

# 신호 및 시스템

## 제 5 장. 푸리에 변환

박섭형

한림대학교

2021학년도 1학기

## 배울 내용

- 이산시간 주기 신호의 주파수 분석: 이산 푸리에 급수 (DFS: discrete Fourier series)
- 이산시간 유한 길이 신호의 주파수 분석: 이산 푸리에 변환 (DFT: discrete Fourier transform)
- 연속시간 주기 신호의 주파수 분석: 연속 푸리에 급수 (CFS: continuous Fourier series)
- 이산시간 비주기 신호의 주파수 분석: 이산시간 푸리에 변환 (DTFT: discrete-time Fourier transform)
- 연속시간 비주기 신호의 주파수 분석: 연속시간 푸리에 변환 (CFT: continuous Fourier transform)

$N$ 차원 복소 공간의 한 벡터를 표현할 때  
사용하는 정규기저 벡터를 변경하는 것

## $N$ 차원 실수 직교 정규 기저 벡터

$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}$  을  $\mathbb{R}^N$  공간의 직교 정규 기저 벡터(orthonormal basis vectors)라고 하면, 다음 식이 성립한다.

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = 1, \text{ for } i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.1)$$

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0, \text{ for } i \neq j, i, j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.2)$$

여기에서  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  는 두 벡터의 내적(inner product 또는 dot product)이다.

## $N$ 차원 실수 벡터의 내적

### 정의 5.1 ( $N$ 차원 실수 벡터 공간 $\mathbb{R}^N$ 의 두 벡터 $\mathbf{a}$ 와 $\mathbf{b}$ 의 내적)

$\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{N-1}]^T$ 와  $\mathbf{b} = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{N-1}]^T$ 를  $N$  차원 실수 벡터 공간  $\mathbb{R}^N$ 의 두 벡터라 하자. 여기에서  $T$ 는 행렬의 전치(transpose)를 의미한다.  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 의 내적은 다음과 같이 정의된다.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i b_i = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_{N-1} b_{N-1}. \quad (5.3)$$

## $N$ 차원 실수 벡터의 내적

### 예제 5.1 (두 벡터의 내적 구하기)

두 벡터  $\mathbf{a} = [2 \ 3 \ -1 \ 4]^T$ 와  $\mathbf{b} = [3 \ -1 \ 2 \ 2]^T$ 의 내적을 구하라.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = [2 \ 3 \ -1 \ 4] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 9.$$

## N 차원 실수 벡터의 내적

또한 두 벡터의 내적은 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta, \quad (5.4)$$

여기에서  $|\mathbf{a}|$ 와  $|\mathbf{b}|$ 는 각각  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 의 길이를 나타내고,  $\theta$ 는 두 벡터 사이의 각도이다.

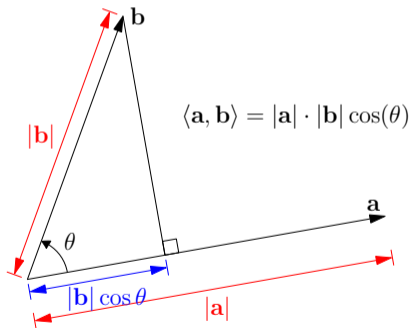


그림 5.1: 두 벡터  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 의 내적을 설명한 그림.

## 직교 정규 기저 벡터를 이용한 $N$ 차원 실수 벡터의 표현

$\mathbb{R}^N$  공간의 임의의 벡터  $\mathbf{x}$ 는 다음과 같이 직교 정규 기저 벡터들의 선형 결합(linear combination, 또는 일차 결합)으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x} = a_0 \mathbf{u}_0 + a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_{N-1} \mathbf{u}_{N-1}. \quad (5.5)$$

식 (5.5)의 양변의 왼쪽에  $\mathbf{u}_k, k = 0, 1, \cdots, N-1$ ,을 내적 연산을 수행하면 다음 식을 얻는다.

$$\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle = a_0 \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_0 \rangle + a_1 \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1 \rangle + \cdots + a_k \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle + \cdots + a_{N-1} \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{N-1} \rangle. \quad (5.6)$$

식 (5.6)의 우변에서  $\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle = 1$ 이고, 나머지 내적 항들은 모두 0이므로 다음 식이 성립한다.

$$\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle = a_k. \quad (5.7)$$

이 식을 식 (5.5)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_0 + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_{N-1} \quad (5.8)$$

## 2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 (1)

- $\mathbb{R}^2$  공간의 표준 직교 정규 기저 벡터들:  $\mathbf{u}_0 = [1 \ 0]^T$  와  $\mathbf{u}_1 = [0 \ 1]^T$
- $\mathbb{R}^2$  공간의 임의의 벡터  $\mathbf{x} = [a_0 \ a_1]^T$  는 두 기저 벡터들의 선형 결합으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x} = [a_0 \ a_1]^T = [a_0 \ 0]^T + [0 \ a_1]^T = a_0 \mathbf{u}_0 + a_1 \mathbf{u}_1. \quad (5.9)$$

$$\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{u}_0, a_0 \mathbf{u}_0 + a_1 \mathbf{u}_1 \rangle = a_0 \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 \rangle + a_1 \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \rangle = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 = a_0, \quad (5.10)$$

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, a_0 \mathbf{u}_0 + a_1 \mathbf{u}_1 \rangle = a_0 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0 \rangle + a_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1 = a_1. \quad (5.11)$$

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_0 + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_1. \quad (5.12)$$

## 2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 (2)

$\mathbb{R}^2$  공간에는  $\mathbf{u}_0$  과  $\mathbf{u}_1$  외에도 수많은 직교 정규 기저 벡터들이 존재한다. 예를 들어서, 두 벡터  $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T$  와  $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T$  를 생각해 보자. 두 벡터가 직교 정규 기저 벡터인지를 확인하기 위해서 다음과 같은 내적 연산을 수행해 보자.

$$\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{w}_0^T \mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1, \quad (5.13)$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1, \quad (5.14)$$

$$\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathbf{w}_0^T \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T = -\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 0, \quad (5.15)$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T = -\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 0. \quad (5.16)$$

$\mathbf{w}_0$  과  $\mathbf{w}_1$  도  $\mathbb{R}^2$  공간의 직교 정규 기저 벡터들이다.

## 2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 (3)

그러면, 벡터  $\mathbf{x}$ 를 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w}_0 + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w}_1. \quad (5.17)$$

즉, 임의의 벡터  $\mathbf{x} = [a_0 \ a_1]^T$ 를  $\mathbf{w}_0$ 과  $\mathbf{w}_1$ 의 선형 결합으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x} = [a_0 \ a_1]^T = b_0 \mathbf{w}_0 + b_1 \mathbf{w}_1. \quad (5.18)$$

이 식의 양변의 왼쪽에서  $\mathbf{w}_0$ 을 내적하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{x} \rangle &= \langle \mathbf{w}_0, [a_0 \ a_1]^T \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}_0, b_0 \mathbf{w}_0 + b_1 \mathbf{w}_1 \rangle \\ &= b_0 \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle + b_1 \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \rangle \\ &= b_0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\langle \mathbf{w}_0, [a_0 \ a_1]^T \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + a_1 \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (5.20)$$

## 2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 (4)

따라서,  $b_0$  은 다음과 같다.

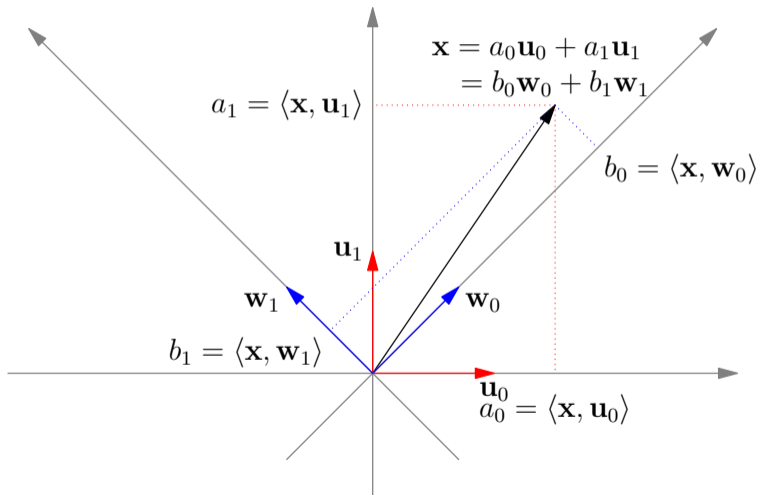
$$b_0 = a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + a_1 \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (5.21)$$

같은 방법으로  $b_1$  은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$b_1 = -a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + a_1 \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (5.22)$$

## 2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 (5)

그림 5.2는 동일한 벡터를 서로 다른 직교 정규 기저 벡터들을 사용하여 표현하는 경우를 비교하여 설명한 그림이다.



## 2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 (7)

### 예제 5.2

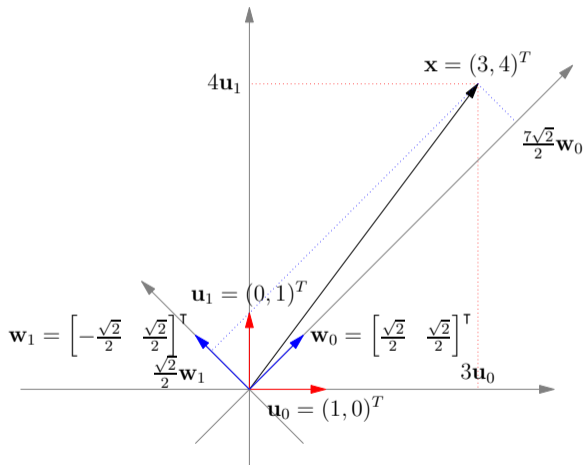
$\mathbb{R}^2$  공간의 한 점  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^T = 3\mathbf{u}_0 + 4\mathbf{u}_1 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T + 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$  를  $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T$  와  $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T$  의 선형 결합, 즉  $\mathbf{x} = b_0\mathbf{w}_0 + b_1\mathbf{w}_1$  의 형태로 바꾸려고 한다.  $b_0$  과  $b_1$  의 값을 각각 구하라.

$$b_0 = \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{x} \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}, \quad (5.23)$$

$$b_1 = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{x} \rangle = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (5.24)$$

## 2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 (8)

그림 5.3은 이 예제의 벡터를 두 종류의 정규 기저 벡터들의 선형 결합으로 분해하는 것을 설명한 그림이다.



**그림 5.3:** 2 차원 공간의 벡터를 서로 다른 두 세트의 직교 정규 벡터들을 이용하여 표현하는 경우의 예.

## 2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 (9)

### 예제 5.3

예제 5.2에서 구한  $b_0$  과  $b_1$  을  $\mathbf{x} = b_0 \mathbf{w}_0 + b_1 \mathbf{w}_1$  의 형태에 대입하고, 이 식으로부터  $\mathbf{x} = a_0 \mathbf{u}_0 + a_1 \mathbf{u}_1 = a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T + a_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$  의 표현 형태로 바꾸려고 한다.  $a_0$  과  $a_1$  의 값을 각각 구하고 예제 5.2에 주어진 값과 같은지 확인하라.

$b_0 = \frac{7\sqrt{2}}{2}$  과  $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  을  $\mathbf{x} = b_0 \mathbf{w}_0 + b_1 \mathbf{w}_1$  에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \frac{7\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} & \frac{8}{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^T.\end{aligned}\tag{5.25}$$

따라서  $a_0$  과  $a_1$  은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a_0 = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{x} \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^T = 3,\tag{5.26}$$

$$a_1 = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^T = 4.\tag{5.27}$$

그러므로  $a_0$  과  $a_1$  은 예제 5.2에 주어진 값과 동일한 것을 알 수 있다

## Python을 이용한 벡터의 내적 연산

Python을 이용하여 벡터의 내적 등과 같은 연산을 할 필요가 있는 경우에는 `numpy.dot()` 함수를 사용하면 편리하다. 이 함수를 이용하여 실제로 기저 벡터를 변경하는 방법을 살펴보자.

다음과 같이 정의되는  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  이  $\mathbb{R}^4$  공간의 직교 정규 기저 벡터라고 하자.

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.28)$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.29)$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.30)$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (5.31)$$

$\mathbb{R}^4$  공간에 존재하는  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T$  는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T = 1\mathbf{u}_0 + 3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 + (-1)\mathbf{u}_3 \quad (5.32)$$

## Python을 이용한 벡터의 내적 연산

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T, \quad (5.33)$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T, \quad (5.35)$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T. \quad (5.36)$$

$x_k = \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{x} \rangle$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ 이라고 하자.

$$x_0 = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{x} \rangle = 3.5, \quad (5.37)$$

$$x_1 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \rangle = 0.5, \quad (5.38)$$

$$x_2 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x} \rangle = -3.5, \quad (5.39)$$

$$x_3 = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{x} \rangle = 1.5. \quad (5.40)$$

## Python을 이용한 벡터의 내적 연산

그러면  $\mathbf{x}$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T = 3.5\mathbf{v}_0 + 0.5\mathbf{v}_1 + (-3.5)\mathbf{v}_2 + 1.5\mathbf{v}_3. \quad (5.41)$$

벡터  $\mathbf{x}$ 를  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ 으로 정의하면,  $x_k$ 를 개별적으로 구하는 대신에 다음과 같이 행렬과 벡터의 곱으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{x} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

## Python을 이용한 벡터의 내적 연산

행렬과 벡터의 곱을 계산하는 Python 스크립트를 다음과 같이 작성할 수 있다. 이 스크립트를 실행하여 앞의 내용을 확인해 보자.

```
>>> import numpy as np
>>> v = 0.5* np.array( [[1., 1., 1., 1.],
...                    [1., 1., -1., -1.],
...                    [1., -1., -1., 1.],
...                    [1., -1., 1., -1.]])
>>> x = np.array([1., 3., 4., -1.])
>>> np.dot(v,x)
array([ 3.5,  0.5, -3.5,  1.5])
```

## 직교 정규 기저 벡터를 이용한 $N$ 차원 복소 벡터의 표현 (1)

$\mathbb{R}^N$  공간과 마찬가지로  $\mathbb{C}^N$  공간에도  $\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1}$  외에도 수많은 직교 정규 기저 벡터들이 존재한다.  $N$  개의 벡터  $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_{N-1}$  도 직교 정규 기저 벡터라고 하면,  $\mathbf{x}$ 를 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_0 + \dots + \langle \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_{N-1} \\ &= \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w}_0 + \dots + \langle \mathbf{w}_{N-1}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w}_{N-1}.\end{aligned}\tag{5.43}$$

$\mathbb{C}^N$  공간의 두 벡터  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 의 내적은 다음과 같이 정의된다.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^{*T} \mathbf{b} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i^* b_i = a_0^* b_0 + a_1^* b_1 + \dots + a_{N-1}^* b_{N-1},\tag{5.44}$$

여기에서  $*$  는 복소수의 공액 (complex conjugate) 을 의미한다.

## 직교 정규 기저 벡터를 이용한 $N$ 차원 복소 벡터의 표현 (2)

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  이라 하고,  $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_{N-1}$  을 다음과 같이 정의해 보자.

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_0 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^{*0} & W_N^{*0} & W_N^{*0} & \dots & W_N^{*0} \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{w}_1 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^{*0} & W_N^{*1} & W_N^{*2} & \dots & W_N^{*N-1} \end{bmatrix}^T, \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^{*0} & W_N^{*k} & W_N^{*2k} & \dots & W_N^{*(N-1)k} \end{bmatrix}^T, \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_{N-1} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^{*0} & W_N^{*N-1} & W_N^{*2(N-1)} & \dots & W_N^{*(N-1)^2} \end{bmatrix}^T,\end{aligned}\tag{5.45}$$

그러면  $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_{N-1}$  은 직교 정규 기저 벡터들이다.

## 직교 정규 기저 벡터를 이용한 $N$ 차원 복소 벡터의 표현 (3)

### 예제 5.4

$N = 4$  일 때,  $\mathbf{w}_k, k = 0, 1, 2, 3$ , 을 구하고, 이 벡터들이  $\mathbb{C}^4$  공간의 직교 정규 기저 벡터들이 되는 것을 확인하라.

$N = 4$  일 때,  $W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j$  이고,  $\sqrt{N} = 2$  이므로,  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  은 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{w}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W_4^{*0} & W_4^{*0} & W_4^{*0} & W_4^{*0} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W_4^{*0} & W_4^{*1} & W_4^{*2} & W_4^{*3} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W_4^{*0} & W_4^{*2} & W_4^{*2 \cdot 2} & W_4^{*2 \cdot 3} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W_4^{*0} & W_4^{*3} & W_4^{*3 \cdot 2} & W_4^{*3 \cdot 3} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}^T.$$

(5.46)

## 직교 정규 기저 벡터를 이용한 $N$ 차원 복소 벡터의 표현 (4)

$$\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{w}_0^{*\top} \mathbf{w}_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + 1) = 1,$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathbf{w}_1^{*\top} \mathbf{w}_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + 1) = 1,$$

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \mathbf{w}_2^{*\top} \mathbf{w}_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + 1) = 1,$$

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle = \mathbf{w}_3^{*\top} \mathbf{w}_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + 1) = 1,$$

## 직교 정규 기저 벡터를 이용한 $N$ 차원 복소 벡터의 표현 (5)

$$\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathbf{w}_0^{*\top} \mathbf{w}_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 + j + 1 - j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_2 \rangle = \mathbf{w}_0^{*\top} \mathbf{w}_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 - 1 + 1 - 1) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_3 \rangle = \mathbf{w}_0^{*\top} \mathbf{w}_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 - j - 1 + j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{w}_1^{*\top} \mathbf{w}_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 - j - 1 + j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \mathbf{w}_1^{*\top} \mathbf{w}_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 + j - 1 - j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle = \mathbf{w}_1^{*\top} \mathbf{w}_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 - 1 + 1 - j) = 0,$$

## 직교 정규 기저 벡터를 이용한 $N$ 차원 복소 벡터의 표현 (6)

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{w}_2^{*\top} \mathbf{w}_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 - 1 + 1 - 1) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathbf{w}_2^{*\top} \mathbf{w}_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 - j - 1 + j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle = \mathbf{w}_2^{*\top} \mathbf{w}_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 + j - 1 - j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{w}_3^{*\top} \mathbf{w}_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 + j - 1 - j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathbf{w}_3^{*\top} \mathbf{w}_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 - 1 + 1 - 1) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2 \rangle = \mathbf{w}_3^{*\top} \mathbf{w}_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{4}(1 - j - 1 + j) = 0,$$

따라서  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  은  $\mathbb{C}^4$  공간의 직교 정규 기저 벡터들이다.

## 직교 정규 기저 벡터를 이용한 $N$ 차원 복소 벡터의 표현 (7)

### 예제 5.5

예제 5.4에서 구한 벡터들이  $\mathbb{C}^4$  공간의 직교 정규 기저 벡터들이 되는 것을 확인할 수 있는 Python 스크립트를 작성하라.

```
import numpy as np
n = np.array([0,1,2,3])
W4 = np.exp(-1j*np.pi/2)
kn = np.outer(n,n)
W = 0.5*W4**kn
for w in W:
    print(w)
print()
for i in n:
    for j in n:
        print(f"{inner_product = np.dot(w1.conj(), w2):.3f}", end='  ')
    print()
```

## 스크립트를 실행한 결과

```
[0.5+0.j 0.5+0.j 0.5+0.j 0.5+0.j]
```

```
[ 5.00000000e-01+0.000000e+00j  3.06161700e-17-5.000000e-01j  
-5.00000000e-01-6.123234e-17j -9.18485099e-17+5.000000e-01j]
```

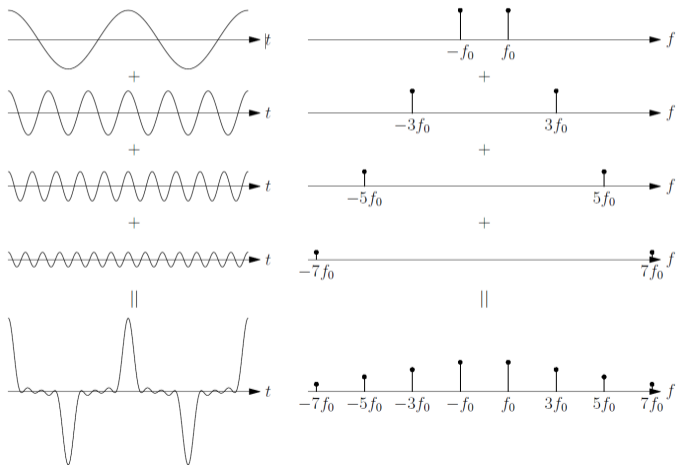
```
[ 0.5+0.0000000e+00j -0.5-6.1232340e-17j  0.5+1.2246468e-16j  
-0.5-1.8369702e-16j]
```

```
[ 5.00000000e-01+0.0000000e+00j -9.18485099e-17+5.0000000e-01j  
-5.00000000e-01-1.8369702e-16j  2.75545530e-16-5.0000000e-01j]
```

```
1.000e+00+0.000e+00j  -3.062e-17-3.062e-17j  0.000e+00-6.123e-17j  9.185e-17-9.185e-17j  
-3.062e-17+3.062e-17j  1.000e+00+0.000e+00j  -3.062e-17-3.062e-17j  0.000e+00-6.123e-17j  
0.000e+00+6.123e-17j  -3.062e-17+3.062e-17j  1.000e+00+0.000e+00j  -3.062e-17-3.062e-17j  
9.185e-17+9.185e-17j  0.000e+00+6.123e-17j  -3.062e-17+3.062e-17j  1.000e+00+0.000e+00j
```

## 시간 영역과 주파수 영역

- 신호의 시간 영역 표현 방법: 신호를 시간의 함수로 표현
- 신호의 주파수 영역 표현 방법: 신호에 포함되어 있는 정현파 성분들의 주파수 분포를 표현



## $N$ 차원 벡터 공간의 직교 정규 기저 벡터를 이용한 벡터의 표현

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_0 + \cdots + \langle \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_{N-1} \\ &= \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w}_0 + \cdots + \langle \mathbf{w}_{N-1}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w}_{N-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle &= 1, \text{ for } i = 0, 1, \cdots, N-1, \\ \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle &= 0, \text{ for } i \neq j, i, j = 0, 1, \cdots, N-1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle &= 1, \text{ for } i = 0, 1, \cdots, N-1, \\ \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle &= 0, \text{ for } i \neq j, i, j = 0, 1, \cdots, N-1.\end{aligned}$$

## 이산 푸리에 급수 (1)

$\tilde{x}[n]$ 을 주기가  $N$ 인 이산 복소 주기 신호라고 하자.  $\tilde{x}[n]$ 의 한 주기 동안의 샘플들을 모아서 벡터로 만든 것을  $\tilde{\mathbf{x}}$ 라고 하자.  
예:

$$\tilde{x}[n] = \{\cdots, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

$$x_1[n] = \{1, 2, 3, 4\}$$

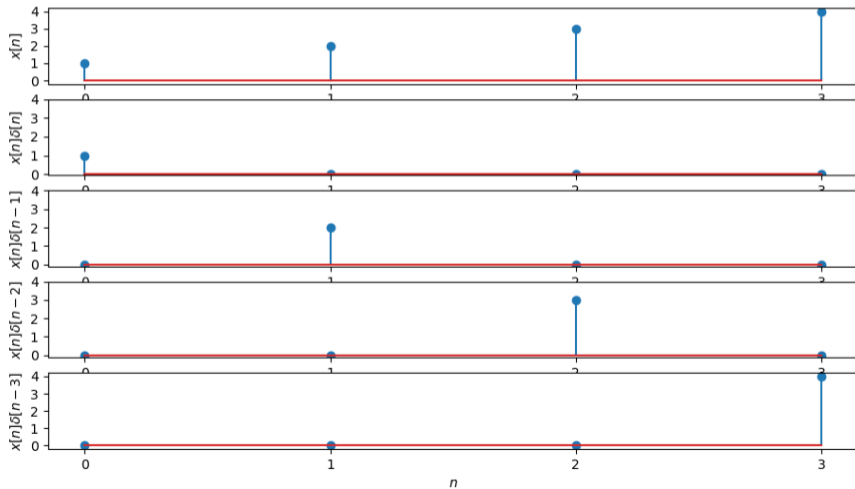
$$x_2[n] = \{2, 3, 4, 1\}$$

$$x_3[n] = \{3, 4, 1, 2\}$$

$$x_4[n] = \{4, 1, 2, 3\}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

## 이산 푸리에 급수 (2)



## 이산 푸리에 급수 (3)

$$\begin{aligned}x[n] &= \{1, 2, 3, 4\} \\&= \{1, 0, 0, 0\} + \{0, 2, 0, 0\} + \{0, 0, 3, 0\} + \{0, 0, 0, 4\} \\&= 1\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 4\delta[n-3]\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^3 x[k]\delta[n-k]$$
$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\mathbf{u}_0 + 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3$$

## 이산 푸리에 급수 (4)

$\tilde{x}[n]$ 을 주기가  $N$ 인 이산 복소 주기 신호라고 하자.  $\tilde{x}[n]$ 의 한 주기 동안의 샘플들을 모아서 다음과 같이 벡터로 만든 것을  $\tilde{\mathbf{x}}$ 라고 하자.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] & \tilde{x}[1] & \cdots & \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix}^T. \quad (5.47)$$

이 벡터를 다음과 같이 직교 정규 벡터들의 선형 결합으로 표현할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{x}[0]\mathbf{u}_0 + \cdots + \tilde{x}[N-1]\mathbf{u}_{N-1}, \quad (5.48)$$

여기에서

$$\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.49)$$

이다. 이렇게 표현되는  $\tilde{\mathbf{x}}$ 의  $k$ 번째 원소인  $\tilde{x}[k]$ 는 시간 영역에서  $k$ 번째 샘플로 이해할 수 있다.

## 이산 푸리에 급수 (5)

그리고  $\tilde{\mathbf{x}}$ 를 다음과 같이 또 다른 직교 정규 기저 벡터들의 선형 결합으로도 표현할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{w}_0, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_0 + \cdots + \langle \mathbf{w}_{N-1}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_{N-1}, \quad (5.50)$$

여기에서  $w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  이고,  $\mathbf{w}_k$ 는 다음과 같다.

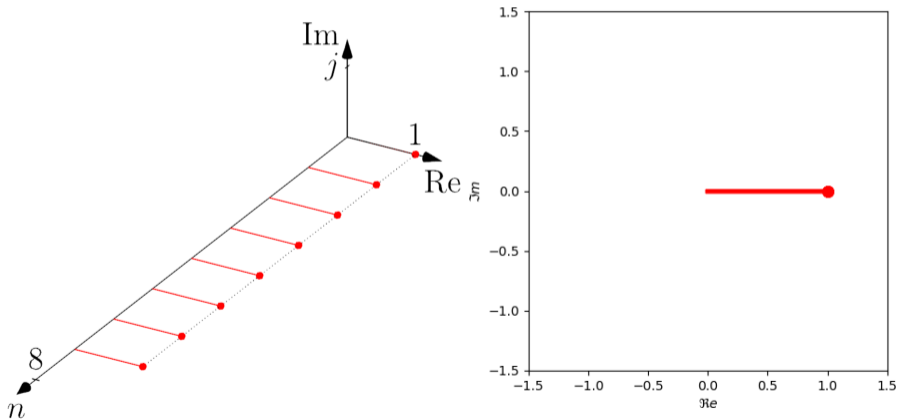
$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^{*0} & W_N^{*k} & W_N^{*2k} & \cdots & W_N^{*(N-1)k} \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi k}{N}} & e^{j\frac{2\pi(2k)}{N}} & \cdots & e^{j\frac{2\pi(N-1)k}{N}} \end{bmatrix}^T, k = 0, 1, \cdots, N-1. \end{aligned} \quad (5.51)$$

$N = 8$ 인 경우,  $w_8 = e^{-j\frac{2\pi}{8}} = e^{-j\frac{\pi}{4}}$  이고,  $\mathbf{w}_k$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} W_8^{*0} & W_8^{*k} & W_8^{*2k} & \cdots & W_8^{*(N-1)k} \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{k\pi}{4}} & e^{j\frac{2k\pi}{N}} & e^{j\frac{3k\pi}{N}} & e^{j\frac{4k\pi}{N}} & e^{j\frac{5k\pi}{N}} & e^{j\frac{6k\pi}{N}} & e^{j\frac{7k\pi}{N}} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (5.52)$$

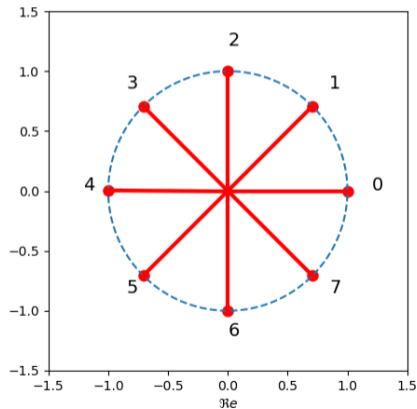
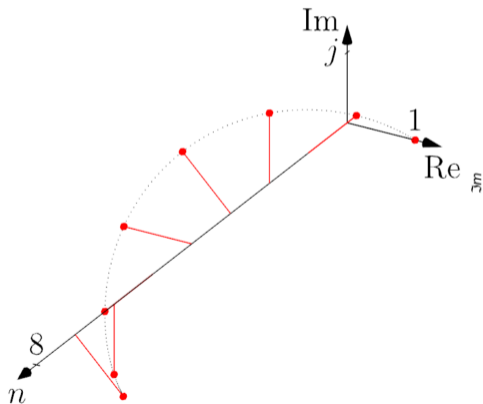
## 이산 푸리에 급수 (6)

$N = 8, k = 0 : [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ , 직류, DC(direct current)



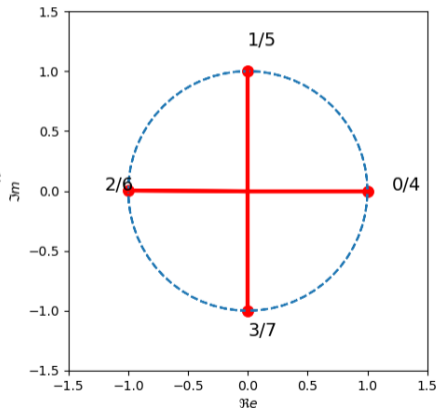
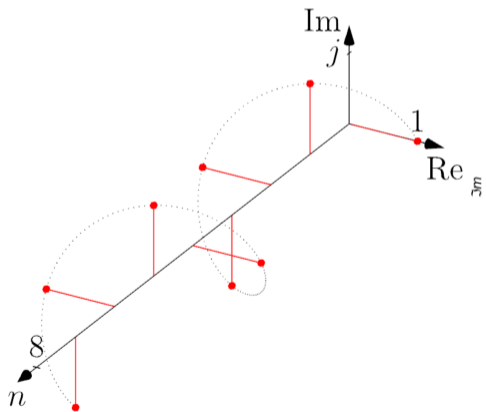
## 이산 푸리에 급수 (7)

$$N = 8, k = 1 : \left[ 1 \quad e^{j\frac{1\pi}{4}} \quad e^{j\frac{2\pi}{4}} \quad e^{j\frac{3\pi}{4}} \quad e^{j\frac{4\pi}{4}} \quad e^{j\frac{5\pi}{4}} \quad e^{j\frac{6\pi}{4}} \quad e^{j\frac{7\pi}{4}} \right]^T$$



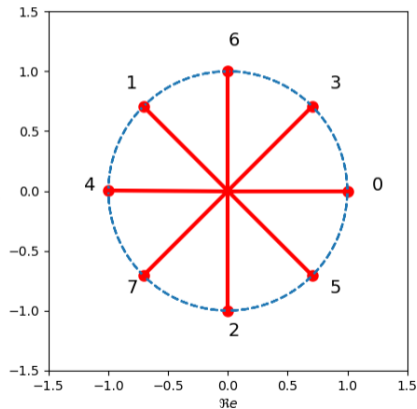
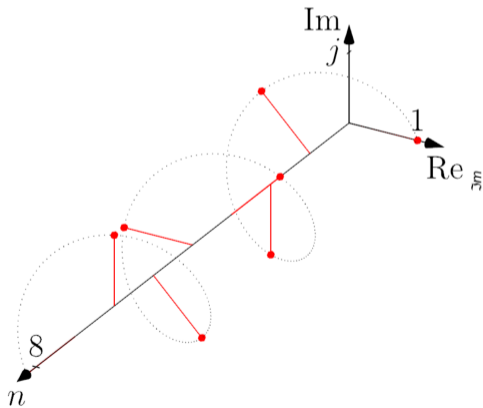
## 이산 푸리에 급수 (8)

$$N = 8, k = 2 : \left[ 1 \quad e^{j\frac{2\pi}{4}} \quad e^{j\frac{4\pi}{4}} \quad e^{j\frac{6\pi}{4}} \quad e^{j\frac{8\pi}{4}} \quad e^{j\frac{10\pi}{4}} \quad e^{j\frac{12\pi}{4}} \quad e^{j\frac{14\pi}{4}} \right]^T = \left[ 1 \quad j \quad -1 \quad -j \quad 1 \quad j \quad -1 \quad -j \right]^T$$



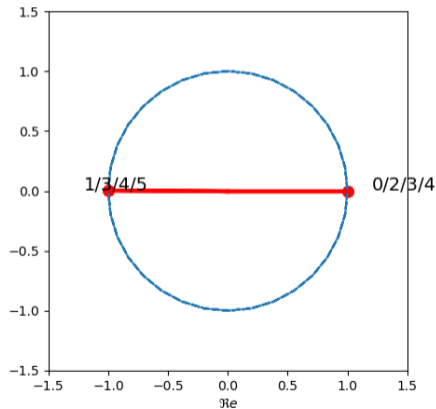
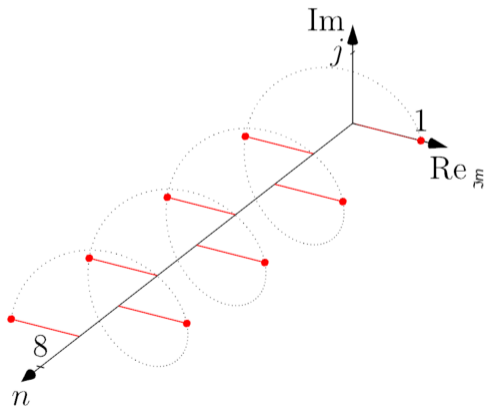
## 이산 푸리에 급수 (9)

$$N = 8, k = 3 : \left[ 1 \quad e^{j\frac{3\pi}{4}} \quad e^{j\frac{6\pi}{4}} \quad e^{j\frac{9\pi}{4}} \quad e^{j\frac{12\pi}{4}} \quad e^{j\frac{15\pi}{4}} \quad e^{j\frac{18\pi}{4}} \quad e^{j\frac{21\pi}{4}} \right]^T$$



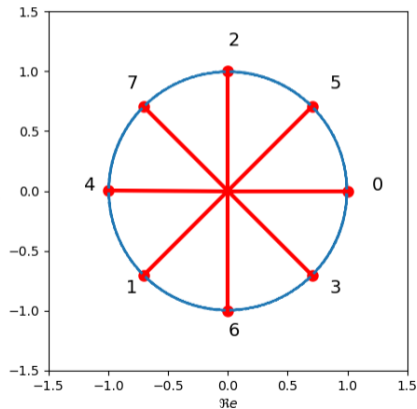
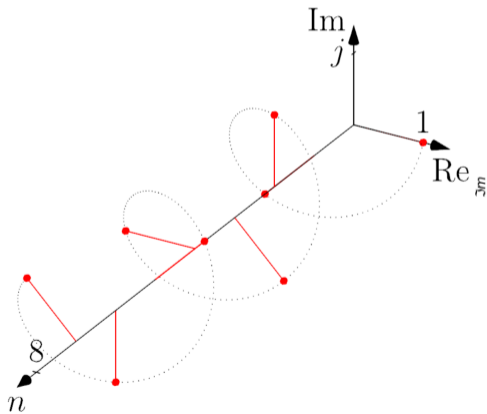
## 이산 푸리에 급수 (10)

$$N = 8, k = 4 : \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$



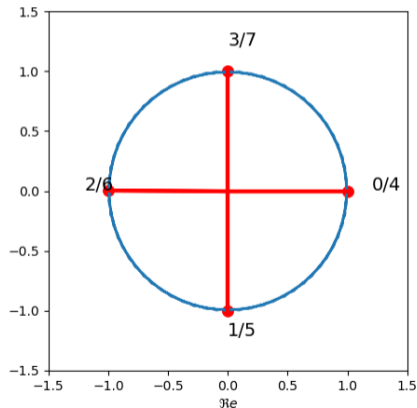
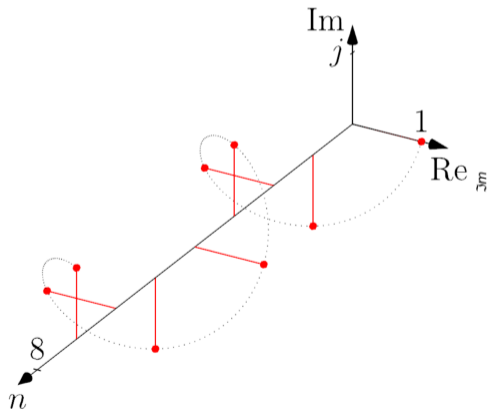
## 이산 푸리에 급수 (11)

$$N = 8, k = 5 (k = -3) : \left[ 1 \quad e^{j\frac{5\pi}{4}} \quad e^{j\frac{10\pi}{4}} \quad e^{j\frac{15\pi}{4}} \quad e^{j\frac{20\pi}{4}} \quad e^{j\frac{25\pi}{4}} \quad e^{j\frac{30\pi}{4}} \quad e^{j\frac{35\pi}{4}} \right]^T$$



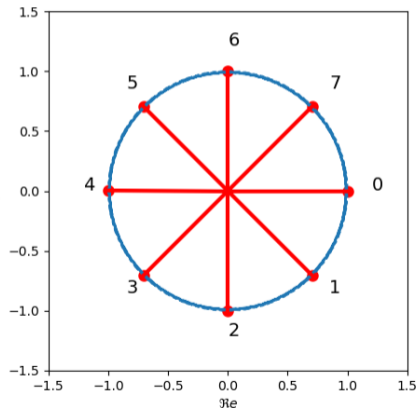
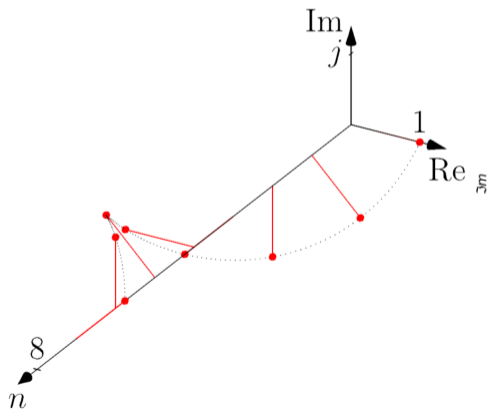
## 이산 푸리에 급수 (12)

$$N = 8, k = 6(k = -2) : \left[ 1 \quad e^{j\frac{6\pi}{4}} \quad e^{j\frac{12\pi}{4}} \quad e^{j\frac{18\pi}{4}} \quad e^{j\frac{24\pi}{4}} \quad e^{j\frac{30\pi}{4}} \quad e^{j\frac{36\pi}{4}} \quad e^{j\frac{42\pi}{4}} \right]^T$$



## 이산 푸리에 급수 (13)

$$N = 8, k = 7(k = -1) : \left[ 1 \quad e^{j\frac{7\pi}{4}} \quad e^{j\frac{14\pi}{4}} \quad e^{j\frac{21\pi}{4}} \quad e^{j\frac{28\pi}{4}} \quad e^{j\frac{35\pi}{4}} \quad e^{j\frac{42\pi}{4}} \quad e^{j\frac{49\pi}{4}} \right]^T$$



## 이산 푸리에 급수 (14)

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{x}} &= [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7]^T \\
 &= \tilde{x}_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{x}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{x}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{x}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{x}_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{x}_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{x}_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{x}_7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \langle \mathbf{w}_0, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_0 + \langle \mathbf{w}_1, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_2 + \langle \mathbf{w}_3, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_3 + \langle \mathbf{w}_4, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_4 + \langle \mathbf{w}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_5 + \langle \mathbf{w}_6, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_6 + \langle \mathbf{w}_7, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_7.
 \end{aligned}$$

## 이산 푸리에 급수 (15)

이제  $\tilde{X}[k] = \langle \mathbf{w}_k, \tilde{\mathbf{x}} \rangle$  라고 하면,  $\tilde{X}[k]$  는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= \langle \mathbf{w}_k, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\&= \mathbf{w}_k^{*T} \tilde{\mathbf{x}} \\&= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} w_N^0 & w_N^k & w_N^{2k} & \cdots & w_N^{(N-1)k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] & \tilde{x}[1] & \cdots & \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix}^T \\&= \frac{1}{\sqrt{N}} \left( w_N^0 \tilde{x}[0] + w_N^k \tilde{x}[1] + \cdots + w_N^{(N-1)k} \tilde{x}[N-1] \right) \\&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{nk} \tilde{x}[n] \\&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \tilde{x}[n].\end{aligned} \tag{5.53}$$

## 이산 푸리에 급수 (16)

$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}[0] \quad \tilde{x}[1] \quad \cdots \quad \tilde{x}[N-1]]^T$  이라 하자.

그러면 이 벡터 식을 다음과 같이 풀어 쓸 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \tilde{x}[2] \\ \vdots \\ \tilde{x}[k] \\ \vdots \\ \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{w}_0, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_1, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_2, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}_k, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}_{N-1}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0^{*T} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{w}_1^{*T} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{w}_2^{*T} \tilde{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k^{*T} \tilde{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{N-1}^{*T} \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0^{*T} \\ \mathbf{w}_1^{*T} \\ \mathbf{w}_2^{*T} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k^{*T} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{N-1}^{*T} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}$$

## 이산 푸리에 급수 (17)

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \tilde{x}[2] \\ \vdots \\ \tilde{x}[k] \\ \vdots \\ \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{w}_0, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_1, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_2, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}_k, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}_{N-1}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \dots & W_N^n \dots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & \dots & W_N^{2n} \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^k & \dots & W_N^{kn} \dots & W_N^{k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \dots & W_N^{(N-1)n} \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \tilde{x}[2] \\ \vdots \\ \tilde{x}[n] \\ \vdots \\ \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix}. \quad (5.54)$$

## 이산 푸리에 급수 (18)

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}[0] \\ \tilde{X}[1] \\ \tilde{X}[2] \\ \vdots \\ \tilde{X}[k] \\ \vdots \\ \tilde{X}[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \dots & W_N^n \dots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & \dots & W_N^{2n} \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^k & \dots & W_N^{kn} \dots & W_N^{k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \dots & W_N^{(N-1)n} \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \tilde{x}[2] \\ \vdots \\ \tilde{x}[n] \\ \vdots \\ \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix}.$$

그러면 이 식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{X}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N \tilde{\mathbf{x}}, \quad (5.55)$$

## 이산 푸리에 급수 (19)

여기에서  $(\mathbf{w}_N)_{k,n} = w_N^{nk}$  이다. 즉  $\mathbf{w}_N$  은 다음과 같다.

$$\mathbf{w}_N = \begin{bmatrix} w_N^0 & w_N^0 & \dots & w_N^0 \dots & w_N^0 \\ w_N^0 & w_N^1 & \dots & w_N^n \dots & w_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_N^0 & w_N^k & \dots & w_N^{kn} \dots & w_N^{k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_N^0 & w_N^{N-1} & \dots & w_N^{(N-1)n} \dots & w_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

## 역 이산 푸리에 급수 (1)

한편, 정규 기저 벡터를  $\mathbf{w}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot k} & e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot 2k} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot (N-1)k} \end{bmatrix}^T$  로 변경하면  $\tilde{\mathbf{x}}$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \langle \mathbf{w}_0, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_0 + \langle \mathbf{w}_1, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_1 + \dots + \langle \mathbf{w}_{N-1}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_{N-1} \\ &= \tilde{X}[0] \mathbf{w}_0 + \tilde{X}[1] \mathbf{w}_1 + \dots + \tilde{X}[N-1] \mathbf{w}_{N-1}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

이 벡터 식을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \tilde{x}[2] \\ \vdots \\ \tilde{x}[n] \\ \vdots \\ \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix} = \frac{\tilde{X}[0]}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} w_N^{*0} \\ w_N^{*0} \\ w_N^{*0} \\ \vdots \\ w_N^{*0} \\ \vdots \\ w_N^{*0} \end{bmatrix} + \frac{\tilde{X}[1]}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} w_N^{*0} \\ w_N^{*1} \\ w_N^{*2} \\ \vdots \\ w_N^{*n} \\ \vdots \\ w_N^{*N-1} \end{bmatrix} + \dots + \frac{\tilde{X}[N-1]}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} w_N^{*0} \\ w_N^{*N-1} \\ w_N^{*2(N-1)} \\ \vdots \\ w_N^{*n(N-1)} \\ \vdots \\ w_N^{*(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

## 역 이산 푸리에 급수 (2)

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^{*0} & W_N^{*0} & \dots & W_N^{*0} \dots & W_N^{*0} \\ W_N^{*N^0} & W_N^{*1} & \dots & W_N^{*k} \dots & W_N^{*N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^{*0} & W_N^{*n} & \dots & W_N^{*nk} \dots & W_N^{*n(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^{*0} & W_N^{*N-1} & \dots & W_N^{*(N-1)k} \dots & W_N^{*(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}[0] \\ \tilde{X}[1] \\ \vdots \\ \tilde{X}[k] \\ \vdots \\ \tilde{X}[N-1] \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

## 역 이산 푸리에 급수 (3)

이 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{w}_N^* \tilde{\mathbf{X}}, \quad (5.59)$$

여기에서  $\mathbf{w}_N^*$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{w}_N^* = \begin{bmatrix} w_N^{*0} & w_N^{*0} & \dots & w_N^{*0} \dots & w_N^{*0} \\ w_N^{*N^0} & w_N^{*1} & \dots & w_N^{*k} \dots & w_N^{*N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_N^{*0} & w_N^{*n} & \dots & w_N^{*nk} \dots & w_N^{*n(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_N^{*0} & w_N^{*N-1} & \dots & w_N^{*(N-1)k} \dots & w_N^{*(N-1)^2} \end{bmatrix}. \quad (5.60)$$

## 역 이산 푸리에 급수 (4)

식 (5.58)의  $n$  번째 열만 따로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= \frac{\tilde{X}[0]}{\sqrt{N}} w_N^{*0} + \frac{\tilde{X}[1]}{\sqrt{N}} w_N^{*n} + \frac{\tilde{X}[2]}{\sqrt{N}} w_N^{*n \cdot 2} + \cdots + \frac{\tilde{X}[N-1]}{\sqrt{N}} w_N^{*n(N-1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] w_N^{*nk} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j \frac{2\pi}{N} nk},\end{aligned}\tag{5.61}$$

여기에서  $\tilde{X}[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \tilde{x}[n]$  을  $\tilde{x}[n]$  의 이산 푸리에 급수(discrete Fourier series)라고 하고,

$\tilde{x}[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$  를 역 이산 푸리에 급수(inverse discrete Fourier series)라고 한다. 그러나 계산의 편의상 역 이산 푸리에 급수에만  $\frac{1}{N}$  을 사용한다.

## 이산 푸리에 급수

### 정의 5.2 (이산 푸리에 급수와 역 이산 푸리에 급수)

- 이산 푸리에 급수 (DFS: discrete Fourier series): 주기가  $N$ 인 이산 주기 신호  $\tilde{x}[n]$ 의 한 주기 동안의 신호  $\tilde{x}[0], \tilde{x}[1], \dots, \tilde{x}[N-1]$ 의 이산 푸리에 급수  $\tilde{X}[k]$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.62)$$

- 역 이산 푸리에 급수 (Inverse DFS)

(5.63)

## 이산 푸리에 급수

DFS와 IDFS 식을 행렬과 벡터를 이용해서 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{W}_N \tilde{\mathbf{x}}, \quad (5.64)$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \tilde{\mathbf{X}}, \quad (5.65)$$

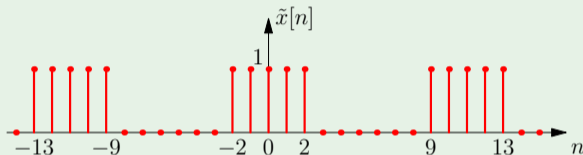
여기에서

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \dots & W_N^n \dots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^k & \dots & W_N^{kn} \dots & W_N^{k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \dots & W_N^{(N-1)n} \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}.$$

## 이산 푸리에 급수

### 예제 5.6

다음 그림과 같이 주어지는 이산시간 주기 신호의 이산 푸리에 급수를 구하라.



이 신호는 주기가  $N = 11$  인 이산 신호이다. 한 주기를  $[-2, 8]$  을 취해도 되고,  $[0, 10]$  을 취해도 관계 없다.

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}[k] &= \sum_{n=-2}^{8} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{11}nk}, k = 0, 1, \dots, 10 \\
 &= \sum_{n=-2}^{2} e^{-j\frac{2\pi}{11}nk} \\
 &= e^{-j\frac{2\pi}{11}k(-2)} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k(-1)} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k \cdot 0} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k2}.
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

## 이산 푸리에 급수

$$e^{-j\frac{2\pi}{11}k(-2)} = e^{j\frac{4k\pi}{11}} = \cos\left(\frac{4k\pi}{11}\right) + j\sin\left(\frac{4k\pi}{11}\right)$$

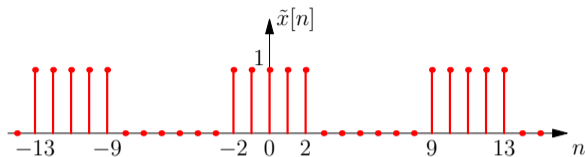
$$e^{-j\frac{2\pi}{11}2k} = e^{-j\frac{4k\pi}{11}} = \cos\left(\frac{4k\pi}{11}\right) - j\sin\left(\frac{4k\pi}{11}\right)$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{11}k(-1)} = e^{j\frac{2k\pi}{11}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) + j\sin\left(\frac{2k\pi}{11}\right)$$

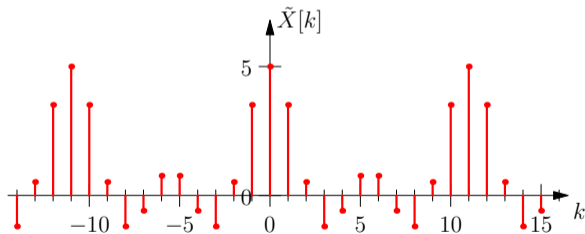
$$e^{-j\frac{2\pi}{11}k} = e^{-j\frac{2k\pi}{11}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) - j\sin\left(\frac{2k\pi}{11}\right)$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= e^{-j\frac{2\pi}{11}k(-2)} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k(-1)} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k \cdot 0} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k2} \\ &= 2\cos\left(\frac{4k\pi}{11}\right) + 2\cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) + 1\end{aligned}$$

## 이산 푸리에 급수



(a)  $\tilde{x}[n]$ .



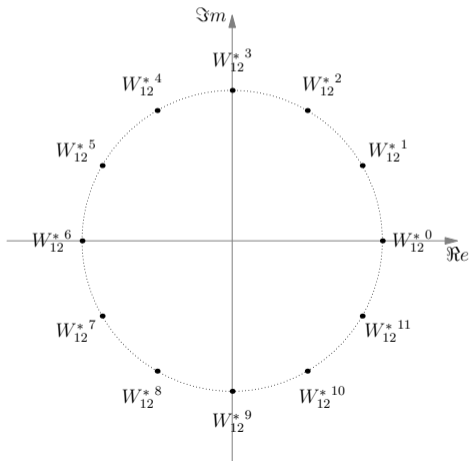
(b) 그림 (a)의 푸리에 급수  $\tilde{X}[k]$ .

그림 5.4: 주기가 11인 이산 주기 신호와 그의 이산 푸리에 급수의 그래프.

## 지난 시간 요약

- $N$  차원 벡터 공간에 무수히 많은 직교정규기저벡터들의 세트가 존재
- $N$  차원 벡터를  $N$  개의 직교정규기저벡터들의 선형 결합으로 표현할 수 있다.

Solutions of  $z^{12} = 1$



## 이산 푸리에 변환

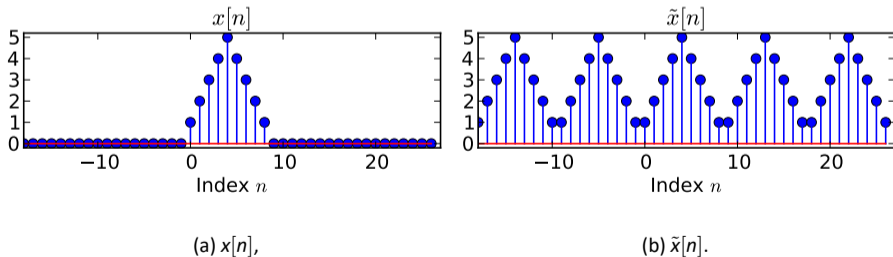
- 이산 푸리에 급수: 이산시간 주기 신호의 한 주기에 해당하는 신호의 주파수 성분을 분석할 수 있는 변환
- 현실적으로 우리가 다루게 될 대부분의 신호들은 주기 신호가 아닌 비주기 신호일 확률이 높다
- 이산시간 비주기 신호의 주파수 성분을 분석하기 위한 도구는 이산시간 푸리에 변환  $\Rightarrow$  주파수 영역에서 연속 신호
- 디지털 컴퓨터에서 계산을 하기 위해서는 주파수 영역에서 샘플링하는 방법을 생각할 수 있는데, 이 결과와 같은 것이 다음과 같이 정의하는 이산 푸리에 변환이다.

## 이산 푸리에 변환

$0 \leq n < N$  이외의 구간에서 0인 유한길이 신호  $x[n]$  이 있다고 가정하자.  $x[n]$  으로부터 다음과 같이 주기 신호  $\tilde{x}[n]$  를 만들 수 있다.

$$\tilde{x}[n] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[n - pN]. \quad (5.67)$$

예를 들어서,  $x[n]$  이 그림 5.5의 (a)와 같이 주어진 경우에  $x[n]$  을 한 주기 신호로 갖는 주기 신호는 그림 (b)와 같이 구성할 수 있다.



**그림 5.5:** 유한길이 신호  $x[n]$  과  $x[n]$  을 한 주기 신호로 갖는 이산시간 주기 신호  $\tilde{x}[n]$  의 예.

## 이산 푸리에 변환

여기에서  $\tilde{x}[n]$ 의 DFS를  $\tilde{X}[k]$ 라고 하면,  $x[n]$ 의 이산 푸리에 변환(DFT)는 다음과 같이  $\tilde{X}[k]$ 의 한 주기 신호로 정의한다.

### 정의 5.3 (이산 푸리에 변환과 역 이산 푸리에 변환)

- 이산 푸리에 변환(DFT: discrete Fourier transform): 길이가  $N$ 인 유한 길이 이산시간 신호  $x[n]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ,의 이산 푸리에 변환  $X[k]$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.68)$$

- 역 이산 푸리에 변환(Inverse DFT)

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.69)$$

DFT와 IDFT의 정의 식은 앞에서 배웠던 DFS와 IDFS의 식과 동일하다. 단지, 비주기 유한 길이 신호  $x[n]$ 을 주기 신호  $\tilde{x}[n]$ 의

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 선형성

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}.$$

이산 푸리에 변환은 선형 변환이며, 중첩 특성을 가진다.

$$\mathcal{F}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1[k] + bX_2[k]. \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} &= \sum_{n=0}^{N-1} (ax_1[n] + bx_2[n]) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left( ax_1[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + bx_2[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \right) \\ &= a \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + b \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= aX_1[k] + bX_2[k] \end{aligned}$$

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

$0 \leq n < N$ 의 범위에 존재하는 길이가  $N$ 인 신호  $x[n]$ 을  $y$  축에 대해서 반전 신호  $x[-n]$ 는  $-N < n \leq 0$ 의 범위에서 그 신호가 존재한다. 따라서 두 신호를 동일한 범위에서 DFT하는 것은 불가능하다. 두 신호를 동일한 범위에 존재하도록 만들기 위해서 다음과 같이 정의되는 순환 반전을 사용한다.

$$x[\langle -n \rangle_N] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ x[N - n], & 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases} \quad (5.71)$$

순환 반전은  $x[n]$ 을 한 주기로 하는  $\tilde{x}[n]$ 을 시간 반전한 신호를  $x[n]$ 의 원래 구간에 해당하는 신호만을 추출하는 연산이다. 예를 들어서 다음과 같이 길이가 8인 신호를 생각해 보자.

$$x[n] = \{x[0], x[1], x[2], \dots, x[6], x[7]\}. \quad (5.72)$$

이 신호를 순환 대칭한 신호  $x[\langle -n \rangle_8]$ 은 다음과 같다.

$$x[\langle -n \rangle_8] = \{x[0], x[7], x[6], \dots, x[2], x[1]\}. \quad (5.73)$$

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

Python에서 순환 반전 신호의 인덱스를 계산할 때는  $-n \% N$ 을 사용한다. Python의 나머지 연산자  $\%$ 를 사용하여 정수의 나머지를 구하는 예를 살펴 보자.

```
>>> for n in range(-5,6):
...     print(n, n%4)
...
-5 3
-4 0
-3 1
-2 2
-1 3
0 0
1 1
2 2
3 3
4 0
5 1
```

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

이 결과를 보면  $n \bmod N$ 의 결과는  $n$ 을 다음과 같이 표현할 때의  $r$ 과 같은 것을 알 수 있다.

$$n = mN + r. \quad (5.74)$$

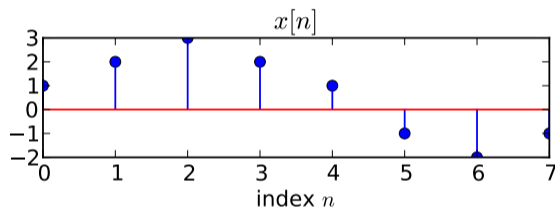
단,  $r$ 은  $0 \leq r < N$ 인 정수이다.

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

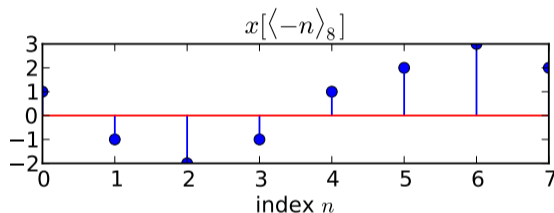
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
xn = np.array([1,3,5,5,5,6,7,3])
n = np.arange(8)
xncs = xn[ -n % 8]
plt.subplot(121)
plt.stem(n, xn)
plt.title("$x[n]$")
plt.xlabel("index $n$")
plt.subplot(122)
plt.stem(n, xncs)
plt.title("$x([n])_8$")
plt.xlabel("index $n$")
plt.tight_layout()
plt.show()
```

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

이 스크립트를 실행하면 다음 그래프를 얻을 수 있다. 두 그래프를 비교하면서 순환 시간 반전의 결과를 이해해 보자



(a)  $x[n]$ ,



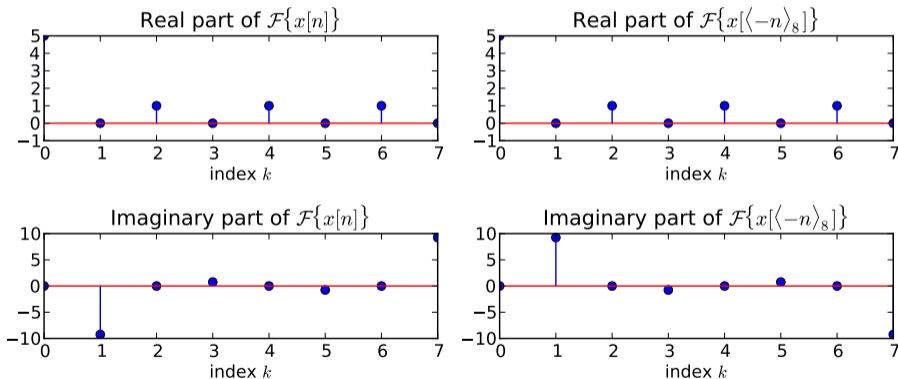
(b)  $x[\langle -n \rangle_8]$ .

**그림 5.6:** 유한길이 신호  $x[n]$ 과  $x[n]$ 을 회전 대칭 이동시킨 신호  $x[\langle -n \rangle_8]$ 의 예.

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

순환 반전 신호의 DFT는 다음과 같다.

$$\mathcal{F}\{x[\langle -n \rangle_N]\} = X[\langle -k \rangle_N]. \quad (5.75)$$



(a)  $\mathcal{F}\{x[n]\}$ ,

(b)  $\mathcal{F}\{x[\langle -n \rangle_8]\}$ .

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

이 그림에서  $X[k] = \mathcal{F}\{x[n]\}$ ,  $X_c[k] = \mathcal{F}\{x[\langle -n \rangle_N]\}$  라 하면, 다음과 같은 관계가 성립하는 것을 볼 수 있다.

$$X_c[0] = X[0], \quad X_c[1] = X[7], \quad X_c[2] = X[6], \quad X_c[3] = X[5],$$

$$X_c[4] = X[4], \quad X_c[5] = X[3], \quad X_c[6] = X[2], \quad X_c[7] = X[1].$$

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 복소 대칭

$$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X^*[\langle -k \rangle_N]. \quad (5.76)$$

만약에  $x[n]$  이 길이가  $N$ 인 실수 신호인 경우에는  $x^*[n] = x[n]$  이므로 다음 식이 성립한다.

$$X[k] = X^*[-k] = X^*[\langle -k \rangle_N]. \quad (5.77)$$

$$|X[k]| = |X[-k]|$$

$$\angle X[k] = -\angle X[-k]$$

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 순환 이동

길이가  $N$ 인 신호  $x[n]$ 이 시간 영역에서  $n_0$  만큼 이동을 하면 이동한 신호의 구간은  $0 \leq n \leq N-1$ 을 벗어난다. 따라서 이 경우에도 시간 반전의 경우와 같은 이유로 다음과 같이 정의되는 순환 시간 이동을 사용한다.

$$x[n - n_0] = x[\langle n - n_0 \rangle_N]. \quad (5.78)$$

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 순환 이동

Python에서 순환 이동한 배열을 구할 때는 나머지 연산자를 사용하거나, Numpy의 `roll()` 함수를 사용한다.

```
>>> n = np.arange(8)
>>> a = 2*n
>>> a
array([ 0,  2,  4,  6,  8, 10, 12, 14])
>>> a[(n-2) % 8]
array([12, 14,  0,  2,  4,  6,  8, 10])
>>> np.roll(a, 2)
array([12, 14,  0,  2,  4,  6,  8, 10])
>>> a[(n+2) % 8]
array([ 4,  6,  8, 10, 12, 14,  0,  2])
>>> np.roll(a, -2)
array([ 4,  6,  8, 10, 12, 14,  0,  2])
```

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 순환 이동

순환이동 신호의 이산 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x[\langle n - n_0 \rangle_N]\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x[\langle n - n_0 \rangle_N] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{n_0-1} x[\langle n - n_0 \rangle_N] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=n_0}^{N-1} x[\langle n - n_0 \rangle_N] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{n_0-1} x[N - n_0 + n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=n_0}^{N-1} x[n - n_0] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}.\end{aligned}\tag{5.79}$$

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 순환 이동

여기에서  $m = N - n_0 + n$ 이라 두면,

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} x[N - n_0 + n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{m=N-n_0}^{N-1} x[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} k(m+n_0-N)} \quad (5.80)$$

이 되고,  $m = n - n_0$ 라 두면

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} x[n - n_0] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{m=0}^{N-n_0-1} x[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} k(m+n_0)} \quad (5.81)$$

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 순환 이동

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x[\langle n - n_0 \rangle_N]\} &= \sum_{n=0}^{n_0-1} x[N - n_0 + n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} + \sum_{m=0}^{N-n_0-1} x[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} k(m+n_0)} \\&= \sum_{m=N-n_0}^{N-1} x[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} k(m+n_0-N)} + \sum_{m=0}^{N-n_0-1} x[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} k(m+n_0)} \\&= \sum_{m=N-n_0}^{N-1} x[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} k(m+n_0)} + \sum_{m=0}^{N-n_0-1} x[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} k(m+n_0)} \\&= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} k(m+n_0)} \\&= e^{-j \frac{2\pi}{N} kn_0} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} km} \\&= e^{-j \frac{2\pi}{N} kn_0} X[k].\end{aligned}\tag{5.82}$$

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: 순환 이동

다음은 순환이동 신호의 이산 푸리에 변환을 확인할 수 있는 Python 스크립트 예제이다.

```
>>> import numpy as np
>>> x=np.array([-2,-1,0,1,2,3,4,5])
>>> x1 = np.roll(x,2)
>>> X=np.fft.fft(x)
>>> X
array([12.+0.j          , -4.+9.65685425j, -4.+4.j          , -4.+1.65685425j,
       -4.+0.j          , -4.-1.65685425j, -4.-4.j          , -4.-9.65685425j])
>>> np.fft.fft(x1)
array([12.          +0.j,  9.65685425+4.j,  4.          -4.j, -1.65685425-4.j,
       -4.          +0.j, -1.65685425+4.j,  4.          +4.j,  9.65685425-4.j])
>>> w = np.exp(-1j*2*np.pi/8)**(2*np.arange(8))
>>> w*X
array([12.          +0.j,  9.65685425+4.j,  4.          -4.j, -1.65685425-4.j,
       -4.          +0.j, -1.65685425+4.j,  4.          +4.j,  9.65685425-4.j])
```

## 이산 푸리에 변환의 주요 성 질: 순환 콘볼루션

길이가 각각  $N_1$  과  $N_2$  인 두 신호  $h[n]$  과  $x[n]$  의 선형 콘볼루션의 길이는  $N_1 + N_2 - 1$  이 된다.  $N = \max(N_1, N_2)$  라 하고, 콘볼루션 계산 과정에서 모든 산호를  $[0, N - 1]$  구간으로 제한하고 신호의 이동을 순환 이동으로 제한하면, 그 결과는 다음과 같은 순환 콘볼루션(circular convolution)으로 표현된다.

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[\langle n - m \rangle_N] x[m]. \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} Y[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{m=0}^{N-1} h[\langle n - m \rangle_N] x[m] \right) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \left( \sum_{n=0}^{N-1} h[\langle n - m \rangle_N] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} km} H[k] \\ &= X[k] H[k] = H[k] X[k]. \end{aligned} \quad (5.84)$$

## 이산 푸리에 변환의 주요 성질: *Parseval*의 정리

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2. \quad (5.85)$$

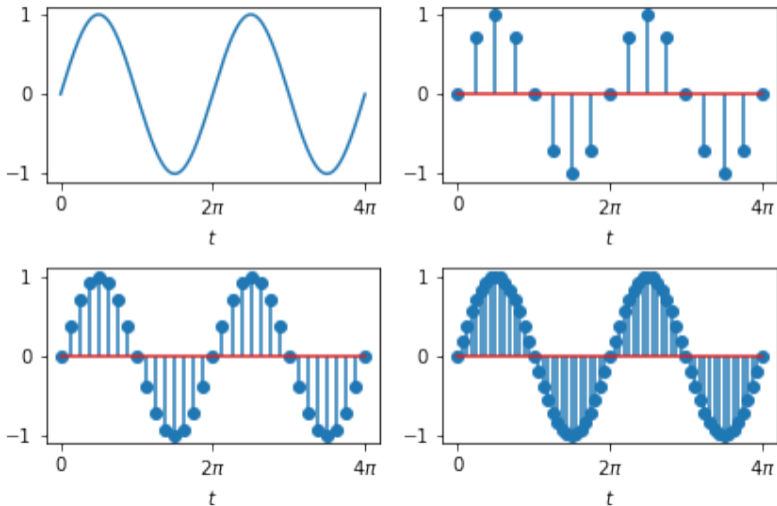
## 이산 푸리에 변환의 주요 성질

이름	표현
정의	$X[k] = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} ax[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$
선형성	$\mathcal{Z}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1[k] + bX_2[k]$
시간 지연	$\mathcal{F}\{x[n - n_0]\} = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k}X[k]$
시간 반전	$\mathcal{F}\{x[-n]\} = X[-k]$
신호의 공액	$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X^*[k]$
Parseval의 정리	$\sum_{n=0}^{N-1}  x[n] ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1}  X[k] ^2$

## 공부할 내용

- 연속시간 푸리에 급수: 연속시간 주기 신호의 주파수 성분 분석

## 샘플링 주파수가 다른 주기 신호의 샘플링



## 연속시간 복소 주기 함수의 내적의 성질

복소수에서 정의되는 주기가  $2\pi$  인 연속시간 함수의 함수 공간을 고려해 보자. 이 함수 공간은 내적이 다음과 같이 정의되는 내적 공간이 된다.

**정의 5.4 (주기가  $2\pi$  인 두 복소 주기 함수들의 내적)**

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t)g(t) dt. \quad (5.86)$$

## 연속시간 복소 주기 함수의 내적의 성질

이 때,  $\langle f, g \rangle$  는 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

- ❶ 내적 공간의 모든 연속시간 주기 함수  $f$  와  $g$  에 대해서  $\langle f, g \rangle$  가 정의된다.
- ❷ 공액 대칭

$$\begin{aligned}\langle f(t), g(t) \rangle^* &= \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g^*(t) dt \right)^* \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f^*(t) g(t))^* dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g^*(t) dt \\ &= \langle g(t), f(t) \rangle.\end{aligned}\tag{5.87}$$

## 연속시간 복소 주기 함수의 내적의 성질

### ㉓ 분배 법칙

$$\begin{aligned}\langle f(t) + g(t), h(t) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \{f(t) + g(t)\}^* h(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \{f(t)^* h(t) + g(t)^* h(t)\} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^* h(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)^* h(t) dt \\ &= \langle f(t), h(t) \rangle + \langle g(t), h(t) \rangle.\end{aligned}\tag{5.88}$$

$$\begin{aligned}\langle f(t), g(t) + h(t) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^* \{g(t) + h(t)\} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \{f(t)^* g(t) + f(t)^* h(t)\} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^* g(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^* h(t) dt \\ &= \langle f(t), g(t) \rangle + \langle f(t), h(t) \rangle.\end{aligned}\tag{5.89}$$

## 연속시간 복소 주기 함수의 내적의 성질

(4)

$$\langle af(t), g(t) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \{af(t)\}^* g(t) dt = a^* \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^* g(t) dt = a^* \langle f(t), g(t) \rangle. \quad (5.90)$$

$$\langle f(t), ag(t) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^* ag(t) dt = a \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^* g(t) dt = a \langle f(t), g(t) \rangle. \quad (5.91)$$

(5) 정부호 (positive definite) 성질

(a)  $f(t) \neq 0$  일 때,

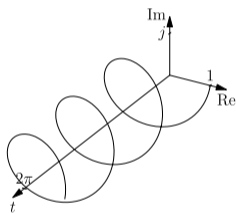
$$\langle f(t), f(t) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t) f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} ||f(t)||^2 dt > 0. \quad (5.92)$$

(b)  $f(t) = 0$  일 때,

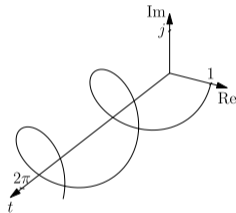
$$\langle f(t), f(t) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 0 dt = 0. \quad (5.93)$$

## 연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

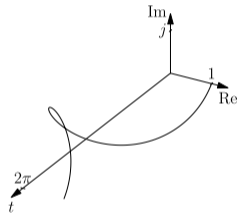
$$e^{jn(t+2k\pi)} = e^{jnt} \quad \forall k.$$



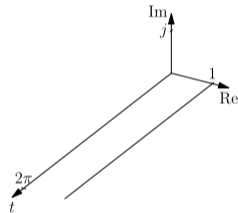
(a)  $n = -3$



(b)  $n = -2$



(c)  $n = -1$



(d)  $n = 0$

그림 5.8:  $e^{jnt}$ 의 그래프 ( $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ ).

## 연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

$$e^{jn(t+2k\pi)} = e^{jnt} \quad \forall k.$$

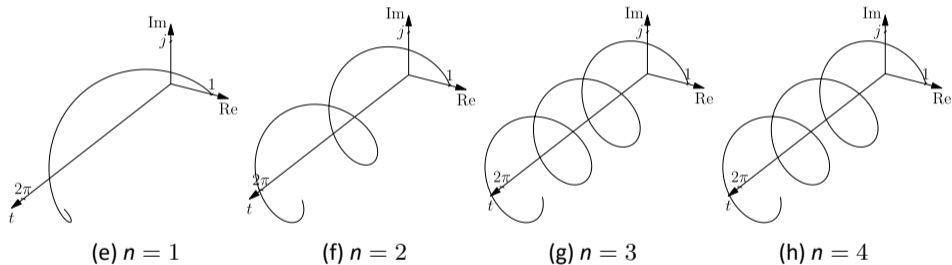


그림 5.8:  $e^{jnt}$ 의 그래프 ( $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ ) (계속).

## 연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

이 함수들의 내적은 다음과 같다.

④  $n \neq m$ 인 경우에 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\langle e^{jnt}, e^{jmt} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jnt} e^{jmt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)t} dt \\&= \frac{1}{j(m-n)} e^{j(m-n)t} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\&= \frac{1}{j(m-n)} \left\{ e^{j(m-n)\pi} - e^{-j(m-n)\pi} \right\} \\&= \frac{1}{j(m-n)} e^{j(m-n)\pi} \left\{ 1 - e^{-2j(m-n)\pi} \right\} \\&= \frac{1}{j(m-n)} e^{j(m-n)\pi} (1 - 1) = 0.\end{aligned}\tag{5.94}$$

## 연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

②  $n = m$ 인 경우에 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\langle e^{jnt}, e^{jnt} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jnt} e^{jnt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n-n)t} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = t \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi - (-\pi) = 2\pi.\end{aligned}$$

즉 함수  $e^{jnt}$ 의 길이는 다음과 같다.

$$|e^{jnt}| = \langle e^{jnt}, e^{jnt} \rangle^{1/2} = \sqrt{2\pi}.$$

그러면 함수  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jkt}$ 들은 길이가 1이므로 직교 정규 기저 함수가 된다. 따라서 주기가  $2\pi$ 인 모든 복소 함수  $\tilde{x}(t)$ 는 이 직교 정규 기저 함수들의 선형 결합으로 표현될 수 있다.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jkt}.$$

## 연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

위 식의 양변의 왼쪽에  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jmt}$ 를 내적하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jmt}, \tilde{x}(t) \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jmt}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jkt} \right\rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jmt}, a_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jkt} \right\rangle \\ &= a_m \frac{1}{2\pi} \langle e^{jmt}, e^{jmt} \rangle = a_m \frac{1}{2\pi} 2\pi = a_m.\end{aligned}\tag{5.95}$$

따라서  $a_k$ 는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}a_k &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jkt}, \tilde{x}(t) \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jkt} \right)^* \tilde{x}(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jkt} \tilde{x}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{x}(t) e^{-jkt} dt.\end{aligned}\tag{5.96}$$

## 연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

이를 정리하면 다음과 같다.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jkt}, \quad (5.97)$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{x}(t) e^{-jkt} dt. \quad (5.98)$$

이 두 식을 각각 연속시간 푸리에 급수 합성식과 연속시간 푸리에 급수 분석식이라고 한다.

$\{e^{jkt}, k \text{는 정수}\}$ 가 주기가  $2\pi$ 의 정수 배인 함수의 집합이라고 하고 하면, 주기가  $T_0$ 의 정수 배인 복소지수 함수들의 집합은  $\{e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}\}$ 이다. 주기가  $T_0$ 인 주기 함수  $\tilde{x}(t)$ 를 푸리에 급수로 분석할 때에는  $e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$ 를 직교 정규 기저 함수들로 사용한다.

## 연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

### 정의 5.5 (연속시간 푸리에 급수 분석과 합성)

- 연속시간 푸리에 급수 분석:

주기가  $T_0$  인 주기 신호  $\tilde{x}(t)$  의 복소 진폭, 즉 푸리에 급수 계수  $a_k$  는 다음과 같이 구한다.

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0} kt} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi f_0 kt} dt, \quad (5.99)$$

여기에서  $T_0$  는  $\tilde{x}(t)$  의 기본 주기(fundamental period)이다.

DC 성분인  $a_0$  는 위 식에  $k = 0$  을 대입하여 구한다.

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}(t) dt. \quad (5.100)$$

- 연속시간 푸리에 급수 합성:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T_0} kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j2\pi f_0 kt}. \quad (5.101)$$

## 연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

### 예제 5.7

기본 주기가  $T_0$  이고, 한 주기 내에서 다음과 같이 정의되는 주기적인 구형파  $\tilde{x}(t)$ 의 연속시간 푸리에 급수 계수를 구하라.

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}T_0 \\ 0, & \frac{1}{2}T_0 \leq t < T_0 \end{cases} \quad (5.102)$$

$\int_{t_1}^{t_2} e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{a} (e^{at_2} - e^{at_1})$  을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{1}{2}T_0} 1 dt = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{2}T_0 = \frac{1}{2}. \quad (5.103)$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{1}{2}T_0} (1) e^{-j2\pi kt/T_0} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \frac{T_0}{-j2\pi k} e^{-j2\pi kt/T_0} \Big|_0^{\frac{1}{2}T_0} = -\frac{1}{j2\pi k} (e^{-j\pi k} - 1). \end{aligned} \quad (5.104)$$

## 연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

이상을 정리하면 구형파의 푸리에 급수의 계수는 다음과 같다.

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{j\pi k} = -\frac{j}{\pi k}, & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ 0, & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \\ \frac{1}{2}, & k = 0. \end{cases} \quad (5.105)$$

표 5.1: 연속시간 푸리에 급수의 주요 성질 (1)

이름	표현
정의	$c_k = \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0} kt} dt$ $d_k = \mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{y}(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0} kt} dt$
선형성	$\mathcal{F}\{a\tilde{x}(t) + b\tilde{y}(t)\} = ac_k + bd_k$
시간 지연	$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t - t_0)\} = e^{-j\frac{2\pi}{T_0} kt_0} c_k$
주기적 콘볼루션	$\mathcal{F}\left\{\int_{\langle T_0 \rangle} \tilde{x}(\tau) \tilde{y}(t - \tau) d\tau\right\} = c_k d_k$
곱셈	$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t) \tilde{y}(t)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l d_{k-l}$

표 5.1: 연속시간 푸리에 급수의 주요 성질 (2)

이름	표현
신호의 미분	$\mathcal{F}\left\{d\frac{\tilde{x}(t)}{dt}\right\} = jk\frac{2\pi}{T_0}c_k$
시간 반전	$\mathcal{F}\{\tilde{x}(-t)\} = c_{-k}$
신호의 공액	$\mathcal{F}\{\tilde{x}^*(t)\} = c^*(-k)$
실수 신호	$c_k^* = c_{-k}$
파스발의 정리	$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0}  \tilde{x}(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}  c_k ^2$

## 시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

구형파에서 펄스의 폭이  $\tau$ 이고 주기가  $T_0$ 인 구형파  $\tilde{x}(t)$ 가  $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2})$  구간에서 다음과 같이 표시된다.

$$\tilde{x}_1(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T_0}{2} \leq t < -\frac{\tau}{2} \\ 1, & -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} \leq t < \frac{T_0}{2} \end{cases} . \quad (5.106)$$

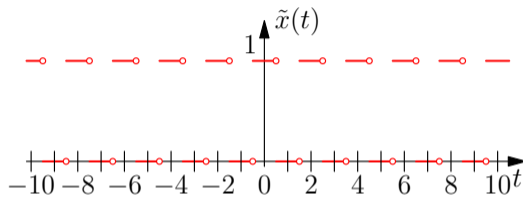
그리고  $\tilde{x}(t)$ 의 푸리에 급수 계수  $a_k$ 가 다음과 같이 주어진다.

$$a_k = \frac{\sin \frac{\pi k \tau}{T_0}}{\pi k} . \quad (5.107)$$

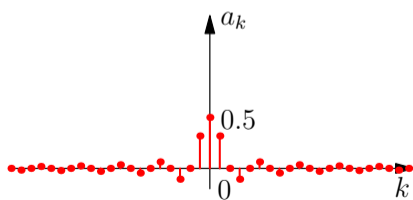
$\tau = 1$ 일 때,  $T_0 = 2, 5, 10$ 인 세 경우에 대해서 한 주기 동안  $\tilde{x}(t)$ 와  $a_k$ 의 그래프를 그려서 비교해 보자. 푸리에 급수 계수  $a_k$ 에서  $k$ 는  $-\infty < k < \infty$ 의 범위에 존재한다. 즉, 구형파에 존재하는 주파수 성분의 개수가 무한대이다. 위의 그래프는 이 가운데 일부만 나타낸 것이다. 세 경우의 그래프에서  $T_0 a_k$ 의 차이를 유심히 비교해 보자.  $T_0 a_k$ 의 그래프에서 가로 축은  $k$ 가

## 시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

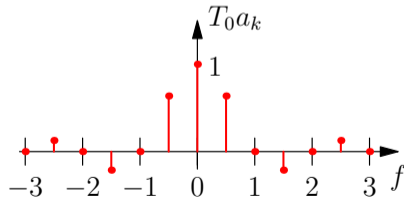
(4)  $T_0 = 2$ 일 때,  $a_k = \frac{\sin \frac{\pi k}{2}}{\pi k}$



(a)  $\tilde{x}(t)$ 의 그래프.



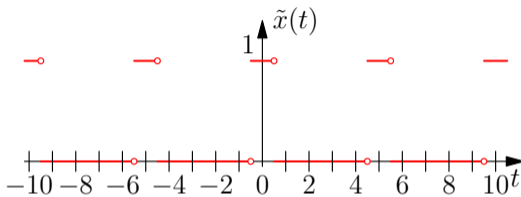
(b)  $a_k$ 의 그래프.



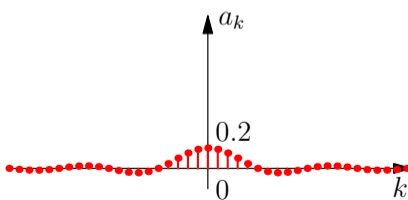
(c)  $T_0 a_k$ 의 그래프.

## 시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

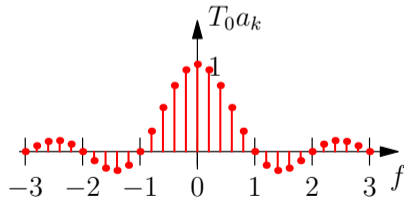
(2)  $T_0 = 5$  일 때,  $a_k = \frac{\sin \frac{\pi k}{5}}{\pi k}$



(a)  $\tilde{x}(t)$ 의 그래프.



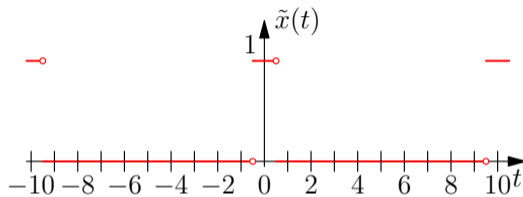
(b)  $a_k$ 의 그래프.



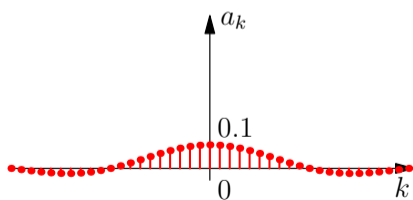
(c)  $T_0 a_k$ 의 그래프.

## 시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

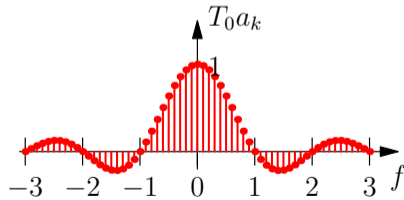
(2)  $T_0 = 10$ 일 때,  $a_k = \frac{\sin \frac{\pi k}{10}}{\pi k}$



(a)  $\tilde{x}(t)$ 의 그래프.



(b)  $a_k$ 의 그래프.



(c)  $T_0 a_k$ 의 그래프.

## 시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

이 세 가지 경우를 통해서 관찰할 수 있는 사실은 다음과 같다.

- ❶  $\sin \frac{\pi k}{T_0} = 0$ 이 되는  $k$ , 즉  $a_k$ 가 처음으로 0이 되는 양수  $k$ 는  $k = T_0$ 이다.
- ❷ 구형파의 펄스의 폭을 고정한 채 주기를 점점 증가시키면 시비율은 감소한다. 그리고 주기가 점점 증가하면서  $T_0 a_k$  신호는 전체적인 모양에는 변화가 없이 점점 연속 주파수 신호에 근접해 가는 것을 볼 수 있다.

## 연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

앞 절의 푸리에 급수 분석과 합성 식에서 초기의  $T_0$  값을  $T$ 라 두고,  $T_0 \rightarrow \infty$  일 때  $\tilde{x}(t)$ 는 주기함수에서 비주기 함수로 변한다. 이렇게 얻은 비주기 함수를  $x(t)$ 라고 하면, 둘 사이의 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (5.108)$$

여기에서  $f_0 = \frac{1}{T_0}$  이라고 하면,  $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} f_0 = df$ 가 되고,  $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} f_0 k$ 는 연속변수  $f$ 가 된다.

$$\begin{aligned} \lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 a_k &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-j \frac{2\pi}{T_0} kt} dt \\ &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-j 2\pi f_0 kt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j 2\pi ft} dt. \end{aligned} \quad (5.109)$$

## 연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

이제  $X(f)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$X(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 a_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt. \quad (5.110)$$

그러면, 푸리에 급수 합성식의  $\tilde{x}(t)$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T_0} kt} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_0 a_k e^{j\frac{2\pi}{T_0} kt} \frac{1}{T_0} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (T_0 a_k) e^{j2\pi f_0 kt} f_0. \end{aligned} \quad (5.111)$$

## 연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

이 식으로부터  $x(t)$  를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}x(t) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) \\&= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (T_0 a_k) e^{j2\pi f_0 k t} f_0 \\&= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df.\end{aligned}\tag{5.112}$$

여기에서  $\omega = 2\pi f$ 라 하면,  $d\omega = 2\pi df$ 가 되어  $df = \frac{d\omega}{2\pi}$ 로 쓸 수 있다. 그리고 식 (5.110)에서 정의한  $X(f)$  대신에  $X(\omega)$ 라는 표기를 사용하면  $x(t)$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega,\tag{5.113}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.\tag{5.114}$$

이 두 식을 각각 연속시간 푸리에 역변환과 푸리에 변환이라고 한다. 또한  $X(\omega)$  대신에  $X(j\omega)$ 를 사용하는 것이 일반적이다.

## 연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

이 표현을 사용하여 연속시간 비주기 신호의 푸리에 변환과 역변환을 각각 다음과 같이 정의한다.

### 정의 5.6 (연속시간 비주기 신호의 푸리에 변환과 역변환)

- 연속시간 비주기 신호  $x(t)$  의 푸리에 변환

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (5.115)$$

- 역 푸리에 변환

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.116)$$

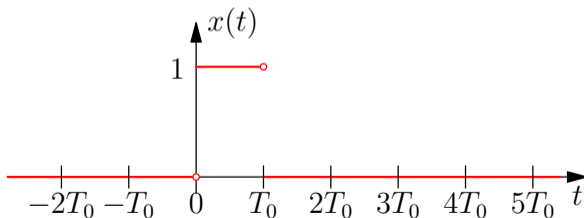
## 연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

### 예제 5.8

다음과 같이 주어지는  $x(t)$ 의 푸리에 변환을 구하라.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T_0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (5.117)$$

이 함수를 그림으로 나타내면 다음 그림과 같다.



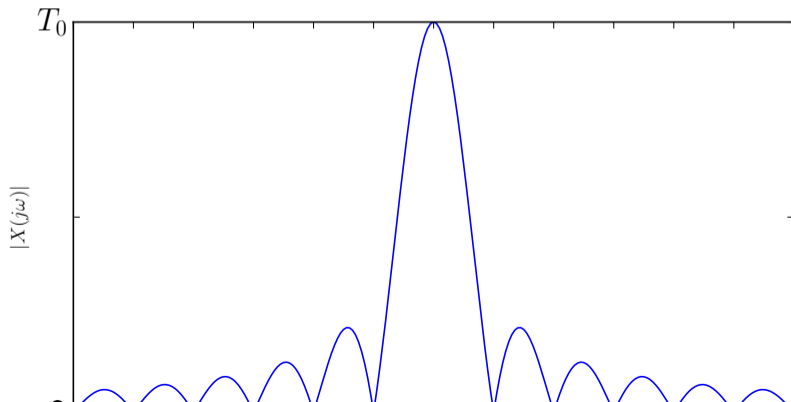
## 연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

이 함수의 푸리에 변환은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{T_0} 1 \cdot e^{-j\omega t}dt \\&= -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{T_0} = \boxed{\frac{j}{\omega} (e^{-j\omega T_0} - 1)} \\&= \frac{j}{\omega} e^{-j\frac{1}{2}\omega T_0} \left( e^{-j\frac{1}{2}\omega T_0} - e^{j\frac{1}{2}\omega T_0} \right) = \frac{j}{\omega} e^{-j\frac{1}{2}\omega T_0} \left[ -j2 \sin \left( \frac{1}{2}\omega T_0 \right) \right] \\&= \frac{\sin \left( \frac{1}{2}\omega T_0 \right)}{\frac{1}{2}\omega} e^{-j\frac{1}{2}\omega T_0} = T_0 \frac{\sin \left( \frac{1}{2}\omega T_0 \right)}{\frac{1}{2}\omega T_0} e^{-j\frac{1}{2}\omega T_0}.\end{aligned}\tag{5.118}$$

## 연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

$$|X(j\omega)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\omega T_0\right)}{\frac{1}{2}\omega} \right|. \quad (5.119)$$



## 연속시간 푸리에 변환의 존재와 수렴

식 (5.115)를 보면 푸리에 변환을 구하기 위한 적분 구간이  $(-\infty, \infty)$ 이기 때문에 적분 결과가 유한한 값으로 정해지지 않고  $\infty$  또는  $-\infty$ 로 발산할 가능성도 있다. 다시 말하면, 모든  $x(t)$ 가 푸리에 변환식을 갖는 것은 아니다. 푸리에 변환이 존재하기 위해서는  $x(t)$ 가 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$|X(j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| |e^{-j\omega t}| dt. \quad (5.120)$$

그런데 모든  $t$ 에 대해서  $|e^{-j\omega t}| = 1$ 이므로, 다음 식이 성립한다.

$$|X(j\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt. \quad (5.121)$$

따라서 푸리에 변환이 존재하기 위한 충분 조건은 다음과 같다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (5.122)$$

이 조건을 절대 적분 가능(absolutely integrable) 조건이라고 한다. 단, 이 조건은 충분 조건이지 필요 조건은 아니다.

표 5.2: 연속시간 푸리에 변환의 주요 성질 (1)

이름	표현
정의	$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$
선형성	$\mathcal{F}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega).$
시간 지연	$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
주파수 지연	$\mathcal{F}\{x(t)e^{j\omega_0 t}\} = X(j(\omega - \omega_0))$
컨볼루션	$\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(j\omega)X_2(j\omega)$
곱셈	$\mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$
신호의 미분	$\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega)$

표 5.2: 연속시간 푸리에 변환의 주요 성질 (2)

이름	표현
주파수 영역에서의 미분	$\mathcal{F}\{tx(t)\} = j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
켈레 복소수 신호	$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega)$
시간 반전	$\mathcal{F}\{x(-t)\} = X(-j\omega)$
신호의 공액	$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega)$
실수 신호	$X^*(j\omega) = X(-j\omega)$
파스발의 정리	$\int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  X(j\omega) ^2$

## 이산 푸리에 변환에서 이산시간 푸리에 변환으로

이산 신호에 대해서도 주기가 무한대로 접근하는 경우에 이산 푸리에 변환에 어떤 변화가 있는지 살펴 보기로 하자. 먼저 이산 주기 신호의 푸리에 변환과 그 역변환을 다시 기억해 보자.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (5.123)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+j \frac{2\pi}{N} nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} mk} e^{+j \frac{2\pi}{N} nk}. \end{aligned} \quad (5.124)$$

여기에서  $\hat{\omega}_0 = \frac{2\pi}{N}$  라 하면,  $\frac{1}{N} = \frac{\hat{\omega}_0}{2\pi}$  가 되고 식 (5.124)에서 다음 식을 구할 수 있다.

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\hat{\omega}_0}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] e^{-j \hat{\omega}_0 mk} e^{j \hat{\omega}_0 nk}. \quad (5.125)$$

## 이산 푸리에 변환에서 이산시간 푸리에 변환으로

$N \rightarrow \infty$ 가 되면,  $\tilde{x}[n] \rightarrow x[n]$ ,  $\hat{\omega}_0 = d\hat{\omega} \rightarrow 0$ ,  $k\hat{\omega}_0 \rightarrow \hat{\omega}$ 가 되고, 위 식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}[n] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] e^{-j\hat{\omega}_0 mk} e^{j\hat{\omega}_0 nk} \hat{\omega}_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\hat{\omega} m} e^{j\hat{\omega} n} d\hat{\omega} \\ &= x[n].\end{aligned}$$

이제 여기에서

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\hat{\omega} m} \quad (5.126)$$

이라고 정의하자. 이 식을 비주기 이산 신호  $x[m]$ 의 이산시간 푸리에 변환(DTFT: discrete-time Fourier transform)이라고 한다. 그리고 다음을 역 이산시간 푸리에 변환이라고 한다.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\hat{\omega}}) e^{j\hat{\omega} n} d\hat{\omega}. \quad (5.127)$$

## 이산 푸리에 변환에서 이산시간 푸리에 변환으로

비주기 이산 신호  $x[n]$ 의 이산시간 푸리에 변환과 역 이산시간 푸리에 변환은 다음과 같다.

### 정의 5.7 (이산시간 푸리에 변환과 역변환)

- 이산시간 푸리에 변환

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\hat{\omega}n} \quad (5.128)$$

- 역 이산시간 푸리에 변환

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\hat{\omega}})e^{j\hat{\omega}n}d\hat{\omega} \quad (5.129)$$

## 이산 푸리에 변환에서 이산시간 푸리에 변환으로

### 예제 5.9

$x[n] = u[n] - u[n - 10]$ 의 이산 시간 푸리에 변환을 구하라.

$$\begin{aligned} X(e^{j\hat{\omega}}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\hat{\omega}n} = \sum_{n=0}^9 e^{-j\hat{\omega}n} = \frac{1 - (e^{-j\hat{\omega}})^{10}}{1 - e^{-j\hat{\omega}}} \\ &= \boxed{\frac{1 - e^{-j10\hat{\omega}}}{1 - e^{-j\hat{\omega}}}} = \frac{e^{-j5\hat{\omega}} (e^{j5\hat{\omega}} - e^{-j5\hat{\omega}})}{e^{-j0.5\hat{\omega}} (e^{j0.5\hat{\omega}} - e^{-j0.5\hat{\omega}})} \quad (5.130) \\ &= \frac{j2 \sin(5\hat{\omega})}{j2 \sin(\hat{\omega}/2)} e^{-j9\hat{\omega}/2} = \frac{\sin(5\hat{\omega})}{\sin(\hat{\omega}/2)} e^{-j9\hat{\omega}/2}. \end{aligned}$$

## 이산시간 푸리에 변환의 존재와 수렴

이산시간 푸리에 변환은 무한 급수(infinite series)이므로 수렴할 수도 있고 수렴하지 않을 수도 있다. 이 무한 급수가 수렴하지 않는 경우에는 이산시간 푸리에 변환을 구할 수 없다.

만약에  $x[n]$ 이 절대 가합(absolutely summable) 수열이면, 즉 다음 조건을 만족한다면

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

모든  $\hat{\omega}$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\left| X(e^{j\hat{\omega}}) \right| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\hat{\omega}n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty.$$

따라서,  $x[n]$ 의 절대 가합성(absolute summability)은 이산시간 푸리에 변환이 존재하기 위한 충분 조건이다.

표 5.3: 이산시간 푸리에 변환의 주요 성질 (1)

이름	표현
정의	$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\hat{\omega}n}$
선형성	$\mathcal{F}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1(e^{j\hat{\omega}}) + bX_2(e^{j\hat{\omega}})$
시간 지연	$\mathcal{F}\{x[n - n_0]\} = e^{-j\hat{\omega}n_0}X(e^{j\hat{\omega}})$
컨볼루션	$\mathcal{F}\{x[n] * y[n]\} = X(e^{j\hat{\omega}})Y(e^{j\hat{\omega}})$
곱셈	$\mathcal{F}\{x[n]y[n]\} = X(e^{j\hat{\omega}}) * Y(e^{j\hat{\omega}}) \quad (\text{주기적 컨볼루션})$

표 5.3: 이산시간 푸리에 변환의 주요 성질 (2)

이름	표현
정의	$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\hat{\omega}n}$
신호의 차분	$\mathcal{F}\{x[n] - x[n-1]\} = (1 - e^{-j\hat{\omega}})X(e^{j\hat{\omega}})$
시간 곱셈	$\mathcal{F}\{nx[n]\} = j\frac{X(e^{j\hat{\omega}})}{d\hat{\omega}}$
시간 반전	$\mathcal{F}\{x[-n]\} = X(e^{-j\hat{\omega}})$
켈레 신호의 변환	$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X^*(e^{-j\hat{\omega}})$
실수 신호의 변환의 켈레 대칭	$X(e^{-j\hat{\omega}}) = X^*(e^{j\hat{\omega}})$
Parseval의 정리	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}  X(e^{j\hat{\omega}}) ^2 d\hat{\omega}$

## DFT와 DTFT 사이의 관계

$0 \leq n < N$  이외의 구간에서는 0인 신호  $x[n]$  을 생각해 보자. 이 신호의 이산 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$X[k] := \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.131)$$

$X[k]$  도 주기가  $N$ 인 주기신호이다. 즉,  $X[k] = X[k + mN]$ ,  $m$ 은 정수이다.  $x[n]$ 의 이산시간 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\hat{\omega}n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\hat{\omega}n}. \quad (5.132)$$

$X(e^{j\hat{\omega}})$ 는 주기가  $2\pi$ 인 주기신호이다. 즉,  $X(e^{j\hat{\omega}}) = X(e^{j(\hat{\omega}+2\pi m)})$ ,  $m$ 은 정수이다.

이 두 식을 비교해 보면, 다음 사실을 알 수 있다.

$$X(e^{j\hat{\omega}}) \Big|_{\hat{\omega}=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = X[k], k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.133)$$

## DFT와 DTFT 사이의 관계

이 식이 의미하는 것은 주기가  $2\pi$ 인 주기 함수  $x(e^{j\hat{\omega}})$ 를  $0 \leq \hat{\omega} < 2\pi$ 를  $N$ 개의 등간격으로 나누어 샘플링한 것이  $\tilde{x}[n]$ 의 DFT인  $X[k]$ 라는 것이다.

## DFT와 DTFT 사이의 관계

### 예제 5.10 (DFT와 DTFT 사이의 관계 확인)

$x[n] = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$ 의 DTFT를 직접 구하고, 구한 식의 실수부와 허수부를 각각 `matplotlib.pyplot.plot()` 함수를 이용하여 그려보자. 단,  $[0, 2\pi]$  사이의 구간을 128 개의 샘플을 취하여 그려보자. 또한  $x[n], 0 \leq n < 8$ ,을 한 주기로 하는 주기 신호  $x[n]$ 의 DFT  $X[k], 0 \leq k < 8$ ,를 `numpy.fft.fft()` 함수를 사용하여 구하고, `matplotlib.pyplot.stem()` 함수를 사용하여 위에서 구한 DTFT 그래프와 겹쳐서 그려보자. 이 때 8 개의 값  $X[k]$ 를  $[0, 2\pi]$  사이에 균등하게 배치해야 한다.

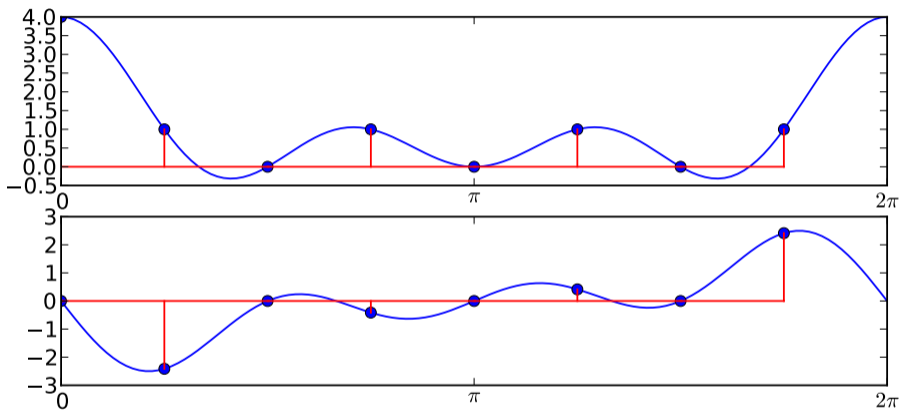
$x[n]$ 의 이산시간 푸리에 변환은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\hat{\omega}k} = 1 + e^{-j\hat{\omega}} + e^{-j2\hat{\omega}} + e^{-j3\hat{\omega}} \quad (5.134)$$

## DFT와 DTFT 사이의 관계

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
n = np.arange(8); x = np.array([1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0])
w = np.linspace(0, 2*np.pi, 128)
Xejw = 1 + np.exp(-1j*w) + np.exp(-1j*2*w) + np.exp(-1j*3*w)
k = n*2*np.pi/8; Xk = np.fft.fft(x)
plt.subplot(211)
plt.plot(w, Xejw.real); plt.stem(k, Xk.real, 'r')
plt.xlim(0, 2*np.pi)
plt.xticks([0, np.pi, 2*np.pi], ["0", "$\pi$", "$2\pi$"])
plt.subplot(212)
plt.plot(w, Xejw.imag); plt.stem(k, Xk.imag, 'r')
plt.xlim(0, 2*np.pi)
plt.xticks([0, np.pi, 2*np.pi], ["0", "$\pi$", "$2\pi$"])
plt.tight_layout()
plt.show()
```

## DFT와 DTFT 사이의 관계



**그림 5.13:** 이산시간 푸리에 변환과 이산 푸리에 변환의 관계. 위의 것이 실수부, 아래 것이 허수부 그래프.

이 두 그래프에서 다음 관계가 성립하는 것을 알 수 있다.

## DFT의 영 연장(zero padding)

`numpy.fft.fft()`를 사용하여  $x(e^{j\omega})$ 의 근사값을 구하려고 하는 경우에  $x[n]$ 의 샘플 수가 많지 않은 경우에  $x[k]$ 의 샘플 수를 충분히 많이 하려면 어떻게 해야 할까?

다음과 같이 길이가  $N$ 인 신호  $x[n]$ 에  $N$ 개의 0을 덧붙여서 만든 신호  $y[n]$ 을 생각해 보자.

$$y[n] = \{x[0], x[1], \dots, x[N-1], 0, 0, \dots, 0\}. \quad (5.136)$$

이와 같이 주어진 신호의 뒤에 필요한 갯수만큼의 0을 덧붙여서 신호의 길이를 연장하는 방법을 영 연장이라고 한다.  $y[n]$ 의 샘플의 갯수는  $2N$ 이므로,  $y[n]$ 의 DFT,  $Y[k]$ 는 다음과 같다.

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{2N-1} y[n] e^{-j\frac{2\pi}{2N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k/2)} = X\left[\frac{k}{2}\right]. \quad (5.137)$$

즉,  $Y[k]$ 는  $X[k]$ 에 비해서 주파수 영역에서 샘플의 갯수가 2 배가 되고, 결과적으로 주파수 영역에서 해상도가 2 배 증가한 신호이다

## DFT의 영 연장(zero padding)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x1 = np.array([1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0])
n1 = np.arange(x1.size)
x2 = np.append(x1, np.repeat(0, n1.size))
n2 = np.arange(x2.size)
x3 = np.append(x2, np.repeat(0, n2.size))
n3 = np.arange(x3.size)
w = np.linspace(0, 2*np.pi, 128)
Xk1 = np.fft.fft(x1)
Xk2 = np.fft.fft(x2)
Xk3 = np.fft.fft(x3)
k1 = n1*2*np.pi/n1.size
k2 = n2*2*np.pi/n2.size
k3 = n3*2*np.pi/n3.size
```

## DFT의 영 연장(zero padding)

```
plt.subplot(311)
plt.stem(k1, np.abs(Xk1))
plt.xlim(0, 2*np.pi)
plt.xticks([0, np.pi, 2*np.pi], ["0", "$\pi$", "$2\pi$"])
plt.subplot(312)
plt.stem(k2, np.abs(Xk2))
plt.xlim(0, 2*np.pi)
plt.xticks([0, np.pi, 2*np.pi], ["0", "$\pi$", "$2\pi$"])
plt.subplot(313)
plt.stem(k3, np.abs(Xk3))
plt.xlim(0, 2*np.pi)
plt.xticks([0, np.pi, 2*np.pi], ["0", "$\pi$", "$2\pi$"])
plt.tight_layout()
plt.show()
```

## DFT의 영 연장(zero padding)

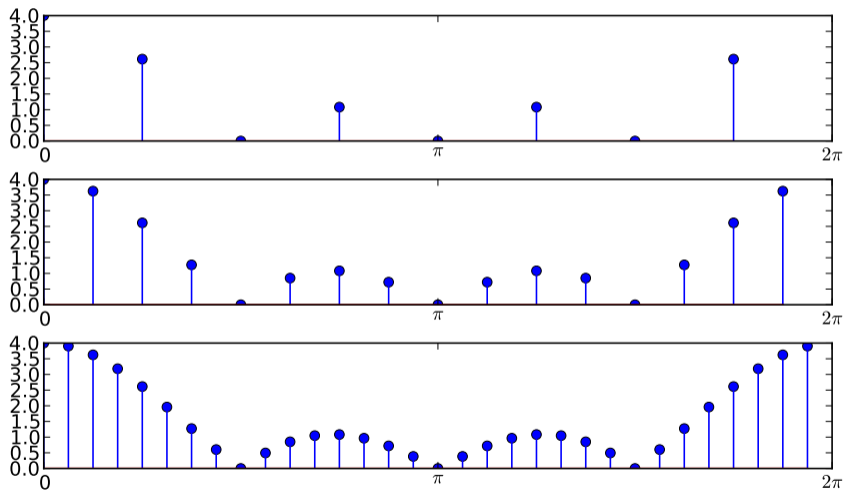


그림 5.14: 길이가 4인 신호에 각각 0, 8, 16, 32로 마드 후에 구한 스펙트럼 크기 비교