $\{\varphi_e(0), \varphi_e(1)\} = \{\varphi(u), \varphi(v)\}$;
- $\varphi_e(0,1) \cap \varphi(V(G)) = \emptyset$; in
- če je $e' \in E(G) \setminus \{e\}$, je $\varphi_e(0,1) \cap \varphi_{e'}(0,1) = \emptyset$.

Graf, za katerega obstaja vložitev v ravnino $\mathbb{R}^2$, opremljeno z običajno evklidsko metriko, se imenuje *ravninski graf*.

Zgornja definicija ne govori le o vložitvah grafa v ravnino, temveč o vložitvah v poljuben metrični prostor. To nam omogoča preučevati tudi grafe, ki jih lahko vložimo v sfero, torus, Kleinovo steklenico in druge ploskve. Velik del moderne teorije grafov se ukvarja ravno z vprašanji, povezanimi s tovrstnimi vložitvami.

Dokazati, da je neki graf ravninski, je načeloma enostavno – najti moramo njegovo ravninsko risbo. Precej težje pa je dokazati, da graf ni ravninski, saj bi morali pregledati vse njegove možne risbe in preveriti, da nobena ni ravninska. Ker je to seveda nemogoče, je za dokazovanje neravninskosti grafov potrebno razviti kakšne drugačne prijeme. Eden takšnih temelji na znameniti *Eulerjevi formuli*, ki jo bomo dokazali v nadaljevanju.

Dodajmo še, da lahko na povsem analogen način definiramo tudi vložitev in ravninskost multigrafa; podrobnosti ne bomo navajali. Vložitve multigrafov nam bodo prišle prav v naslednjem podrazdelku, kjer bomo govorili o geometrijskem dualu grafa v ravnini.

Lica in geometrijski dual

Zamislimo si ravninsko risbo grafa G. Če iz ravnine izrežemo vse črte in točke, ki predstavljajo povezave in vozlišča grafa, dobimo nekaj med seboj ločenih povezanih območij, ki jih imenujemo *lica*. Množico vseh lic tako narisanega grafa G označimo s $F(G)$.

Eno od lic je neomejeno in obdaja celotno risbo grafa, ostala območja pa so omejena. Intuitivno jasno je, da so omejena lica homeomorfna odprtemu disku, neomejeno lice pa je homeomorfno ravnini, iz katere izrežemo toliko točk, kot ima graf povezanih komponent; dokaz tega dejstva, kljub svoji nazornosti, zahteva uporabo Jordanovega izreka iz geometrijske topologije.

Vsako lice $f \in F(G)$ je omejeno s sklenjenim sprehodom v grafu G, ki mu rečemo *rob lica* f. Rob lica f označimo z ∂f, njegovo dolžino (torej število povezav na robu lica) pa z $\ell(f)$. Vsaka povezava grafa G tipično leži na robu dveh lic, enega, ki leži na enem bregu povezave, in drugega, ki leži na drugem bregu. Izjemoma pa se lahko primeri, da ti dve lici sovpadata; to se zgodi, na primer, če je G drevo in e poljubna njegova povezava, saj ima vsaka vložitev drevesa v ravnino le eno lice. V tem primeru pri računanju $\ell(f)$ take povezave štejemo dvakrat.

Geometrijski dual G^* grafa G je multigraf, ki ga narišemo v ravnini tako, da v notranjosti vsakega lica grafa G narišemo vozlišče multigrafa G^*. Dalje, naj bosta v_1 in v_2 dve tako dobljeni vozlišči multigrafa G^* in f_1 in f_2 pripadajoči lici grafa G. Tedaj vozlišči v_1 in v_2 povežemo v multigrafu G^* s toliko povezavami, kot imata robova ∂f_1 in ∂f_2 skupnih povezav. Pri tem poskrbimo, da vsaka takšna povezava v G^* seka vsako od skupnih povezav robov ∂f_1 in ∂f_2 natanko enkrat (in nobene druge povezave grafa G) in da se povezave multigrafa G^* med seboj ne sekajo. V primeru, ko rob kakega lica f grafa G vsebuje povezavo e, ki leži le na robu lica f, tedaj pripadajoče vozlišče v multigrafa G^* povežemo s samim seboj z zanko. Pri tem takšno zanko narišemo tako, da seka povezavo e le enkrat.

S tem sta multigraf G^* in njegova risba v ravnini definirana. Z nekaj domišljije si seveda lahko predstavljamo tudi, kako bi definirali geometrijski dual ravninskega multigrafa (oziroma njegove risbe v ravnini). Poudarimo še, da je dual G^* odvisen ne le od grafa G, temveč tudi od njegove risbe v ravnini. Na sliki 6.7 si lahko ogledamo duale nekaterih ravninskih grafov. Desni sliki prikazujeta dve različni risbi istega grafa, ki imata neizomorfna dualna grafa.

Iz definicije geometrijskega duala neposredno sledi naslednje:

$$|V(G)| = |F(G^*)|, \ \ |E(G)| = |E(G^*)|, \ \ |F(G)| = |V(G^*)| \ \text{in} \ (G^*)^* \cong G.$$

Če je v vozlišče geometrijskega duala G^*, ki ustreza licu f grafa G, tedaj velja tudi

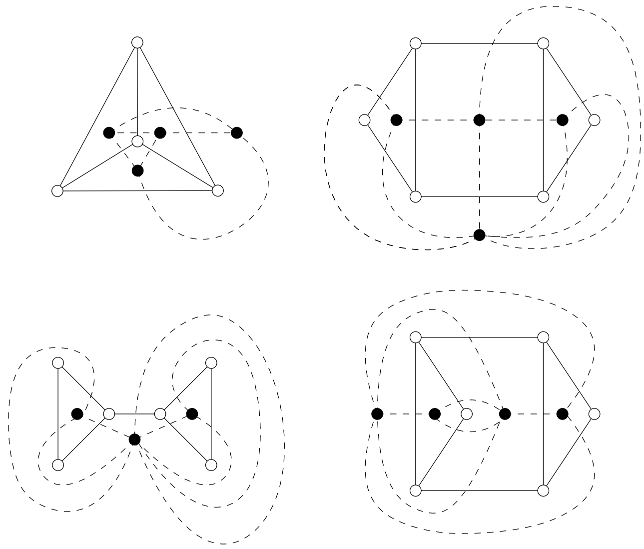
$$\deg_{G^*}(v) = \ell(f).$$

Če običajno lemo o rokovanju uporabimo za geometrijski dual grafa G in upoštevamo zgornje enakosti, dobimo tako imenovano *lemo o rokovanju za ravninske grafe*:

Trditev 6.9. *Naj bo G ravninski graf z neko svojo risbo v ravnini. Tedaj velja*

$$\sum_{f \in F(G)} \ell(f) = 2|E(G)|.$$

Naj bo G povezan ravninski graf, ki ni drevo. Tedaj ni težko videti, da rob poljubnega lica v grafu G vsebuje cikel grafa G. V tem primeru lahko dolžino lica v grafu G navzdol omejimo z ožino grafa G (tj. z dolžino najkrajšega cikla). Posledično lahko v zgornji trditvi vsoto na levi navzdol



Slika 6.7: Nekaj grafov v ravnini in njihovih dualov. Na vsaki sliki je graf G narisan z belimi vozlišči in neprekinjenimi povezavami, njegov dual pa s črnimi vozlišči in črtkanimi povezavami.

omejimo z zmnožkom ožine grafa G in števila vseh lic. S tem dobimo naslednjo trditev:

TRDITEV 6.10. *Naj bo G povezan ravninski graf, ki ni drevo, in naj bo g njegova ožina. Tedaj je*

$$|E(G)| \geq \frac{g}{2}|F(G)|.$$

Eulerjeva formula

Na prvi pogled ni videti nobenega razloga, zakaj bi število lic grafa ne bilo odvisno od konkretne ravninske risbe. Zato je toliko presenetljivejša naslednja trditev.

IZREK 6.11 (Eulerjeva formula). *Naj bo G ravninski graf z množico vozlišč V in množico povezav E. Naj bo F množica lic kake njegove ravninske risbe in Ω množica komponent za povezanost grafa G. Tedaj velja*

$$|V| - |E| + |F| = 1 + |\Omega|.$$

Dokaz: Dokažimo najprej, da formula velja za povezane grafe. To bomo storili z indukcijo po številu povezav.
Formula očitno velja za povezan graf z nič povezavami (torej za K_1), pa tudi za graf z eno povezavo (namreč K_2). Formula velja tudi za vsa drevesa, saj ima vsaka ravninska risba drevesa G natanko eno lice, število vozlišč in povezav drevesa G pa veže formula $|V(G)| - |E(G)| = 1$; glej trditev 5.15.
Denimo sedaj, da Eulerjeva formula velja za povezane grafe z $m-1$ povezavami za neko naravno število m, in dokažimo, da tedaj velja tudi za poljuben povezan ravninski graf z m povezavami. Naj bo G takšen graf. Če je graf drevo, potem Eulerjeva formula zanj velja. Predpostavimo torej, da G ni drevo. Tedaj po definiciji drevesa v grafu G obstaja cikel C. Risba cikla C tedaj ravnino loči na dve komponenti: notranjo N, ki je homeomorfna disku, in pa zunanjo Z, ki je homeomorfna prebodeni ravnini (to nam zopet zagotavlja Jordanov izrek iz geometrijske topologije).
Vzemimo sedaj poljubno povezavo e cikla C in si oglejmo lici F' in F'' grafa G, ki ležita ob povezavi e. Eno od lic F' in F'' očitno leži v komponenti N, drugo pa v komponenti Z, zato sta lici F' in F'' različni. Oglejmo si sedaj graf $G-e$ in njegovo risbo, ki jo dobimo iz risbe grafa G, če odstranimo črto, ki predstavlja povezavo e. Graf $G-e$ je povezan, saj odstranitev povezave na ciklu grafa ne razbije na več komponent. Hkrati za graf $G-e$ velja $|V(G-e)| = |V(G)|$ in $|E(G-e)| = |E(G)| - 1$. Ker se lici F' in F'' grafa G z odstranitvijo povezave e združita v eno samo lice grafa $G-e$, velja tudi $|F(G-e)| = |F(G)| - 1$. Ker ima graf $G-e$ eno povezavo manj kot graf G, po indukcijski predpostavki velja $|V(G-e)| - |E(G-e)| + |F(G-e)| = 2$. Od tod sledi:

$$|V(G)|-|E(G)|+|F(G)| = |V(G-e)|-(|E(G-e)|+1)+(|F(G-e)|+1) = 2.$$

Naj bo sedaj G nepovezan graf s komponentami $G_1, \ldots, G_k$, $k = |\Omega|$, ki smo ga narisali v ravnini. Tedaj so tudi grafi G_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, narisani v ravnini. Predstavljajmo si, da najprej narišemo graf G_1, potem G_2 in tako naprej. Vsak od grafov G_i, $2 \leq i \leq k$, je narisan v enem od lic grafa $G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1}$. Z drugimi besedami, ko narišemo G_i, se število lic poveča za $|F(G_i)|-1$, kjer $F(G_i)$ označuje število lic v ravnini, če bi narisali samo graf G_i. To pomeni, da je $|F(G)| = |F(G_1)|+(|F(G_1)|-1)+\cdots+(|F(G_k)|-1) = |F(G_1)|+\cdots+|F(G_k)|-k+1$. Očitno velja $|V(G)| = |V(G_1)|+\cdots+|V(G_k)|$

in $|E(G)| = |E(G_1)| + \cdots + |E(G_k)|$. Torej je

$$\begin{aligned}|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| &= \left(\sum_{i=1}^{k}(|V(G_i)| - |E(G_i)| + |F(G_i)|)\right) - k + 1\\ &= 2k - k + 1 = k + 1.\end{aligned}$$

Izrek je s tem dokazan. □

Izpeljimo sedaj naslednjo pomembno posledico Eulerjeve formule.

TRDITEV 6.12. *Naj bo G povezan ravninski graf, ki ni drevo, in naj bo g njegova ožina (tj. dolžina najkrajšega cikla). Tedaj je*

$$|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}(|V(G)| - 2).$$

DOKAZ: Izberimo kako ravninsko sliko grafa G. Označimo $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ in $k = |F(G)|$. Spomnimo se, da trditev 6.10 število povezav grafa G omeji takole: $m \geq \frac{g}{2}k$. Iz Eulerjeve formule tedaj sledi:

$$2 = n - m + k \leq n - m + \frac{2}{g}m = n - \frac{g-2}{g}m.$$

Če na levi in desni zgornje neenakosti prištejemo $\frac{g-2}{g}m - 2$ in nato še pomnožimo z $\frac{g}{g-2}$, dobimo neenakost, ki jo želimo dokazati. □

Ker je ožina poljubnega grafa vsaj 3 in ker za $g \geq 3$ velja $\frac{g}{g-2} \leq 3$, nam zgornja neenakost pove, da za vsak povezan ravninski graf, ki ni drevo, velja

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

V resnici zgornja neenakost velja tudi za drevesa z vsaj tremi vozlišči, saj za drevesa velja $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Če graf nima trikotnikov (ciklov dolžine 3) in ni drevo, velja $g \geq 4$, zato $\frac{g}{g-2} \leq 2$ in zato po trditvi

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

Spet lahko vidimo, da ta trditev velja tudi za drevesa z vsaj tremi vozlišči.

Navedimo še naslednjo posledico trditve 6.12, katere pomen se bo razkril v naslednjem razdelku.

POSLEDICA 6.13. *Grafa K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska.*

DOKAZ: Graf K_5 ima 5 vozlišč in 10 povezav. Če bi bil ravninski, bi veljalo $10 \leq 3 \cdot 5 - 6$, kar seveda ni res. Zato graf K_5 ni ravninski. Graf $K_{3,3}$ ni drevo in nima trikotnikov, ima pa 6 vozlišč in 9 povezav. Če bi bil ravninski, bi veljalo $9 \leq 2 \cdot 6 - 4$. Ker to ni res, tudi graf $K_{3,3}$ ni ravninski. □

Izreka Wagnerja in Kuratowskega

V tem podrazdelku si bomo ogledali nekaj operacij na grafih, ki ohranjajo lastnost "biti ravninski". Prva od takih operacij je operacija "podgraf". Očitno namreč velja naslednje.

TRDITEV 6.14. *Podgraf ravninskega grafa je ravninski.*

Iz tega in posledice 6.13 takoj sledi, da K_n, $n \geq 5$, in $K_{n,m}$, $n, m \geq 3$, niso ravninski grafi.

Naslednja operacija, ki ohranja ravninskost, je operacija *subdivizije* – spomnimo se, da je graf G' subdivizija grafa G, če ga lahko dobimo tako, da nekatere povezave grafa G nadomestimo s potmi poljubnih dolžin. Tudi naslednjo očitno trditev navedimo brez dokaza.

TRDITEV 6.15. *Graf je ravninski natanko tedaj, ko je ravninska vsaka njegova subdivizija.*

Če združimo zgornji dve trditvi s trditvijo 6.13, dobimo naslednjo trditev.

TRDITEV 6.16. *Če graf G vsebuje podgraf, ki je izomorfen kaki subdiviziji grafa K_5 ali pa grafa $K_{3,3}$, tedaj G ni ravninski.*

Presenetljivo pa je, da je ta potrebni pogoj za ravninskost hkrati tudi zadosten. Velja namreč naslednji globoki in netrivialni izrek, ki nosi ime poljskega matematika Kazimierza Kuratowskega. Za dokaz glej [11, izrek 6.2.2].

IZREK 6.17 (Izrek Kuratowskega). *Graf je ravninski, če in samo če ne vsebuje podgrafa, izomorfnega subdiviziji grafa K_5 ali subdiviziji grafa $K_{3,3}$.*

Za konec si oglejmo še tretjo operacijo, ki ohranja ravninskost. Naj bo G' minor grafa G, tj. graf, dobljen iz kakega podgrafa grafa G z odstranjevanjem in krčenjem povezav. Ker krčenje in odstranjevanje povezav ne more pokvariti ravninskosti, velja naslednje.

TRDITEV 6.18. *Minor ravninskega grafa je ravninski graf.*

S pomočjo trditve 6.13 tako dobimo naslednjo trditev.

TRDITEV 6.19. *Če ima graf G kak minor, ki je izomorfen grafu K_5 ali grafu $K_{3,3}$, tedaj G ni ravninski.*

Podobno kot v primeru subdivizij velja ta implikacija tudi v obratni smeri. Karakterizaciji ravninskih grafov, ki jo tako dobimo, rečemo *Wagnerjev izrek.*

IZREK 6.20 (Wagnerjev izrek). *Graf je ravninski, če in samo če nima minorja, izomorfnega K_5 ali $K_{3,3}$.*

Wagnerjev izrek se da dokazati s pomočjo izreka Kuratowskega. Glej [11, naloga 6.2.12].

6.4 Barvanja grafov

Za zaključek si oglejmo še eno od klasičnih tem teorije grafov – barvanja grafov. Poznamo več različic problema barvanja grafov, ki se med seboj razlikujejo po tem, kaj v grafu barvamo in kakšnim dodatnim pogojem mora barvanje zadoščati. V tem razdelku si bomo na kratko ogledali klasično *barvanje vozlišč* in klasično *barvanje povezav* grafa. Ogledali si bomo le nekaj najosnovnejših rezultatov, dokaze zahtevnejših izrekov pa izpustili, saj podrobna obravnava te snovi presega namen tega učbenika.

Barvanje vozlišč

Naj bo K poljubna neprazna množica. Tedaj preslikavi $c\colon V(G) \to K$ rečemo *barvanje vozlišč* grafa G *z barvami iz množice* K. Ker nas običajno zanima le število barv v množici K, bomo takšnemu barvanju rekli tudi kar k-barvanje vozlišč, kjer je $|K| = k$. Barvanje c je *dobro* (tudi *pravilno*), če so sosednja vozlišča obarvana z različnimi barvami, torej če za poljubni vozlišči $u, v \in V(G)$ velja implikacija $u \sim v \Rightarrow c(u) \neq c(v)$. Najmanjše število k, za katero obstaja dobro k-barvanje vozlišč grafa G, imenujemo *kromatično število* (tudi *barvnost*) grafa G. Kromatično število grafa G navadno označimo s $\chi(G)$.

Kot motivacijo za kromatično število grafa povejmo dva primera. Denimo, da imamo zemljevid in želimo vsako državo pobarvati z neko barvo, tako da sosednji državi nista pobarvani z isto barvo. Držav, ki mejita druga na drugo le v eni točki, pri tem nimamo za sosednji. Koliko barv potrebujemo? Če priredimo zemljevidu graf, tako da so vozlišča države, dve vozlišči pa sta povezani, če sta pripadajoči državi sosednji, potem je minimalno število barv pri barvanju zemljevida ravno kromatično število pripadajočega grafa. Izrek 6.23 nam bo povedal, da vedno zadostujejo štiri barve (če vsaka država sestoji iz enega povezanega območja, tako da je pripadajoči graf ravninski).

Za drug primer si zamislimo, da imamo več vnetljivih snovi, ki jih moramo spraviti v skladišča. Pri tem nekatere snovi ne smejo biti v istem skladišču, ker se vnamejo. Koliko skladišč potrebujemo? Spet je problem ekvivalenten iskanju kromatičnega števila grafa, kjer za vozlišča vzamemo snovi, dve vozlišči pa sta povezani, če pripadajoči snovi ne smeta biti v istem skladišču. V tem kontekstu nam "barve" seveda predstavljajo skladišča.

Ni težko videti, da so grafi s kromatičnim številom 1 natanko prazni grafi in grafi s kromatičnim številom 2 natanko dvodelni grafi z vsaj eno povezavo. Kromatično število cikla C_n je 2, če je n sod, in 3, če je n lih. Kromatično število je lahko poljubno veliko, saj očitno velja $\chi(K_n) = n$.

Če je c dobro barvanje vozlišč grafa G in H podgraf grafa G, tedaj je skrčitev $c|_{V(H)}$ dobro barvanje vozlišč grafa H; zato velja

$$H \leq G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G).$$

Določanje kromatičnega števila grafa je algoritmično zahtevna naloga. Znanih pa je več izrekov, ki kromatično število omejijo navzdol in navzgor s kakimi preprostimi funkcijami lahko določljivih parametrov. Na primer, če z $\omega(G)$ označimo število vozlišč največjega polnega podgrafa grafa G (temu parametru navadno rečemo *velikost največje klike*), tedaj iz zgornje neenakosti takoj sledi naslednja spodnja meja za kromatično število grafa

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

Kromatično število $\chi(G)$ pa lahko navzgor omejimo tudi kot funkcijo maksimalne stopnje

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg_G(v).$$

TRDITEV 6.21. *Za poljuben graf G velja:*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

DOKAZ: Izberemo poljubno vozlišče grafa in ga pobarvamo s poljubno barvo iz množice $[\Delta(G) + 1]$. V vsakem koraku potem izberemo še nepobarvano vozlišče v. Ker ima kvečjemu $\Delta(G)$ sosedov, je v množici $[\Delta(G) + 1]$ gotovo še kakšna barva i, s katero ni pobarvano nobeno vozlišče, sosednje v; v pobarvamo z i. Po $|V(G)|$ korakih so vsa vozlišča pobarvana, dobimo dobro barvanje. $\square$

Algoritmu, kot je ta, ki je opisan v dokazu trditve, rečemo *požrešni algoritem*, ker rešitev gradimo sproti.

Nekoliko težje pa je dokazati, da je ta zgornja meja dosežena le pri lihih ciklih in polnih grafih. Prav to pravi Brooksov izrek, ki ga navajamo brez dokaza (glej [11, izrek 5.1.22]).

IZREK 6.22 (Brooksov izrek). *Naj bo G povezan graf. Če G ni lih cikel in ni poln graf, potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Omenimo še, da je določanje kromatičnega števila konkretnega grafa običajno sestavljeno iz dveh delov: iskanja spodnje meje (pri preprostih nalogah najdemo podgraf, za katerega poznamo kromatično število, ki ga lahko uporabimo za spodnjo mejo) in konstrukcije barvanja, ki dokaže, da je spodnjo mejo res moč doseči. Namesto eksplicitne konstrukcije barvanja pa si lahko pomagamo tudi z Brooksovim izrekom. Tako lahko, na primer, dokažemo, da je kromatično število Petersenovega grafa Pet enako 3: ker Pet vsebuje cikel dolžine 5, je $\chi(\mathrm{Pet}) \geq \chi(C_5) = 3$, ker pa je $\Delta(\mathrm{Pet}) = 3$, iz Brooksovega izreka dobimo $\chi(\mathrm{Pet}) \leq 3$.

Včasih si delo lahko poenostavimo z naslednjim znamenitim in globokim izrekom.

IZREK 6.23 (Izrek štirih barv). *Za vsak ravninski graf G je $\chi(G) \leq 4$.*

Izrek sta prva dokazala Kenneth Appel in Wolfgang Haken v 70. letih prejšnjega stoletja. Zanimivo je, da je del dokaza naredil računalnik. Čeprav so dokaz od takrat nekoliko poenostavili, še vedno ni znan noben dokaz, ki bi ga bil sposoben preveriti človek brez računalniške pomoči.

Barvanje povezav

Podobno kot barvanje vozlišč lahko definiramo tudi barvanje povezav kot preslikavo $c' \colon E(G) \to K$, kjer je K poljubna neprazna množica "barv". Če je $|K| = k$, tedaj takšnemu barvanju rečemo tudi *k-barvanje povezav* grafa G. Barvanje povezav c' je *dobro* (tudi *pravilno*), če so povezave, ki imajo kako skupno krajišče, obarvane z različnimi barvami. Najmanjše število k, za katero obstaja dobro k-barvanje povezav grafa G, imenujemo *kromatični indeks* grafa G in ga označimo s $\chi'(G)$.

Tudi za barvanja povezav velja, da iz $H \leq G$ sledi $\chi'(H) \leq \chi'(G)$. Če ima graf G kako vozlišče v stopnje m, tedaj že za dobro barvanje povezav, ki imajo v za svoje krajišče, potrebujemo m različnih barv. Zato za poljuben graf G velja $\Delta(G) \leq \chi'(G)$. Presenetljivo pa je, da je ta naivna spodnja meja že zelo dobra ocena za kromatični indeks grafa. Velja namreč znameniti Vizingov izrek, ki ga navajamo brez dokaza (glej [11, izrek 7.1.10]).

IZREK 6.24 (Vizingov izrek). *Za vsak graf G velja $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.*

Vizingov izrek nam omogoča grafe razvrstiti v dva razreda: Graf G je *razreda* 1, če velja $\chi'(G) = \Delta(G)$, in *razreda* 2, če je $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Na primer, ni težko videti, da sta za sod n grafa C_n in K_n razreda 1, za lih n pa sta razreda 2.

Če je graf G d-regularen in razreda 1, potem obstaja dobro barvanje povezav z d barvami. Pri takem barvanju v vsakem vozlišču uporabimo vseh d barv. Če izberemo eno od barv in si ogledamo vse povezave te barve, množica vozlišč razpade na pare povezanih vozlišč. To seveda pomeni, da mora biti vozlišč sodo mnogo. Iz tega sledi, da so d-regularni grafi na lihem številu vozlišč razreda 2.

Pomembna družina grafov razreda 1 so dvodelni grafi, kot pravi naslednji znani izrek, s katerim zaključujemo naš izlet v teorijo grafov.

IZREK 6.25 (Königov izrek). *Če je graf G dvodelen, je $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

DOKAZ: Naj bo $A \cup B$ dvodelna razdelitev grafa G. Dokazati želimo, da lahko povezave pobarvamo z barvami $1, \ldots, \Delta(G)$. Požrešno barvamo povezave grafa, dokler gre. Denimo, da se postopek ustavi, ker ne moremo pobarvati povezave uv, kjer je $u \in A$ in $v \in B$. Označimo s C_u in C_v množici barv, s katerim smo pobarvali povezave, ki imajo krajišče v u oziroma v.
Ker uv ne moremo pobarvati, mora veljati $C_u \cup C_v = [\Delta(G)]$. Hkrati pa nobena od množic C_u ne C_v ne more biti enaka $[\Delta(G)]$, ker smo pobarvali kvečjemu $\Delta(G) - 1$ povezav s krajiščem v u oziroma v (saj nismo pobarvali povezave uv, stopnja vozlišč pa je navzgor omejena z $\Delta(G)$). To pomeni, da obstaja barva v $C_u \setminus C_v$ (brez škode za splošnost je to barva 1) in barva v $C_v \setminus C_u$ (brez škode za splošnost je to barva 2).
Začnimo v u in sledimo povezavi iz A v B, pobarvani z 1 (takšna povezava obstaja, saj je $1 \in C_u$), potem povezavi iz B v A, pobarvani z 2, potem spet povezavi, pobarvani z 1 itd. Sprehod, ki ga dobimo, ne more vključevati v (ker v množico B pridemo po povezavi, pobarvani z barvo 1, 1 pa ni v C_v) in se nikoli ne vrne v u (ker v množico A pridemo po povezavi, pobarvani z barvo 2, 2 pa ni v C_u). Vsa vozlišča na tem sprehodu so različna, saj bi se sicer eno vozlišče dotikalo več povezav, pobarvanih z isto barvo. Z drugimi besedami, ta sprehod je pot. Zdaj na njej zamenjamo barvi 1 in 2. Še vedno imamo veljavno barvanje povezav istega grafa kot prej, vendar sedaj nobena od povezav s krajiščem v u ni pobarvana z barvo 1. To pomeni, da lahko povezavo uv pobarvamo z barvo 1. Tako nam je uspelo pobarvati še eno povezavo grafa, prej ali slej pobarvamo cel graf G. $\square$