Tema 2: Problema de valores iniciales para EDOs

Resolución numérica.

Guillermo Vera de Salas

Universidad Rey Juan Carlos

Curso 2017-2018

Preliminares

Consideremos el **problema de valor inicial (PVI) o de Cauchy** dado por:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I = [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I = [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- $f(t, y(t)) = \frac{1}{2}(t^2 - y(t))$ con $I = [0, 1]$ e $y(0) = 1$.
- $f(t, y(t)) = t \cos t$ con $I = [-\pi, \pi]$ e $y(-\pi) = 0$.

Preliminares

Resolver numéricamente estos problemas consistirá en **discretizar el intervalo** I: Incluir gráfica típico:

$$t_0 < t_1 < ... < t_N = t_0 + T$$

cuyos elementos llamaremos **nodos**. Por simplicidad supondremos que la discretización es uniforme, es decir,

$$t_{k+1} = t_k + h.$$

La constante $h = \dfrac{T}{N}$ se denomina **paso de malla**.

Preliminares

Un **método numérico** para resolver el problema PVI es un algoritmo que proporciona una serie de valores

$$y_0, y_1, \ldots, y_N, \qquad \textbf{(solución numérica)}$$

de modo que cada y_k es una aproximación del valor exacto de la solución en t_k:

$$y_k \approx y(t_k)$$

Definimos el **error local** cometido en cada nodo como

$$e_k = |y(t_k) - y_k|$$

y el **error global** como

$$e = e(h) = \max_{k=1,\ldots,N} e_k = \max_{k=1,\ldots,N} |y(t_k) - y_k|$$

Preliminares

Una propiedad deseable en todo método numérico es la **convergencia**, que puede expresarse como

$$\lim_{h \to 0} e(h) = 0$$

Preliminares

De manera teórica, en un PVI:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I = [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Si tomamos una discretización de I se puede integrar ambos miembros respecto de t entre $[t_k, t_{k+1}]$:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt$$

Obteniendo, por la regla de Barrow:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt$$

La **formulación integral de un PVI.**

Método de Euler explícito

Idea geométrica:

Aproximar el valor de la solución en cada nodo por el valor que proporciona la recta tangente a la solución dada trazada desde el nodo anterior.

Es totalmente lógico pues en un PVI:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I = [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

conocemos, 'más o menos', la derivada de la función $y(t)$ en cada punto.

Método de Euler explícito

Vamos a aplicarlo sobre el PVI:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y'(t) = \frac{1}{2}(t^2 - y(t)), & t \in I = [0,1] \\ y(0) = 1 \end{array} \right. ,$$

sabiendo que la solución exacta es:

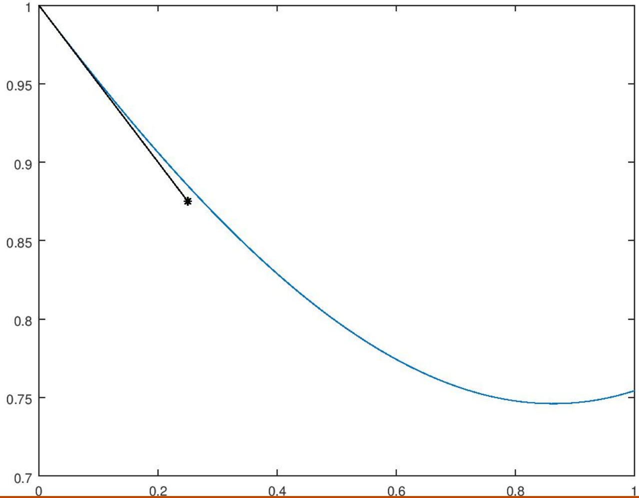
$$y(t) = t^2 - 4t + 8 - 7e^{-\frac{t}{2}}$$

Para ello discretizaremos el intervalo $[0, 1]$ en cuatro:

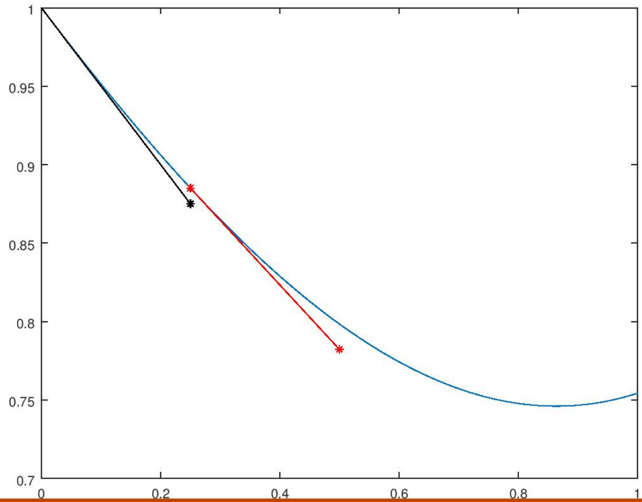
$$t_0 = 0 < t_1 = 0{,}25 < t_2 = 0{,}50 < t_3 = 0{,}75 < t_4 = 1$$

es decir, hemos tomado como paso de malla $h = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ $(N = 4)$.

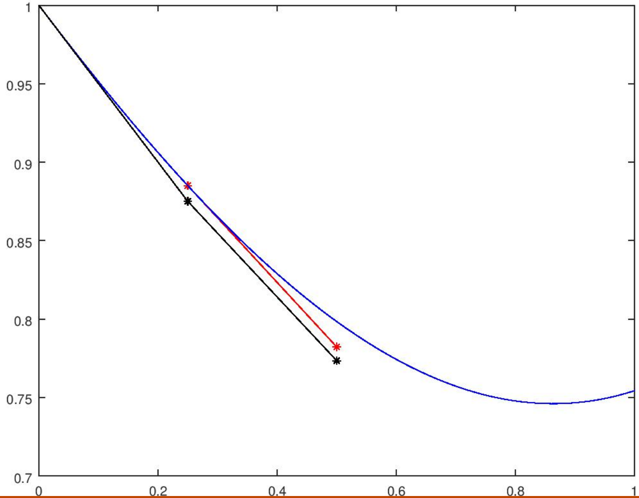
Método de Euler explícito



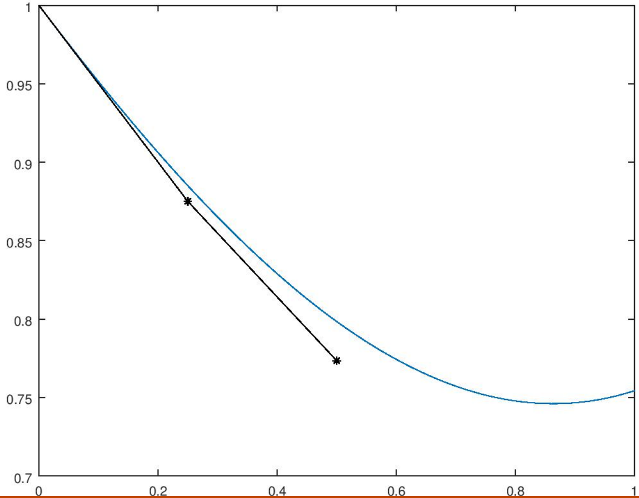
Método de Euler explícito



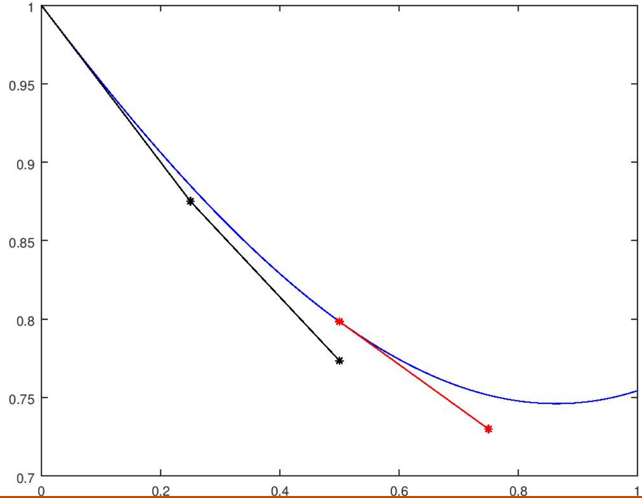
Método de Euler explícito



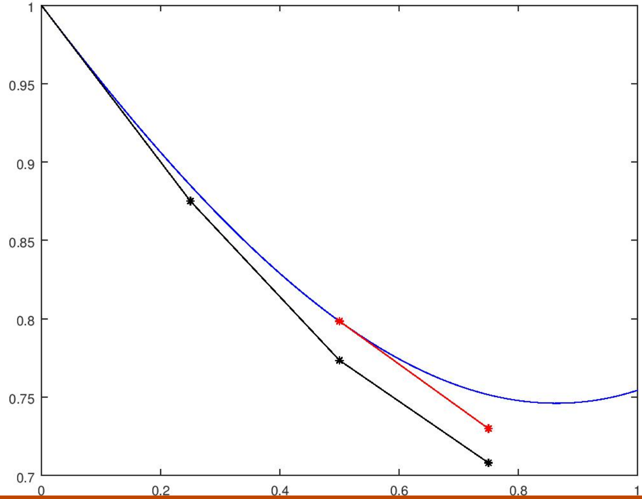
Método de Euler explícito



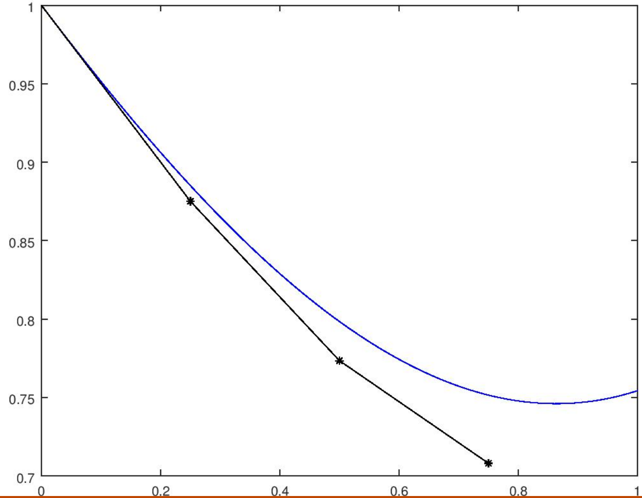
Método de Euler explícito



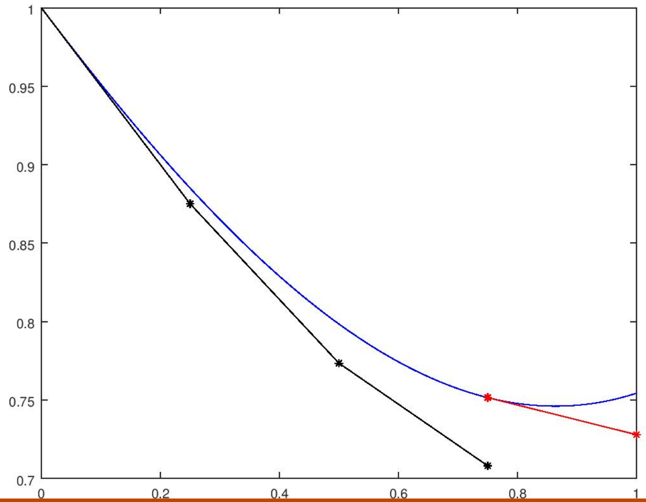
Método de Euler explícito



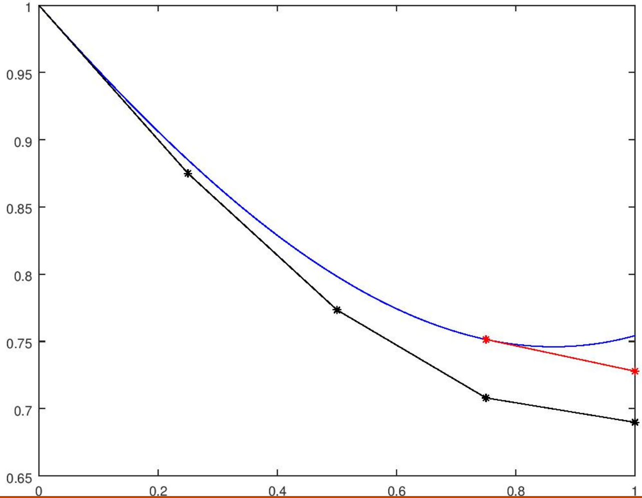
Método de Euler explícito



Método de Euler explícito

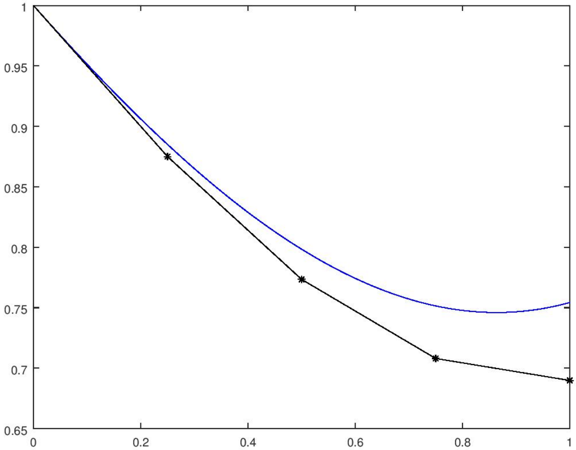


Método de Euler explícito



Método de Euler explícito

$N = 4$, $h = 0{,}25$



Método de Euler explícito

Recordando que la recta tangente a un punto $(t_0, y(t_0))$ es

$$r = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0)$$

Si lo evaluamos en t_1 habremos obtenido el primer 'tiro':

$$y_1 = y(t_0) + y'(t_0)(t_1 - t_0)$$

Pero como $y'(t_0) = f(t_0, y(t_0))$ y $t_1 = t_0 + h$:

$$y_1 = y(t_0) + hf(t_0, y(t_0))$$

Método de Euler explícito. Algoritmo

En general

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

Debido a que para calcular y_{k+1} tan sólo basta conocer el punto anterior y_k, diremos que el **método de Euler es un método explícito**.

Además, ahora entendemos mejor ese: 'más o menos'. Ya que, salvo $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$ que es exacto pues $y(t_0) = y_0$, en general $y_k \approx y(t_k)$, por tanto

$$y'(t_k) = f(t_k, y(t_k)) \approx f(t_k, y_k) = y'_k$$

Método de Euler explícito

En el ejemplo anterior hemos obtenido:

k	t_k	y_k	$y(t_k)$	e_k
0	0,00	1,00000	1,00000	0,000000
1	0,25	0,87500	0,88502	0,010022
2	0,50	0,77344	0,79839	0,024957
3	0,75	0,70801	0,75148	0,043467
4	1,00	0,68982	0,75429	0,064466

$$e(0{,}25) = \max_{k=1,2,3,4} e_k = 0{,}064466$$

¿Y si tomamos $N = 10$?

Método de Euler explícito

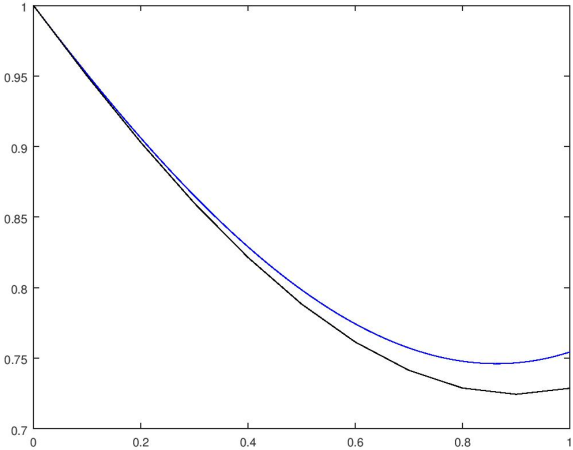
Para $N = 10$ tenemos que $h = 0{,}10$, aplicando el método de Euler obtenemos:

k	t_k	y_k	$y(t_k)$	e_k
0	0,00	1,00000	1,00000	0,000000
1	0,10	0,95000	0,95139	0,001394
2	0,20	0,90300	0,90614	0,003138
3	0,30	0,85985	0,86504	0,005194
4	0,40	0,82136	0,82888	0,007527
5	0,50	0,78829	0,79839	0,010105
6	0,60	0,76138	0,77427	0,012897
7	0,70	0,74131	0,75718	0,015877
8	0,80	0,72874	0,74776	0,019019
9	0,90	0,72430	0,74660	0,022299
10	1,00	0,72859	0,75429	0,025697

$$e(0{,}10) = \max_{k=1,\ldots,10} e_k = 0{,}025697$$

Método de Euler explícito

$N = 10$, $h = 0{,}1$



Método de Euler explícito

Observamos que tomando un paso de malla $0{,}10 = \dfrac{0{,}25}{2{,}5}$ el error se ha reducido:

$$\frac{e(0{,}25)}{e(0{,}10)} = \frac{0{,}064466}{0{,}025697} = 2{,}5087 \Leftrightarrow e(0{,}10) = \frac{e(0{,}25)}{2{,}5087} \approx \frac{e(0{,}25)}{2{,}5}$$

Es decir, si reducimos el paso de malla, el error se reduce al mismo ritmo. Esto se debe a que **el método de Euler es de orden 1**.

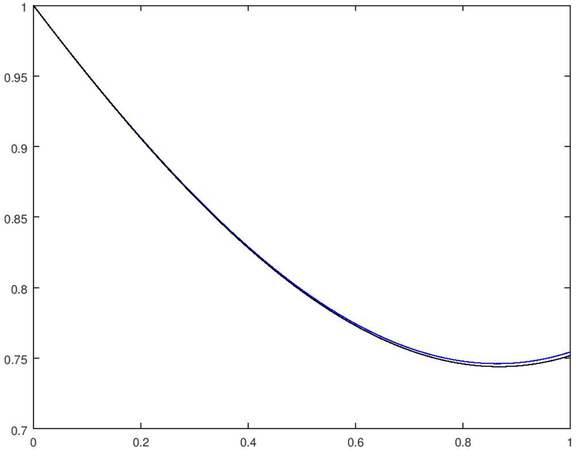
Así que a 'grosso modo', tenemos $\lim\limits_{h\to 0} e(h) = 0$.

Para $N = 100$, es decir, $h = 0{,}01$ se tiene que

$$e(0{,}01) = 0{,}002563 \approx \frac{e(0{,}1)}{10}$$

Método de Euler explícito

$N = 100$, $h = 0{,}01$



Método de Euler implícito

Aprovechando la formulación integral de un PVI

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt$$

vamos a aproximar numéricamente la integral mediante la regla del rectángulo, tomando el rectángulo con altura $f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))$, esto es,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt \approx (t_{k+1} - t_k)f(t_{k+1}, y(t_{k+1})) = hf(t_{k+1}, y(t_{k+1}))$$

obteniendo

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + hf(t_{k+1}, y(t_{k+1}))$$

Método de Euler implícito

Por tanto, podemos considerar el **método de Euler implícito**:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$$

A diferencia del método de Euler explícito, ahora para calcular una iteración deberemos resolver una ecuación algebraica, no lineal en general, pues en la expresión aparece y_{k+1} tanto a la izquierda como a la derecha de la igualdad. Cuando ocurra tal hecho, diremos que el **método es implícito**.

Ejercicio

Escribir el método resultado de aproximar numéricamente la integral utilizando la regla del rectángulo pero tomando la altura $f(t_k, y(t_k))$.

Método de Euler implícito

Apliquemos el método de Euler implícito para el ejemplo anterior:

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{2}(t^2 - y(t)), & t \in I = [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Para ello, discreticemos I en $N = 4$, $h = 0{,}25$

$$t_0 = 0 < t_1 = 0{,}25 < t_2 = 0{,}50 < t_3 = 0{,}75 < t_4 = 1$$

Realicemos la primera iteración:

$$y_1 = y_0 + hf(t_1, y_1) = 1 + 0{,}25\left(\frac{1}{2}(0{,}25^2 - y_1)\right)$$

$$y_1 = 1{,}0078125 - \frac{1}{8}y_1$$

Método de Euler implícito

En este caso, la ecuación a resolver es lineal, luego no tenemos problemas:

$$y_1 = 0{,}89583$$

Siguiente iteración:

$$y_2 = y_1 + hf(t_2, y_2) = 0{,}89583 + 0{,}25\left(\frac{1}{2}(0{,}5^2 - y_2)\right)$$

Resolviendo:

$$y_2 = 0{,}82407$$

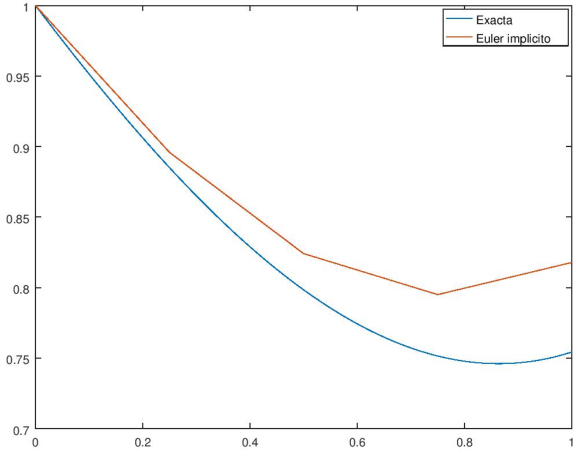
Continuando igual, obtenemos: $y_3 = 0{,}79501$ e $y_4 = 0{,}81779$.

Ejercicio

Comprobar que $e(0{,}25) = 0{,}063502$.

Método de Euler implícito

$N = 4$, $h = 0{,}25$



Método de Euler implícito

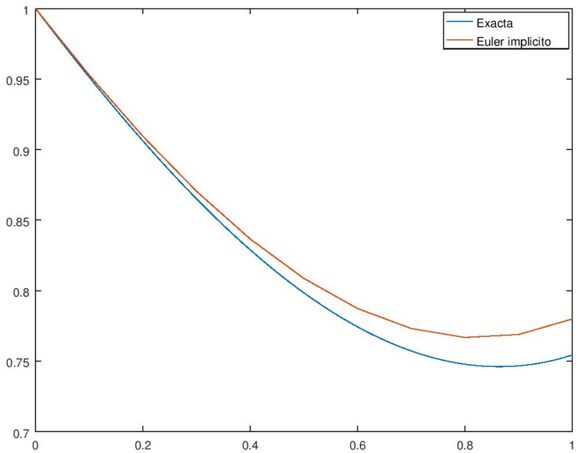
Para $N = 10$, $h = 0{,}1$

k	t_k	y_k	$y(t_k)$	e_k
0	0,00	1,00000	1,00000	0,000000
1	0,10	0,95286	0,95139	0,001463
2	0,20	0,90939	0,90614	0,003250
3	0,30	0,87037	0,86504	0,005325
4	0,40	0,83654	0,82888	0,007657
5	0,50	0,80861	0,79839	0,010217
6	0,60	0,78725	0,77427	0,012977
7	0,70	0,77309	0,75718	0,015911
8	0,80	0,76676	0,74776	0,018997
9	0,90	0,76882	0,74660	0,022213
10	1,00	0,77982	0,75429	0,025539

$$e(0{,}1) = 0{,}025539$$

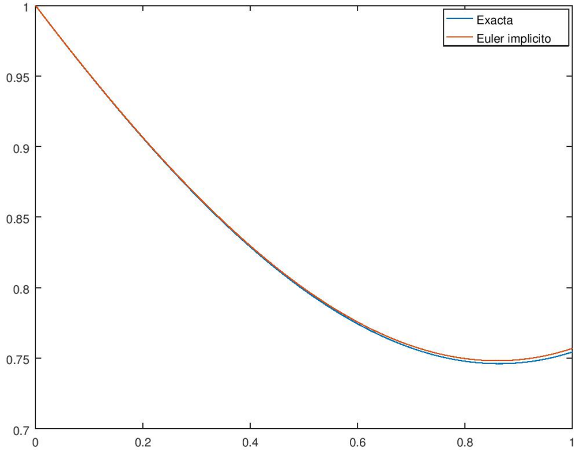
Método de Euler implícito

$N = 10$, $h = 0{,}1$



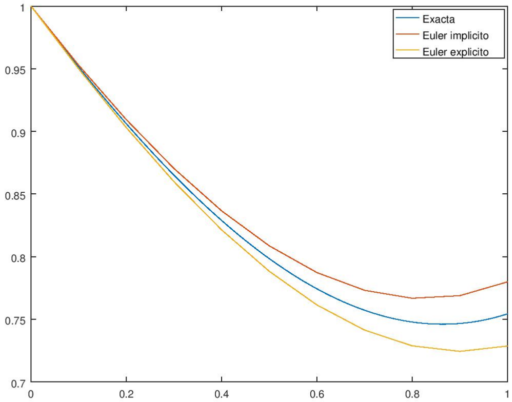
Método de Euler implícito

$N = 100$, $h = 0{,}01$



Método de Euler explícito vs implícito

Comparemos los resultados obtenidos por Euler explícito contra el implícito: $N = 10$, $h = 0{,}1$



Problemas de estabilidad

Hemos estudiado dos métodos:

- Euler explícito;
- Euler implícito.

donde hemos obtenidos unos resultados muy parecidos, pero es indiscutible que el coste de cálculo en Euler explícito es mucho menor pues no hay que resolver ninguna ecuación para realizar una iteración.

¿Merece la pena entonces plantearse siquiera un método implícito?

Problemas de estabilidad

Resolvamos el PVI:

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t), & t \in I = [0, \infty) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con $\lambda > 0$ y

$$f(t, y(t)) = -\lambda y(t),$$

cuya solución exacta es:

$$y(t) = e^{-\lambda t}$$

Una función decreciente en todo $t > 0$.

Problemas de estabilidad

Consideremos un paso de malla $h > 0$.

$$f(t, y(t)) = -\lambda y(t)$$

Euler explícito:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) = y_k + h(-\lambda y_k) = (1 - h\lambda) y_k$$

Por inducción:

$$y_{k+1} = (1 - h\lambda) y_k = \ldots = (1 - h\lambda)^{k+1} y_0 = (1 - h\lambda)^{k+1}$$

Problemas de estabilidad

Si queremos que se asemeje a la solución, la sucesión

$$y_k = (1 - h\lambda)^k$$

que nos proporciona el método de Euler explícito deberá ser decreciente, es decir,

$$|1 - h\lambda| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - h\lambda < 1 \Leftrightarrow 0 < h\lambda < 2$$

Por tanto

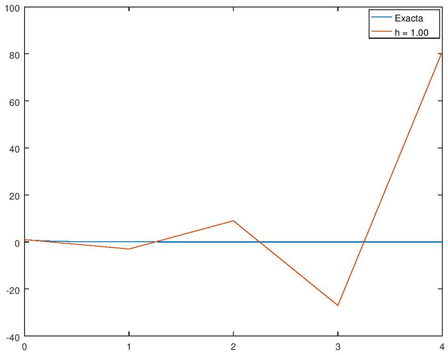
$$h < \frac{2}{\lambda}$$

Problemas de estabilidad

Si tomamos $\lambda = 4$, lo anterior nos dice que $h < 0{,}50$.

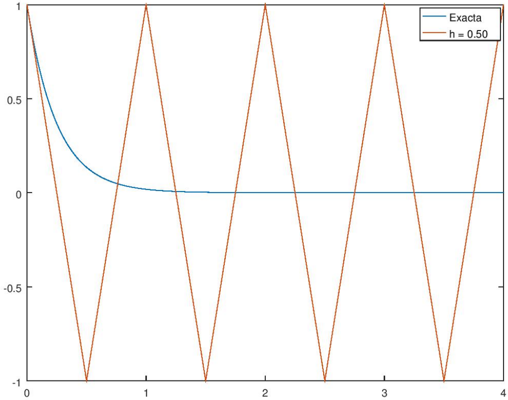
Problemas de estabilidad

Si tomamos $\lambda = 4$, lo anterior nos dice que $h < 0{,}50$.
$h = 1{,}00$



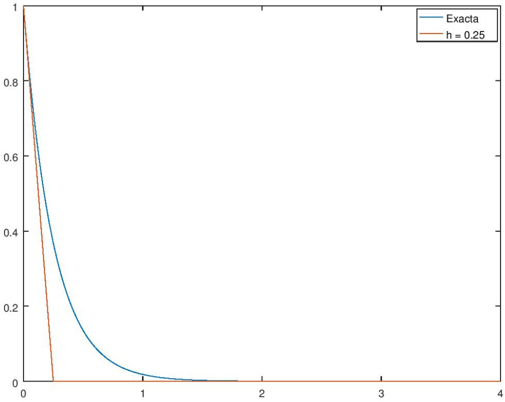
Problemas de estabilidad

$h = 0{,}50$

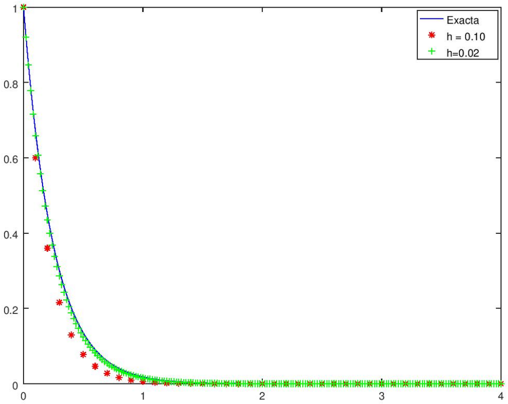


Problemas de estabilidad

$h = 0{,}25$ se tiene que $y_k = (1 - h\lambda)^k = (1 - 0{,}25 \cdot 4)^k = 0$



$h = 0{,}10$, $h = 0{,}02$



Problemas de estabilidad

Sea un paso de malla $h > 0$

$$f(t, y(t)) = -\lambda y(t)$$

Euler implícito:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}) = y_k + h(-\lambda y_{k+1})$$

Despejando y_{k+1}

$$y_{k+1} = \frac{1}{1 + h\lambda} y_k$$

Por inducción

$$y_{k+1} = \left(\frac{1}{1 + h\lambda}\right)^{k+1} y_0 = \left(\frac{1}{1 + h\lambda}\right)^{k+1}$$

Problemas de estabilidad

Si queremos que la sucesión

$$y_k = \left(\frac{1}{1+h\lambda}\right)^k$$

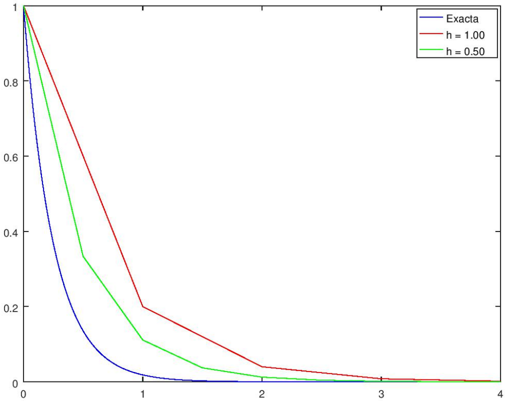
sea decreciente, debe ocurrir que:

$$\left|\frac{1}{1+h\lambda}\right| < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+h\lambda} < 1 \Leftrightarrow h\lambda > 0$$

Para cualquier paso de malla h el método devolverá una sucesión decreciente.

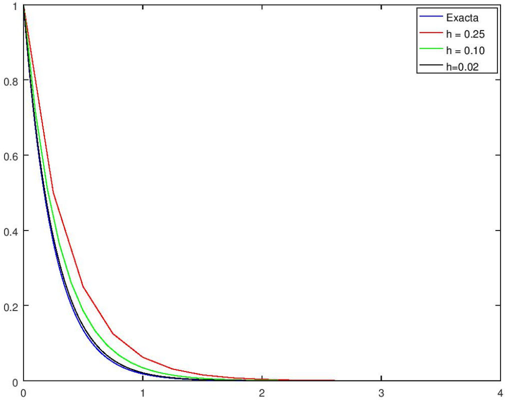
Problemas de estabilidad

$h = 1{,}00$, $h = 0{,}50$



Problemas de estabilidad

$h = 0{,}25$, $h = 0{,}10$, $h = 0{,}02$



Problemas de estabilidad

Esta propiedad de **estabilidad** de los métodos implícitos es lo que hace que sean tan importantes, debido a que en ciertas situaciones es recomendable utilizar un paso de malla elevado. Por ejemplo, si debemos estudiar el comportamiento de una ecuación en un intervalo muy grande, el coste computacional por utilizar un paso de malla pequeño podría ser excesivo.

Métodos predictor-corrector

Sin embargo, los métodos implícitos presentan el problema de resolver una ecuación. Deberemos aplicar un método del tema anterior para resolverla, con los ya conocidos problemas que se planteaban.

¿Qué sucede si la ecuación a resolver tiene más de una solución? ¿Cuál escogemos? ¿Qué x_0 tomar para que el método converja a la solución correcta?

Métodos predictor-corrector

Consideremos el PVI:

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t), & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con

$$f(t, y(t)) = -y^2(t)$$

cuya solución exacta es:

$$y(t) = \frac{1}{1+t}$$

Métodos predictor-corrector

Sea el paso de malla $h > 0$ y

$$f(t, y(t)) = -y^2(t)$$

Euler implícito

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}) = y_k - hy_{k+1}^2$$

Obteniendo la ecuación de segundo grado

$$hy_{k+1}^2 + y_{k+1} - y_k = 0$$

Cuyas soluciones son

$$\frac{-1+\sqrt{1+4hy_k}}{2h} \quad , \quad \frac{-1-\sqrt{1+4hy_k}}{2h}$$

Métodos predictor-corrector

En general, deberemos aplicar algún método de los ya estudiados para resolver la ecuación obtenida del método implícito. En este caso queremos resolver

$$hx^2 + x - y_k = 0,$$

es decir, $f_k(x) = hx^2 + x - y_k$. El método de Euler implícito nos proporciona también una función de iteración:

$$g_k(x) = y_k - hx^2; \quad g_k(x) = x - f_k(x)$$

pues un punto fijo de g_k verifica

$$x^* = g_k(x^*) = y_k - h{x^*}^2 \Leftrightarrow f_k(x^*) = h{x^*}^2 + x^* - y_k = 0$$

Métodos predictor-corrector

¿Cuál puede ser un buen x_0?

Euler explícito

$$y_{k+1}^{explicito} = y_k - hy_k^2$$

En cada iteración del método de punto fijo, la iniciaremos en

$$x_0 = y_k - hy_k^2 = y_{k+1}^{explicito}$$

Esta es la llamada **predicción** que nos la proporciona un **método explícito**. Después de realizar N iteraciones con el método de punto fijo

$$x_N = y_{k+1}^{implicito}$$

Esta es la llamada **corrección** que nos la proporciona un **método implícito**.

Métodos predictor-corrector

Resolvamos el PVI

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t), \quad t \in I = [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con $h = 0{,}25$, utilizando el método predictor-corrector, prediciendo con Euler explícito, corrigiendo con Euler implícito y realizando 2 iteraciones con la función de iteración que nos proporciona el método de Euler implícito.

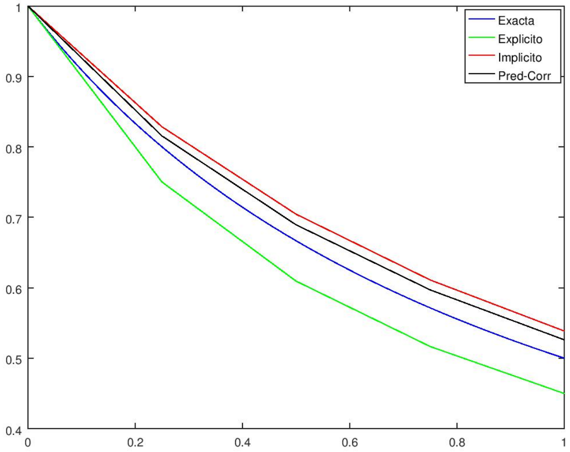
$$g_{k-1}(x) = y_{k-1} - hx^2$$

Métodos predictor-corrector

- Primera iteración ($k = 1$)
  - Predicción: $y_1^{explicito} = y_0 - hy_0^2 = 1 - 0{,}25 \cdot 1^2 = 0{,}75$
  - Corrección (2 iteraciones):
    $x_0 = y_1^{explicito} = 0{,}75;$
    $x_1 = g_0(x_0) = 1 - 0{,}25 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}85938;$
    $x_2 = g_0(x_1) = 1 - 0{,}25 \cdot 0{,}85938^2 = 0{,}81537 = y_1^{implicito}.$
- Segunda iteración ($k = 2$)
  - Predicción:
    $y_2^{explicito} = y_1 - hy_1^2 = 0{,}81537 - 0{,}25 \cdot 0{,}81537^2 = 0{,}64916$
  - Corrección (2 iteraciones):
    $x_0 = y_2^{explicito} = 0{,}64916;$
    $x_1 = g_1(x_0) = 0{,}81537 - 0{,}25 \cdot 0{,}64916^2 = 0{,}71002;$
    $x_2 = g_1(x_1) = 0{,}81537 - 0{,}25 \cdot 0{,}71002^2 = 0{,}68934 = y_2^{implicito}.$

- Tercera iteración ($k = 3$)
  - Predicción:
    $y_3^{explicito} = y_2 - hy_2^2 = 0{,}68934 - 0{,}25 \cdot 0{,}68934^2 = 0{,}57054$
  - Corrección (2 iteraciones):
    $$x_0 = y_3^{explicito} = 0{,}57054;$$
    $$x_1 = g_2(x_0) = 0{,}68934 - 0{,}25 \cdot 0{,}57054^2 = 0{,}60796;$$
    $$x_2 = g_2(x_1) = 0{,}68934 - 0{,}25 \cdot 0{,}60796^2 = 0{,}59694 = y_3^{implicito}.$$
- Cuarta iteración ($k = 4$)
  - Predicción:
    $y_4^{explicito} = y_3 - hy_3^2 = 0{,}59694 - 0{,}25 \cdot 0{,}59694^2 = 0{,}50786$
  - Corrección (2 iteraciones):
    $$x_0 = y_3^{explicito} = 0{,}50786;$$
    $$x_1 = g_3(x_0) = 0{,}59694 - 0{,}25 \cdot 0{,}50786^2 = 0{,}53246;$$
    $$x_2 = g_3(x_1) = 0{,}59694 - 0{,}25 \cdot 0{,}53246^2 = 0{,}52606 = y_4^{implicito}.$$

Métodos predictor-corrector



Método de Crank-Nicholson

Aprovechando la formulación integral de un PVI:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt$$

podemos aproximar ahora la integral aplicando la *regla del trapecio*:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt \approx h\frac{f(t_{k+1}, y(t_{k+1})) + f(t_k, y(t_k))}{2}$$

Método de Crank-Nicholson

Podemos considerar entonces, el llamado **método de Crank-Nicholson**

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)}{2}$$

Observamos que efectivamente es un método implícito, pues en ambos miembros de la igualdad aparece el término y_{k+1}, por lo que habrá que resolver una ecuación algebraica para determinarlo en cada iteración.

Método de Crank-Nicholson

Apliquemos el método de Crank-Nicholson para el ejemplo:

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{2}(t^2 - y(t)), & t \in I = [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Para ello, discreticemos I en $N = 4$, $h = 0{,}25$ y

$$f(t, y(t)) = \frac{1}{2}(t^2 - y(t))$$

Método de Crank-Nicholson

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)}{2}$$

Primera iteración $y_1 = y_0 + h\frac{(f(t_1,y_1)+f(t_0,y_0))}{2}$

$$y_1 = 1 + \frac{0{,}25}{4}(0{,}25^2 - y_1 + 0^2 + 1) = 1 + \frac{1}{16}\left(\frac{17}{16} - y_1\right)$$

Despejando y_1

$$y_1 = 0{,}88971$$

Método de Crank-Nicholson

Para $N = 4$, $h = 0{,}25$

k	t_k	y_k	$y(t_k)$	e_k
0	0,00	1,00000	1,00000	0,000000
1	0,25	0,88971	0,88502	0,004684
2	0,50	0,81445	0,79839	0,016052
3	0,75	0,78481	0,75148	0,033331
4	1,00	0,81012	0,75429	0,055837

$$e(0{,}25) = 0{,}055837$$

Método de Crank-Nicholson

Para $N = 10$, $h = 0{,}10$

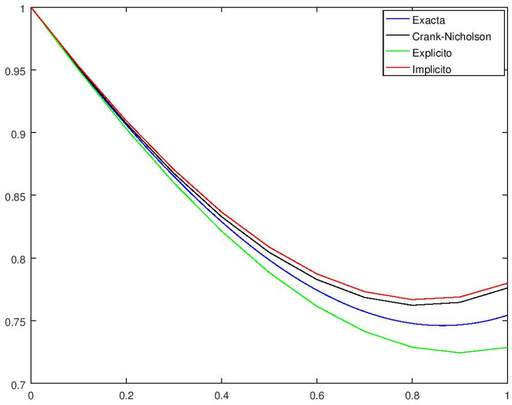
k	t_k	y_k	e_k
0	0,00	1,00000	0,000000
1	0,10	0,95171	0,000313
2	0,20	0,90723	0,001096
3	0,30	0,86737	0,002325
4	0,40	0,83286	0,003978
5	0,50	0,80443	0,006036
6	0,60	0,78275	0,008479
7	0,70	0,76847	0,011287
8	0,80	0,76220	0,014444
9	0,90	0,76454	0,017932
10	1,00	0,77602	0,021736

$$e(0{,}10) = 0{,}021736 \approx \frac{e(0{,}25)}{2{,}5}$$

Por tanto **el método de Crank-Nicholson es de orden 1**.

Método de Crank-Nicholson

$N = 10$, $h = 0{,}10$



Método de Heun

A pesar de que el coste de Crank-Nicholson es superior a Euler implícito, pues estamos evaluando *f* dos veces en cada iteración, obtenemos unos resultados no mucho mejores.

Sin embargo, dada la naturaleza de método implícito de Crank-Nicholson podemos tratar de obtener un método predictor-corrector. Ya observamos que con el de Euler implícito construimos un nuevo método pero que tampoco fue mejor que los anteriores.

Método de Heun

Ejercicio

Calcular el método predictor-corrector obtenido de:

- Predecir con el método de Euler explícito;
- Corregir con el método de Crank-Nicholson.
- El método de punto fijo a utilizar el proporcionado por Crank-Nicholson realizando una única iteración.

Comprobar que el método obtenido es de orden 2, y se le llama **método de Heun**. ¿Es explícito o implícito?

θ-método

Aprovechando la formulación integral de un PVI:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt$$

vamos a aproximar la integral por la regla del trapecio, pero esta vez ponderamos los extremos:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt \approx h((1-\theta)f(t_k, y(t_k)) + \theta f(t_{k+1}, y(t_{k+1})))$$

con $\theta \in [0, 1]$. Obteniendo la aproximación numérica

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + h((1-\theta)f(t_k, y(t_k)) + \theta f(t_{k+1}, y(t_{k+1})))$$

θ-método

Para $\theta \in [0, 1]$, consideramos el **θ-método**:

$$y_{k+1} = y_k + h((1-\theta)f(t_k, y_k) + \theta f(t_{k+1}, y_{k+1}))$$

Observamos

- Si $\theta = 0$ entonces es Euler explícito.
- Si $\theta = 1$ entonces es Euler implícito.
- Si $\theta = 0{,}50$ entonces es Crank-Nicholson.
- Si $\theta > 0$ entonces el método es implícito.

θ-método

Ejercicio

Consideremos el PVI

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t), & t \in I = [0, \infty) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con $\lambda > 0$ y

$$f(t, y(t)) = -\lambda y(t),$$

cuya solución exacta es:

$$y(t) = e^{-\lambda t}.$$

Aplicando un θ-método.

- Determinar, en función de θ y λ, como debemos tomar el paso de malla h para que el método sea estable.

Métodos Runge-Kutta

Los métodos construidos para resolver un PVI hasta ahora han sido:

- Mediante una aproximación de la integral de la formulación integral del PVI;
- o bien, un método predictor-corrector.

En particular

- Euler explícito: rectángulo a la izquierda.
- Euler implícito: rectángulo a la derecha.
- Crank-Nicholson: trapecio.
- θ-método: trapecio con las alturas ponderadas.
- Heun: predictor-corrector con Euler explícito y Crank-Nicholson.

En general, una integral numérica de q puntos de una función g es de la forma

$$\int_a^b g(t)dt \approx (b-a)\sum_{i=1}^{q} \rho_i g(a+c_i(b-a))$$

donde $c_i \in [0,1]$ y $\rho_i \in \mathbb{R}$. Los puntos $a+c_i(b-a)$ son los nodos y ρ_i los pesos.

Métodos Runge-Kutta

En $I = [t_0, t_0 + T]$ consideramos una discretización en N partes

$$t_0 < t_1 = t_0 + h < \ldots < t_N = t_0 + T$$

La formulación integral de un PVI

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt$$

aproximando la integral por una integral numérica de q puntos obtenemos

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + h\sum_{i=1}^{q} \rho_i f(t_k + c_i h, y(t_k + c_i h))$$

Nos han aparecido nuevos puntos que no contábamos con ellos en la discretización:

$$t_k \leq t_k + c_i h \leq t_{k+1}$$

Métodos Runge-Kutta

Para calcular $y(t_k + c_i h)$ deberemos aproximar de nuevo la integral

$$y(t_k + c_i h) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_k + c_i h} f(t, y(t))dt$$

por otra integral numérica pero evaluada en los mismos puntos, para cada $i = 1, ..., q$:

$$\int_{t_k}^{t_k + c_i h} f(t, y(t))dt \approx h \sum_{j=1}^{q} \sigma_{ij} f(t_k + c_j h, y(t_k + c_j h))$$

Entonces

$$y(t_k + c_i h) \approx y(t_k) + h \sum_{j=1}^{q} \sigma_{ij} f(t_k + c_j h, y(t_k + c_j h))$$

Métodos Runge-Kutta

Pudiendo tomar

$$y_k^{(i)} = y_k + h \sum_{j=1}^{q} \sigma_{ij} f(t_k^{(j)}, y_k^{(j)})$$

donde $t_k^{(i)} = t_k + c_i h, \quad y_k^{(i)} \approx y(t_k + c_i h).$

Un **método Runge-Kutta de q pasos**

$$y_{k+1} = y_k + h\sum_{i=1}^{q} \rho_i f(t_k^{(i)}, y_k^{(i)})$$

donde

- $t_k^{(i)} = t_k + c_i h$
- $y_k^{(i)} = y_k + h\sum_{j=1}^{q} \sigma_{ij} f(t_k^{(j)}, y_k^{(j)})$

Métodos Runge-Kutta

Todos los elementos que definen un método Runge-Kutta c_i, ρ_i y σ_{ij} se recogen en lo que se denomina **tablero de Butcher**

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1q} \\ c_2 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_q & \sigma_{q1} & \sigma_{q2} & \cdots & \sigma_{qq} \\ \hline & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_q \end{array}$$

Métodos Runge-Kutta

Calculemos el método Runge-Kutta con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Observamos que

$$c_1 = 0, \quad \sigma_{11} = 0, \quad \rho_1 = 1, \quad q = 1$$

Consideremos un paso de malla h

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^{q} \rho_i f(t_k^{(i)}, y_k^{(i)})$$

donde

- $t_k^{(i)} = t_k + c_i h$
- $y_k^{(i)} = y_k + h \sum_{j=1}^{q} \sigma_{ij} f(t_k^{(j)}, y_k^{(j)})$

con $i = 1, \dots, q$

Calculemos el método Runge-Kutta con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Observamos que

$$c_1 = 0, \quad \sigma_{11} = 0, \quad \rho_1 = 1, \quad q = 1$$

Consideremos un paso de malla h

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^{1} \rho_i f(t_k^{(i)}, y_k^{(i)})$$

donde

- $t_k^{(i)} = t_k + c_i h$
- $y_k^{(i)} = y_k + h \sum_{j=1}^{1} \sigma_{ij} f(t_k^{(j)}, y_k^{(j)})$

Calculemos el método Runge-Kutta con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Observamos que

$$c_1 = 0, \quad \sigma_{11} = 0, \quad \rho_1 = 1, \quad q = 1$$

Consideremos un paso de malla h

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k^{(1)}, y_k^{(1)})$$

donde

- $t_k^{(1)} = t_k + c_1 h$
- $y_k^{(1)} = y_k + h\sigma_{11} f(t_k^{(1)}, y_k^{(1)})$

Calculemos el método Runge-Kutta con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Observamos que

$$c_1 = 0, \quad \sigma_{11} = 0, \quad \rho_1 = 1, \quad q = 1$$

Consideremos un paso de malla h

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k^{(1)}, y_k^{(1)})$$

donde

- $t_k^{(1)} = t_k$
- $y_k^{(1)} = y_k$

Métodos Runge-Kutta

Calculemos el método Runge-Kutta con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \text{(tablero de Euler explícito)}$$

Observamos que

$$c_1 = 0, \quad \sigma_{11} = 0, \quad \rho_1 = 1, \quad q = 1$$

Consideremos un paso de malla h

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

Obteniendo el método de Euler explícito.

Métodos Runge-Kutta

Calculemos el método Runge-Kutta con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Tenemos un método de $q = 4$ pasos y

$$\rho_1 = \frac{1}{6}, \rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{3}, \rho_4 = \frac{1}{6}$$

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^{q} \rho_i f(t_k^{(i)}, y_k^{(i)})$$

Métodos Runge-Kutta

Calculemos el método Runge-Kutta con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}$$

Tenemos un método de $q = 4$ pasos y

$$\rho_1 = \frac{1}{6}, \rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{3}, \rho_4 = \frac{1}{6}$$

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^{4} \rho_i f(t_k^{(i)}, y_k^{(i)})$$

Métodos Runge-Kutta

Calculemos el método Runge-Kutta con tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}$$

Tenemos un método de $q = 4$ pasos

$$\begin{aligned} y_{k+1} =& y_k + h\left(\frac{1}{6}f(t_k^{(1)}, y_k^{(1)}) + \frac{1}{3}f(t_k^{(2)}, y_k^{(2)})\right. \\ &\left. + \frac{1}{3}f(t_k^{(3)}, y_k^{(3)}) + \frac{1}{6}f(t_k^{(4)}, y_k^{(4)})\right) \end{aligned}$$

Métodos Runge-Kutta

Por otra parte

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1$$

- $t_k^{(i)} = t_k + c_i h$
- $y_k^{(i)} = y_k + h \sum_{j=1}^{4} \sigma_{ij} f(t_k^{(j)}, y_k^{(j)})$

Métodos Runge-Kutta

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1$$

Para $i = 1$

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = 0 \qquad \text{(primera fila)}$$

- $t_k^{(1)} = t_k + c_1 h$
- $y_k^{(1)} = y_k + h \sum_{j=1}^{4} \sigma_{1j} f(t_k^{(j)}, y_k^{(j)})$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1$$

Para $i = 1$

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = 0 \qquad \text{(primera fila)}$$

- $t_k^{(1)} = t_k$
- $y_k^{(1)} = y_k$

Sea $K_1 = f(t_k^{(1)}, y_k^{(1)}) = f(t_k, y_k)$.

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1$$

Para $i = 2$

$$\sigma_{21} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = 0 \qquad \text{(segunda fila)}$$

- $t_k^{(2)} = t_k + c_2 h$
- $y_k^{(2)} = y_k + h \sum_{j=1}^{4} \sigma_{2j} f(t_k^{(j)}, y_k^{(j)})$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1$$

Para $i = 2$

$$\sigma_{21} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = 0 \qquad \text{(segunda fila)}$$

- $t_k^{(2)} = t_k + \frac{1}{2}h$
- $y_k^{(2)} = y_k + h\left(\frac{1}{2}f(t_k^{(1)}, y_k^{(1)}) + \sum_{j=2}^{4}\sigma_{2j}f(t_k^{(j)}, y_k^{(j)})\right)$

Sea $K_2 = f(t_k^{(2)}, y_k^{(2)}) = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1\right)$

Métodos Runge-Kutta

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1$$

Para $i = 3$

$$\sigma_{32} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{33} = \sigma_{34} = 0 \qquad \text{(tercera fila)}$$

- $t_k^{(3)} = t_k + c_3 h$
- $y_k^{(3)} = y_k + h \sum_{j=1}^{4} \sigma_{3j} f(t_k^{(j)}, y_k^{(j)})$

Métodos Runge-Kutta

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1$$

Para $i = 3$

$$\sigma_{32} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{33} = \sigma_{34} = 0 \qquad \text{(tercera fila)}$$

- $t_k^{(3)} = t_k + \frac{1}{2}h$
- $y_k^{(3)} = y_k + h\left(\frac{1}{2}f(t_k^{(2)}, y_k^{(2)}) + \sum_{j=1, j\neq 2}^{4} \sigma_{3j} f(t_k^{(j)}, y_k^{(j)})\right)$

Sea $K_3 = f(t_k^{(3)}, y_k^{(3)}) = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2\right)$

Métodos Runge-Kutta

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1$$

Para $i = 3$

$$\sigma_{43} = 1, \quad \sigma_{41} = \sigma_{42} = \sigma_{44} = 0 \qquad \text{(cuarta fila)}$$

- $t_k^{(4)} = t_k + c_4 h$
- $y_k^{(4)} = y_k + h \sum_{j=1}^{4} \sigma_{4j} f(t_k^{(j)}, y_k^{(j)})$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1$$

Para $i = 4$

$$\sigma_{43} = 1, \quad \sigma_{41} = \sigma_{42} = \sigma_{44} = 0 \qquad \text{(cuarta fila)}$$

- $t_k^{(4)} = t_k + h$
- $y_k^{(4)} = y_k + h\left(f(t_k^{(3)}, y_k^{(3)}) + \sum_{j=1, j\neq 3}^{4} \sigma_{4j} f(t_k^{(j)}, y_k^{(j)})\right)$

Sea $K_4 = f(t_k^{(4)}, y_k^{(4)}) = f\left(t_k + h, y_k + hK_3\right)$

Obteniendo el método

$$y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{1}{6}K_1 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_3 + \frac{1}{6}K_4\right)$$

Reformulado

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right)$$

donde

- $K_1 = f(t_k, y_k)$
- $K_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1)$
- $K_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2)$
- $K_4 = f(t_k + h, y_k + K_3)$

Llamado **método clásico Runge-Kutta de orden 4.**

Métodos Runge-Kutta

Ejercicio

Calcular los métodos cuyo tablero de Butcher es:

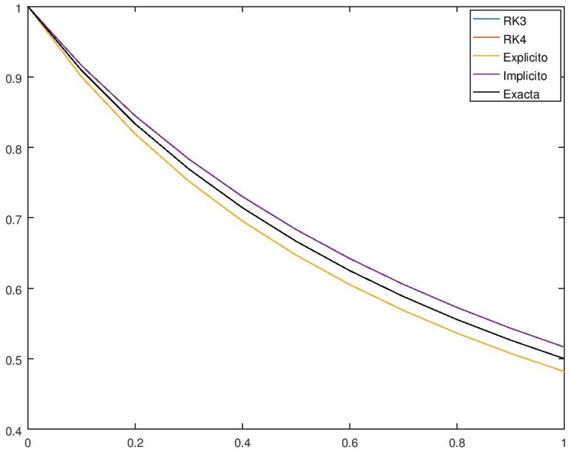
- $$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$ (**Método de Heun (RK2)**)
- $$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{array}$$ (**Método de Simpson (RK3)**)

Consideremos el PVI:

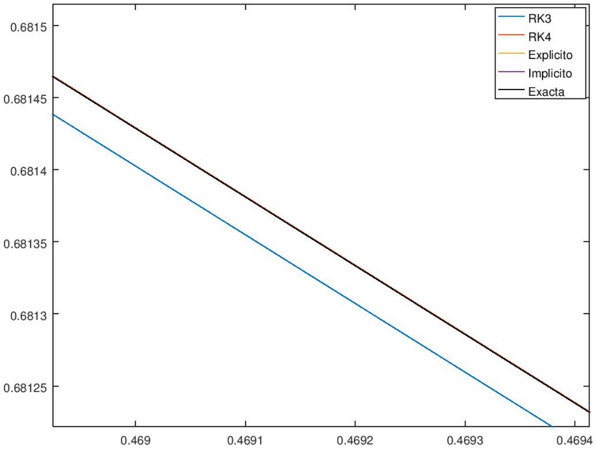
$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t), \quad t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Apliquemos el método RK4 y RK3 sobre dicho problema para $N = 10$

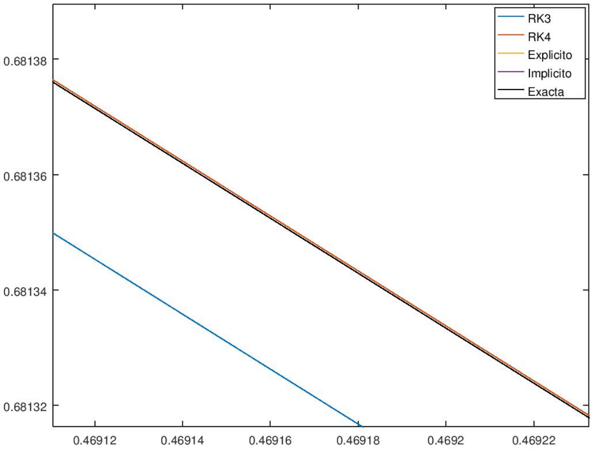
Para $N = 10$


RK3
RK4
Explicito
Implicito
Exacta
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Para $N = 10$

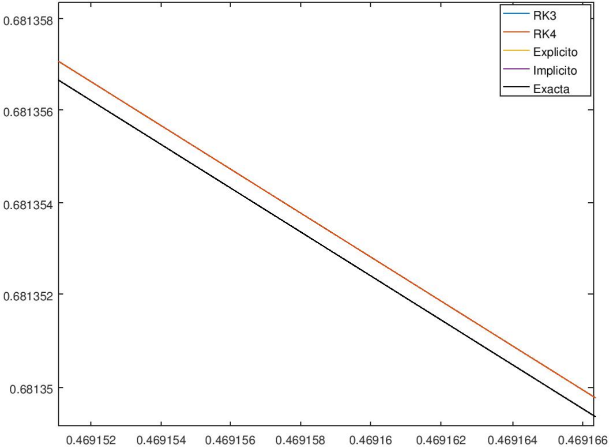

RK3
RK4
Explicito
Implicito
Exacta
0.6815
0.68145
0.6814
0.68135
0.6813
0.68125
0.469
0.4691
0.4692
0.4693
0.4694

Para $N = 10$


RK3
RK4
Explicito
Implicito
Exacta
0.68138
0.68136
0.68134
0.68132
0.46912
0.46914
0.46916
0.46918
0.4692
0.46922

Métodos Runge-Kutta

Para $N = 10$



Ejercicio

Consideremos el Problema de Valor Inicial:

$$(\text{PVI}) : \begin{cases} y' &= 1 + e^{2t}, \quad t \geq 0, \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Se pide:

1. Utilizar el método de Euler implícito para obtener un valor aproximado de la solución en $t = 1$ tomando un paso de malla $h = 0{,}5$. Considerar dos iteraciones del Método de Newton para resolver la ecuación no lineal que se obtiene con dicho esquema.

Ejercicio

2 Utilizar el método de Euler modificado definido por la tabla:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

para obtener el valor aproximado de la solución en $t = 1$ tomando un paso de malla $h = 0{,}5$.

3 Sabiendo que la solución es

$$y(t) = t + \frac{e^{2t}}{2} + \frac{1}{2},$$

comparar los métodos utilizados en los apartados anteriores evaluando la solución exacta en el instante $t = 1$.