신호 및 시스템

제 5 장. 푸리에 변환

박섭형

한림대학교

2021학년도 1학기

배울 내용

- 이산시간 주기 신호의 주파수 분석: 이산 푸리에 급수 (DFS: discrete Fourier series)
- 이산시간 유한 길이 신호의 주파수 분석: 이산 푸리에 변환 (DFT: discrete Fourier transform)
- 연속시간 주기 신호의 주파수 분석: 연속 푸리에 급수 (CFS: continuous Fourier series)
- 이산시간 비주기 신호의 주파수 분석: 이산시간 푸리에 변환 (DTFT: discrete-time Fourier transform)
- 연속시간 비주기 신호의 주파수 분석: 연속시간 푸리에 변환 (CFT: continuous Fourier transform)

이산 푸리에 급수의 이해

N차원 복소 공간의 한 벡터를 표현할 때

사용하는 정규기저 벡터를 변경하는 것

N 차원 실수 직교 정규 기저 벡터

$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{N-1}$ 을 $\mathbb{R}^N$ 공간의 직교 정규 기저 벡터(orthonormal basis vectors)라고 하면, 다음 식이 성립한다.

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = 1, \text{ for } i = 0, 1, \cdots, N-1, \tag{5.1}$$

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0, \text{ for } i \neq j, i, j = 0, 1, \cdots, N-1, \tag{5.2}$$

여기에서 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 두 벡터의 내적(inner product 또는 dot product)이다.

N 차원 실수 벡터의 내적

정의 5.1 (N 차원 실수 벡터 공간 $\mathbb{R}^N$의 두 벡터 a와 b의 내적)

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-1} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$와 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{N-1} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$를 N 차원 실수 벡터 공간 $\mathbb{R}^N$의 두 벡터라 하자. 여기에서 T는 행렬의 전치 (transpose) 를 의미한다. **a**와 **b**의 내적은 다음과 같이 정의된다.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i b_i = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_{N-1} b_{N-1}. \tag{5.3}$$

N 차원 실수 벡터의 내적

예제 5.1 (두 벡터의 내적 구하기)

두 벡터 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ 와 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ 의 내적을 구하라.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 9.$$

N 차원 실수 벡터의 내적

또한 두 벡터의 내적은 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta, \tag{5.4}$$

여기에서 $|\mathbf{a}|$와 $|\mathbf{b}|$는 각각 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 길이를 나타내고, θ는 두 벡터 사이의 각도이다.

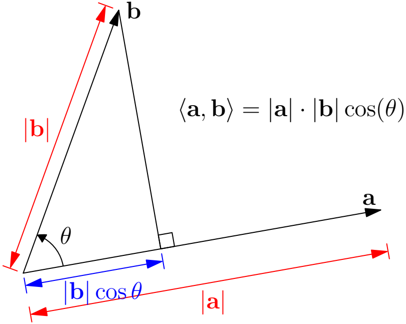


그림 *5.1:* 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 내적을 설명한 그림.

직교 정규 기저 벡터를 이용한 N 차원 실수 벡터의 표현

$\mathbb{R}^N$ 공간의 임의의 벡터 $\mathbf{x}$는 다음과 같이 직교 정규 기저 벡터들의 선형 결합(linear combination, 또는 일차 결합)으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x} = a_0\mathbf{u}_0 + a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{N-1}\mathbf{u}_{N-1}. \tag{5.5}$$

식 (5.5)의 양변의 왼쪽에 $\mathbf{u}_k, k = 0, 1, \cdots, N-1,$을 내적 연산을 수행하면 다음 식을 얻는다.

$$\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle = a_0\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_0 \rangle + a_1\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1 \rangle + \cdots + a_k\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle + \cdots + a_{N-1}\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{N-1} \rangle. \tag{5.6}$$

식 (5.6)의 우변에서 $\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle = 1$이고, 나머지 내적 항들은 모두 0이므로 다음 식이 성립한다.

$$\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle = a_k. \tag{5.7}$$

이 식을 식 (5.5)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_0 + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_{N-1} \tag{5.8}$$

2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 (1)

- $\mathbb{R}^2$ 공간의 표준 직교 정규 기저 벡터들: $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ 와 $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$
- $\mathbb{R}^2$ 공간의 임의의 벡터 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ 는 두 기저 벡터들의 선형 결합으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T} + \begin{bmatrix} 0 & a_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} = a_0\mathbf{u}_0 + a_1\mathbf{u}_1. \tag{5.9}$$

$$\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{u}_0, a_0\mathbf{u}_0 + a_1\mathbf{u}_1 \rangle = a_0\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 \rangle + a_1\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \rangle = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 = a_0, \tag{5.10}$$

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, a_1\mathbf{u}_0 + a_1\mathbf{u}_1 \rangle = a_0\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0 \rangle + a_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1 = a_1. \tag{5.11}$$

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{x} \rangle\mathbf{u}_0 + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \rangle\mathbf{u}_1. \tag{5.12}$$

2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 *(2)*

$\mathbb{R}^2$ 공간에는 $\mathbf{u}_0$ 과 $\mathbf{u}_1$ 외에도 수많은 직교 정규 기저 벡터들이 존재한다. 예를 들어서, 두 벡터 $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ 와 $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ 를 생각해 보자. 두 벡터가 직교 정규 기저 벡터인지를 확인하기 위해서 다음과 같은 내적 연산을 수행해 보자.

$$\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{w}_0^\mathsf{T}\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1, \tag{5.13}$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1, \tag{5.14}$$

$$\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathbf{w}_0^\mathsf{T}\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^\mathsf{T} = -\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 0, \tag{5.15}$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^\mathsf{T} = -\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 0. \tag{5.16}$$

$\mathbf{w}_0$ 과 $\mathbf{w}_1$ 도 $\mathbb{R}^2$ 공간의 직교 정규 기저 벡터들이다.

2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 (3)

그러면, 벡터 $\mathbf{x}$를 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w}_0 + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w}_1. \tag{5.17}$$

즉, 임의의 벡터 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$를 $\mathbf{w}_0$과 $\mathbf{w}_1$의 선형 결합으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} = b_0 \mathbf{w}_0 + b_1 \mathbf{w}_1. \tag{5.18}$$

이 식의 양변의 왼쪽에서 $\mathbf{w}_0$을 내적하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{x} \rangle &= \left\langle \mathbf{w}_0, \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{w}_0, b_0 \mathbf{w}_0 + b_1 \mathbf{w}_1 \rangle \\ &= b_0 \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle + b_1 \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \rangle \\ &= b_0. \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\left\langle \mathbf{w}_0, \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \right\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + a_1 \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{5.20}$$

2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 (4)

따라서, b_0 은 다음과 같다.

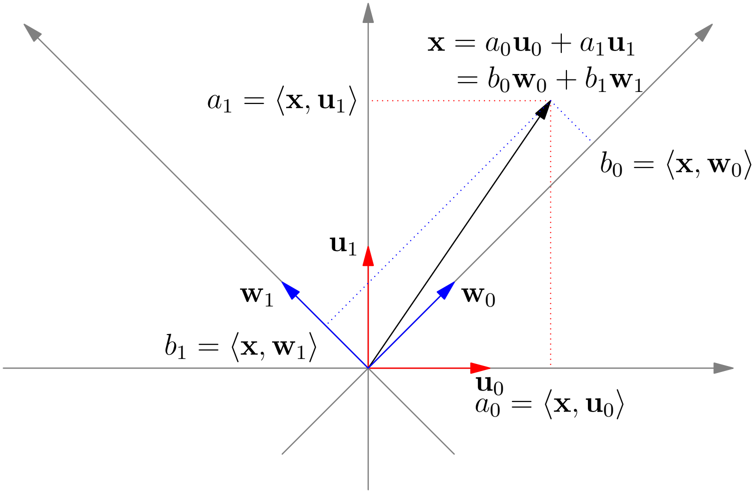
$$b_0 = a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + a_1 \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{5.21}$$

같은 방법으로 b_1 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$b_1 = -a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + a_1 \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{5.22}$$

2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 *(5)*

그림 5.2는 동일한 벡터를 서로 다른 직교 정규 기저 벡터들을 사용하여 표현하는 경우를 비교하여 설명한 그림이다.



2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 *(7)*

예제 5.2

$\mathbb{R}^2$ 공간의 한 점 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^\mathsf{T} = 3\mathbf{u}_0 + 4\mathbf{u}_1 = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T} + 4\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$를 $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$와 $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$의 선형 결합, 즉 $\mathbf{x} = b_0\mathbf{w}_0 + b_1\mathbf{w}_1$의 형태로 바꾸려고 한다. b_0과 b_1의 값을 각각 구하라.

$$b_0 = \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{x} \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}, \tag{5.23}$$

$$b_1 = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{x} \rangle = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{5.24}$$

2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 (8)

그림 5.3은 이 예제의 벡터를 두 종류의 정규 기저 벡터들의 선형 결합으로 분해하는 것을 설명한 그림이다.

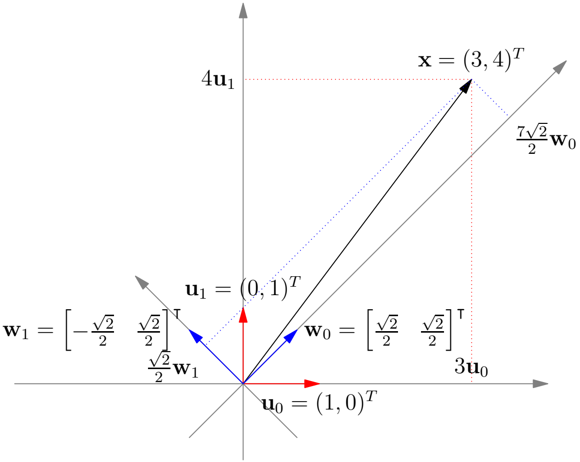


그림 5.3: 2 차원 공간의 벡터를 서로 다른 두 세트의 직교 정규 벡터들을 이용하여 표현하는 경우의 예.

2 차원 실수 벡터의 기저 벡터의 변경 *(9)*

예제 5.3

예제 5.2에서 구한 b_0과 b_1을 $\mathbf{x} = b_0\mathbf{w}_0 + b_1\mathbf{w}_1$의 형태에 대입하고, 이 식으로부터 $\mathbf{x} = a_0\mathbf{u}_0 + a_1\mathbf{u}_1 = a_0\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T} + a_1\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^\mathsf{T}$의 표현 형태로 바꾸려고 한다. a_0과 a_1의 값을 각각 구하고 예제 5.2에 주어진 값과 같은지 확인하라.

$b_0 = \frac{7\sqrt{2}}{2}$과 $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$을 $\mathbf{x} = b_0\mathbf{w}_0 + b_1\mathbf{w}_1$에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \tfrac{7\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}^\mathsf{T} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}^\mathsf{T} \\ &= \begin{bmatrix}\frac{7}{2} & \frac{7}{2}\end{bmatrix}^\mathsf{T} + \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}\frac{6}{2} & \frac{8}{2}\end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}^\mathsf{T}.\end{aligned} \tag{5.25}$$

따라서 a_0과 a_1은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a_0 = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{x}\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}^\mathsf{T} = 3, \tag{5.26}$$

$$a_1 = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x}\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}^\mathsf{T} = 4. \tag{5.27}$$

그러므로 a_0과 a_1은 예제 5.2에 주어진 값과 동일한 것을 알 수 있다.

*Python*을 이용한 벡터의 내적 연산

Python을 이용하여 벡터의 내적 등과 같은 연산을 할 필요가 있는 경우에는 `numpy.dot()` 함수를 사용하면 편리하다. 이 함수를 이용하여 실제로 기저 벡터를 변경하는 방법을 살펴보자.
다음과 같이 정의되는 $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ 이 $\mathbb{R}^4$ 공간의 직교 정규 기저 벡터라고 하자.

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\intercal, \tag{5.28}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\intercal, \tag{5.29}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\intercal, \tag{5.30}$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\intercal. \tag{5.31}$$

$\mathbb{R}^4$ 공간에 존재하는 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}^\intercal$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}^\intercal = 1\mathbf{u}_0 + 3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 + (-1)\mathbf{u}_3 \tag{5.32}$$

*Python*을 이용한 벡터의 내적 연산

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^\mathsf{T}, \tag{5.33}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^\mathsf{T}, \tag{5.34}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^\mathsf{T}, \tag{5.35}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^\mathsf{T}. \tag{5.36}$$

$X_k = \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{x} \rangle,\ k = 0, 1, 2, 3,$이라고 하자.

$$X_0 = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{x} \rangle = 3.5, \tag{5.37}$$

$$X_1 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \rangle = 0.5, \tag{5.38}$$

$$X_2 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x} \rangle = -3.5, \tag{5.39}$$

$$X_3 = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{x} \rangle = 1.5. \tag{5.40}$$

*Python*을 이용한 벡터의 내적 연산

그러면 $\mathbf{x}$를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} = 3.5\mathbf{v}_0 + 0.5\mathbf{v}_1 + (-3.5)\mathbf{v}_2 + 1.5\mathbf{v}_3. \tag{5.41}$$

벡터 $\mathbf{X}$를 $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$으로 정의하면, X_k를 개별적으로 구하는 대신에 다음과 같이 행렬과 벡터의 곱으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{x} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{5.42}$$

*Python*을 이용한 벡터의 내적 연산

행렬과 벡터의 곱을 계산하는 Python 스크립트를 다음과 같이 작성할 수 있다. 이 스크립트를 실행하여 앞의 내용을 확인해 보자.

```
>>> import numpy as np
>>> v = 0.5* np.array( [[1., 1., 1., 1.,],
...      [1., 1., -1., -1.],
...      [1., -1., -1., 1.],
...      [1., -1., 1., -1.]])
>>> x = np.array([1., 3., 4., -1.])
>>> np.dot(v,x)
array([ 3.5,  0.5, -3.5,  1.5])
```

직교 정규 기저 벡터를 이용한 N 차원 복소 벡터의 표현 (1)

$\mathbb{R}^N$ 공간과 마찬가지로 $\mathbb{C}^N$ 공간에도 $\mathbf{u}_0, \cdots, \mathbf{u}_{N-1}$ 외에도 수많은 직교 정규 기저 벡터들이 존재한다. N 개의 벡터 $\mathbf{w}_0, \cdots, \mathbf{w}_{N-1}$ 도 직교 정규 기저 벡터라고 하면, $\mathbf{x}$를 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_0 + \cdots + \langle \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_{N-1} \\ &= \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w}_0 + \cdots + \langle \mathbf{w}_{N-1}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w}_{N-1}. \end{aligned} \tag{5.43}$$

$\mathbb{C}^N$ 공간의 두 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 내적은 다음과 같이 정의된다.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^{*T} \mathbf{b} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i^* b_i = a_0^* b_0 + a_1^* b_1 + \cdots + a_{N-1}^* b_{N-1}, \tag{5.44}$$

여기에서 * 는 복소수의 공액(complex conjugate)을 의미한다.

직교 정규 기저 벡터를 이용한 N 차원 복소 벡터의 표현 (2)

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 이라 하고, $\mathbf{w}_0, \cdots, \mathbf{w}_{N-1}$ 을 다음과 같이 정의해 보자.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_0 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^{*0} & W_N^{*0} & W_N^{*0} & \cdots & W_N^{*0} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \\
\mathbf{w}_1 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^{*0} & W_N^{*1} & W_N^{*2} & \cdots & W_N^{*N-1} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^{*0} & W_N^{*k} & W_N^{*2k} & \cdots & W_N^{*(N-1)k} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_{N-1} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^{*0} & W_N^{*N-1} & W_N^{*2(N-1)} & \cdots & W_N^{*(N-1)^2} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}},
\end{aligned}
\tag{5.45}
$$

그러면 $\mathbf{w}_0, \cdots, \mathbf{w}_{N-1}$ 은 직교 정규 기저 벡터들이다.

직교 정규 기저 벡터를 이용한 N 차원 복소 벡터의 표현 (3)

예제 5.4

$N=4$일 때, $\mathbf{w}_k, k=0,1,2,3,$을 구하고, 이 벡터들이 $\mathbb{C}^4$ 공간의 직교 정규 기저 벡터들이 되는 것을 확인하라.

$N=4$일 때, $W_4=e^{-j\frac{2\pi}{4}}=-j$이고, $\sqrt{N}=2$이므로, $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_0 &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} W_4^{*0} & W_4^{*0} & W_4^{*0} & W_4^{*0}\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\intercal, \\
\mathbf{w}_1 &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} W_4^{*0} & W_4^{*1} & W_4^{*2} & W_4^{*3}\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}^\intercal, \\
\mathbf{w}_2 &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} W_4^{*0} & W_4^{*2} & W_4^{*2\cdot 2} & W_4^{*2\cdot 3}\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}^\intercal, \\
\mathbf{w}_3 &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} W_4^{*0} & W_4^{*3} & W_4^{*3\cdot 2} & W_4^{*3\cdot 3}\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j\end{bmatrix}^\intercal.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

직교 정규 기저 벡터를 이용한 *N* 차원 복소 벡터의 표현 *(4)*

$$\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{w}_0^{*\intercal}\mathbf{w}_0 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1+1+1+1) = 1,$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathbf{w}_1^{*\intercal}\mathbf{w}_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -j & -1 & j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1+1+1+1) = 1,$$

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \mathbf{w}_2^{*\intercal}\mathbf{w}_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1+1+1+1) = 1,$$

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle = \mathbf{w}_3^{*\intercal}\mathbf{w}_3 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -j & -1 & j\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1+1+1+1) = 1,$$

직교 정규 기저 벡터를 이용한 *N* 차원 복소 벡터의 표현 *(5)*

$$\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathbf{w}_0^{*\intercal} \mathbf{w}_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1 + j + 1 - j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_2 \rangle = \mathbf{w}_0^{*\intercal} \mathbf{w}_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1 - 1 + 1 - 1) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_3 \rangle = \mathbf{w}_0^{*\intercal} \mathbf{w}_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1 - j - 1 + j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{w}_1^{*\intercal} \mathbf{w}_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1 - j - 1 + j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \mathbf{w}_1^{*\intercal} \mathbf{w}_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1 + j - 1 - j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle = \mathbf{w}_1^{*\intercal} \mathbf{w}_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1 - 1 + 1 - j) = 0,$$

직교 정규 기저 벡터를 이용한 *N* 차원 복소 벡터의 표현 *(6)*

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{w}_2^{*\intercal}\mathbf{w}_0 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1-1+1-1) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathbf{w}_2^{*\intercal}\mathbf{w}_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1-j-1+j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle = \mathbf{w}_2^{*\intercal}\mathbf{w}_3 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -j & -1 & j\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1+j-1-j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{w}_3^{*\intercal}\mathbf{w}_0 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1+j-1-j) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathbf{w}_3^{*\intercal}\mathbf{w}_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1-1+1-1) = 0,$$

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2 \rangle = \mathbf{w}_3^{*\intercal}\mathbf{w}_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}^\intercal = \frac{1}{4}(1-j-1+j) = 0,$$

따라서 $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 은 $\mathbb{C}^4$ 공간의 직교 정규 기저 벡터들이다.

직교 정규 기저 벡터를 이용한 *N* 차원 복소 벡터의 표현 *(7)*

예제 *5.5*

예제 5.4에서 구한 벡터들이 $\mathbb{C}^4$ 공간의 직교 정규 기저 벡터들이 되는 것을 확인할 수 있는 Python 스크립트를 작성하라.

```python
import numpy as np
n = np.array([0,1,2,3])
W4 = np.exp(-1j*np.pi/2)
kn = np.outer(n,n)
W = 0.5*W4**kn
for w in W:
    print(w)
print()
for i in n:
    for j in n:
        print(f"{inner_product = np.dot(w1.conj(), w2):.3f}", end='   ')
    print()
```

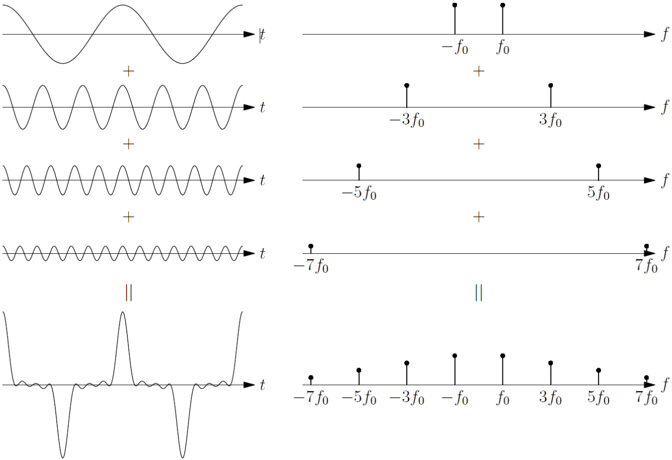
스크립트를 실행한 결과

```
[0.5+0.j 0.5+0.j 0.5+0.j 0.5+0.j]
[ 5.00000000e-01+0.000000e+00j  3.06161700e-17-5.000000e-01j
 -5.00000000e-01-6.123234e-17j -9.18485099e-17+5.000000e-01j]
[ 0.5+0.0000000e+00j -0.5-6.1232340e-17j  0.5+1.2246468e-16j
 -0.5-1.8369702e-16j]
[ 5.00000000e-01+0.0000000e+00j -9.18485099e-17+5.0000000e-01j
 -5.00000000e-01-1.8369702e-16j  2.75545530e-16-5.0000000e-01j]

1.000e+00+0.000e+00j  -3.062e-17-3.062e-17j  0.000e+00-6.123e-17j  9.185e-17-9.185e-17j
-3.062e-17+3.062e-17j  1.000e+00+0.000e+00j  -3.062e-17-3.062e-17j  0.000e+00-6.123e-17j
0.000e+00+6.123e-17j  -3.062e-17+3.062e-17j  1.000e+00+0.000e+00j  -3.062e-17-3.062e-17j
9.185e-17+9.185e-17j  0.000e+00+6.123e-17j  -3.062e-17+3.062e-17j  1.000e+00+0.000e+00j
```

시간 영역과 주파수 영역

- 신호의 시간 영역 표현 방법: 신호를 시간의 함수로 표현
- 신호의 주파수 영역 표현 방법: 신호에 포함되어 있는 정현파 성분들의 주파수 분포를 표현



N 차원 벡터 공간의 직교 정규 기저 벡터를 이용한 벡터의 표현

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_0 + \cdots + \langle \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_{N-1} \\
&= \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w}_0 + \cdots + \langle \mathbf{w}_{N-1}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{w}_{N-1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = 1, \text{ for } i = 0, 1, \cdots, N-1, \\
&\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0, \text{ for } i \neq j, i, j = 0, 1, \cdots, N-1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle = 1, \text{ for } i = 0, 1, \cdots, N-1, \\
&\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = 0, \text{ for } i \neq j, i, j = 0, 1, \cdots, N-1.
\end{aligned}
$$

이산 푸리에 급수 *(1)*

$\tilde{x}[n]$ 을 주기가 N인 이산 복소 주기 신호라고 하자. $\tilde{x}[n]$의 한 주기 동안의 샘플들을 모아서 벡터로 만든 것을 $\tilde{\mathbf{x}}$라고 하자.
예 :

$$\tilde{x}[n] = \{\cdots, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

$$x_1[n] = \{1, 2, 3, 4\}$$

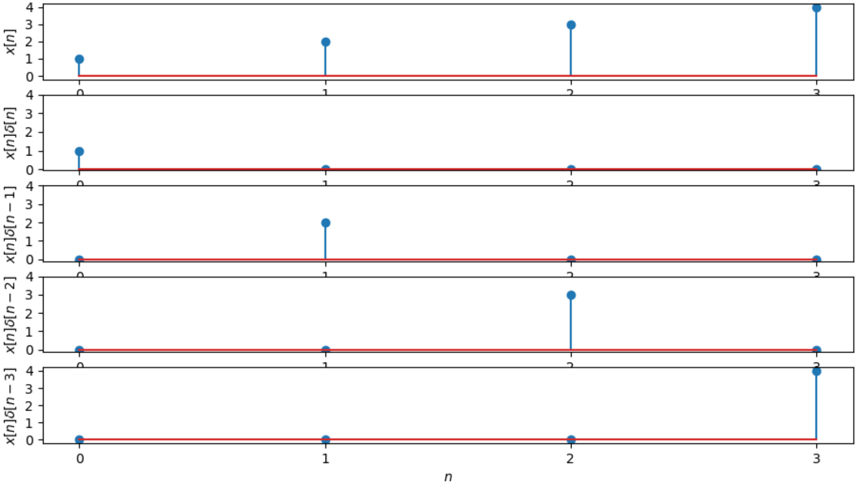
$$x_2[n] = \{2, 3, 4, 1\}$$

$$x_3[n] = \{3, 4, 1, 2\}$$

$$x_4[n] = \{4, 1, 2, 3\}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

이산 푸리에 급수 (2)



이산 푸리에 급수 *(3)*

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \{1,2,3,4\} \\
&= \{1,0,0,0\} + \{0,2,0,0\} + \{0,0,3,0\} + \{0,0,0,4\} \\
&= 1\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 4\delta[n-3] \\
&= \sum_{k=0}^{3} x[k]\delta[n-k]
\end{aligned}
$$

$$
\delta[n-k] = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}
$$

$$
\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\mathbf{u}_0 + 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3
$$

이산 푸리에 급수 (4)

$\tilde{x}[n]$ 을 주기가 N 인 이산 복소 주기 신호라고 하자. $\tilde{x}[n]$ 의 한 주기 동안의 샘플들을 모아서 다음과 같이 벡터로 만든 것을 $\tilde{\mathbf{x}}$ 라고 하자.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] & \tilde{x}[1] & \cdots & \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}. \tag{5.47}$$

이 벡터를 다음과 같이 직교 정규 벡터들의 선형 결합으로 표현할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{x}[0]\mathbf{u}_0 + \cdots + \tilde{x}[N-1]\mathbf{u}_{N-1}, \tag{5.48}$$

여기에서

$$\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{5.49}$$

이다. 이렇게 표현되는 $\tilde{\mathbf{x}}$ 의 k 번째 원소인 $\tilde{x}[k]$ 는 시간 영역에서 k 번째 샘플로 이해할 수 있다.

이산 푸리에 급수 *(5)*

그리고 $\tilde{\mathbf{x}}$를 다음과 같이 또 다른 직교 정규 기저 벡터들의 선형 결합으로도 표현할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{w}_0, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_0 + \cdots + \langle \mathbf{w}_{N-1}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_{N-1}, \tag{5.50}$$

여기에서 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 이고, $\mathbf{w}_k$는 다음과 같다.

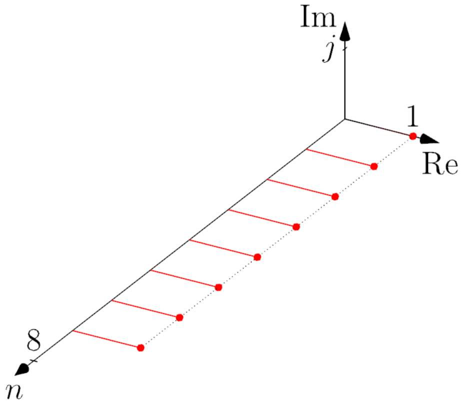
$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^{*0} & W_N^{*k} & W_N^{*2k} & \cdots & W_N^{*(N-1)k} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi k}{N}} & e^{j\frac{2\pi(2k)}{N}} & \cdots & e^{j\frac{2\pi(N-1)k}{N}} \end{bmatrix}^\mathsf{T}, k = 0, 1, \cdots, N-1. \end{aligned} \tag{5.51}$$

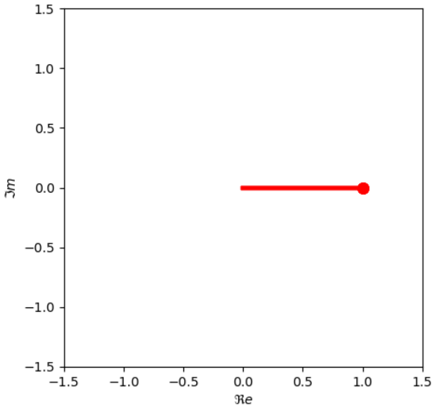
$N = 8$인 경우, $W_8 = e^{-j\frac{2\pi}{8}} = e^{-j\frac{\pi}{4}}$ 이고, $\mathbf{w}_k$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} W_8^{*0} & W_N^{*k} & W_8^{*2k} & \cdots & W_8^{*(N-1)k} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{k\pi}{4}} & e^{j\frac{2k\pi}{N}} & e^{j\frac{3k\pi}{N}} & e^{j\frac{4k\pi}{N}} & e^{j\frac{5k\pi}{N}} & e^{j\frac{6k\pi}{N}} & e^{j\frac{7k\pi}{N}} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \end{aligned} \tag{5.52}$$

이산 푸리에 급수 *(6)*

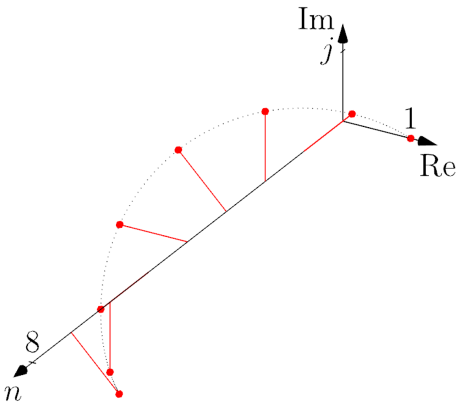
$N = 8, k = 0 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, 직류, DC(direct current)

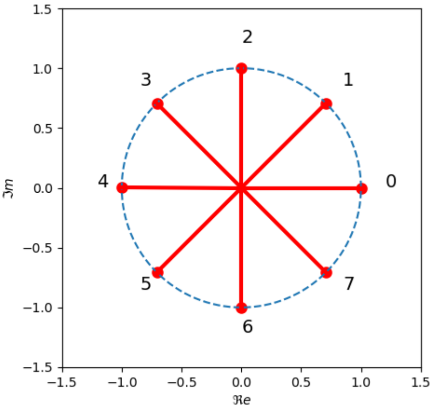




이산 푸리에 급수 *(7)*

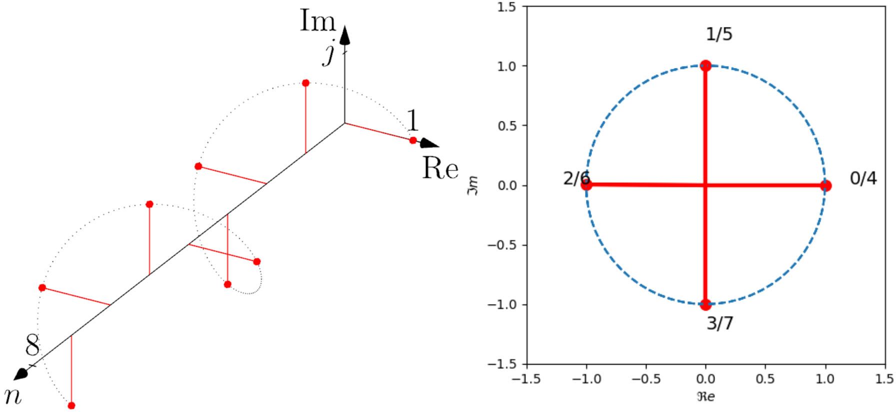
$$N = 8, k = 1 : \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{1\pi}{4}} & e^{j\frac{2\pi}{4}} & e^{j\frac{3\pi}{4}} & e^{j\frac{4\pi}{4}} & e^{j\frac{5\pi}{4}} & e^{j\frac{6\pi}{4}} & e^{j\frac{7\pi}{4}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$





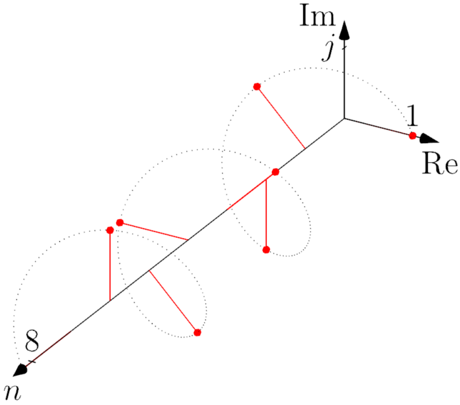
이산 푸리에 급수 *(8)*

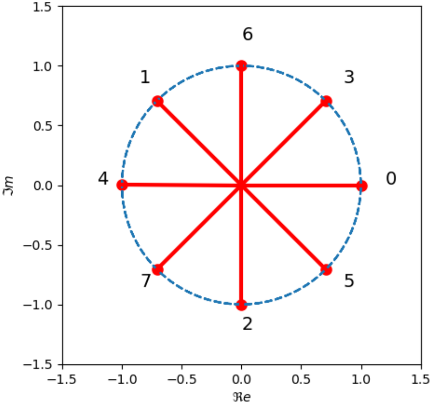
$$N = 8, k = 2 : \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{4}} & e^{j\frac{4\pi}{4}} & e^{j\frac{6\pi}{4}} & e^{j\frac{8\pi}{4}} & e^{j\frac{10\pi}{4}} & e^{j\frac{12\pi}{4}} & e^{j\frac{14\pi}{4}} \end{bmatrix}^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^\intercal$$



이산 푸리에 급수 *(9)*

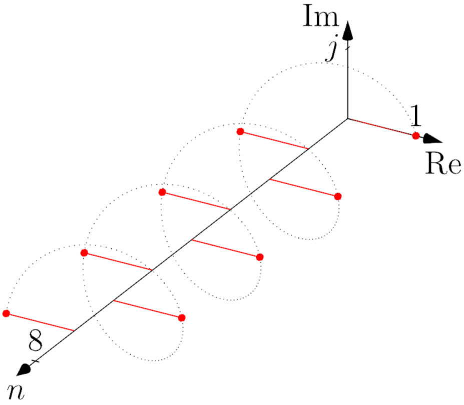
$$N = 8, k = 3 : \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{3\pi}{4}} & e^{j\frac{6\pi}{4}} & e^{j\frac{9\pi}{4}} & e^{j\frac{12\pi}{4}} & e^{j\frac{15\pi}{4}} & e^{j\frac{18\pi}{4}} & e^{j\frac{21\pi}{4}} \end{bmatrix}^T$$

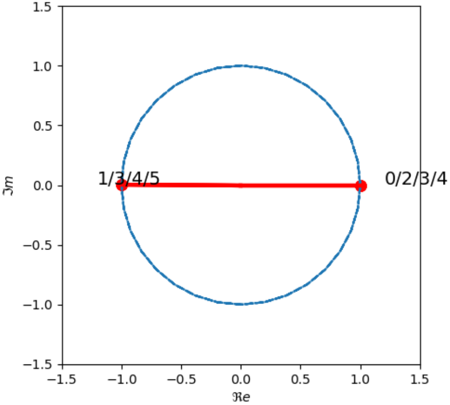




이산 푸리에 급수 *(10)*

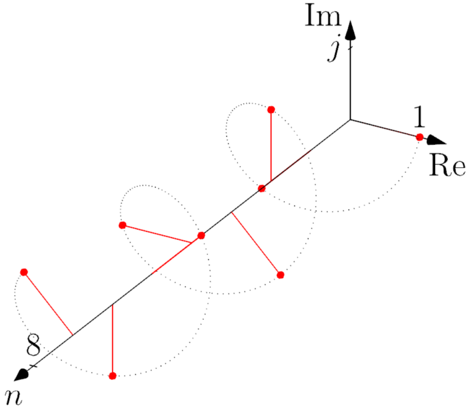
$$N = 8, k = 4 : \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

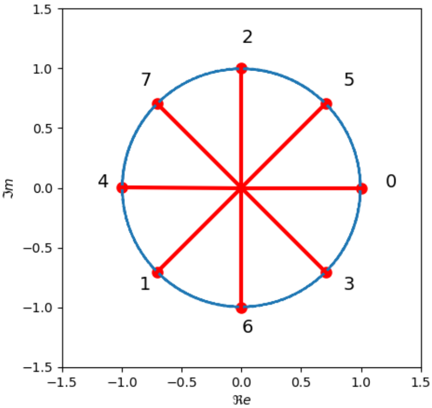




이산 푸리에 급수 *(11)*

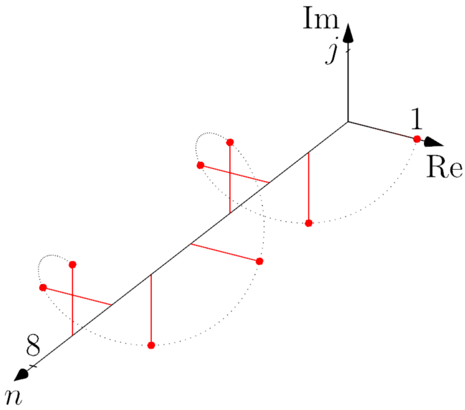
$$N=8, k=5(k=-3):\begin{bmatrix}1 & e^{j\frac{5\pi}{4}} & e^{j\frac{10\pi}{4}} & e^{j\frac{15\pi}{4}} & e^{j\frac{20\pi}{4}} & e^{j\frac{25\pi}{4}} & e^{j\frac{30\pi}{4}} & e^{j\frac{35\pi}{4}}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

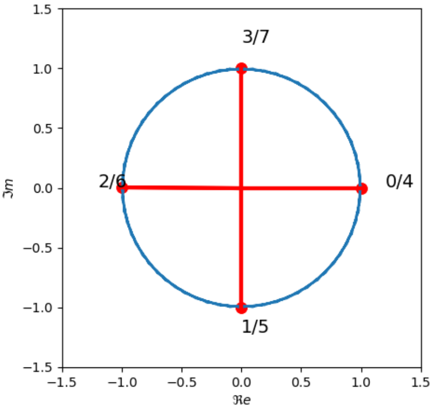




이산 푸리에 급수 *(12)*

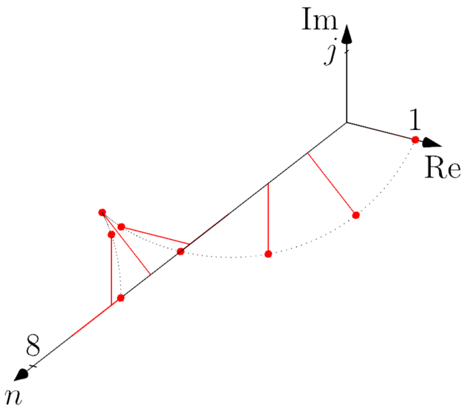
$$N = 8, k = 6(k = -2) : \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{6\pi}{4}} & e^{j\frac{12\pi}{4}} & e^{j\frac{18\pi}{4}} & e^{j\frac{24\pi}{4}} & e^{j\frac{30\pi}{4}} & e^{j\frac{36\pi}{4}} & e^{j\frac{42\pi}{4}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

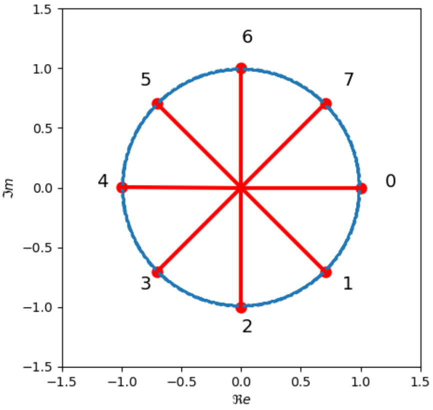




이산 푸리에 급수 *(13)*

$$N = 8, k = 7 (k = -1) : \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{7\pi}{4}} & e^{j\frac{14\pi}{4}} & e^{j\frac{21\pi}{4}} & e^{j\frac{28\pi}{4}} & e^{j\frac{35\pi}{4}} & e^{j\frac{42\pi}{4}} & e^{j\frac{49\pi}{4}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$





이산 푸리에 급수 *(14)*

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}} &= \left[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7\right]^\intercal \\
&= \tilde{x}_0 \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \tilde{x}_1 \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \tilde{x}_2 \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \tilde{x}_3 \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \tilde{x}_4 \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \tilde{x}_5 \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \tilde{x}_6 \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \tilde{x}_7 \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \\
&= \langle \mathbf{w}_0, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_0 + \langle \mathbf{w}_1, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_2 + \langle \mathbf{w}_3, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_3 + \langle \mathbf{w}_4, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_4 + \langle \mathbf{w}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_5 + \langle \mathbf{w}_6, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_6 + \langle \mathbf{w}_7, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \mathbf{w}_7.
\end{aligned}
$$

이산 푸리에 급수 *(15)*

이제 $\tilde{X}[k] = \langle \mathbf{w}_k, \tilde{\mathbf{x}} \rangle$ 라고 하면, $\tilde{X}[k]$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}[k] &= \langle \mathbf{w}_k, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\
&= \mathbf{w}_k^{*\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^k & W_N^{2k} & \cdots & W_N^{(N-1)k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] & \tilde{x}[1] & \cdots & \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(W_N^0 \tilde{x}[0] + W_N^k \tilde{x}[1] + \cdots + W_N^{(N-1)k} \tilde{x}[N-1] \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} \tilde{x}[n] \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \tilde{x}[n].
\end{aligned} \tag{5.53}
$$

이산 푸리에 급수 *(16)*

$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{X}[0] & \tilde{X}[1] & \cdots & \tilde{X}[N-1] \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ 이라 하자.

그러면 이 벡터 식을 다음과 같이 풀어 쓸 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{X}[0] \\ \tilde{X}[1] \\ \tilde{X}[2] \\ \vdots \\ \tilde{X}[k] \\ \vdots \\ \tilde{X}[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{w}_0, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_1, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_2, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}_k, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}_{N-1}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0^{*\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{w}_1^{*\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{w}_2^{*\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k^{*\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{N-1}^{*\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0^{*\mathsf{T}} \\ \mathbf{w}_1^{*\mathsf{T}} \\ \mathbf{w}_2^{*\mathsf{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k^{*\mathsf{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{N-1}^{*\mathsf{T}} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}$$

이산 푸리에 급수 *(17)*

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{X}[0] \\ \tilde{X}[1] \\ \tilde{X}[2] \\ \vdots \\ \tilde{X}[k] \\ \vdots \\ \tilde{X}[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{w}_0, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_1, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_2, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}_k, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}_{N-1}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \cdots & W_N^n \cdots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & \cdots & W_N^{2n} \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^k & \cdots & W_N^{kn} \cdots & W_N^{k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \cdots & W_N^{(N-1)n} \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \tilde{x}[2] \\ \vdots \\ \tilde{x}[n] \\ \vdots \\ \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix}. \tag{5.54}$$

이산 푸리에 급수 *(18)*

$$
\begin{bmatrix} \tilde{X}[0] \\ \tilde{X}[1] \\ \tilde{X}[2] \\ \vdots \\ \tilde{X}[k] \\ \vdots \\ \tilde{X}[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \cdots & W_N^n \cdots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & \cdots & W_N^{2n} \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^k & \cdots & W_N^{kn} \cdots & W_N^{k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \cdots & W_N^{(N-1)n} \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \tilde{x}[2] \\ \vdots \\ \tilde{x}[n] \\ \vdots \\ \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix}.
$$

그러면 이 식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$
\tilde{\mathbf{X}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N \tilde{\mathbf{x}}, \tag{5.55}
$$

이산 푸리에 급수 *(19)*

여기에서 $(\mathbf{W}_N)_{k,n} = W_N^{nk}$ 이다. 즉 $\mathbf{W}_N$ 은 다음과 같다.

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \cdots & W_N^n \cdots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^k & \cdots & W_N^{kn} \cdots & W_N^{k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \cdots & W_N^{(N-1)n} \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}. \tag{5.56}$$

역 이산 푸리에 급수 *(1)*

한편, 정규 기저 벡터를 $\mathbf{w}_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix}1 & e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot k} & e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 2k} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot(N-1)k}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$로 변경하면 $\tilde{\mathbf{x}}$를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \langle \mathbf{w}_0, \tilde{\mathbf{x}}\rangle \mathbf{w}_0 + \langle \mathbf{w}_1, \tilde{\mathbf{x}}\rangle \mathbf{w}_1 + \cdots + \langle \mathbf{w}_{N-1}, \tilde{\mathbf{x}}\rangle \mathbf{w}_{N-1} \\ &= \tilde{X}[0]\mathbf{w}_0 + \tilde{X}[1]\mathbf{w}_1 + \cdots + \tilde{X}[N-1]\mathbf{w}_{N-1}.\end{aligned} \tag{5.57}$$

이 벡터 식을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}[0]\\ \tilde{x}[1]\\ \tilde{x}[2]\\ \vdots\\ \tilde{x}[n]\\ \vdots\\ \tilde{x}[N-1]\end{bmatrix} = \frac{\tilde{X}[0]}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix}W_N^{*\,0}\\ W_N^{*\,0}\\ W_N^{*\,0}\\ \vdots\\ W_N^{*\,0}\\ \vdots\\ W_N^{*\,0}\end{bmatrix} + \frac{\tilde{X}[1]}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix}W_N^{*\,0}\\ W_N^{*\,1}\\ W_N^{*\,2}\\ \vdots\\ W_N^{*\,n}\\ \vdots\\ W_N^{*\,N-1}\end{bmatrix} + \cdots + \frac{\tilde{X}[N-1]}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix}W_N^{*\,0}\\ W_N^{*\,N-1}\\ W_N^{*\,2(N-1)}\\ \vdots\\ W_N^{*\,n(N-1)}\\ \vdots\\ W_N^{*\,(N-1)^2}\end{bmatrix}$$

역 이산 푸리에 급수 (2)

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} {W_N^*}^0 & {W_N^*}^0 & \cdots & {W_N^*}^0 \cdots & {W_N^*}^0 \\ W_N^* N^0 & {W_N^*}^1 & \cdots & {W_N^*}^k \cdots & {W_N^*}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {W_N^*}^0 & {W_N^*}^n & \cdots & {W_N^*}^{nk} \cdots & {W_N^*}^{n(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {W_N^*}^0 & {W_N^*}^{N-1} & \cdots & {W_N^*}^{(N-1)k} \cdots & {W_N^*}^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}[0] \\ \tilde{X}[1] \\ \vdots \\ \tilde{X}[k] \\ \vdots \\ \tilde{X}[N-1] \end{bmatrix}. \tag{5.58}$$

역 이산 푸리에 급수 *(3)*

이 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N^* \tilde{\mathbf{X}}, \tag{5.59}$$

여기에서 $\mathbf{W}_N^*$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{W}_N^* = \begin{bmatrix} {W_N^*}^0 & {W_N^*}^0 & \cdots & {W_N^*}^0 \cdots & {W_N^*}^0 \\ W_N^* N^0 & {W_N^*}^1 & \cdots & {W_N^*}^k \cdots & {W_N^*}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {W_N^*}^0 & {W_N^*}^n & \cdots & {W_N^*}^{nk} \cdots & {W_N^*}^{n(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {W_N^*}^0 & {W_N^*}^{N-1} & \cdots & {W_N^*}^{(N-1)k} \cdots & {W_N^*}^{(N-1)^2} \end{bmatrix}. \tag{5.60}$$

역 이산 푸리에 급수 *(4)*

식 (5.58)의 n 번째 열만 따로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= \frac{\tilde{X}[0]}{\sqrt{N}} W_N^{*0} + \frac{\tilde{X}[1]}{\sqrt{N}} W_N^{*n} + \frac{\tilde{X}[2]}{\sqrt{N}} W_N^{*n\cdot 2} + \cdots + \frac{\tilde{X}[N-1]}{\sqrt{N}} W_N^{*n(N-1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{*nk} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk},\end{aligned} \tag{5.61}$$

여기에서 $\tilde{X}[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \tilde{x}[n]$을 $\tilde{x}[n]$의 이산 푸리에 급수(discrete Fourier series)라고 하고, $\tilde{x}[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$를 역 이산 푸리에 급수(inverse discrete Fourier series)라고 한다. 그러나 계산의 편의상 역 이산 푸리에 급수에만 $\frac{1}{N}$을 사용한다.

이산 푸리에 급수

정의 *5.2 (이산 푸리에 급수와 역 이산 푸리에 급수)*

- 이산 푸리에 급수(DFS: discrete Fourier series): 주기가 N인 이산 주기 신호 $\tilde{x}[n]$의 한 주기 동안의 신호 $\tilde{x}[0], \tilde{x}[1], \cdots, \tilde{x}[N-1]$의 이산 푸리에 급수 $\tilde{X}[k]$는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{5.62}$$

- 역 이산 푸리에 급수(Inverse DFS)

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, n = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{5.63}$$

이산 푸리에 급수

DFS와 IDFS 식을 행렬과 벡터를 이용해서 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{W}_N \tilde{\mathbf{x}}, \tag{5.64}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \tilde{\mathbf{X}}, \tag{5.65}$$

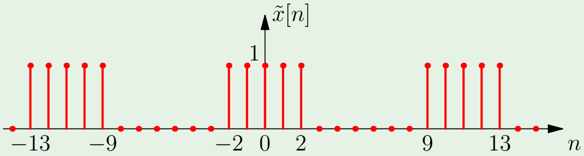
여기에서

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \cdots & W_N^n \cdots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^k & \cdots & W_N^{kn} \cdots & W_N^{k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \cdots & W_N^{(N-1)n} \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}.$$

이산 푸리에 급수

예제 5.6

다음 그림과 같이 주어지는 이산시간 주기 신호의 이산 푸리에 급수를 구하라.



이 신호는 주기가 $N = 11$인 이산 신호이다. 한 주기를 $[-2, 8]$을 취해도 되고, $[0, 10]$을 취해도 관계 없다.

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= \sum_{n=-2}^{8} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{11}nk}, k = 0, 1, \cdots, 10 \\ &= \sum_{n=-2}^{2} e^{-j\frac{2\pi}{11}nk} \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{11}k(-2)} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k(-1)} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k\cdot 0} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k2}.\end{aligned} \tag{5.66}$$

이산 푸리에 급수

$$e^{-j\frac{2\pi}{11}k(-2)} = e^{j\frac{4k\pi}{11}} = \cos\left(\frac{4k\pi}{11}\right) + j\sin\left(\frac{4k\pi}{11}\right)$$

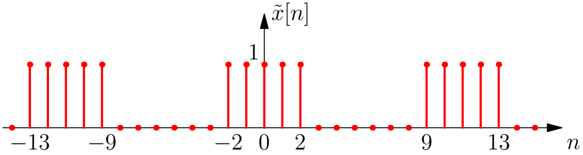
$$e^{-j\frac{2\pi}{11}2k} = e^{-j\frac{4k\pi}{11}} = \cos\left(\frac{4k\pi}{11}\right) - j\sin\left(\frac{4k\pi}{11}\right)$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{11}k(-1)} = e^{j\frac{2k\pi}{11}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) + j\sin\left(\frac{2k\pi}{11}\right)$$

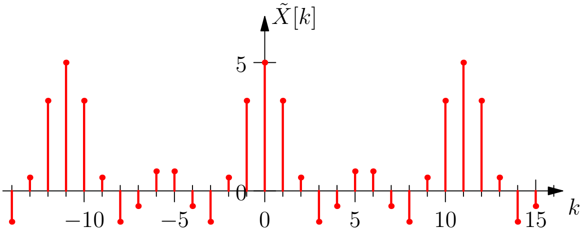
$$e^{-j\frac{2\pi}{11}k} = e^{-j\frac{2k\pi}{11}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) - j\sin\left(\frac{2k\pi}{11}\right)$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= e^{-j\frac{2\pi}{11}k(-2)} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k(-1)} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k\cdot 0} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k} + e^{-j\frac{2\pi}{11}k2} \\ &= 2\cos\left(\frac{4k\pi}{11}\right) + 2\cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) + 1\end{aligned}$$

이산 푸리에 급수



(a) $\tilde{x}[n]$.



(b) 그림 (a)의 푸리에 급수 $\tilde{X}[k]$.

그림 *5.4:* 주기가 11인 이산 주기 신호와 그의 이산 푸리에 급수의 그래프.

이산 푸리에 변환

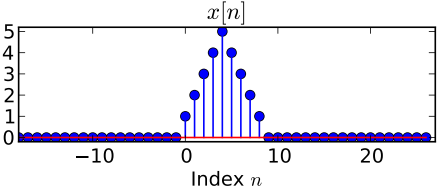
- 푸리에 급수: 이산시간 주기 신호의 한 주기에 해당하는 신호의 주파수 성분을 분석할 수 있는 변환
- 현실적으로 우리가 다루게 될 대부분의 신호들은 주기 신호가 아닌 비주기 신호일 확률이 높다
- 이산시간 비주기 신호의 주파수 성분을 분석하기 위한 도구는 이산시간 푸리에 변환 $\Rightarrow$ 주파수 영역에서 연속 신호
- 디지털 컴퓨터에서 계산을 하기 위해서는 주파수 영역에서 샘플링하는 방법을 생각할 수 있는데, 이 결과와 같은 것이 다음과 같이 정의하는 이산 푸리에 변환이다.

이산 푸리에 변환

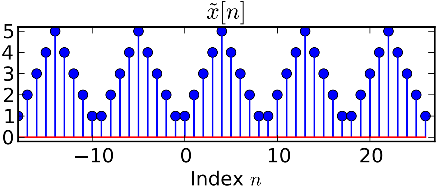
$0 \le n < N$ 이외의 구간에서 0인 유한길이 신호 $x[n]$이 있다고 가정하자. $x[n]$으로부터 다음과 같이 주기 신호 $\tilde{x}[n]$를 만들 수 있다.

$$\tilde{x}[n] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[n - pN]. \tag{5.67}$$

예를 들어서, $x[n]$이 그림 5.5의 (a)와 같이 주어진 경우에 $x[n]$을 한 주기 신호로 갖는 주기 신호는 그림 (b)와 같이 구성할 수 있다.



(a) $x[n]$,



(b) $\tilde{x}[n]$.

그림 *5.5:* 유한길이 신호 $x[n]$과 $x[n]$을 한 주기 신호로 갖는 이산시간 주기 신호 $\tilde{x}[n]$의 예.

이산 푸리에 변환

여기에서 $\tilde{x}[n]$의 DFS를 $\tilde{X}[k]$라고 하면, $x[n]$의 이산 푸리에 변환(DFT)는 다음과 같이 $\tilde{X}[k]$의 한 주기 신호로 정의한다.

정의 5.3 (이산 푸리에 변환과 역 이산 푸리에 변환)

- 이산 푸리에 변환(DFT: discrete Fourier transform): 길이가 N인 유한 길이 이산시간 신호 $x[n], n = 0, 1, \cdots, N-1,$의 이산 푸리에 변환 $X[k]$는 다음과 같이 정의된다.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{5.68}$$

- 역 이산 푸리에 변환(Inverse DFT)

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, n = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{5.69}$$

DFT와 IDFT의 정의 식은 앞에서 배웠던 DFS와 IDFS의 식과 동일하다. 단지, 비주기 유한 길이 신호 $x[n]$을 주기 신호 $\tilde{x}[n]$의

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 선형성

이산 푸리에 변환은 선형 변환이며, 중첩 특성을 가진다.

$$\mathcal{F}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1[k] + bX_2[k]. \tag{5.70}$$

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

$0 \le n < N$의 범위에 존재하는 길이가 N인 신호 $x[n]$을 y 축에 대해서 반전 신호 $x[-n]$는 $-N < n \le 0$의 범위에서 그 신호가 존재한다. 따라서 두 신호를 동일한 범위에서 DFT하는 것은 불가능하다. 두 신호를 동일한 범위에 존재하도록 만들기 위해서 다음과 같이 정의되는 순환 반전을 사용한다.

$$x[\langle -n \rangle_N] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ x[N-n], & 1 \le n \le N-1 \end{cases} \tag{5.71}$$

순환 반전은 $x[n]$을 한 주기로 하는 $\tilde{x}[n]$을 시간 반전한 신호를 $x[n]$의 원래 구간에 해당하는 신호만을 추출하는 연산이다. 예를 들어서 다음과 같이 길이가 8인 신호를 생각해 보자.

$$x[n] = \{x[0], x[1], x[2], \cdots, x[6], x[7]\}. \tag{5.72}$$

이 신호를 순환 대칭한 신호 $x[\langle -n \rangle_8]$은 다음과 같다.

$$x[\langle -n \rangle_8] = \{x[0], x[7], x[6], \cdots, x[2], x[1]\}. \tag{5.73}$$

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

Python에서 순환 반전 신호의 인덱스를 계산할 때는 `-n % N`을 사용한다. Python의 나머지 연산자 %를 사용하여 정수의 나머지를 구하는 예를 살펴 보자.

```
>>> for n in range(-5,6):
...     print(n, n%4)
...
-5 3
-4 0
-3 1
-2 2
-1 3
0 0
1 1
2 2
3 3
4 0
5 1
```

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

이 결과를 보면 `n % N`의 결과는 n을 다음과 같이 표현할 때의 r과 같은 것을 알 수 있다.

$$n = mN + r. \tag{5.74}$$

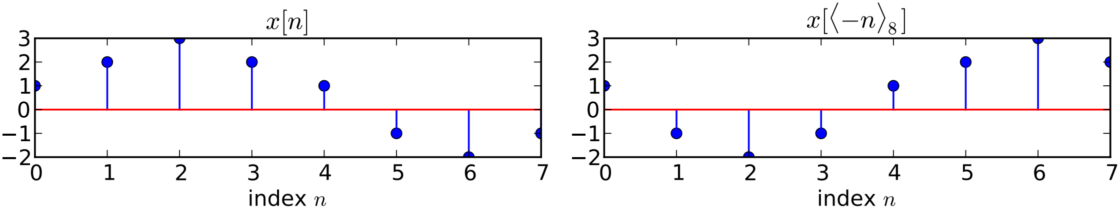
단, r은 $0 \leq r < N$인 정수이다.

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
xn = np.array([1,3,5,5,5,6,7,3])
n = np.arange(8)
xncs = xn[ -n % 8]
plt.subplot(121)
plt.stem(n, xn)
plt.title("$x[n]$")
plt.xlabel("index $n$")
plt.subplot(122)
plt.stem(n, xncs)
plt.title("$x([n])_8$")
plt.xlabel("index $n$")
plt.tight_layout()
plt.show()
```

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

이 스크립트를 실행하면 다음 그래프를 얻을 수 있다. 두 그래프를 비교하면서 순환 시간 반전의 결과를 이해해 보자



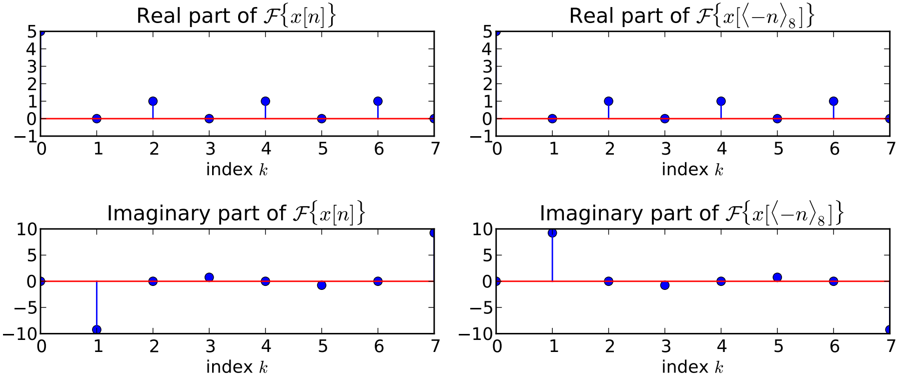
(a) $x[n]$, (b) $x[\langle -n \rangle_8]$.

그림 5.6: 유한길이 신호 $x[n]$과 $x[n]$을 회전 대칭 이동시킨 신호 $x[\langle -n \rangle_8]$의 예.

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

순환 반전 신호의 DFT는 다음과 같다.

$$\mathcal{F}\{x[\langle -n\rangle_N]\} = X[\langle -k\rangle_N]. \tag{5.75}$$



(a) $\mathcal{F}\{x[n]\}$, (b) $\mathcal{F}\{x[\langle -n\rangle_8]\}$.

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 시간 반전

이 그림에서 $X[k] = \mathcal{F}\{x[n]\}, X_c[k] = \mathcal{F}\{x[\langle -n \rangle_N]\}$라 하면, 다음과 같은 관계가 성립하는 것을 볼 수 있다.

$$X_c[0] = X[0], \quad X_c[1] = X[7], \quad X_c[2] = X[6], \quad X_c[3] = X[5],$$

$$X_c[4] = X[4], \quad X_c[5] = X[3], \quad X_c[6] = X[2], \quad X_c[7] = X[1].$$

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 복소 대칭

$$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X^*[\langle -k \rangle_N]. \tag{5.76}$$

만약에 $x[n]$ 이 주기가 N인 실수 주기 신호인 경우에는 다음 식이 성립한다.

$$X[k] = X^*[-k] = X^*[\langle -k \rangle_N]. \tag{5.77}$$

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 순환 이동

길이가 N인 신호 $x[n]$이 시간 영역에서 n_0 만큼 이동을 하면 이동한 신호의 구간은 $0 \leq n \leq N-1$을 벗어난다. 따라서 이 경우에도 시간 반전의 경우와 같은 이유로 다음과 같이 정의되는 회전 시간 이동을 사용한다.

$$x[n-n_0] = x[\langle n-n_0 \rangle_N]. \tag{5.78}$$

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 순환 이동

Python에서 순환 이동한 배열을 구할 때는 나머지 연산자를 사용하거나, Numpy의 `roll()` 함수를 사용한다.

```
>>> n = np.arange(8)
>>> a= 2*n
>>> a
array([ 0,  2,  4,  6,  8, 10, 12, 14])
>>> a[ (n-2) % 8]
array([12, 14,  0,  2,  4,  6,  8, 10])
>>> np.roll(a, 2)
array([12, 14,  0,  2,  4,  6,  8, 10])
>>> a[ (n+2) % 8]
array([ 4,  6,  8, 10, 12, 14,  0,  2])
>>> np.roll(a, -2)
array([ 4,  6,  8, 10, 12, 14,  0,  2])
```

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 순환 이동

순환이동 신호의 이산 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x[\langle n-n_0\rangle_N]\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x[\langle n-n_0\rangle_N] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\
&= \sum_{n=0}^{n_0-1} x[\langle n-n_0\rangle_N] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=n_0}^{N-1} x[\langle n-n_0\rangle_N] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\
&= \sum_{n=0}^{n_0-1} x[N-n_0+n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=n_0}^{N-1} x[n-n_0] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}.
\end{aligned} \tag{5.79}
$$

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 순환 이동

여기에서 $m = N - n_0 + n$이라 두면,

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} x[N - n_0 + n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=N-n_0}^{N-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m+n_0-N)} \tag{5.80}$$

이 되고, $m = n - n_0$라 두면

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} x[n - n_0]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=0}^{N-n_0-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m+n_0)} \tag{5.81}$$

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 순환 이동

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x[\langle n-n_0\rangle_N]\} &= \sum_{n=0}^{n_0-1} x[N-n_0+n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{m=0}^{N-n_0-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m+n_0)} \\
&= \sum_{m=N-n_0}^{N-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m+n_0-N)} + \sum_{m=0}^{N-n_0-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m+n_0)} \\
&= \sum_{m=N-n_0}^{N-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m+n_0)} + \sum_{m=0}^{N-n_0-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m+n_0)} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m+n_0)} \\
&= e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \\
&= e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}X[k]. \qquad (5.82)
\end{aligned}
$$

이산 푸리에 변환의 주요 성질: 순환 이동

다음은 순환이동 신호의 이산 푸리에 변환을 확인할 수 있는 Python 스크립트 예제이다.

```
>>> import numpy as np
>>> x=np.array([-2,-1,0,1,2,3,4,5])
>>> x1 = np.roll(x,2)
>>> X=np.fft.fft(x)
>>> X
array([12.+0.j        , -4.+9.65685425j, -4.+4.j        , -4.+1.65685425j,
       -4.+0.j        , -4.-1.65685425j, -4.-4.j        , -4.-9.65685425j])
>>> np.fft.fft(x1)
array([12.        +0.j,  9.65685425+4.j,  4.        -4.j, -1.65685425-4.j,
       -4.        +0.j, -1.65685425+4.j,  4.        +4.j,  9.65685425-4.j])
>>> w = np.exp(-1j*2*np.pi/8)**(2*np.arange(8))
>>> w*X
array([12.        +0.j,  9.65685425+4.j,  4.        -4.j, -1.65685425-4.j,
       -4.        +0.j, -1.65685425+4.j,  4.        +4.j,  9.65685425-4.j])
```

이산 푸리에 변환의 주요 성 질: 순환 콘볼루션

길이가 각각 N_1과 N_2인 두 신호 $h[n]$과 $x[n]$의 선형 콘볼루션의 길이는 $N_1 + N_2 - 1$이 된다. $N = \max(N_1, N_2)$라 하고, 콘볼루션 계산 과정에서 모든 산호를 $[0, N-1]$ 구간으로 제한하고 신호의 이동을 순환 이동으로 제한하면, 그 결과는 다음과 같은 순환 콘볼루션 (circular convolution)으로 표현된다.

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[\langle n-m \rangle_N] x[m]. \tag{5.83}$$

$$\begin{aligned} Y[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} h[\langle n-m \rangle_N] x[m] \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \left(\sum_{n=0}^{N-1} h[\langle n-m \rangle_N] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km} H[k] \\ &= X[k]H[k] = H[k]X[k]. \end{aligned} \tag{5.84}$$

이산 푸리에 변환의 주요 성질: *Parseval*의 정리

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2. \tag{5.85}$$

이산 푸리에 변환의 주요 성질

이름	표현
정의	$X[k] = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} a\tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$
선형성	$\mathcal{Z}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1[k] + bX_2[k]$
시간 지연	$\mathcal{F}\{x[n-n_0]\} = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k}X[k]$
신호의 차분	$\mathcal{F}\left\{x[n] - x[n-1]\right\} = \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)X[k]$
시간 반전	$\mathcal{F}\{x[-n]\} = X[-k]$
실수 신호의 공액	$\mathcal{F}\{\tilde{x}^*[n]\} = X^*[k]$
Parseval의 정리	$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\lvert x[n]\rvert^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\lvert X[k]\rvert^2$

연속시간 복소 주기 함수의 내적의 성질

복소수에서 정의되는 주기가 2π 인 연속시간 함수의 함수 공간을 고려해 보자. 이 함수 공간은 내적이 다음과 같이 정의되는 내적 공간이 된다.

정의 5.4 (주기가 2π 인 두 실수 주기 함수들의 내적)

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t) g(t)\ dt. \tag{5.86}$$

연속시간 복소 주기 함수의 내적의 성질

이 때, $\langle f, g\rangle$는 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

1. 내적 공간의 모든 연속시간 주기 함수 f와 g에 대해서 $\langle f, g\rangle$가 정의된다.
2. 공액 대칭

$$
\begin{aligned}
\langle f(t), g(t)\rangle^* &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g^*(t)dt\right)^* \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f^*(t)g(t)\right)^* dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g^*(t)dt \\
&= \langle g(t), f(t)\rangle.
\end{aligned}
\tag{5.87}
$$

연속시간 복소 주기 함수의 내적의 성질

(3) 분배 법칙

$$\begin{aligned}\langle f(t)+g(t),h(t)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\{f(t)+g(t)\}^{*}h(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\{f(t)^{*}h(t)+g(t)^{*}h(t)\}dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}f(t)^{*}h(t)dt+\int_{-\pi}^{\pi}g(t)^{*}h(t)dt \\ &= \langle f(t),h(t)\rangle+\langle g(t),h(t)\rangle.\end{aligned} \tag{5.88}$$

$$\begin{aligned}\langle f(t),g(t)+h(t)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}f(t)^{*}\{g(t)+h(t)\}dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\{f(t)^{*}g(t)+f(t)^{*}h(t)\}dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}f(t)^{*}g(t)dt+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)^{*}h(t)dt \\ &= \langle f(t),g(t)\rangle+\langle f(t),h(t)\rangle.\end{aligned} \tag{5.89}$$

연속시간 복소 주기 함수의 내적의 성질

(4)

$$\langle af(t), g(t)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \{af(t)\}^* g(t)dt = a^* \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^* g(t)dt = a^* \langle f(t), g(t)\rangle. \tag{5.90}$$

$$\langle f(t), ag(t)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^* ag(t)dt = a \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^* g(t)dt = a\langle f(t), g(t)\rangle. \tag{5.91}$$

(5) 정부호(positive definite) 성질

- (a) $f(t) \neq 0$일 때,

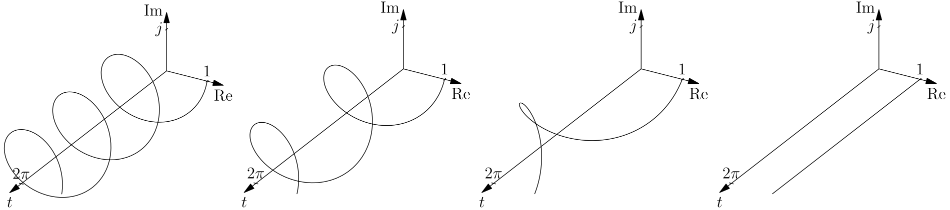
$$\langle f(t), f(t)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t)f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} ||f(t)||^2 dt > 0. \tag{5.92}$$

- (b) $f(t) = 0$일 때,

$$\langle f(t), f(t)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 0dt = 0. \tag{5.93}$$

연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

$$e^{jn(t+2k\pi)} = e^{jnt} \quad \forall k.$$

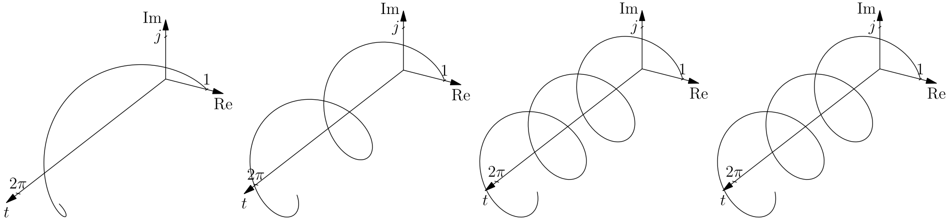


(a) $n = -3$ (b) $n = -2$ (c) $n = -1$ (d) $n = 0$

그림 5.8: e^{jnt} 의 그래프 ($n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$).

연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

$$e^{jn(t+2k\pi)} = e^{jnt} \quad \forall k.$$



(e) $n = 1$ (f) $n = 2$ (g) $n = 3$ (h) $n = 4$

그림 5.8: e^{jnt} 의 그래프 ($n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$) (계속).

연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

이 함수들의 내적은 다음과 같다.

1. $n \neq m$인 경우에 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
\langle e^{jnt}, e^{jmt} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jnt} e^{jmt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)t} dt \\
&= \frac{1}{j(m-n)} e^{j(m-n)t} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{j(m-n)} \left\{ e^{j(m-n)\pi} - e^{-j(m-n)\pi} \right\} \\
&= \frac{1}{j(m-n)} e^{j(m-n)\pi} \left\{ 1 - e^{-2j(m-n)\pi} \right\} \\
&= \frac{1}{j(m-n)} e^{j(m-n)\pi} (1 - 1) = 0.
\end{aligned} \tag{5.94}$$

연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

(2) $n = m$인 경우에 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\langle e^{jnt}, e^{jmt}\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jnt}e^{jnt}dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n-n)t}dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1dt = t\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi - (-\pi) = 2\pi.\end{aligned}$$

즉 함수 e^{jnt}의 길이는 다음과 같다.

$$\left|e^{jnt}\right| = \langle e^{jnt}, e^{jnt}\rangle^{1/2} = \sqrt{2\pi}.$$

그러면 함수 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jkt}$들은 길이가 1이므로 직교 정규 기저 함수가 된다. 따라서 주기가 2π인 모든 복소 함수 $\tilde{x}(t)$는 이 직교 정규 기저 함수들의 선형 결합으로 표현될 수 있다.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jkt}.$$

연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

위 식의 양변의 왼쪽에 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jmt}$ 를 내적하면 다음 식을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jmt}, \tilde{x}(t) \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jmt}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jkt} \right\rangle \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jmt}, a_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jkt} \right\rangle \\
&= a_m \frac{1}{2\pi} \left\langle e^{jmt}, e^{jmt} \right\rangle = a_m \frac{1}{2\pi} 2\pi = a_m .
\end{aligned}
\tag{5.95}
$$

따라서 a_k 는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
a_k &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jkt}, \tilde{x}(t) \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jkt} \right)^* \tilde{x}(t)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jkt}\tilde{x}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{x}(t)e^{-jkt}dt.
\end{aligned}
\tag{5.96}
$$

연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

이를 정리하면 다음과 같다.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jkt}, \tag{5.97}$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{x}(t) e^{-jkt} dt. \tag{5.98}$$

이 두 식을 각각 연속시간 푸리에 급수 합성식과 연속시간 푸리에 급수 분석식이라고 한다.
$\{e^{jkt}, k\text{는 정수}\}$가 주기가 2π의 정수 배인 함수의 집합이라고 라고 하면, 주기가 T_0의 정수 배인 복소지수 함수들의 집합은 $\left\{e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}\right\}$이다. 주기가 T_0인 주기 함수 $\tilde{x}(t)$를 푸리에 급수로 분석할 때에는 $e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$를 직교 정규 기저 함수들로 사용한다.

연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

정의 5.5 (연속시간 푸리에 급수 분석과 합성)

- 연속시간 푸리에 급수 분석:
  주기가 T_0 인 주기 신호 $\tilde{x}(t)$ 의 복소 진폭, 즉 푸리에 급수 계수 a_k 는 다음과 같이 구한다.

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(t)e^{-j2\pi f_0 kt}dt, \tag{5.99}$$

  여기에서 T_0 는 $\tilde{x}(t)$ 의 기본 주기 (fundamental period)이다.
  DC 성분인 a_0 는 위 식에 $k = 0$을 대입하여 구한다.

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(t)dt. \tag{5.100}$$

- 연속시간 푸리에 급수 합성:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j2\pi f_0 kt}. \tag{5.101}$$

연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

예제 5.7

기본 주기가 T_0 이고, 한 주기 내에서 다음과 같이 정의되는 주기적인 구형파 $\tilde{x}(t)$ 의 연속시간 푸리에 급수 계수를 구하라.

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{1}{2}T_0 \\ 0, & \frac{1}{2}T_0 \le t < T_0 \end{cases}. \tag{5.102}$$

$\int_{t_1}^{t_2} e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{a}\left(e^{at_2} - e^{at_1}\right)$ 을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{1}{2}T_0} 1 dt = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{2} T_0 = \frac{1}{2}. \tag{5.103}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{1}{2}T_0} (1) e^{-j2\pi kt/T_0} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \frac{T_0}{-j2\pi k} e^{-j2\pi kt/T_0} \Big|_0^{\frac{1}{2}T_0} = -\frac{1}{j2\pi k}\left(e^{-j\pi k} - 1\right). \end{aligned} \tag{5.104}$$

연속시간 복소 주기 함수의 푸리에 급수와 합성

이상을 정리하면 구형파의 푸리에 급수의 계수는 다음과 같다.

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{j\pi k}, & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots \\ 0, & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \cdots \\ \frac{1}{2}, & k = 0. \end{cases} \tag{5.105}$$

표 5.1: 연속시간 푸리에 급수의 주요 성질 (1)

이름	표현
정의	$c_k = \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt$ $d_k = \mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{y}(t)e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}dt$
선형성	$\mathcal{F}\{a\tilde{x}(t) + b\tilde{x}(t)\} = ac_k + bd_k$
시간 지연	$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t-t_0)\} = e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt_0}c_k$
주기적 콘볼루션	$\mathcal{F}\left\{\int_{<T_0>} \tilde{x}(\tau)\tilde{y}(t-\tau)d\tau\right\} = c_k d_k$
곱셈	$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\tilde{y}(t)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l d_{k-l}$

표 5.1: 연속시간 푸리에 급수의 주요 성질 (2)

이름	표현
신호의 미분	$\mathcal{F}\left\{d\dfrac{\tilde{x}(t)}{dt}\right\} = jk\dfrac{2\pi}{T_0}c_k$
시간 반전	$\mathcal{F}\{\tilde{x}(-t)\} = c_{-k}$
신호의 공액	$\mathcal{F}\{\tilde{x}^*(t)\} = c^*(-k)$
실수 신호	$c_k^* = c_{-k}$
파스발의 정리	$\dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} \lvert\tilde{x}(t)\rvert^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2$

시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

구형파에서 펄스의 폭이 τ 이고 주기가 T_0 인 구형파 $\tilde{x}(t)$ 가 $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right)$ 구간에서 다음과 같이 표시된다.

$$\tilde{x}_1(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T_0}{2} \le t < -\dfrac{\tau}{2} \\ 1, & -\frac{\tau}{2} \le t < \dfrac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} \le t < -\dfrac{T}{2} \end{cases}. \tag{5.106}$$

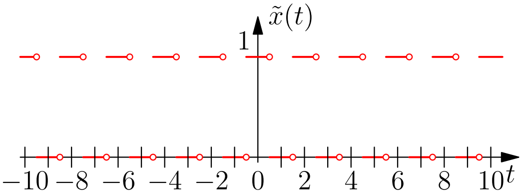
그리고 $\tilde{x}(t)$ 의 푸리에 급수 계수 a_k 가 다음과 같이 주어진다.

$$a_k = \frac{\sin \frac{\pi k \tau}{T_0}}{\pi k}. \tag{5.107}$$

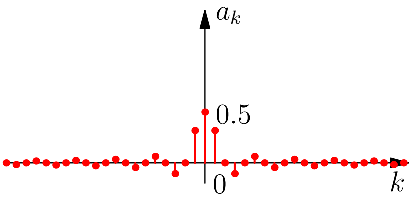
$\tau = 1$ 일 때, $T_0 = 2, 5, 10$ 인 세 경우에 대해서 한 주기 동안 $\tilde{x}(t)$ 와 a_k 의 그래프를 그려서 비교해 보자. 푸리에 급수 계수 a_k 에서 k는 $-\infty < k < \infty$ 의 범위에 존재한다. 즉, 구형파에 존재하는 주파수 성분의 개수가 무한대이다. 위의 그래프는 이 가운데 일부만 나타낸 것이다. 세 경우의 그래프에서 $T_0 a_k$ 의 차이를 유심히 비교해 보자. $T_0 a_k$ 의 그래프에서 가로 축은 k가

시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

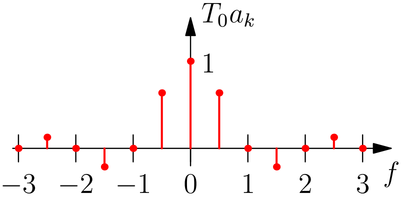
- $T_0 = 2$일 때, $a_k = \dfrac{\sin \frac{\pi k}{2}}{\pi k}$



(a) $\tilde{x}(t)$의 그래프.



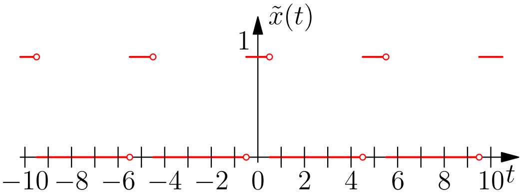
(b) a_k의 그래프.



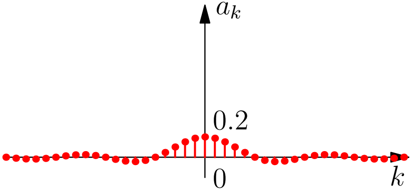
(c) $T_0 a_k$의 그래프.

시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

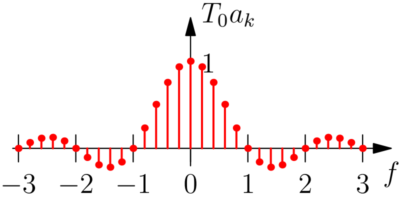
(2) $T_0 = 5$일 때, $a_k = \dfrac{\sin\frac{\pi k}{5}}{\pi k}$



(a) $\tilde{x}(t)$의 그래프.



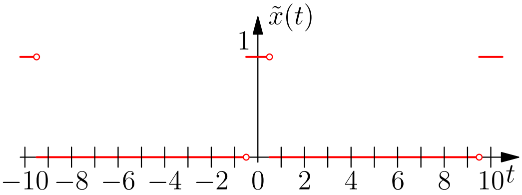
(b) a_k의 그래프.



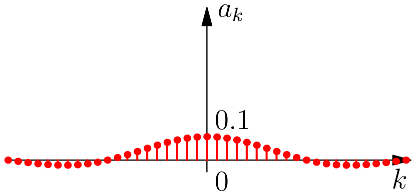
(c) $T_0 a_k$의 그래프.

시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

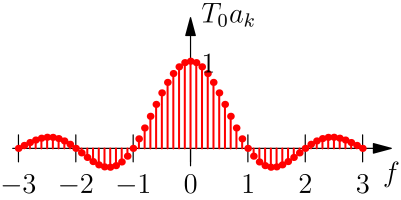
(2) $T_0 = 10$일 때, $a_k = \dfrac{\sin\frac{\pi k}{10}}{\pi k}$



(a) $\tilde{x}(t)$의 그래프.



(b) a_k의 그래프.



(c) $T_0 a_k$의 그래프.

시비율이 다른 주기 함수의 푸리에 급수 계수 비교

이 세 가지 경우를 통해서 관찰할 수 있는 사실은 다음과 같다.

- (i) $\sin \frac{\pi k}{T_0} = 0$이 되는 k, 즉 a_k가 처음으로 0이 되는 양수 k는 $k = T_0$이다.
- (ii) 구형파의 펄스의 폭을 고정한 채 주기를 점점 증가시키면 시비율은 감소한다. 그리고 주기가 점점 증가하면서 $T_0 a_k$ 신호는 전체적인 모양에는 변화가 없이 점점 연속 주파수 신호에 근접해 가는 것을 볼 수 있다.

연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

앞 절의 푸리에 급수 분석과 합성 식에서 초기의 T_0 값을 T라 두고, $T_0 \to \infty$일 때 $\tilde{x}(t)$는 주기함수에서 비주기 함수로 변한다. 이렇게 얻은 비주기 함수를 $x(t)$라고 하면, 둘 사이의 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \tilde{x}(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} . \tag{5.108}$$

여기에서 $f_0 = \frac{1}{T_0}$이라고 하면, $\lim_{T_0 \to \infty} f_0 = df$가 되고, $\lim_{T_0 \to \infty} f_0 k$는 연속변수 f가 된다.

$$\begin{aligned} \lim_{T_0 \to \infty} T_0 a_k &= \lim_{T_0 \to \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt \\ &= \lim_{T_0 \to \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi f_0 kt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt. \end{aligned} \tag{5.109}$$

연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

이제 $X(f)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$X(f) = \lim_{T_0 \to \infty} T_0 a_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt. \tag{5.110}$$

그러면, 푸리에 급수 합성식의 $\tilde{x}(t)$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_0 a_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt} \frac{1}{T_0} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (T_0 a_k) e^{j2\pi f_0 kt} f_0. \end{aligned} \tag{5.111}$$

연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

이 식으로부터 $x(t)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T_0\to\infty} \tilde{x}(t) \\ &= \lim_{T_0\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (T_0 a_k) e^{j2\pi f_0 kt} f_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df. \end{aligned} \tag{5.112}$$

여기에서 $\omega = 2\pi f$라 하면, $d\omega = 2\pi df$가 되어 $df = \frac{d\omega}{2\pi}$ 로 쓸 수 있다. 그리고 식 (5.110) 에서 정의한 $X(f)$ 대신에 $X(\omega)$ 라는 표기를 사용하면 $x(t)$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \tag{5.113}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{5.114}$$

이 두 식을 각각 연속시간 푸리에 역변환과 푸리에 변환이라고 한다. 또한 $X(\omega)$ 대신에 $X(j\omega)$ 를 사용하는 것이 일반적이다.

연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

이 표현을 사용하여 연속시간 비주기 신호의 푸리에 변환과 역변환을 각각 다음과 같이 정의한다.

정의 5.6 (연속시간 비주기 신호의 푸리에 변환과 역변환)

- 연속시간 비주기 신호 $x(t)$의 푸리에 변환

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{5.115}$$

- 역 푸리에 변환

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{5.116}$$

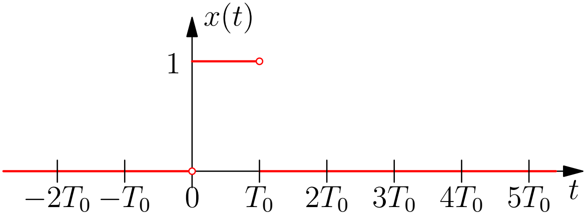
연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

예제 5.8

다음과 같이 주어지는 $x(t)$의 푸리에 변환을 구하라.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < T_0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} . \tag{5.117}$$

이 함수를 그림으로 나타내면 다음 그림과 같다.



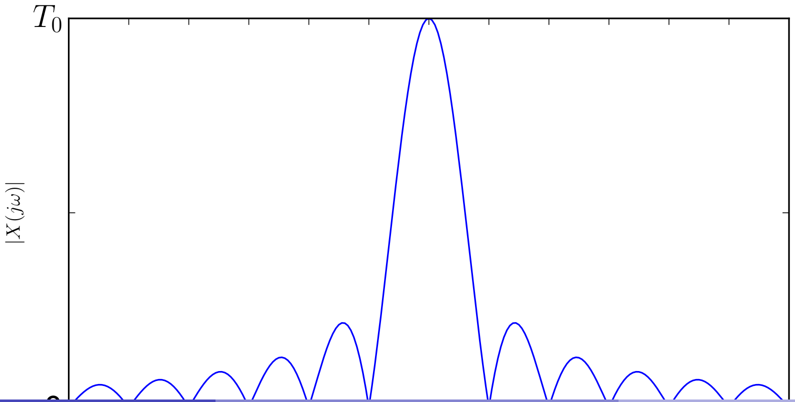
연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

이 함수의 푸리에 변환은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{T_0} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt \\
&= -\frac{1}{j\omega} \left. e^{-j\omega t} \right|_{0}^{T_0} = \boxed{\frac{j}{\omega}\left(e^{-j\omega T_0} - 1\right)} \\
&= \frac{j}{\omega} e^{-j\frac{1}{2}\omega T_0} \left(e^{-j\frac{1}{2}\omega T_0} - e^{j\frac{1}{2}\omega T_0}\right) = \frac{j}{\omega} e^{-j\frac{1}{2}\omega T_0} \left[-j2\sin\left(\frac{1}{2}\omega T_0\right)\right] \\
&= \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\omega T_0\right)}{\frac{1}{2}\omega} e^{-j\frac{1}{2}\omega T_0} = T_0 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\omega T_0\right)}{\frac{1}{2}\omega T_0} e^{-j\frac{1}{2}\omega T_0}.
\end{aligned}
\tag{5.118}
$$

연속시간 푸리에 급수에서 연속시간 푸리에 변환으로

$$|X(j\omega)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\omega T_0\right)}{\frac{1}{2}\omega} \right|. \tag{5.119}$$



연속시간 푸리에 변환의 존재와 수렴

식 (5.115)를 보면 푸리에 변환을 구하기 위한 적분 구간이 $(-\infty, \infty)$이기 때문에 적분 결과가 유한한 값으로 정해지지 않고 ∞ 또는 $-\infty$로 발산할 가능성도 있다. 다시 말하면, 모든 $x(t)$가 푸리에 변환식을 갖는 것은 아니다. 푸리에 변환이 존재하기 위해서는 $x(t)$가 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$|X(j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) e^{-j\omega t} \right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \left| e^{-j\omega t} \right| dt. \tag{5.120}$$

그런데 모든 t에 대해서 $\left| e^{-j\omega t} \right| = 1$이므로, 다음 식이 성립한다.

$$|X(j\omega)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt. \tag{5.121}$$

따라서 푸리에 변환이 존재하기 위한 충분 조건은 다음과 같다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt < \infty. \tag{5.122}$$

이 조건을 절대 적분 가능(absolutely integrable) 조건이라고 한다. 단, 이 조건은 충분 조건이지 필요 조건은 아니다.

표 5.2: 연속시간 푸리에 변환의 주요 성질 (1)

이름	표현
정의	$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}$
선형성	$\mathcal{F}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega).$
시간 지연	$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}X(e^{j\omega})$
주파수 지연	$\mathcal{F}\{x(t)e^{j\omega_0 t}\} = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
콘볼루션	$\mathcal{F}\{x_1(t) * {}_2(t)\} = X_1(j\omega)X_2(j\omega)$
곱셈	$\mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$
신호의 미분	$\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega)$

표 5.2: 연속시간 푸리에 변환의 주요 성질 (2)

이름	표현
주파수 영역에서의 미분	$\mathcal{F}\{tx(t)\} = j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
켤레 복소수 신호	$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega)$
시간 반전	$\mathcal{F}\{x(-t)\} = X(-j\omega)$
신호의 공액	$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega)$
실수 신호	$X^*(j\omega) = X(-j\omega)$
파스발의 정리	$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|X(j\omega)\|^2$

이산 푸리에 변환에서 이산시간 푸리에 변환으로

이산 신호에 대해서도 주기가 무한대로 접근하는 경우에 이산 푸리에 변환에 어떤 변화가 있는지 살펴 보기로 하자.
먼저 이산 주기 신호의 푸리에 변환과 그 역변환을 다시 기억해 보자.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \tag{5.123}$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} e^{+j\frac{2\pi}{N}nk}. \end{aligned} \tag{5.124}$$

여기에서 $\hat{\omega}_0 = \frac{2\pi}{N}$ 라 하면, $\frac{1}{N} = \frac{\hat{\omega}_0}{2\pi}$ 가 되고 식 (5.124)에서 다음 식을 구할 수 있다.

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\hat{\omega}_0}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] e^{-j\hat{\omega}_0 mk} e^{j\hat{\omega}_0 nk}. \tag{5.125}$$

이산 푸리에 변환에서 이산시간 푸리에 변환으로

$N \to \infty$가 되면, $\tilde{x}[n] \to x[n]$, $\hat{\omega}_0 = d\hat{\omega} \to 0$, $k\hat{\omega}_0 \to \hat{\omega}$가 되고, 위 식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \tilde{x}[n] &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] e^{-j\hat{\omega}_0 mk} e^{j\hat{\omega}_0 nk} \hat{\omega}_0 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\hat{\omega} m} e^{j\hat{\omega} n} d\hat{\omega} \\
&= x[n].
\end{aligned}$$

이제 여기에서

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\hat{\omega} m} \tag{5.126}$$

이라고 정의하자. 이 식을 비주기 이산 신호 $x[m]$의 이산시간 푸리에 변환(DTFT: discrete-time Fourier transform)이라고 한다. 그리고 다음을 역 이산시간 푸리에 변환이라고 한다.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\hat{\omega}}) e^{j\hat{\omega} n} d\hat{\omega}. \tag{5.127}$$

이산 푸리에 변환에서 이산시간 푸리에 변환으로

비주기 이산 신호 $x[n]$ 의 이산시간 푸리에 변환과 역 이산시간 푸리에 변환은 다음과 같다.

정의 5.7 (이산시간 푸리에 변환과 역변환)

- 이산시간 푸리에 변환

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\hat{\omega}n} \tag{5.128}$$

- 역 이산시간 푸리에 변환

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\hat{\omega}})e^{j\hat{\omega}n}d\hat{\omega} \tag{5.129}$$

이산 푸리에 변환에서 이산시간 푸리에 변환으로

예제 5.9

$x[n] = u[n] - u[n-10]$의 이산 시간 푸리에 변환을 구하라.

$$\begin{aligned} X(e^{j\hat{\omega}}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\hat{\omega}n} = \sum_{n=0}^{9} e^{-j\hat{\omega}n} = \frac{1-\left(e^{-j\hat{\omega}}\right)^{10}}{1-e^{-j\hat{\omega}}} \\ &= \boxed{\frac{1-e^{-j10\hat{\omega}}}{1-e^{-j\hat{\omega}}}} = \frac{e^{-j5\hat{\omega}}\left(e^{j5\hat{\omega}}-e^{-j5\hat{\omega}}\right)}{e^{-j0.5\hat{\omega}}\left(e^{j0.5\hat{\omega}}-e^{-0.5j\hat{\omega}}\right)} \\ &= \frac{j2\sin(5\hat{\omega})}{j2\sin(\hat{\omega}/2)}e^{-j9\hat{\omega}/2} = \frac{\sin(5\hat{\omega})}{\sin(\hat{\omega}/2)}e^{-j9\hat{\omega}/2}. \end{aligned} \tag{5.130}$$

이산시간 푸리에 변환의 존재와 수렴

이산시간 푸리에 변환은 무한 급수(infinite series)이므로 수렴할 수도 있고 수렴하지 않을 수도 있다. 이 무한 급수가 수렴하지 않는 경우에는 이산시간 푸리에 변환을 구할 수 없다.
만약에 $x[n]$이 절대 가합(absolutely summable) 수열이면, 즉 다음 조건을 만족한다면

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

모든 $\hat{\omega}$에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\left|X(e^{j\hat{\omega}})\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\hat{\omega}n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty.$$

따라서, $x[n]$의 절대 가합성(absolute summability)은 이산시간 푸리에 변환이 존재하기 위한 충분 조건이다.

표 5.3: 이산시간 푸리에 변환의 주요 성질 *(1)*

이름	표현
정의	$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\hat{\omega}n}$
선형성	$\mathcal{F}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1(e^{j\hat{\omega}}) + bX_2(e^{j\hat{\omega}})$
시간 지연	$\mathcal{F}\{x[n-n_0]\} = e^{-j\hat{\omega}n_0}X(e^{j\hat{\omega}})$
콘볼루션	$\mathcal{F}\{x[n] * y[n]\} = X(e^{j\hat{\omega}})Y(e^{j\hat{\omega}})$
곱셈	$\mathcal{F}\{x[n]y[n]\} = X(e^{j\hat{\omega}}) * Y(e^{j\hat{\omega}})$ (주기적 콘볼루션)

표 5.3: 이산시간 푸리에 변환의 주요 성질 (2)

이름	표현
정의	$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\hat{\omega}n}$
신호의 차분	$\mathcal{F}\{x[n]-x[n-1]\} = (1-e^{-j\hat{\omega}})X(e^{j\hat{\omega}})$
시간 곱셈	$\mathcal{F}\{nx[n]\} = j\frac{X(e^{j\hat{\omega}})}{d\hat{\omega}}$
시간 반전	$\mathcal{F}\{x[-n]\} = X(e^{-j\hat{\omega}})$
켤레 신호의 변환	$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X^*(e^{-j\hat{\omega}})$
실수 신호의 변환의 켤레 대칭	$X(e^{-j\hat{\omega}}) = X^*(e^{j\hat{\omega}})$
Parseval의 정리	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lvert X(e^{j\hat{\omega}})\rvert^2 d\hat{\omega}$

DFT와 DTFT 사이의 관계

$0 \leq n < N$ 이외의 구간에서는 0인 신호 $x[n]$을 생각해 보자. 이 신호의 이산 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$X[k] := \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{5.131}$$

$X[k]$도 주기가 N인 주기신호이다. 즉, $X[k] = X[k+mN]$, m은 정수이다. $x[n]$의 이산시간 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\hat{\omega}n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\hat{\omega}n}. \tag{5.132}$$

$X(e^{j\hat{\omega}})$는 주기가 2π인 주기신호이다. 즉, $X(e^{j\hat{\omega}}) = X(e^{j(\hat{\omega}+2\pi m)})$, m은 정수이다.
이 두 식을 비교해 보면, 다음 사실을 알 수 있다.

$$X(e^{j\hat{\omega}})\Big|_{\hat{\omega}=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = X[k], k = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{5.133}$$

*DFT*와 *DTFT* 사이의 관계

이 식이 의미하는 것은 주기가 2π 인 주기 함수 $X(e^{j\hat{\omega}})$ 를 $0 \le \hat{\omega} < 2\pi$ 를 N 개의 등간격으로 나누어 샘플링한 것이 $\tilde{x}[n]$ 의 DFT 인 $X[k]$ 라는 것이다.

DFT와 DTFT 사이의 관계

예제 5.10 (DFT와 DTFT 사이의 관계 확인)

$x[n] = \{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ 0\}$의 DTFT를 직접 구하고, 구한 식의 실수부와 허수부를 각각 `matplotlib.pyplot.plot( )` 함수를 이용하여 그려보자. 단, $[0,\ 2\pi]$ 사이의 구간을 128 개의 샘플을 취하여 그려보자. 또한 $x[n], 0 \leq n < 8,$을 한 주기로 하는 주기 신호 $x[n]$의 DFT $X[k], 0 \leq k < 8,$를 `numpy.fft.fft( )` 함수를 사용하여 구하고, `matplotlib.pyplot.stem( )` 함수를 사용하여 위에서 구한 DTFT 그래프와 겹쳐서 그려보자. 이 때 8 개의 값 $X[k]$를 $[0,\ 2\pi]$ 사이에 균등하게 배치해야 한다.

$x[n]$의 이산시간 푸리에 변환은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\hat{\omega}k} = 1 + e^{-j\hat{\omega}} + e^{-j2\hat{\omega}} + e^{-j3\hat{\omega}} \tag{5.134}$$

DFT와 DTFT 사이의 관계

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
n = np.arange(8);  x = np.array([1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0])
w = np.linspace(0,2*np.pi,128)
Xejw = 1 + np.exp(-1j*w)+ np.exp(-1j*2*w)+ np.exp(-1j*3*w)
k = n*2*np.pi/8;   Xk = np.fft.fft(x)
plt.subplot(211)
plt.plot(w, Xejw.real);     plt.stem(k, Xk.real,'r')
plt.xlim(0, 2*np.pi)
plt.xticks([0, np.pi, 2*np.pi], ["0", "$\pi$", "$2\pi$"])
plt.subplot(212)
plt.plot(w, Xejw.imag);     plt.stem(k, Xk.imag,'r')
plt.xlim(0, 2*np.pi)
plt.xticks([0, np.pi, 2*np.pi], ["0", "$\pi$", "$2\pi$"])
plt.tight_layout()
plt.show()
```

*DFT*와 *DTFT* 사이의 관계

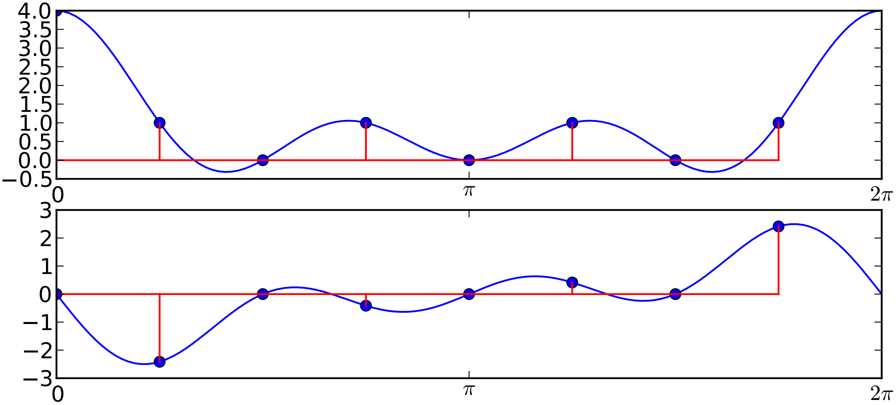


그림 5.13: 이산시간 푸리에 변환과 이산 푸리에 변환의 관계. 위의 것이 실수부, 아래 것이 허수부 그래프.

이 두 그래프에서 다음 관계가 성립하는 것을 알 수 있다.

DFT의 영 연장 *(zero padding)*

`numpy.fft.fft( )`를 사용하여 $X(e^{j\hat{\omega}})$의 근사값을 구하려고 하는 경우에 $x[n]$의 샘플 수가 많지 않은 경우에 $X[k]$의 샘플 수를 충분히 많게 하려면 어떻게 해야 할까?
다음과 같이 길이가 N인 신호 $x[n]$에 N 개의 0을 덧붙여서 만든 신호 $y[n]$을 생각해 보자.

$$y[n] = \{x[0], x[1], \cdots, x[N-1], 0, 0, \cdots, 0\}. \tag{5.136}$$

이와 같이 주어진 신호의 뒤에 필요한 갯수만큼의 0을 덧붙여서 신호의 길이를 연장하는 방법을 영 연장이라고 한다.
$y[n]$의 샘플의 갯수는 $2N$이므로, $y[n]$의 DFT, $Y[k]$는 다음과 같다.

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{2N-1} y[n]e^{-j\frac{2\pi}{2N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k/2)} = X\left[\frac{k}{2}\right]. \tag{5.137}$$

즉, $Y[k]$는 $X[k]$에 비해서 주파수 영역에서 샘플의 갯수가 2 배가 되고, 결과적으로 주파수 영역에서 해상도가 2 배 증가한 신호이다

DFT의 영 연장 (zero padding)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x1 = np.array([1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0])
n1 = np.arange(x1.size)
x2 = np.append(x1, np.repeat(0, n1.size))
n2 = np.arange(x2.size)
x3 = np.append(x2, np.repeat(0, n2.size))
n3 = np.arange(x3.size)
w = np.linspace(0,2*np.pi,128)
Xk1 = np.fft.fft(x1)
Xk2 = np.fft.fft(x2)
Xk3 = np.fft.fft(x3)
k1 = n1*2*np.pi/n1.size
k2 = n2*2*np.pi/n2.size
k3 = n3*2*np.pi/n3.size
```

DFT의 영 연장 (zero padding)

```
plt.subplot(311)
plt.stem(k1, np.abs(Xk1))
plt.xlim(0, 2*np.pi)
plt.xticks([0, np.pi, 2*np.pi], ["0", "$\pi$", "$2\pi$"])
plt.subplot(312)
plt.stem(k2, np.abs(Xk2))
plt.xlim(0, 2*np.pi)
plt.xticks([0, np.pi, 2*np.pi], ["0", "$\pi$", "$2\pi$"])
plt.subplot(313)
plt.stem(k3, np.abs(Xk3))
plt.xlim(0, 2*np.pi)
plt.xticks([0, np.pi, 2*np.pi], ["0", "$\pi$", "$2\pi$"])
plt.tight_layout()
plt.show()
```

DFT의 영 연장 (zero padding)

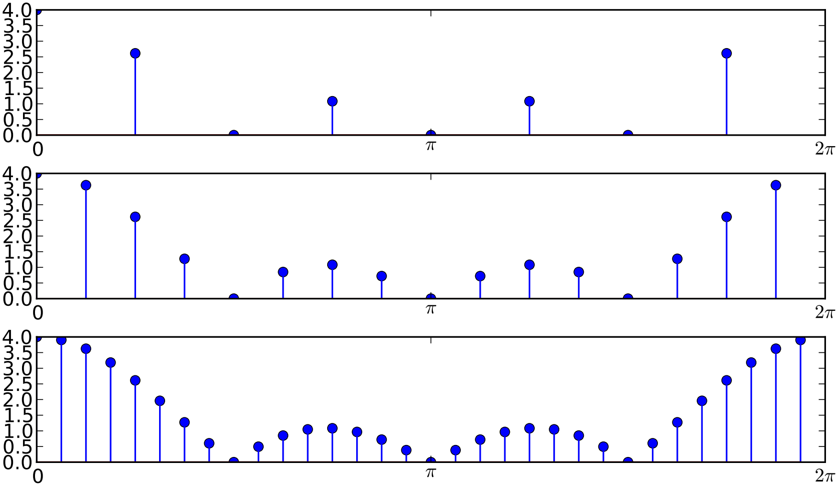


그림 5.14: 길이가 4인 신호에 각각 0을 채워서 길이가 8, 16, 32로 만든 후에 구한 스펙트럼의 크기 비교