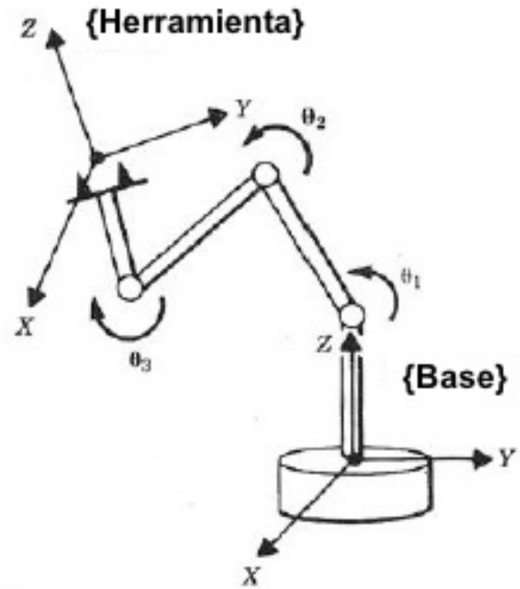
Cinemática inversa

Dan Casas

Cinemática inversa

- **Cinemática directa**
  - **Conocidos:** Ángulos articulares y geometría de los eslabones
  - **Determinar:** Posición y orientación del elemento terminal referido a la base

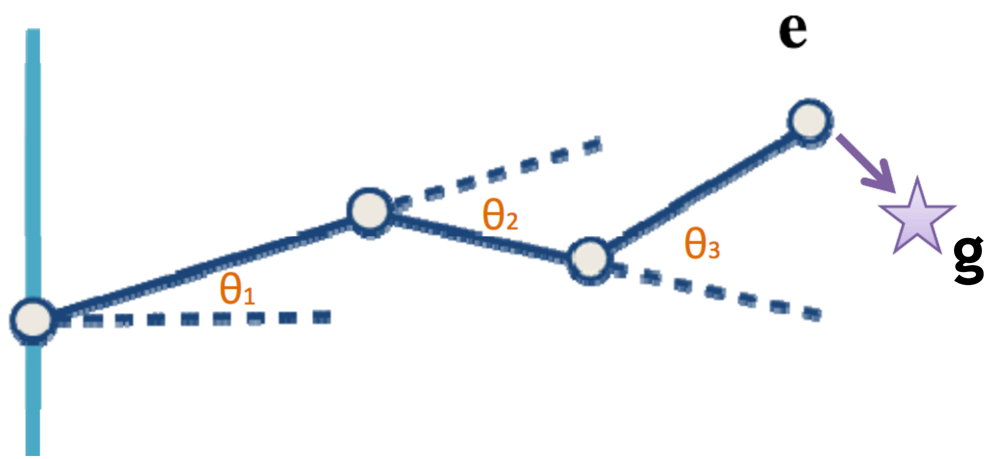
$$f(\theta) = {}^{B}_{H}T$$



- **Cinemática inversa**
  - **Conocidos:** Posición y orientación del elemento terminal referido a la base
  - **Determinar:** Ángulos articulares y geometría de los eslabones para alcanzar la orientación y posición de la herramienta

$$\theta = f^{-1}({}^{B}_{H}T)$$

Cinemática inversa



	En general	**En este caso particular**
	Posición final	
¿Qué tenemos?	$\mathbf{e} = [e_1 \ \ e_2 \ \ \ldots \ \ e_N]$	$\mathbf{e} = [e_x \ \ e_y]$
	Angulos de rotación	
¿Qué queremos?	$\mathbf{\Theta} = [\theta_1 \ \ \theta_2 \ldots \theta_M]$	$\mathbf{\Theta} = [\theta_1 \ \ \theta_2 \ \ \theta_3]$
¿Qué necesitamos?	$\mathbf{\Theta} = f^{-1}(\mathbf{e})$	

Cinemática inversa

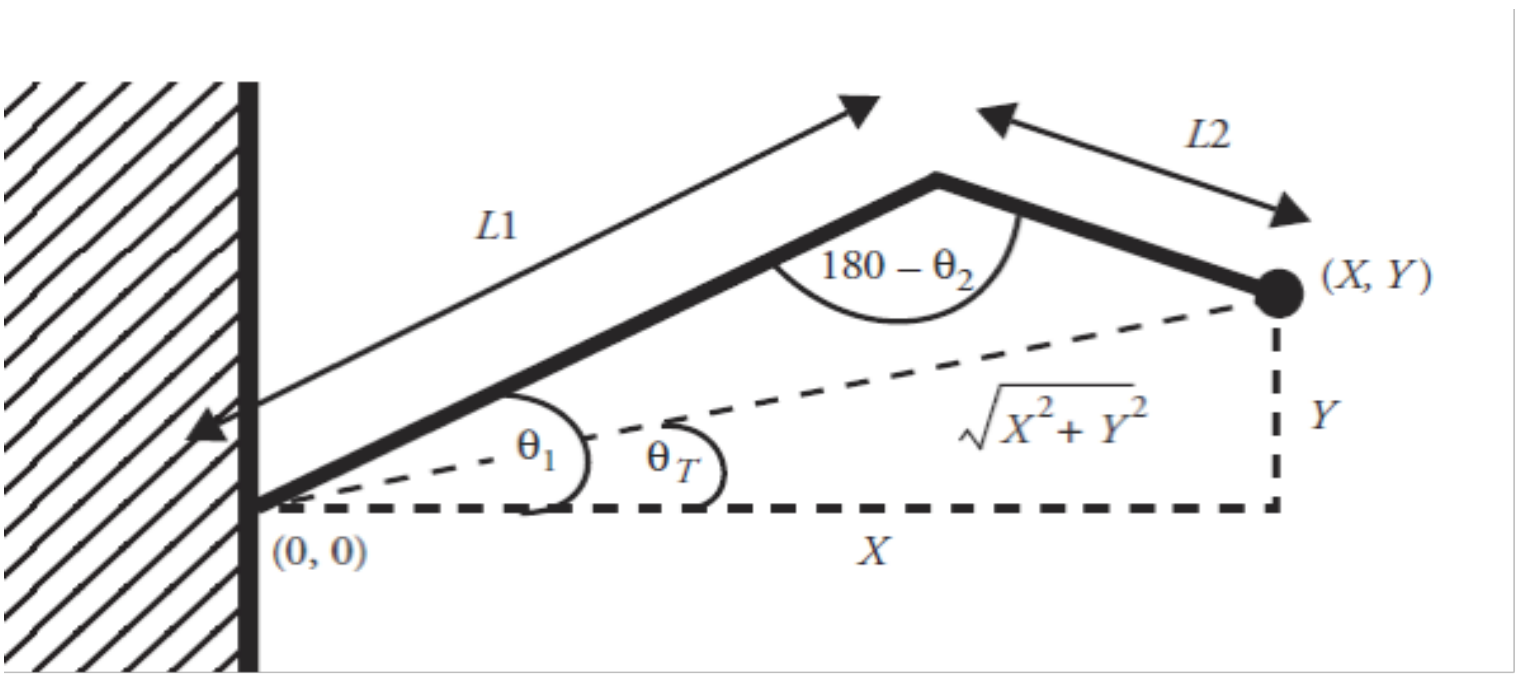
- Métodos geométricos
  - Reglas geométricas
  - Sistemas relativamente sencillos

- Métodos iterativos
  - Jacobiano
  - Método aproximado
  - Sistemas complejos

Método geométrico

Por supuesto, el primer paso es asegurarse de que la posición del objetivo está dentro del alcance del efector de extremo; que es decir:

$$L1 - L2 \leq \sqrt{X^2 + Y^2} \leq L1 + L2$$



Método analítico

Las ecuaciones utilizadas en la solución de problemas simples cinemática inversa son:

$$\cos(\theta_T) = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$\theta_T = \operatorname{acos}\left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_T) = \frac{L1^2 + X^2 + Y^2 - L2^2}{2 \cdot L1 \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}} \qquad \text{(cosine rule)}$$

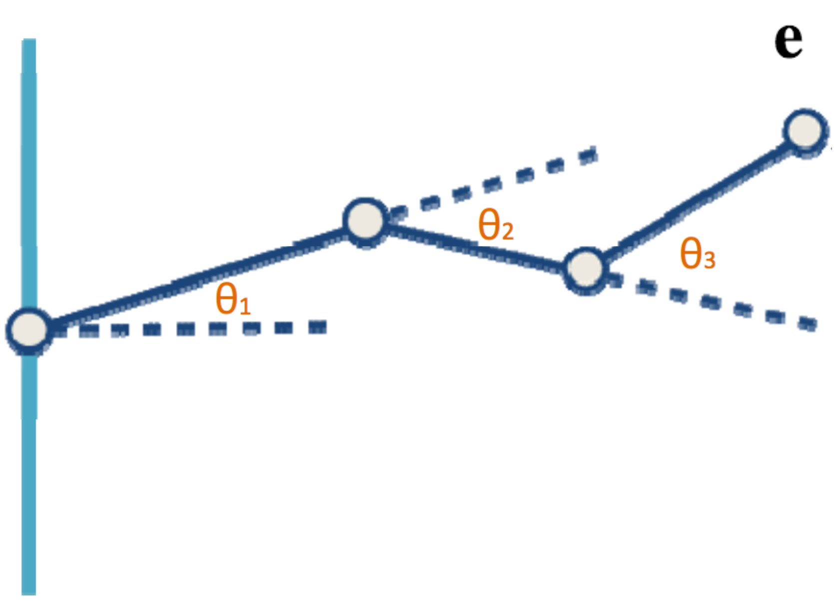
$$\theta_1 = \operatorname{acos}\left(\frac{L1^2 + X^2 + Y^2 - L2^2}{2 \cdot L1 \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}}\right) + \theta_T$$

$$\cos(180 - \theta_2) = \frac{L1^2 + L2^2 - (X^2 + Y^2)}{2 \cdot L1 \cdot L2} \qquad \text{(cosine rule)}$$

$$\theta_2 = \operatorname{acos}\left(\left(\frac{L1^2 + L2^2 - (X^2 + Y^2)}{2 \cdot L1 \cdot L2}\right)\right)$$

Método Incremental: Jacobiano

- Jacobiano
  - Matriz de derivadas parciales
  - Define como la posición **e** se mueve en función de cambios **pequeños** de Θ

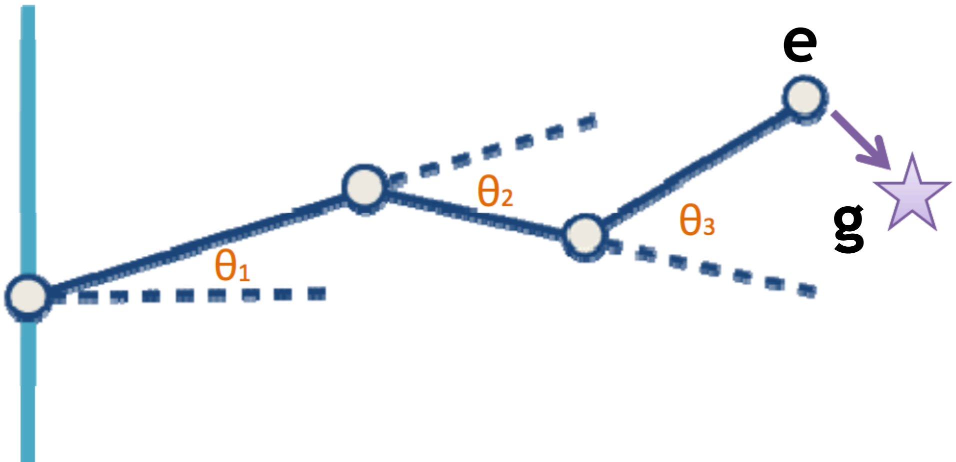


Método Incremental: Jacobiano

El end effector se mueve iterativamente hasta que la configuración final se alcanza dentro de una tolerancia dada.

Vamos a minimizar en función de Θ esta expresión

$$\| f(\Theta) - \mathbf{g} \|_2$$



Utilizaremos el Jacobian para saber como modificar Θ para que esta expresión acabe siendo próxima a 0

Método Incremental: Jacobiano

- Jacobiano
  - Matriz de derivadas parciales
  - Define como la posición **e** se mueve en función cambios **pequeños** de Θ

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_M} \\ \frac{\partial e_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_M} \end{bmatrix}$$

Posición final

$$\mathbf{e} = [e_1 \;\; e_2 \;\; \ldots \;\; e_N]$$

Angulos de rotación

$$\mathbf{\Theta} = [\theta_1 \;\; \theta_2 \; \ldots \; \theta_M]$$

θ_1

Método Incremental: Jacobiano

- Jacobiano
  - Matriz de derivadas parciales
  - Define como la posición **e** se mueve en función cambios **pequeños** de Θ

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{\dfrac{\partial e_x}{\partial \theta_1}} & \dfrac{\partial e_x}{\partial \theta_2} & \cdots & \dfrac{\partial e_x}{\partial \theta_M} \\ \dfrac{\partial e_y}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial e_y}{\partial \theta_2} & \cdots & \dfrac{\partial e_y}{\partial \theta_M} \end{bmatrix}$$

Posición final

$$\mathbf{e} = [e_1 \;\; e_2 \;\; \ldots \;\; e_N]$$

Angulos de rotación

$$\mathbf{\Theta} = [\theta_1 \;\; \theta_2 \ldots \theta_M]$$

¿Cómo cambia la coordenada x del punto final **e**, si incremento θ_1 un poco?

Método Incremental: Jacobiano

- Jacobiano
  - Matriz de derivadas parciales
  - Define como la posición **e** se mueve en función cambios **pequeños** de Θ

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_M} \\ \frac{\partial e_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_M} \end{bmatrix}$$

Posición final

$$\mathbf{e} = [e_1 \;\; e_2 \;\; \ldots \;\; e_N]$$

Angulos de rotación

$$\boldsymbol{\Theta} = [\theta_1 \;\; \theta_2 \; \ldots \; \theta_M]$$

$$J = \frac{d\mathbf{e}}{d\boldsymbol{\theta}} \qquad d\mathbf{e} = J\,d\boldsymbol{\theta}$$

Derivadas de **e** respecto Θ

Método Incremental: Jacobiano

- Jacobiano
  - Matriz de derivadas parciales
  - Define como la posición **e** se mueve en función cambios **pequeños** de $\mathbf{\Theta}$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_M} \\ \frac{\partial e_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_M} \end{bmatrix}$$

Posición final

$$\mathbf{e} = [e_1 \;\; e_2 \;\; \ldots \;\; e_N]$$

Angulos de rotación

$$\mathbf{\Theta} = [\theta_1 \;\; \theta_2 \ldots \theta_M]$$

$$J = \frac{d\mathbf{e}}{d\boldsymbol{\theta}}$$

$$d\mathbf{e} = J\,d\boldsymbol{\theta} \longrightarrow d\boldsymbol{\theta} = J^{-1}d\mathbf{e}$$

Método Incremental: Jacobiano

- Jacobiano
  - Matriz de derivadas parciales
  - Define como la posición **e** se mueve en función cambios **pequeños** de Θ

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_M} \\ \frac{\partial e_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_M} \end{bmatrix}$$

Posición final

$$\mathbf{e} = [e_1 \;\; e_2 \;\; \ldots \;\; e_N]$$

Angulos de rotación

$$\mathbf{\Theta} = [\theta_1 \;\; \theta_2 \ldots \theta_M]$$

Hacia dónde quiero ir

$$J = \frac{d\mathbf{e}}{d\boldsymbol{\theta}} \qquad d\mathbf{e} = J\,d\boldsymbol{\theta} \longrightarrow d\boldsymbol{\theta} = J^{-1} d\mathbf{e}$$

Método Incremental: Jacobiano

<u>Problema: ¿Cómo calcular **J**?</u>

Fíjate en una columna de **J**

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \theta_1} = \left[\frac{\partial e_x}{\partial \theta_1} \ \frac{\partial e_y}{\partial \theta_1} \right]^T$$

Podemos añadir un pequeño incremento $\Delta\theta$ a θ_i

y recalcular cómo cambia el punto final $\Delta\mathbf{e} = \mathbf{e}' - \mathbf{e}$

Esto resulta en una aproximación numérica

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \theta_1} \approx \frac{\Delta \mathbf{e}}{\Delta \theta_1} = \left[\frac{\Delta e_x}{\Delta \theta_1} \ \frac{\Delta e_y}{\Delta \theta_1} \right]^T}$$

Utilizaremos este método para rellenar el jacobiano J

Método Incremental: Jacobiano

while (**e** está lejos de **g**) {

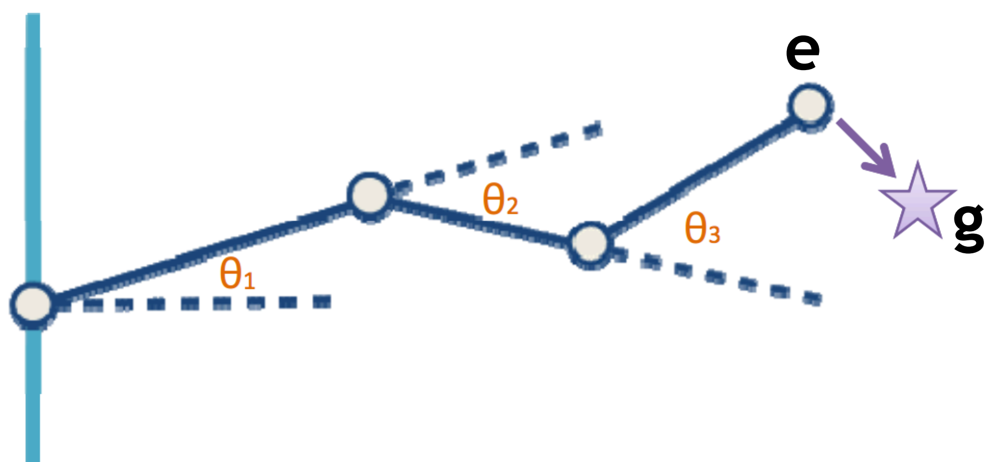
calcular jacobiano **J**

calcular pseudoinversa de **J** —> **J**$^+$

calcular incrementos en ángulos: $\boldsymbol{\Delta\theta} = \mathbf{J}^+ \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{e})$

actualizar ángulos $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} + \alpha\boldsymbol{\Delta\theta}$

}



Demo