Tema 3: Problema de contornos para EDPs

Diferencias finitas.

Guillermo Vera de Salas

Universidad Rey Juan Carlos

Curso 2017-2018

Diferencias finitas

Es bien conocido que, dada u una función derivable,

$$u'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

Podemos considerar las aproximaciones a dicha derivada

$$u'(x^*) \approx \frac{u(x^*+h) - u(x^*)}{h}$$

$$u'(x^*) \approx \frac{u(x^*) - u(x^*-h)}{h}$$

Llamadas **diferencias finitas de orden uno descentradas**, progresiva y regresiva respectivamente.

Ejercicio

Escribir el desarrollo en serie de Taylor la función $u(x)$ en un punto x^* y evaluar dicha expresión en $x^* + h$ y $x^* - h$. Obtener las fórmulas anteriores despreciando los términos convenientes.

Diferencias finitas

También es posible considerar una aproximación centrada:

$$u'(x^*) \approx \frac{u(x^* + h) - u(x^* - h)}{2h}$$ **Diferencia finita centrada**.

Ejercicio

Obtener la fórmula de diferencia finita centrada a partir del desarrollo de Taylor de la función $u(x)$. Deberás trabajar, simultáneamente, con las expresiones obtenidas tras evaluar en $x^* + h$ y $x^* - h$.

Diferencias finitas

Ejercicio

Deducir, a partir del desarrollo en serie de Taylor de $u(x)$, la **fórmula de diferencias finitas centrada para la segunda derivada**:

$$u''(x^*) \approx \frac{u(x^* - h) - 2u(x^*) + u(x^* + h)}{h^2}$$

Problemas de contorno unidimensionales

Consideremos el problema:

$$\left\{ \quad -\mu u''(x) + \eta u'(x) + \sigma u(x) = f(x), \quad x \in I = [0, L] \right.$$

Diremos que es un **problema de contorno** cuando la solución deba satisfacer condiciones en la frontera del dominio. Existen dos tipos de condiciones:

- **Condiciones tipo Dirichlet**, $u(0) = a$ y $u(L) = b$
- **Condiciones tipo Neumann**, $u'(0) = c$ y $u'(L) = d$.

Problemas de contorno unidimensionales

Supongamos que tenemos el problema de contorno, sin importarnos ahora las condiciones en la frontera

$$\left\{ \quad -\mu u''(x) + \eta u'(x) + \sigma u(x) = f(x), \quad x \in I = [0, L] \right.$$

Discreticemos el intervalo $I = [0, L]$ en N partes iguales, es decir, $h = \frac{L}{N}$

$$x_0 = 0 < x_1 = h < \dots < x_N = Nh = L$$

Entenderemos por **solución numérica** del problema de contorno a los puntos

$$u_0, u_1, \dots, u_N$$

donde $u(x_i) \approx u_i$.

Problemas de contorno unidimensionales

Aplicando las fórmulas de diferencias finitas centradas

$$u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h}$$

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2}$$

Si tomamos las aproximaciones dadas por las fórmulas de diferencias finitas, reformulamos:

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \qquad u_i'' = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

Observación: u_i son **incógnitas**

Si introducimos dichas fórmulas en el problema de contorno, para $i = 1$.

$$-\mu u_1'' + \eta u_1' + \sigma u_1 = f(x_1) = f_1$$

$$-\mu \frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} + \eta \frac{u_2 - u_0}{2h} + \sigma u_1 = f_1$$

Sacando factor común las u_0, u_1 y u_2:

$$u_0 \left(-\frac{\mu}{h^2} - \frac{\eta}{2h} \right) + u_1 \left(\frac{2\mu}{h^2} + \sigma \right) + u_2 \left(\frac{\eta}{2h} - \frac{\mu}{h^2} \right) = f_1$$

Y rebautizando los coeficientes

$$\alpha u_0 + \beta u_1 + \gamma u_2 = f_1$$

En general, para cualquier $i = 1, ..., N-1$

$$\alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1} = f_i$$

donde $\alpha = \left(-\frac{\mu}{h^2} - \frac{\eta}{2h}\right)$, $\beta = \left(\frac{2\mu}{h^2} + \sigma\right)$ y $\gamma = \left(\frac{\eta}{2h} - \frac{\mu}{h^2}\right)$.
Obteniendo un total de $N-1$ ecuaciones y $N+1$ incógnitas $(u_0, ..., u_N)$.
Este razonamiento es independientemente del tipo de condiciones de contorno.

Problemas de contorno unidimensionales

Si suponemos condiciones de tipo Dirichlet, es decir,

- $u(x_0) = u_0 = a$;
- $u(x_N) = u_N = b$.

Obtenemos las dos ecuaciones

$$u_0 = a, \qquad u_N = b$$

Juntada con las $N-1$ anteriores podemos formar el siguiente sistemas de ecuaciones de $N+1$ ecuaciones con $N+1$ incógnitas

Sistema de ecuaciones utilizando fórmulas de diferencias finitas centradas y condiciones de tipo Dirichlet:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
u_0 & & & & & & = & a \\
\alpha u_0 & +\beta u_1 & +\gamma u_2 & & & & = & f_1 \\
 & \alpha u_1 & +\beta u_2 & +\gamma u_3 & & & = & f_2 \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
 & & & \alpha u_{N-2} & +\beta u_{N-1} & +\gamma u_N & = & f_{N-1} \\
 & & & & & u_N & = & b
\end{array}\right.$$

Problemas de contorno unidimensionales

Matricialmente el sistema de ecuaciones utilizando fórmulas de diferencias finitas centradas y condiciones de tipo Dirichlet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \alpha & \beta & \gamma & & & \\ & \alpha & \beta & \gamma & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & \beta & \gamma \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ b \end{pmatrix}$$

Obteniendo el sistema expresado como

$$AU = B$$

Problemas de contorno unidimensionales

Si suponemos condiciones de tipo Neumann, es decir,

- $u'(x_0) = u'_0 = c$;
- $u'(x_N) = u'_N = d$.

Tenemos dos ecuaciones, pero no respecto las variables u_i. Deberemos aplicar nuevamente una fórmula de diferencias finitas para obtener dos ecuaciones para juntarlas con las $N-1$ anteriores.

Utilicemos una fórmula de diferencias finitas progresiva para u'_0 y una regresiva para u'_N:

$$u'_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} = c, \quad u'_N = \frac{u_N - u_{N-1}}{h} = d$$

Problemas de contorno unidimensionales

Sistema de ecuaciones utilizando fórmulas de diferencias finitas centradas y fórmulas descentradas para las condiciones de tipo Neumann:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
-\frac{1}{h}u_0 & +\frac{1}{h}u_1 & & & & & & = & c \\
\alpha u_0 & +\beta u_1 & +\gamma u_2 & & & & & = & f_1 \\
 & \alpha u_1 & +\beta u_2 & +\gamma u_3 & & & & = & f_2 \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
 & & & \alpha u_{N-2} & & +\beta u_{N-1} & +\gamma u_N & = & f_{N-1} \\
 & & & & & -\frac{1}{h}u_{N-1} & +\frac{1}{h}u_N & = & d
\end{array}\right.$$

Problemas de contorno unidimensionales

Matricialmente el sistema de ecuaciones utilizando fórmulas de diferencias finitas centradas y fórmulas descentradas para las condiciones de tipo Neumann:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & & & & \\ \alpha & \beta & \gamma & & & \\ & \alpha & \beta & \gamma & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & \beta & \gamma \\ & & & & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ d \end{pmatrix}$$

Obteniendo el sistema expresado como

$$AU = B$$

¿Si en lugar de utilizar una fórmula de diferencias finitas descentrada para las condiciones de tipo Neumann, hubiese utilizado una centrada?

La pregunta tiene sentido, pues con las fórmulas descentradas cometemos un error de orden h, mientras que con la centrada un error del orden h^2.

Problemas de contorno unidimensionales

Con condiciones de tipo Neumann

- $u'(x_0) = u'_0 = c;$
- $u'(x_N) = u'_N = d.$

Utilicemos una fórmula de diferencias finitas centrada para u'_0

$$u'_0 = \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = c$$

Obteniendo un nuevo punto u_{-1}, un **nodo ficticio**.

Problemas de contorno unidimensionales

Con condiciones de tipo Neumann

- $u'(x_0) = u'_0 = c$;
- $u'(x_N) = u'_N = d$.

Utilicemos una fórmula de diferencias finitas centrada para u'_0

$$u'_0 = \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = c$$

Obteniendo un nuevo punto u_{-1}, un **nodo ficticio**. Consideremos una nueva ecuación de aplicar las fórmulas de diferencia finitas centradas a nuestro problema pero para $i = 0$

$$-\mu u''_0 + \eta u'_0 + \sigma u_0 = f_0$$

Obteniendo

$$\alpha u_{-1} + \beta u_0 + \gamma u_1 = f_0$$

Despejando de ambas expresiones el nodo fictio u_{-1} obtenemos

$$u_{-1} = u_1 - 2hc, \quad u_{-1} = \frac{f_0 - \beta u_0 - \gamma u_1}{\alpha}$$

Igualando

$$u_1 - 2hc = \frac{f_0 - \beta u_0 - \gamma u_1}{\alpha}$$

Pasando las incógnitas u_0 y u_1 al miembro izquierdo

$$\frac{\beta}{\alpha} u_0 + \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) u_1 = \frac{f_0}{\alpha} + 2hc$$

Obteniendo así una nueva ecuación con las mismas incógnitas. Para la condición u'_N se trabaja de forma completamente análoga.

Problemas de contorno unidimensionales

Ejercicio

1. Obtener el sistema de ecuaciones para un problema de contorno con condiciones de tipo Neumann-Neumann utilizando fórmulas de diferencias finitas centradas.
2. Obtener el sistema de ecuaciones para un problema de contorno con condiciones de tipo Dirichlet-Neumann y Neumann-Dirichlet. Además, para las condiciones Neumann utilizar fórmulas de diferencias finitas centradas y descentradas.
3. Obtener el sistema de ecuaciones para un problema de contorno
$$-\mu u''(x) + \eta u'(x) + \sigma u(x) = f(x)$$
aplicando una fórmula descentrada para $u'(x)$ y todas las combinaciones con las condiciones de frontera.

Idea de los problemas de contorno estacionarios: Traducirlo en resolver un sistema de ecuaciones lineal de $N+1$ ecuaciones y $N+1$ incógnitas.
Estudiar los distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones es una materia lo suficientemente amplia para abordar en una asignatura por separado, que no trataremos aquí.

Problemas de contorno unidimensionales. Ejemplo

Resolvamos el problema de contorno con condición de Dirichlet:

$$\begin{cases} -u''(x) + u'(x) + u(x) = x + 1, \quad x \in I = [0, 1] \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

utilizando un paso de malla $h = \frac{1}{3}$ mediante diferencias finitas centradas.
Primero, necesitamos discretizar el intervalo

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{3} < x_2 = \frac{2}{3} < x_3 = 1$$

Las incógnitas son

$$u_0 \approx u(x_0), \quad u_1 \approx u(x_1), \quad u_2 \approx u(x_2), \quad u_3 \approx u(x_3)$$

Un total de cuatro incógnitas.

Problemas de contorno unidimensionales. Ejemplo

Resolvamos el problema de contorno con condición de Dirichlet:

$$\begin{cases} -u''(x) + u'(x) + u(x) = x + 1, \quad x \in I = [0, 1] \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

utilizando un paso de malla $h = \frac{1}{3}$.
Primero, necesitamos discretizar el intervalo

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{3} < x_2 = \frac{2}{3} < x_3 = 1$$

Las incógnitas son

$$u_0 = u(0) = 0, \quad u_1 \approx u(x_1), \quad u_2 \approx u(x_2), \quad u_3 = u(1) = 0$$

Un total de cuatro incógnitas. Aunque realmente son dos.

Problemas de contorno unidimensionales. Ejemplo

Necesitamos plantear cuatro ecuaciones:

- $i = 0$,
$$u_0 = 0 \text{ (Condición de Dirichlet)}$$
- $i = 1$,
$$-u''(x_1) + u'(x_1) + u(x_1) = x_1 + 1$$
con las fórmulas de diferencias finitas:
$$-u''(x_1) \approx -u_1'' = -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = -9(u_0 - 2u_1 + u_2)$$
$$u'(x_1) \approx u_1' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{3}{2}(u_2 - u_0)$$
$$f(x_1) = f_1 = \frac{1}{3} + 1$$
Sumándolo todo:
$$\left(-9 - \frac{3}{2}\right) u_0 + (18+1)u_1 + \left(-9 + \frac{3}{2}\right) u_2 = \frac{1}{3} + 1$$

Problemas de contorno unidimensionales. Ejemplo

Necesitamos plantear cuatro ecuaciones:

- $i = 0,$

$$u_0 = 0 \text{ (Condición de Dirichlet)}$$

- $i = 1,$

$$-u''(x_1) + u'(x_1) + u(x_1) = x_1 + 1$$

con las fórmulas de diferencias finitas:

$$-u''(x_1) \approx -u_1'' = -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = -9(u_0 - 2u_1 + u_2)$$

$$u'(x_1) \approx u_1' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{3}{2}(u_2 - u_0)$$

$$f(x_1) = f_1 = \frac{1}{3} + 1$$

Sumándolo todo:

$$-10{,}5u_0 + 19u_1 - 7{,}5u_2 = \frac{4}{3}$$

Problemas de contorno unidimensionales. Ejemplo

- $i = 2$,
$$-u''(x_2) + u'(x_2) + u(x_2) = x_2 + 1$$
con las fórmulas de diferencias finitas:
$$-u''(x_2) \approx -u''_2 = -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = -9(u_1 - 2u_2 + u_3)$$
$$u'(x_2) \approx u'_2 = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{3}{2}(u_3 - u_1)$$
$$f(x_2) = f_2 = \frac{2}{3} + 1$$
Sumándolo todo:
$$\left(-9 - \frac{3}{2}\right) u_1 + (18 + 1)u_2 + \left(-9 + \frac{3}{2}\right) u_3 = \frac{2}{3} + 1$$
- $i = 3$,
$$u_3 = 0 \text{ (Condición de Dirichlet)}$$

Problemas de contorno unidimensionales. Ejemplo

- $i = 2$,
$$-u''(x_2) + u'(x_2) + u(x_2) = x_2 + 1$$
con las fórmulas de diferencias finitas:
$$-u''(x_2) \approx -u''_2 = -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = -9(u_1 - 2u_2 + u_3)$$
$$u'(x_2) \approx u'_2 = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{3}{2}(u_3 - u_1)$$
$$f(x_2) = f_2 = \frac{2}{3} + 1$$
Sumándolo todo:
$$-10{,}5u_1 + 19u_2 - 7{,}5u_3 = \frac{5}{3}$$
- $i = 3$,
$$u_3 = 0 \text{ (Condición de Dirichlet)}$$

Problemas de contorno unidimensionales. Ejemplo

Agrupando las cuatro ecuaciones obtenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} u_0 & & & & = 0 \\ -10{,}5u_0 & +19u_1 & -7{,}5u_2 & & = \frac{4}{3} \\ & -10{,}5u_1 & +19u_2 & -7{,}5u_3 & = \frac{5}{3} \\ & & & u_3 & = 0 \end{array}\right.$$

Cuya solución es

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0{,}134041925007381$$

$$u_2 = 0{,}161795098907588, \quad u_3 = 0$$

Problemas de contorno unidimensionales. Ejemplo

Resolvamos el mismo problema de contorno pero con condición de Neumann:

$$\begin{cases} -u''(x) + u'(x) + u(x) = x + 1, \quad x \in I = [0,1] \\ u'(0) = 0, u'(1) = 0 \end{cases}$$

utilizando un paso de malla $h = \frac{1}{3}$ mediante diferencias finitas centradas.
Primero, necesitamos discretizar el intervalo

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{3} < x_2 = \frac{2}{3} < x_3 = 1$$

Las incógnitas son

$$u_0 \approx u(x_0), \quad u_1 \approx u(x_1), \quad u_2 \approx u(x_2), \quad u_3 \approx u(x_3)$$

Un total de cuatro incógnitas.

Problemas de contorno unidimensionales. Ejemplo

Necesitamos plantear cuatro ecuaciones:

- $i = 0$, Condición de Neumann:

$$0 = u'(x_0) \approx u'_0 = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{3}{2}(u_1 - u_{-1}) = 0$$

Despejando u_{-1} de la expresión anterior: $u_{-1} = u_1$

Ecuación: $-u''(x_0) + u'(x_0) + u(x_0) = x_0 + 1$

$$-u''(x_0) \approx -u''_0 = -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = -9(u_{-1} - 2u_0 + u_1)$$

$f(x_0) = f_0 = 1$

Sumándolo todo:

$$-10{,}5u_{-1} + 19u_0 - 7{,}5u_1 = 1$$

Sustituyendo u_{-1} por u_1: $19u_0 - 18u_1 = 1$

Problemas de contorno unidimensionales. Ejemplo

- $i = 1$,

$$-u''(x_1) + u'(x_1) + u(x_1) = x_1 + 1$$

con las fórmulas de diferencias finitas:

$$-u''(x_1) \approx -u_1'' = -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = -9(u_0 - 2u_1 + u_2)$$

$$u'(x_1) \approx u_1' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{3}{2}(u_2 - u_0)$$

$$f(x_1) = f_1 = \frac{1}{3} + 1$$

Sumándolo todo:

$$-10{,}5u_0 + 19u_1 - 7{,}5u_2 = \frac{4}{3}$$

Problemas de contorno unidimensionales. Ejemplo

- $i = 2$,
$$-u''(x_2) + u'(x_2) + u(x_2) = x_2 + 1$$
con las fórmulas de diferencias finitas:
$$-u''(x_2) \approx -u_2'' = -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = -9(u_1 - 2u_2 + u_3)$$
$$u'(x_2) \approx u_2' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{3}{2}(u_3 - u_1)$$
$$f(x_2) = f_2 = \frac{2}{3} + 1$$
Sumándolo todo:
$$-10{,}5u_1 + 19u_2 - 7{,}5u_3 = \frac{5}{3}$$

Problemas de contorno unidimensionales. Ejemplo

- $i = 3$, Condición de Neumann:

$$0 = u'(x_3) \approx u'_3 = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{3}{2}(u_4 - u_2) = 0$$

Despejando u_4 de la expresión anterior: $\quad u_4 = u_2$

Ecuación: $-u''(x_3) + u'(x_3) + u(x_3) = x_3 + 1$

$$-u''(x_3) \approx -u''_3 = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = -9(u_2 - 2u_3 + u_4)$$

$f(x_3) = f_3 = 1 + 1$

Sumándolo todo:

$$-10{,}5u_2 + 19u_3 - 7{,}5u_4 = 2$$

Sustituyendo u_4 por u_2: $\quad 19u_3 - 18u_2 = 2$

Problemas de contorno unidimensionales. Ejemplo

Agrupando las cuatro ecuaciones obtenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 19u_0 & -18u_1 & & & = 1 \\ -10{,}5u_0 & +19u_1 & -7{,}5u_2 & & = \frac{4}{3} \\ & -10{,}5u_1 & +19u_2 & -7{,}5u_3 & = \frac{5}{3} \\ & & -18u_2 & 19u_3 & = 2 \end{array}\right.$$

Cuya solución es

$$u_0 = 1{,}390539344, \quad u_1 = 1{,}412235974$$

$$u_2 = 1{,}453131608, \quad u_3 = 1{,}481914155$$

Problemas de contorno unidimensionales. Ejercicio

Ejercicio

Considerar el problema de contorno

$$\begin{cases} u''(x) - (x+1)u'(x) + 2u(x) = 2, \quad x \in I = [0,1] \\ u(0) = 1 \\ u'(1) = 4 \end{cases}$$

Resolver el problema tomando un paso de discretización $h = \frac{1}{2}$ mediante diferencias finitas regresivas para $u'(x)$. Utiliza diferencias finitas centradas para la condición de Neumann.

Diferencias finitas bidimensionales

Para una función de dos variables $u(x, y)$, podemos aproximas sus derivadas parciales mediante diferencias finitas

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x^*, y^*) \approx \frac{u(x^* + h, y^*) - u(x^*, y^*)}{h}, \quad E = O(h)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x^*, y^*) \approx \frac{u(x^*, y^*) - u(x^* - h, y^*)}{h}, \quad E = O(h)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x^*, y^*) \approx \frac{u(x^* + h, y^*) - u(x^* - h, y^*)}{2h}, \quad E = O(h^2)$$

fórmulas de **diferencias finitas progresiva, regresiva y centrada para la primera parcial de x.**

Diferencias finitas bidimensionales

Para una función de dos variables $u(x, y)$, podemos aproximas sus derivadas parciales mediante diferencias finitas

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x^*, y^*) \approx \frac{u(x^*, y^* + k) - u(x^*, y^*)}{k}, \quad E = O(k)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x^*, y^*) \approx \frac{u(x^*, y^*) - u(x^*, y^* - k)}{k}, \quad E = O(k)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x^*, y^*) \approx \frac{u(x^*, y^* + k) - u(x^*, y^* - k)}{2k}, \quad E = O(k^2)$$

fórmulas de **diferencias finitas progresiva, regresiva y centrada para la primera parcial de y.**

Diferencias finitas bidimensionales

Para una función de dos variables $u(x, y)$, podemos aproximas sus derivadas parciales mediante diferencias finitas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x^*, y^*) \approx \frac{u(x^* - h, y^*) - 2u(x^*, y^*) + u(x^* + h, y^*)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x^*, y^*) \approx \frac{u(x^*, y^* - k) - 2u(x^*, y^*) + u(x^*, y^* + k)}{k^2}$$

fórmulas de **diferencias finitas centradas para la segunda parcial de x e y.** En ambos el error cometido es $O(h^2)$ y $O(k^2)$ respectivamente.

Diferencias finitas bidimensionales

Para una función de dos variables $u(x,y)$, podemos aproximas sus derivadas parciales mediante diferencias finitas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x^*,y^*) \approx \frac{u(x^*+h,y^*+k)-u(x^*-h,y^*+k)}{4hk}+$$

$$+\frac{-u(x^*+h,y^*-k)+u(x^*-h,y^*-k)}{4hk}$$

fórmula de **diferencias finitas para las parciales cruzadas.** Con un error

$$E = O(\frac{h^2}{k}, h^2, h, k, k^2, \frac{k^2}{h})$$

Problemas de contorno bidimensionales

Supongamos que queremos resolver la ecuación de Poisson en un dominio Ω viene dada por

$$\left\{ \; -\Delta u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \right.$$

Lo resolveremos mediante el método de diferencias finitas, es decir, aproximaremos

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$$

por las respectivas fórmulas de diferencias finitas. Por simplificar el problema, supondremos que $\Omega = (a,b) \times (c,d)$ y consideremos las particiones uniformes con el mismo paso de malla, h, para ambos intervalos.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{M-1} < y_M = d$$

Problemas de contorno bidimensionales

Denotando $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, podemos aproximar las derivadas parciales mediante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

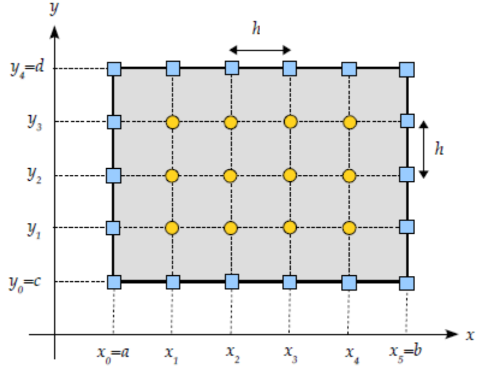
Por tanto, obtenemos las siguientes ecuaciones,

$$-\frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{ij} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}\right) = f_{ij}$$

donde $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, denominado **esquema de diferencias finitas de 5 puntos**.

Problemas de contorno bidimensionales

Para los índices $i = 1, ..., N - 1$ y $j = 1, ..., M - 1$, agrupando todas las ecuaciones, obtenemos un total de $(N - 1) \cdot (M - 1)$ ecuaciones con $(N + 1) \cdot (M + 1)$ incógnitas. Las ecuaciones que faltan son las correspondientes a las condiciones de contorno.



Problemas de contorno bidimensionales. Dirichlet

Si suponemos condiciones Dirichlet para el contorno, es decir,

- $u(a, y) = u_o(y)$
- $u(b, y) = u_e(y)$
- $u(x, c) = u_s(x)$
- $u(x, d) = u_n(x)$

Evaluando en nuestra discretización, obtendríamos

$$u_{0,j} = u(x_0, y_j) = u(a, y_j) = u_o(y_j) = u_{o,j}$$

$$u_{N,j} = u(x_N, y_j) = u(b, y_j) = u_e(y_j) = u_{e,j}$$

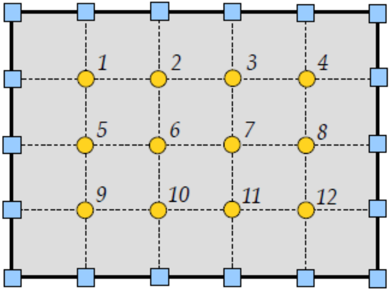
$$u_{i,0} = u(x_i, y_0) = u(x_i, c) = u_s(x_i) = u_{i,s}$$

$$u_{i,M} = u(x_i, y_M) = u(x_i, d) = u_n(x_i) = u_{i,n}$$

para $i = 0, ..., N$ y $j = 1, ..., M$.
Eliminando así las incógnitas de la frontera. Obteniendo un sistema de $(N-1) \cdot (M-1)$ ecuaciones y $(N-1) \cdot (M-1)$ incógnitas.

Problemas de contorno bidimensionales. Dirichlet

Para expresar el sistema matricialmente, debe primero establecerse el orden de las incógnitas, es decir, el sistema matricial **DEPENDE** del orden en el que se escriban las incógnitas. Una elección habitual consiste en seguir el *orden lexicográfico*, según el cual los nodos se numeran de izquierda a derecha y de arriba a abajo.



Problemas de contorno bidimensionales. Dirichlet

El sistema matricial no es tan sencillo como en el caso unidimensional, pero se consigue expresar de la forma:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} T & D & & & & \\ D & T & D & & & \\ & D & T & D & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & D & T & D \\ & & & & D & T \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(N-1)\cdot(M-1)}$$

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N-1}, \quad \text{y} \quad D = -I$$

Problemas de contorno bidimensionales. Ejemplo

Resolvamos el problema en el dominio $\Omega = [0,2] \times [0,3]$

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + (x-y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + (y-2)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x-2 \\ u(0,y) = y, \quad y \in [0,3] \\ u(2,y) = y+2, \quad y \in [0,3] \\ u(x,3) = x+3, \quad x \in [0,2] \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - (y-2)u(x,y) = 1 + (2-y)(x+y), \quad x = 0, y \in [0,3] \end{cases}$$

Con paso de malla $h = k = 1$ utilizando diferencias finitas centradas.

Ejercicio

Resolver el problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = (x^2+y^2)e^{xy}, & (x,y) \in [0,2] \times [0,1] \\ u(0,y) = 1, & y \in [0,1] \\ u(2,y) = e^{2y}, & y \in [0,1] \\ u(x,0) = 1, & x \in [0,2] \\ u(x,1) = e^{x}, & x \in [0,2] \end{cases}$$

mediante fórmulas en diferencias finitas tomando como paso de malla $h = k = \frac{1}{2}$. Basta con expresar la solución como un sistema de ecuaciones lineal.

Problemas de valor inicial y contorno

Consideremos el **problema de valor inicial y contorno** (PVIC) para la ecuación del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t)\ , \qquad x \in I = [0,L],\ t \in [0,T] \\ u(x,0) = u^0(x) \qquad x \in I = [0,L] \end{cases}$$

Con condiciones de Dirichlet

$$u(0,t) = a(t), \quad u(L,t) = b(t) \quad t \in [0,T]$$

y condiciones de Neumann

$$u'(0,t) = c(t), \quad u'(L,t) = d(t) \quad t \in [0,T]$$

Problemas de valor inicial y contorno

Consideremos una discretización de la variable x, el espacio, en N partes, $h = \frac{L}{N}$

$$x_0 = 0 < x_1 = h < ... < x_N = L$$

Denotemos por $u_i(t) = u(x_i, t)$ y $f_i(t) = f(x_i, t)$.
Para cada $i = 0, ..., N$, consideremos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) = f(x_i, t), \quad t \in [0, T]$$

Problemas de valor inicial y contorno

Consideremos una discretización de la variable x, el espacio, en N partes, $h = \frac{L}{N}$

$$x_0 = 0 < x_1 = h < \dots < x_N = L$$

Denotemos por $u_i(t) = u(x_i, t)$ y $f_i(t) = f(x_i, t)$.
Para cada $i = 0, \dots, N$, consideremos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) = f(x_i, t), \quad t \in [0, T]$$

Es decir,

$$u_i'(t) = f_i(t) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t), \quad t \in [0, T]$$

Problemas de valor inicial y contorno

Apliquemos la fórmula de diferencias finitas centradas para la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) \approx \frac{u(x_{i-1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i+1}, t)}{h^2}$$

Obteniendo la ecuación diferencial para $i = 1, ..., N-1$

$$u_i'(t) = f_i(t) + \frac{\mu}{h^2}(u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)), \quad t \in [0, T]$$

Ya sabemos que para $i = 0$ e $i = N$ las ecuaciones nos las proporcionan las condiciones de frontera.

Problemas de valor inicial y contorno

Apliquemos la fórmula de diferencias finitas centradas para la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) \approx \frac{u(x_{i-1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i+1}, t)}{h^2}$$

Obteniendo la ecuación diferencial para $i = 1, ..., N-1$

$$u_i'(t) = f_i(t) + \frac{\mu}{h^2}(u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)), \quad t \in [0, T]$$

Ya sabemos que para $i = 0$ e $i = N$ las ecuaciones nos las proporcionan las condiciones de frontera.
¡Aparecen más funciones además de $u_i(t)$ en la misma ecuación!
Deberemos considerar un sistema de ecuaciones diferenciales.

Problemas de valor inicial y contorno. Dirichlet

Por ejemplo, para condiciones de Dirichlet

$$u(0,t) = u_0(t) = a(t), \qquad u(L,t) = u_N(t) = b(t)$$

luego el vector $U(t)$ de incógnitas es:

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_{N-1}(t) \end{pmatrix}, \quad U'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_{N-1}'(t) \end{pmatrix}$$

Obtenemos

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) + \frac{\mu}{h^2} a(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_{N-2}(t) \\ f_{N-1}(t) + \frac{\mu}{h^2} b(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problemas de valor inicial y contorno. Dirichlet

Pudiendo expresarse matricialmente como

$$U'(t) = F(t) + \mu \frac{1}{h^2} AU(t)$$

¡La matriz A es de tamaño $(N-1) \times (N-1)$!

Problemas de valor inicial y contorno. Neumann

Para condiciones de Neumann

$$u'(0,t) = u'_0(t) = c(t), \qquad u'(L,t) = u'_N(t) = d(t)$$

$u_0(t)$ y $u_N(t)$ son **desconocidas**, luego el vector $U(t)$ de incógnitas es:

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{N-1}(t) \\ u_N(t) \end{pmatrix}, \quad U'(t) = \begin{pmatrix} u'_0(t) \\ u'_1(t) \\ \vdots \\ u'_{N-1}(t) \\ u'_N(t) \end{pmatrix}$$

De ahí que aparezcan 2 ecuaciones y 2 incógnitas más.

Problemas de valor inicial y contorno. Neumann

Obtenemos

$$F(t) = \begin{pmatrix} c(t) \\ f_1(t) \\ \vdots \\ f_{N-1}(t) \\ d(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teniendo la misma expresión matricial para el sistema.

$$U'(t) = F(t) + \mu \frac{1}{h^2} AU(t)$$

Problemas de valor inicial y contorno. Neumann

Obtenemos

$$F(t) = \begin{pmatrix} c(t) \\ f_1(t) \\ \vdots \\ f_{N-1}(t) \\ d(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teniendo la misma expresión matricial para el sistema.

$$U'(t) = F(t) + \mu \frac{1}{h^2} AU(t)$$

¡La matriz A es de tamaño $(N+1) \times (N+1)$!

Problemas de valor inicial y contorno

Ejercicio

Obtener los sistemas de ecuaciones (determinando el tamaño de los mismos) combinando las condiciones de contorno. Es decir, suponiendo que tenemos condiciones de tipo Dirichlet-Neumann y Neumann-Dirichlet.

El PVI obtenido, expresado matricialmente,

$$\begin{cases} U'(t) = F(t) + \mu \frac{1}{h^2} AU(t), & , t \in [0, T] \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

podemos resolverlo aplicando cualquier método visto en el tema 2.
Supongamos que para resolverlo hemos utilizado una discretización de la variable t, el tiempo, en M partes, $k = \frac{T}{M}$

$$t_0 = 0 < t_1 = k < ... < t_M = T$$

obteniendo la solución numérica

$$U_0, U_1, ..., U_M,$$

esto es

$$U_j \approx U(t_j).$$

Problemas de valor inicial y contorno

Observar que

$$U_j = \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{N-1,j} \\ u_{N,j} \end{pmatrix}$$

con

$$u_{i,j} \approx u_i(t_j) = u(x_i, t_j).$$

En cada iteración obtenemos, para el instante t_j, la evolución de u en los puntos del espacio x_i (aproximación).

Problemas de valor inicial y contorno

Por ejemplo, podemos aplicar Euler explícito para el PVI

$$\begin{cases} U'(t) = F(t) + \mu \frac{1}{h^2} AU(t), & , t \in [0, T] \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

donde $\tilde{F}(t, U(t)) = F(t) + \mu \frac{1}{h^2} AU(t)$

$$U_{j+1} = U_j + k\tilde{F}(t_j, U_j)$$

$$U_{j+1} = U_j + k(F_j + \mu \frac{1}{h^2} AU_j)$$

Obteniendo el método explícito:

$$U_{j+1} = (I + \mu \frac{k}{h^2} A)U_j + kF_j$$

Problemas de valor inicial y contorno

Utilizando un θ-método para resolver

$$\begin{cases} U'(t) = F(t) + \mu \frac{1}{h^2} AU(t), & , t \in [0, T] \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

donde $\tilde{F}(t, U(t)) = F(t) + \mu \frac{1}{h^2} AU(t)$

$$U_{j+1} = U_j + k((1-\theta)(F_j + \mu \frac{1}{h^2} AU_j) + \theta(F_{j+1} + \mu \frac{1}{h^2} AU_{j+1}))$$

$$\left(I - \theta\mu \frac{k}{h^2} A\right) U_{j+1} = \left(I + (1-\theta)\mu \frac{k}{h^2} A\right) U_j + k((1-\theta)F_j + \theta F_{j+1})$$

Para cada iteración debemos resolver un sistema de ecuaciones, cuya matriz de coeficientes y términos independientes son:

Matriz de coeficientes: $I - \theta\mu \frac{k}{h^2} A$

Términos independientes: $\left(I + (1-\theta)\mu \frac{k}{h^2} A\right) U_j + k((1-\theta)F_j + \theta F_{j+1})$

Problemas de valor inicial y contorno

Utilizando un θ-método para resolver

$$\begin{cases} U'(t) = F(t) + \mu \frac{1}{h^2} AU(t), & , t \in [0, T] \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

donde $\tilde{F}(t, U(t)) = F(t) + \mu \frac{1}{h^2} AU(t)$

$$U_{j+1} = U_j + k((1-\theta)(F_j + \mu \frac{1}{h^2} AU_j) + \theta(F_{j+1} + \mu \frac{1}{h^2} AU_{j+1}))$$

$$\left(I - \theta\mu \frac{k}{h^2} A\right) U_{j+1} = \left(I + (1-\theta)\mu \frac{k}{h^2} A\right) U_j + k((1-\theta)F_j + \theta F_{j+1})$$

que podemos reescribir como:

$$\tilde{A} U_{j+1} = \tilde{B} U_j + \tilde{b}_{j+1}$$

Problemas de valor inicial y contorno. Ejemplo

Sea el Problema de Valor Inicial y de Contorno:

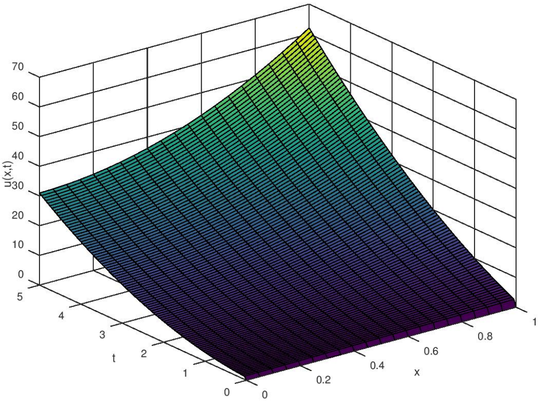
$$(PVIC) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \left(\dfrac{1}{6}\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6x^2 + 1, & x \in (0,1), \quad t > 0 \\ u(0,t) = t^2 + t + 1, & t > 0 \\ u(1,t) = t^2 + 7t + 2, & t > 0 \\ u(x,0) = x + 1, & x \in [0,1], \end{cases}$$

Considerando una discretización espacial $\Delta x = 1/3$ y un paso temporal $\Delta t = 1/3$ se pide:
Determinar la expresión de la solución en la forma

$$\tilde{A}U_{j+1} = \tilde{B}U_j + \tilde{b}_{j+1}$$

calculando las matrices $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y el vector $\tilde{b}_{j+1}$ obtenidos al aplicar un esquema en diferencias finitas centradas en el espacio y el método Crank-Nicholson para la parte temporal.

Problemas de valor inicial y contorno. Ejemplo



Ejercicio

Consideremos el problema de valor inicial y contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \lambda \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t)\ , \quad (x,t) \in [0,L] \times [0,T] \\ u(x,0) = u^0(x), \quad x \in [0,L] \end{cases}$$

Aplicando diferencias finitas centradas obtener el sistemas de ecuaciones diferenciales asociado respecto del tiempo. Considera los casos de condiciones Dirichlet y Neumann. Finalmente resuelve el problema de valor inicial con un θ-método.