Tema 1: Ecuaciones no lineales.

Resolución numérica.

Guillermo Vera de Salas

Universidad Rey Juan Carlos

Curso 2017-2018

Ecuaciones no lineales

El objetivo es resolver ecuaciones del tipo:

$$f(x) = 0,$$

es decir, encontrar un valor x que verifique la expresión anterior.

Ecuaciones no lineales

El objetivo es resolver ecuaciones del tipo:

$$f(x) = 0,$$

es decir, encontrar un valor x que verifique la expresión anterior.

Ejemplo

Calcular x tal que:

- $\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4} - \frac{3x}{2} - 1 = 0$

Ecuaciones no lineales

El objetivo es resolver ecuaciones del tipo:

$$f(x) = 0,$$

es decir, encontrar un valor x que verifique la expresión anterior.

Ejemplo

Calcular x tal que:

- $\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4} - \frac{3x}{2} - 1 = 0$
- $x^2 - \frac{\cos x}{4x} = 2$

Ecuaciones no lineales

El objetivo es resolver ecuaciones del tipo:

$$f(x) = 0,$$

es decir, encontrar un valor x que verifique la expresión anterior.

Ejemplo

Calcular x tal que:

- $\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4} - \frac{3x}{2} - 1 = 0$
- $x^2 - \frac{\cos x}{4x} = 2$
- *Calcular la intersección entre las curvas* $x^2 - 4$ *y* $\log x$ *para* $x > 0$

Ecuaciones no lineales

El objetivo es resolver ecuaciones del tipo:

$$f(x) = 0,$$

es decir, encontrar un valor x que verifique la expresión anterior.

Ejemplo

Calcular x tal que:

- $\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4} - \frac{3x}{2} - 1 = 0$
- $x^2 - \frac{\cos x}{4x} = 2$
- *Calcular la intersección entre las curvas* $x^2 - 4$ *y* $\log x$ *para* $x > 0$

$$x^2 - 4 = \log x$$

Ecuaciones no lineales

El objetivo es resolver ecuaciones del tipo:

$$f(x) = 0,$$

es decir, encontrar un valor x que verifique la expresión anterior.

Ejemplo

Calcular x tal que:

- $\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4} - \frac{3x}{2} - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4} - \frac{3x}{2} - 1$
- $x^2 - \frac{\cos x}{4x} = 2$
- *Calcular la intersección entre las curvas x^2 y $\log x$ para $x > 0$*

$$x^2 - 4 = \log x$$

Ecuaciones no lineales

El objetivo es resolver ecuaciones del tipo:

$$f(x) = 0,$$

es decir, encontrar un valor x que verifique la expresión anterior.

Ejemplo

Calcular x tal que:

- $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{4} - \dfrac{3x}{2} - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{4} - \dfrac{3x}{2} - 1$
- $x^2 - \dfrac{\cos x}{4x} = 2 \quad \rightarrow \quad f(x) = x^2 - \dfrac{\cos x}{4x} - 2$
- *Calcular la intersección entre las curvas x^2 y $\log x$ para $x > 0$*

$$x^2 - 4 = \log x \quad \rightarrow \quad f(x) = x^2 - 4 - \log x$$

Ecuaciones no lineales

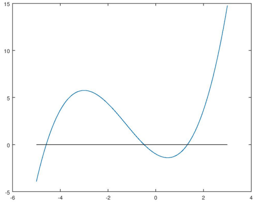


Figura: $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{4} - \dfrac{3x}{2} - 1$

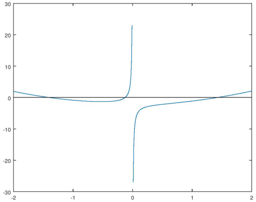


Figura: $x^2 - \dfrac{\cos x}{4x} - 2$

Ecuaciones no lineales

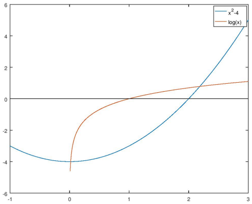


Figura: $x^2 - 4$; $\log x$

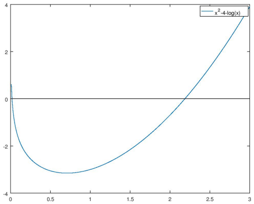


Figura: $x^2 - 4 - \log x$

Método de bipartición

Teorema de Bolzano

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua. Si* $f(a)f(b) < 0$ *entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Teorema de Bolzano

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Si $f(a)f(b) < 0$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

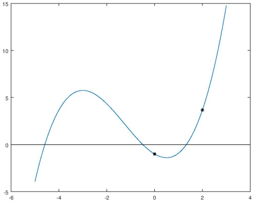


Figura: $a = 0; b = 2$

Método de bipartición

Teorema de Bolzano

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si $f(a)f(b) < 0$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

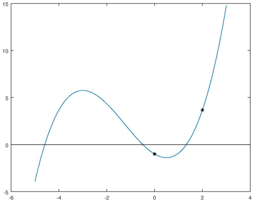


Figura: $a = 0; b = 2$

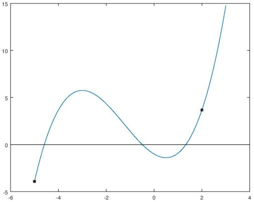


Figura: $a = -5; b = 2$

Método de bipartición

En las condiciones del teorema de Bolzano podremos afirmar que **existe un número impar de soluciones**. Sin embargo, el que no se verifique la condición $f(a)f(b) < 0$ no significa que no haya soluciones, de hecho:

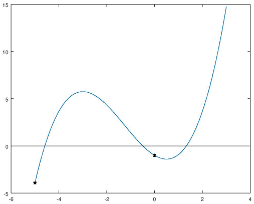


Figura: $a = -5; b = 0$

Podremos asegurar que existe un número par de soluciones, pudiendo no existir ninguna (ya que 0 es par).

Ejercicio

Demuestra que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es **estrictamente monótona** con $f(a)f(b) < 0$ entonces existe una **única solución**. Además, si $f(a)f(b) > 0$ entonces no hay ninguna solución.

Método de bipartición

Basándonos en el teorema de Bolzano, podremos encerrar las raíces siguiendo la siguiente estrategia:

1. $a_0 = a$ y $b_0 = b$ tales que $f(a_0)f(b_0) < 0$, asegurando que existe $x^* \in (a_0, b_0)$ tal que $f(x^*) = 0$.
2. Consideramos $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ y calculamos $f(a_0)f(x_0)$ y $f(b_0)f(x_0)$. Aquel con signo negativo, según Bolzano, es donde se encontrará la raíz, es decir, si $f(a_0)f(x_0) < 0$ entonces $x^* \in (a_0, x_0)$. Sin embargo, si $f(b_0)f(x_0) < 0$ entonces $x^* \in (x_0, b_0)$.
   - Si $f(a_0)f(x_0) < 0$ entonces $a_1 = a_0$ y $b_1 = x_0$.
   - Si $f(b_0)f(x_0) < 0$ entonces

Método de bipartición

Basándonos en el teorema de Bolzano, podremos encerrar las raíces siguiendo la siguiente estrategia:

1. $a_0 = a$ y $b_0 = b$ tales que $f(a_0)f(b_0) < 0$, asegurando que existe $x^* \in (a_0, b_0)$ tal que $f(x^*) = 0$.
2. Consideramos $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ y calculamos $f(a_0)f(x_0)$ y $f(b_0)f(x_0)$. Aquel con signo negativo, según Bolzano, es donde se encontrará la raíz, es decir, si $f(a_0)f(x_0) < 0$ entonces $x^* \in (a_0, x_0)$. Sin embargo, si $f(b_0)f(x_0) < 0$ entonces $x^* \in (x_0, b_0)$.
   - Si $f(a_0)f(x_0) < 0$ entonces $a_1 = a_0$ y $b_1 = x_0$.
   - Si $f(b_0)f(x_0) < 0$ entonces $a_1 = x_0$ y $b_1 = b_0$.

Método de bipartición. Algoritmo

De manera general

- En $I_n = [a_n, b_n]$ con $f(a_n)f(b) < 0$, considerar

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

  - Si $f(x_n) = 0$ entonces $x_n = x^*$, es decir, es el cero de nuestra ecuación.
  - Si $f(a_n)f(x_n) < 0$ entonces $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = x_n$.
  - Si $f(b_n)f(x_n) < 0$ entonces $a_{n+1} = x_n$ y $b_{n+1} = b_n$.

  con $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ y además podemos asegurar, por Bolzano que $x^* \in I_{n+1}$.

Método de bipartición. Ejemplo

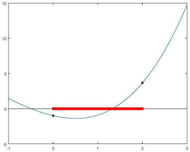


Figura: $I_0 = [0, 2]$

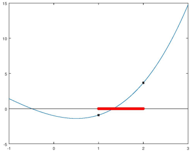


Figura: $x_0 = 1$, $I_1 = [1, 2]$

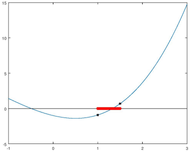


Figura: $x_1 = 1'5$, $I_2 = [1, 1'5]$

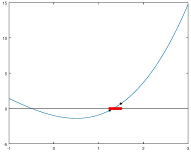


Figura: $x_2 = 1'25$, $I_3 = [1'25, 1'5]$

Método de bipartición. Cota de error

Claramente, con dicha construcción se verifica que $d(I_n) = \frac{1}{2}d(I_{n-1})$. De manera recursiva:

$$d(I_n) = \frac{1}{2^n}d(I_0) = \frac{b-a}{2^n}.$$

Por tanto, el error que se comete en la iteración N:

$$|x_N - x^*|$$

podemos acotarla, ya que $x_N, x^* \in I_N$:

$$|x_N - x^*| \leq \frac{d(I_N)}{2} = \frac{b-a}{2^{N+1}}$$

Método de bipartición. Número de iteraciones.

Si queremos encontrar la iteración que me asegure que el error es menor que una cierta tolerancia ε, basta con despejar N de la inecuación:

$$\frac{b-a}{2^{N+1}} \leq \varepsilon$$

Despejando

$$N \geq \frac{\log(b-a) - \log \varepsilon}{\log 2} - 1$$

Método de bipartición. Ejemplo

En nuestro ejemplo, si queremos que el error cometido sea inferior a $\varepsilon = 0'5 \cdot 10^{-6}$

$$N \geq \frac{\log(2-0) - \log(0'5 \cdot 10^{-6})}{\log 2} - 1 = \frac{2\log 2 + 6\log 10}{\log 2} - 1 = 20{,}9315$$

Luego tomando $N = 21$ podremos asegurar que:

$$|x_{21} - x^*| \leq 0'5 \cdot 10^{-6}$$

Método de bipartición. Ejemplo

n	x_n	I_n
0	1	$[0, 2]$
1	1,5	$[1, 2]$
2	1,25	$[1{,}25, 1{,}5]$
3	1,375	$[1{,}25, 1{,}375]$
4	1,3125	$[1{,}3125, 1{,}375]$
5	1,34375	$[1{,}34375, 1{,}375]$
6	1,328125	$[1{,}328125, 1{,}34375]$
7	1,3359375	$[1{,}328125, 1{,}3359375]$
8	1,330078125	$[1{,}328125, 1{,}33203125]$

Calculemos una cota de error para x_8

$$|x_8 - x^*| \leq \frac{2-0}{2^{8+1}} = 0'00390625$$

Método de bipartición. Conclusiones

- Ventajas:
  - Es un método seguro: o se alcanza la solución en un número finito de iteraciones o se genera una sucesión que converge con seguridad a la misma.
  - Tenemos una cota de error para determinar cuántas iteraciones son necesarias para asegurar cierta precisión.
- Inconvenientes:
  - No siempre se puede aplicar: Debemos tener un cambio de signo para poder aplicar el teorema de Bolzano.
  - Es un método muy lento: para una precisión dada, hay métodos que necesitan muchas menos iteraciones, como veremos.

Método de la secante

Supongamos que la solución está en el intervalo $[a, b]$ y consideremos $x_0, x_1 \in [a, b]$ con $x_0 < x_1$ (suelen tomarse $x_0 = a$ y $x_1 = b$).
Construyamos la recta secante a f que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$:

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

Calculemos el punto de intersección con el eje de abscisas, es decir, despejamos x para $y = 0$:

$$x = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

Método de la secante

Supongamos que la solución está en el intervalo $[a, b]$ y consideremos $x_0, x_1 \in [a, b]$ con $x_0 < x_1$ (suelen tomarse $x_0 = a$ y $x_1 = b$).
Construyamos la recta secante a f que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$:

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

Calculemos el punto de intersección con el eje de abscisas, es decir, despejamos x para $y = 0$:

$$x_2 := x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

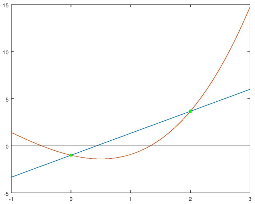
Método de la secante. Algoritmo

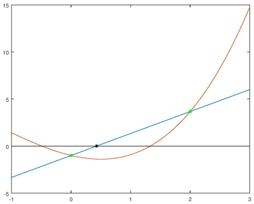
De manera general, partiendo de $x_0 < x_1$ con $x_0, x_1 \in [a, b]$ y sabiendo que hay un cero de f en $[a, b]$

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} f(x_{n+1})$$

Método de la secante

En nuestro ejemplo con $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4} - \frac{3x}{2} - 1$, tomemos, al igual que para la bisección, el intervalo $[0, 2]$ y tomemos $x_0 = 0$ y $x_1 = 2$.



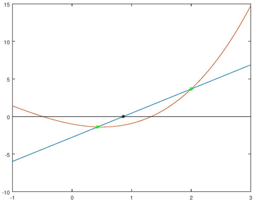


Obteniendo que $x_2 = 0{,}428571428571429$

Método de la secante

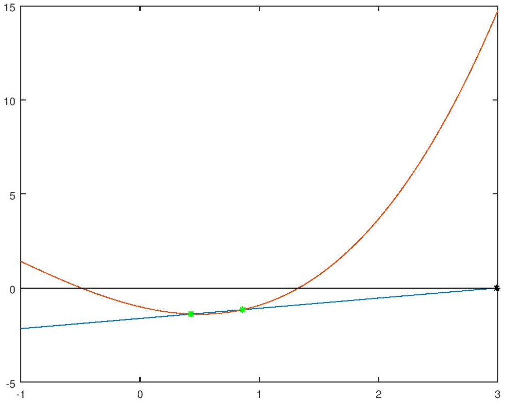
Realicemos otra iteración, ahora:

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2)$$



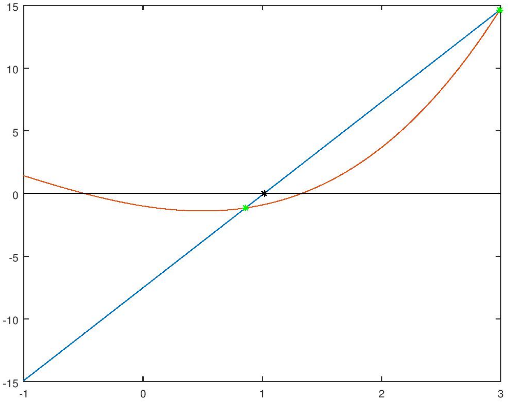
$$x_3 = 0{,}859862506610259$$

Realicemos otra iteración:



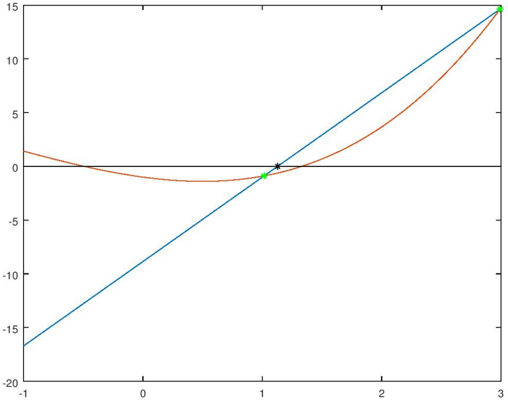
$$x_4 = 2{,}992111531666734$$

Método de la secante



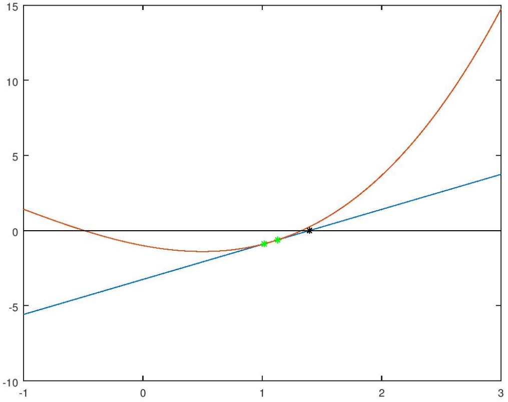
$$x_5 = 1{,}015695370185800$$

Método de la secante



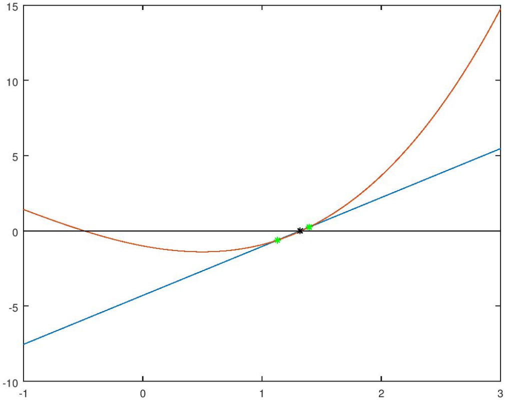
$$x_6 = 1{,}128385593958094$$

Método de la secante



$$x_7 = 1{,}395333576108291$$

Método de la secante



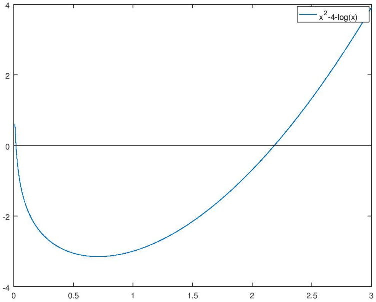
$$x_8 = 1{,}319632804604466$$

Método de la secante

n	Bipartición: x_n	Secante: x_{n+2}
0	1	0,428571428571429
1	1,5	0,859862506610259
2	1,25	2,99211531666734
3	1,375	1,01569537018580
4	1,3125	1,12838559395809
5	1,34375	1,39533357610829
6	1,328125	1,31963280460446
7	1,3359375	1,32943878122482
8	1,330078125	1,32990959992215

Método de la secante

Tratemos de resolver ahora la ecuación $x^2 - 4 - \log x = 0$ mediante el método de la secante.



Observamos que hay dos soluciones, pero en particular, en $[1, 3]$ hay una solución.

Método de la secante

Consideremos $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$ y veamos que sucesión nos origina:

n	Secante: x_n
0	1
1	2
2	2,30047308381303
3	2,18075896570811
4	2,18669809040268
5	2,18688843228311
6	2,18688810316970
7	2,18688810318733
8	2,18688810318733

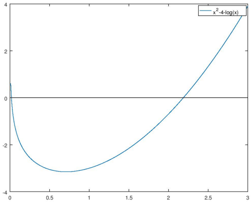
Método de la secante

Consideremos $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$ y veamos que sucesión nos origina:

n	Secante: x_n	Secante: x_n
0	1	2
1	2	2,5
2	2,30047308381303	2,17099069374385
3	2,18075896570811	2,18560207194673
4	2,18669809040268	2,18689390002399
5	2,18688843228311	2,18688810108403
6	2,18688810316970	2,18688810318733
7	2,18688810318733	
8	2,18688810318733	

Método de la secante

¿Pero que ocurre si trato de aplicar el método de la secante para hallar la otra solución?



Supongamos que tenemos el intervalo **cerrado** $[\delta, 1]$ donde se encuentra la raíz. Esto es, por Bolzano, un $0 < \delta < 1$ tal que $f(\delta)f(1) < 0$.

Método de la secante

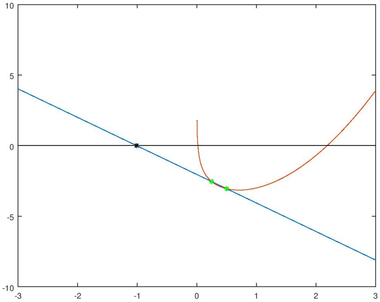
Consideremos en dicho intervalo $x_0 = 0{,}5$ y $x_1 = 1$:

n	Secante: x_n
0	0,5
1	1
2	27,383915780669319
3	1,106162889375308
4	1,207590734112681
5	3,092147730427845
6	1,925949205932494
7	2,131090901074766
8	2,191446332924229

¡Se ha ido hacia la otra solución!

Método de la secante

Consideremos en dicho intervalo $x_0 = 0{,}25$ y $x_1 = 0{,}5$:



¡Se ha ido fuera del dominio de nuestra función! Es imposible continuar el método.

Método de la secante. Conclusiones

- Puede que el método se detenga en un número finito de iteraciones por no ser posible calcular un nuevo término de la sucesión.
- Puede que se genere una sucesión que no converja a la solución que se busca.
- No es fácil construir una cota de error.

Método de Newton

Ya hemos visto que construyendo rectas secantes podemos conseguir una sucesión de puntos que converja a la solución de nuestra ecuación. Debemos recordar que el caso límite de una recta secante es la recta tangente.

¿Qué sucederá si consideramos rectas tangentes?

Para poder asegurar que en todo punto exista la recta tangente debemos suponer que f **es una función derivable**, al menos, en el intervalo donde se encuentre la raíz.

Método de Newton

Consideremos $x_0 \in [a, b]$ y tracemos la recta tangente que pase por el punto $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Calculando el corte con el eje de abscisas, es decir, despejando x para $y = 0$:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Para que tenga sentido $f'(x_0) \neq 0$.

Método de Newton

Consideremos $x_0 \in [a, b]$ y tracemos la recta tangente que pase por el punto $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Calculando el corte con el eje de abscisas, es decir, despejando x para $y = 0$:

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Para que tenga sentido $f'(x_0) \neq 0$.

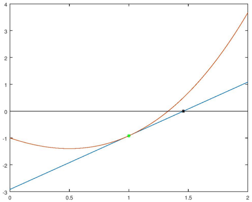
Método de Newton. Algoritmo

De manera general, sea $x_0 \in [a, b]$, sabiendo que f es derivable y que hay un cero de f en $[a, b]$

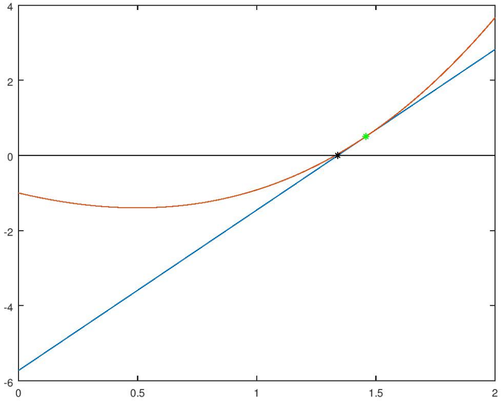
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En nuestro ejemplo con $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4} - \frac{3x}{2} - 1$, tomemos, al igual que para los métodos anteriores, el intervalo $[0, 2]$ y tomemos $x_0 = 1$. Para aplicar el método antes de nada necesitamos conocer la expresión de la derivada $f'(x) = x^2 + \frac{5x}{2} - \frac{3}{2}$

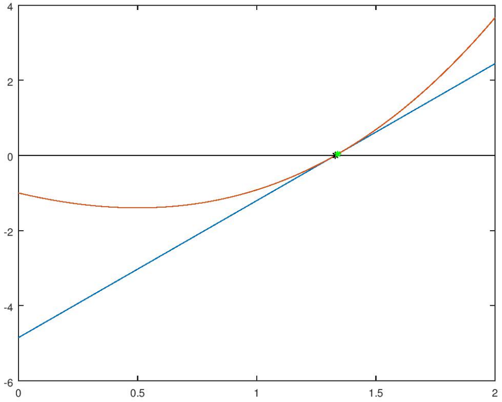
$$x_1 = x_0 - \frac{\frac{x_0^3}{3} + \frac{5x_0^2}{4} - \frac{3x_0}{2} - 1}{x_0^2 + \frac{5x_0}{2} - \frac{3}{2}} = \frac{35}{24} = 1{,}45833333333333$$



Método de Newton

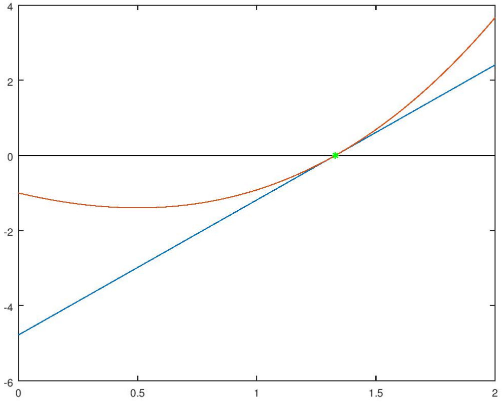


$$x_2 = 1{,}34019594564089$$



$$x_3 = 1{,}32998123825779$$

Método de Newton



$$x_4 = 1{,}32990613497530$$

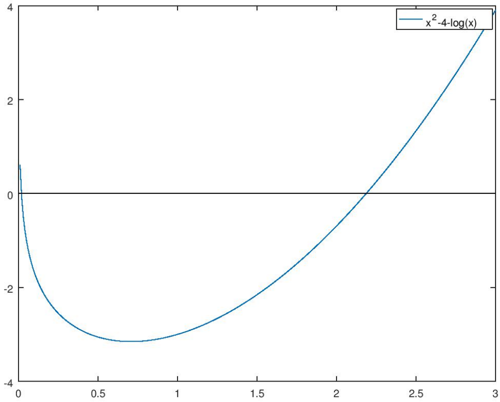
Método de Newton

n	Bipartición: x_n	Secante: x_{n+2}	Newton: x_{n+1}
0	1	0,428571428571429	1,458333333333333
1	1,5	0,859862506610259	1,340195945640890
2	1,25	2,992111531666734	1,329981238257790
3	1,375	1,015695370185800	1,329906134975300
4	1,3125	1,128385593958094	1,329906130925600
5	1,34375	1,395333576108291	1,329906130925600
6	1,328125	1,319632804604466	
7	1,3359375	1,329438781224820	
8	1,330078125	1,329909599922150	

Método de Newton

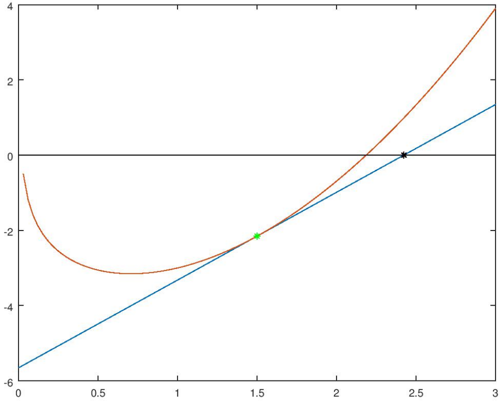
Este ejemplo nos ha mostrado que la velocidad de convergencia del método de Newton es mayor, ¿será, siempre que converja el método, éste hecho cierto? Y la respuesta es que sí, esto se debe a que **el método de Newton es de orden** 2, por ejemplo el método de la secante es de orden $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Al igual que para la secante, resolvamos la ecuación $x^2 - 4 - \log x = 0$.



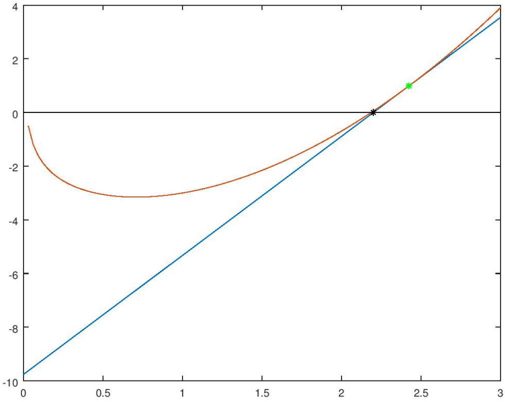
Método de Newton

Consideremos $x_0 = 1{,}5$



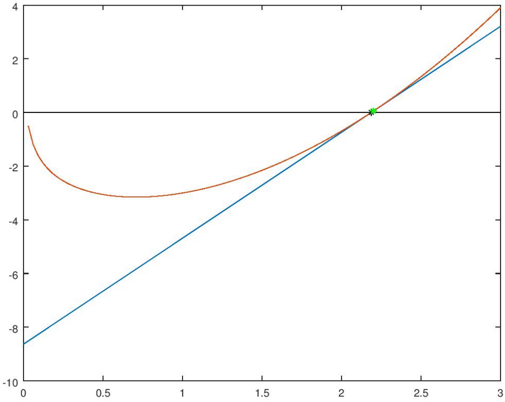
$x_1 = 2{,}42377076061778$

Método de Newton



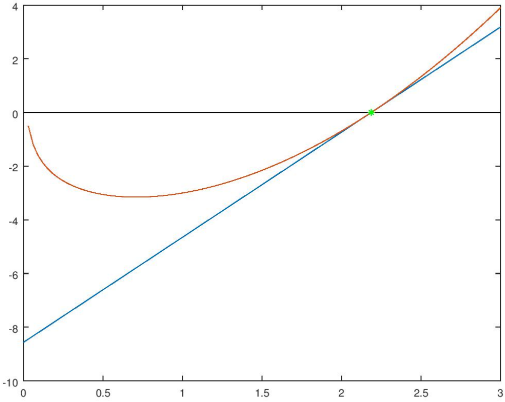
$$x_2 = 2{,}20069322928810$$

Método de Newton



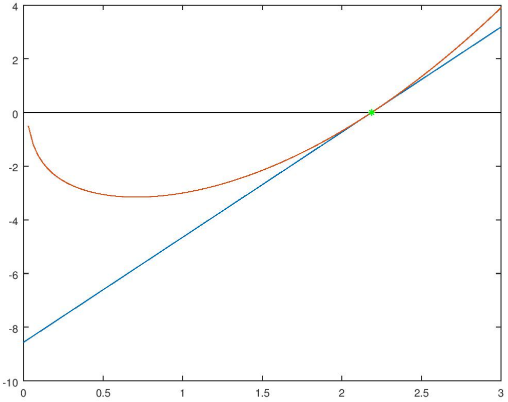
$$x_3 = 2{,}18694139449564$$

Método de Newton



$$x_4 = 2{,}18688810398824$$

Método de Newton



$$x_5 = 2{,}18688810318733$$

Método de Newton

n	Secante: x_n	Secante: x_n	Newton: x_n
0	1	2	1,5
1	2	2,5	2,42377076061778
2	2,30047308381303	2,17099069374385	2,20069322928810
3	2,18075896570811	2,18560207194673	2,18694139449564
4	2,18669809040268	2,18689390002399	2,18688810398824
5	2,18688843228311	2,18688810108403	2,18688810318733
6	2,18688810316970	2,18688810318733	
7	2,18688810318733		
8	2,18688810318733		

Ejercicio

Realizar el método de Newton tomando como $x_0 = 2$.

Método de Newton

Tratar de calcular la raíz que se encuentra en $[\delta, 1]$

Ejercicio

- Realizar el método de Newton tomando $x_0 = 1$.
- Realizar el método de Newton tomando $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Realizar el método de Newton tomando $x_0 = \frac{1}{2}$.

¿Cómo podremos dar un x_0 que me asegure la convergencia del método? ¿Existirá un x_0 para que el método de Newton converja a la solución?
La respuesta es que sí, y esto se debe a que **el método de Newton es localmente convergente**

Método de Newton. Convergencia

Teorema

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función de clase* 2*. Supongamos que:*

- $f([a,b]) \subset [a,b]$;
- $f(a)f(b) < 0$;
- $f'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$;
- $f''(x) \neq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$.

  Entonces, dado $x_0 \in [a,b]$ *tal que* $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$*, la sucesión* $\{x_n\}$ *dada por:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

está bien definida y converge hacia el único cero de f *en* $[a,b]$

Método de Newton

Calculemos un x_0 válido para calcular el cero que nos falta de la ecuación $x^2 - 4 - \log x = 0$.

$$f(x) = x^2 - 4 - \log x, \quad f'(x) = 2x - \frac{1}{x}, \quad f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$$

Supongamos que conocemos el intervalo $[\delta, 1]$ que verificaba $f(\delta)f(1) < 0$. Comprobemos si $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [\delta, 1]$.

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [\delta, 1]$$

Deberemos restringir el intervalo a por ejemplo $[\delta, \frac{1}{2}]$, de esta manera tenemos asegurada que $f'(x) \neq 0$.
La última condición es trivial, pues $f''(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$, en particular $f''(x) > 0$, luego basta con encontrar un $x_0 \in [\delta, \frac{1}{2}]$ tal que $f(x_0) > 0$. De modo que $x_0 = \delta$ es una elección válida.

Por supuesto, falta por determinar $\delta > 0$ que verifique $f(\delta) > 0$. Tras varios cálculos, observamos que $f(0{,}01) = 0{,}605270186 > 0$, luego el intervalo a considerar será:

$$[0'01, 0'5]$$

n	Newton: x_n
0	0,01
1	0,0160539126424094
2	0,0181750922853849
3	0,0183211986343217
4	0,0183217882501250
5	0,0183217882596254
6	0,0183217882596254

¡IMPORTANTE! Falla la condición

$$f([0'01, 0'5]) \not\subset [0'01, 0'5]$$

Método de Newton

Al igual que ocurría con el método de la secante, dada su naturaleza:

- Puede que el método para no converja para cierta semillas. Aunque el teorema anterior me asegura en ciertos casos.
- Puede que la sucesión converja a otra solución.
- No es sencillo dar una cota de error.

Método de punto fijo

Supongamos que f es una función con un cero, x^*, en el intervalo $I = [a, b]$. La estructura general de un método unipaso de punto fijo es la siguiente:

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = \quad g(x_n) \end{cases}$$

Con g la denominada función de iteración. (La supondremos siempre **continua**)

Definición

Diremos que ***un método unipaso es convergente*** *en un intervalo J si para todo $x_0 \in J$ la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia x^*.*

Método de punto fijo

Si suponemos que un método dado por x_0 y g es convergente, entonces $\{x_n\} \to x^*$.

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = g(x^*)$$

Entonces:

$$x^* \text{ es un cero de } f \Leftrightarrow x^* \text{ es un punto fijo de } g$$

Son muy frecuentes los errores por confundir ambas funciones...

Método de punto fijo

El método de Newton es un caso particular de método de punto fijo donde:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Pero no es el único, por ejemplo:

- $g(x) = x + \alpha f(x)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $g(x) = x - \dfrac{2f(x)f'(x)}{2f'(x)^2 - f(x)f''(x)}$ (Método de Halley; orden 3);
- $g(x) = x + \alpha \frac{f(x)}{f'(x)}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $g(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$;
- $g(x) = x + \log(f(x) + 1)$.

Método de punto fijo. Convergencia

Definición

*Dada una función $g : J \to \mathbb{R}$, se dice que g es **contractiva** si existe $C \in [0, 1)$ tal que*

$$|g(x) - g(y)| \leq C|x - y|$$

Método de punto fijo. Convergencia

Definición

*Dada una función $g : J \to \mathbb{R}$, se dice que g es **contractiva** si existe $C \in [0, 1)$ tal que*

$$|g(x) - g(y)| \leq C|x - y| < |x - y|$$

para todo $x, y \in J$. Llamaremos constante de contracción a C.

Proposición

Si g es una función contractiva entonces es continua.

Método de punto fijo. Convergencia

Definición

*Dada una función $g : J \to \mathbb{R}$, se dice que g es **contractiva** si existe $C \in [0, 1)$ tal que*

$$|g(x) - g(y)| \leq C|x - y| < |x - y|$$

para todo $x, y \in J$. Llamaremos constante de contracción a C.

Proposición

Si g es una función contractiva entonces es continua.

Teorema del punto fijo de Banach

Si $g : J \to \mathbb{R}$, con J un intervalo cerrado, es contractiva entonces existe un único punto fijo de g.

Método de punto fijo. Convergencia

Teorema

Sea $g : J \to \mathbb{R}$, una función tal que:

- *J es un intervalo cerrado;*
- *$g(J) \subset J$;*
- *g es contractiva.*

Entonces g tiene un único punto fijo $x^* \in J$. Además, dado $x_0 \in J$, la sucesión

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

converge hacia x^*.

Método de punto fijo. Cota de error

Dado un método de punto fijo, g definido en un intervalo $[a, b]$ y con C constante de contracción, se deducen las siguientes cota de error:

- $|x_N - x^*| \leq C^N(b-a)$;
- $|x_N - x^*| \leq \dfrac{C^N}{1-C}|x_1 - x_0|$;
- $|x_N - x^*| \leq \dfrac{C}{1-C}|x_N - x_{N-1}|$.

Ejercicio

Observando dichas cotas de error. ¿En función de C, cuándo será mejor el método?

¡IMPORTANTE! La constante C depende del intervalo, no de x_0.

Método de punto fijo

Comprobada la importancia de que la función de iteración resulte ser una función contractiva, que se traduce en calcular esa constante de contracción y dada lo poco práctica que resulta la definición para calcular dicha constante, es natural preguntarse:

¿Existirá alguna caracterización de que una función sea contractiva más práctica?

Método de punto fijo

Teorema

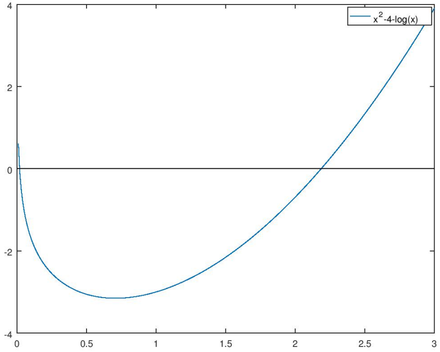
Sea $g : J \to \mathbb{R}$ una función de clase 1. Entonces g es contractiva si, y sólo si existe $C \in [0, 1)$ tal que

$$|g'(x)| \leq C < 1$$

para todo $x \in J$.

Método de punto fijo. Ejemplo

Estudiemos la convergencia del método de Newton, como método de punto fijo, para $f(x) = x^2 - 4 - \log x$ en el intervalo $[1, 3]$



Método de punto fijo. Ejemplo

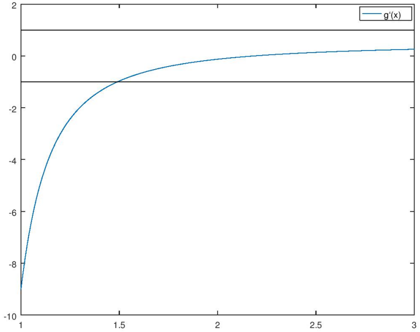
Calculemos la función de iteración del método de Newton:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - 4 - \log x}{2x - \frac{1}{x}} = \frac{x \log x + x^3 + 3x}{2x^2 - 1}$$

Derivando

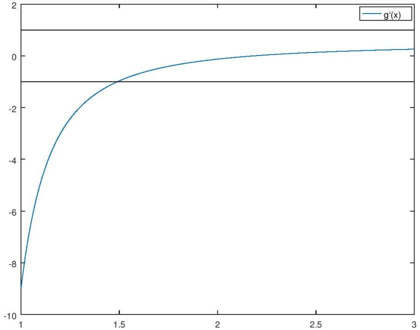
$$g'(x) = -\frac{(2x^2 + 1)\log x - 2x^4 + 7x^2 + 4}{4x^4 - 4x^2 + 1}$$

Método de punto fijo. Ejemplo



En $[1'5, 3]$ se tiene que $|g'(x)| < 1$, luego es contractiva.
$|g'(1{,}5)| = 0'96776$ y
$|g'(2)| = 0'12731$.
¿Cuál será mejor x_0?

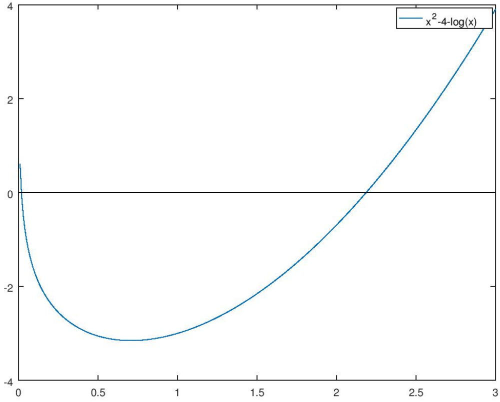
Método de punto fijo. Ejemplo



En $[1'5, 3]$ se tiene que $|g'(x)| < 1$, luego es contractiva.
$|g'(1{,}5)| = 0'96776$ y $|g'(2)| = 0'12731$.
¿Cuál será mejor x_0?
¡CUIDADO! Si tomamos $x_0 = 2$ no significa que $C = 0'12731$.

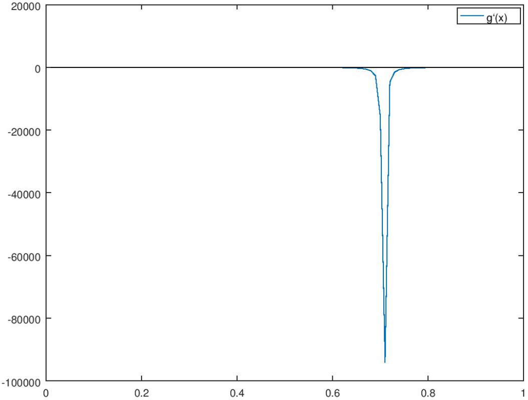
Método de punto fijo. Ejemplo

Si estudiamos ahora el comportamiento de $g'(x)$ para la otra raíz en $[\delta, 1]$



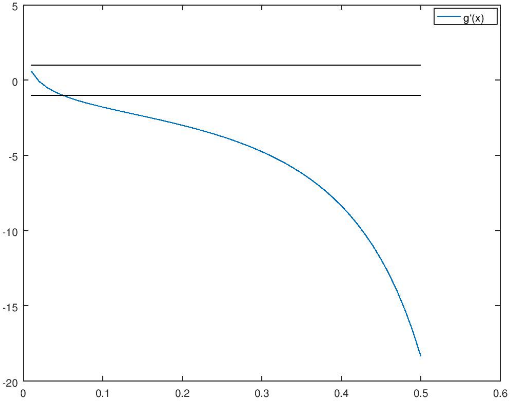
Método de punto fijo. Ejemplo

Si estudiamos ahora el comportamiento de $g'(x)$ para la otra raíz en $[\delta, 1]$



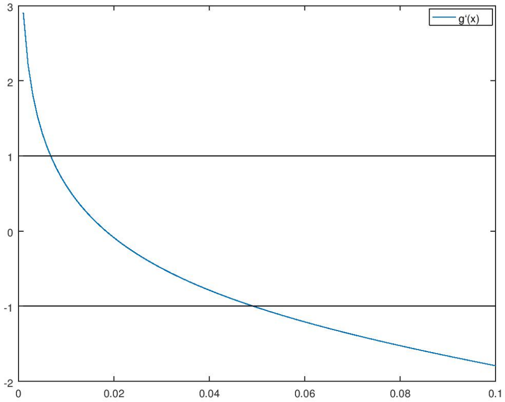
Método de punto fijo. Ejemplo

Si vamos ajustando el intervalo a $[\delta, 0'5]$

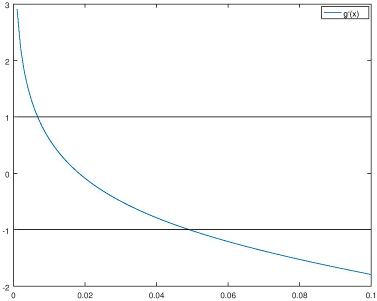


Método de punto fijo. Ejemplo

Si vamos ajustando el intervalo a $[\delta, 0'1]$



Método de punto fijo. Ejemplo



En $[0'001, 0'049]$ se tiene que $|g'(x)| < 1$, luego es contractiva. Recordamos que tomamos $x_0 = 0{,}01 \in [0'001, 0'049]$, $|g'(0{,}01)| = 0'60563$.

Método de punto fijo. Ejercicios

Ejercicio

Considera la ecuación $x - e^{-x} = 0$

- Demuestra que tiene una única solución en $\mathbb{R}$.
- Determina un intervalo cerrado y acotado donde se encuentre dicha solución.
- Realiza 3 iteraciones del método de bipartición. ¿Cuántas deberías realizar para garantizar un error inferior a $0'5 \cdot 10^{-8}$?
- Estudia si el método de Newton es convergente en el intervalo dado. Si no es así, calcula un intervalo donde el método de Newton siempre sea convergente.
- Realiza 3 iteraciones del método de Newton utilizando como x_0 el punto medio del intervalo calculado. ¿Cuántas deberías realizar para garantizar un error inferior a $0'5 \cdot 10^{-8}$ independiente del x_0 tomado? ¿Y con el x_0 escogido?

Método Δ^2 de Aitken

Cuando un método iterativo de punto fijo no tenga orden de convergencia, al menos dos, puede utilizarse una estrategia para acelerar la velocidad de convergencia.
Para una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ se denomina **diferencia progresiva de primer orden** en el punto x_i a

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

De manera general

$$\Delta^m x_i = \Delta(\Delta^{m-1} x_i)$$

En particular

$$\Delta^2 x_i = \Delta(\Delta x_i) = \Delta x_{i+1} - \Delta x_i = x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i$$

Método Δ^2 de Aitken

Supongamos que $\lim x_n = x^*$, construyamos la siguiente sucesión:

$$y_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Obteniendo

$$y_n = \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Bajo ciertas hipótesis, podemos asegurar que

$$\lim y_n = x^* \quad , \quad \lim \frac{y_n - x^*}{x_n - x^*} = 0$$

Ejercicio

Expresar y_n tan sólo en función de x_n, es decir, sin que aparezcan x_{n+1} y x_{n+2}.

Método de Steffersen

Si aplicamos el método Δ^2 de Aitken a la sucesión que nos proporciona el método de punto fijo g obtenemos el llamado **método de Steffersen**

$$x_{n+3} = \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Sistemas de ecuaciones no lineales

Consideremos el sistema de ecuaciones no lineales de n incógnitas y n ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{ccc} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) & = & 0 \end{array}\right.$$

Consideremos la función

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)^t = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Queremos buscar un $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

Métodos de punto fijo

Al igual que para el caso de $n = 1$, buscaremos una **función de iteración**, **g**, que verifique

$$\mathbf{x}^* \text{ es un cero de } \mathbf{f} \text{ si, y sólo si } \mathbf{x}^* \text{ es punto fijo de } \mathbf{g}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$$

Algunos métodos son:

- $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})$;
- $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Este método, al igual que el anterior, se escribe:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) \end{cases}$$

Método de Newton para sistemas

Para generalizar el método de Newton, necesitamos el análogo a derivadas pero en $\mathbb{R}^n$. Tendremos que hablar en términos de **matriz Jacobiana**

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Método de Newton para sistemas

El **método de Newton para sistemas** es:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Resolver el sistema de ecuaciones no lineal

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1^3 + x_2^3 & = & 9 \\ e^{x_2} - x_1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Método de Newton para sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1^3 + x_2^3 & = & 9 \\ e^{x_2} - x_1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Tenemos que

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Y por tanto

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Resolviendo en Octave:

$$x^{(21)} = \begin{pmatrix} 2{,}051120252451348 \\ 0{,}718386108503319 \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2^3 - 9 \\ e^{x_2} - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Y por tanto

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Resolviendo en Octave:

$$x^{(21)} = \begin{pmatrix} 2{,}051120252451348 \\ 0{,}718386108503319 \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2^3 - 9 \\ e^{x_2} - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Y por tanto

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Resolviendo en Octave:

$$x^{(21)} = \begin{pmatrix} 2{,}051120252451348 \\ 0{,}718386108503319 \end{pmatrix}$$

Método de Newton para sistemas

Tenemos que

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2^3 - 9 \\ e^{x_2} - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Y por tanto

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & 3x_2^2 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Resolviendo en Octave:

$$x^{(21)} = \begin{pmatrix} 2{,}051120252451348 \\ 0{,}718386108503319 \end{pmatrix}$$

Método de Newton para sistemas

Tenemos que

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2^3 - 9 \\ e^{x_2} - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Y por tanto

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & 3x_2^2 \\ -1 & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Resolviendo en Octave:

$$x^{(21)} = \begin{pmatrix} 2{,}051120252451348 \\ 0{,}718386108503319 \end{pmatrix}$$

Método de Newton para sistemas

Tenemos que

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2^3 - 9 \\ e^{x_2} - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Y por tanto

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & 3x_2^2 \\ -1 & e^{x_2} \end{pmatrix}$$

Resolviendo en Octave:

$$x^{(21)} = \begin{pmatrix} 2{,}05112025245134 8 \\ 0{,}718386108503319 \end{pmatrix}$$