모바일 센서공학
Ch. 3 기구학 기초

Seong-Ho Song

기구학(Kinematics)이란?

- Kinematics

  힘이 작용하여 움직인 물체의 위치 등을 다루는 분야

- 어떤 물체의 움직임을 표현하는 것

- 3차원 공간상에서 직선운동과 회전운동에 의하여 물체의 변화하는 위치로 표현

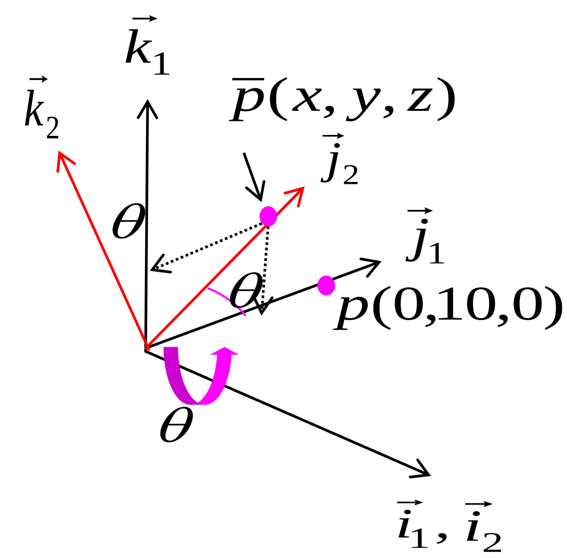
Ex. 회전 행렬(Rotation Matrix)

- $P(0,10,0) \Rightarrow \bar{p}(x,y,z)$

1. $\vec{i}$ 축을 중심으로 45°만큼 회전하였을 때 위치좌표

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(\vec{i},45^\circ)\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{10}{\sqrt{2}} \\ \frac{10}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$



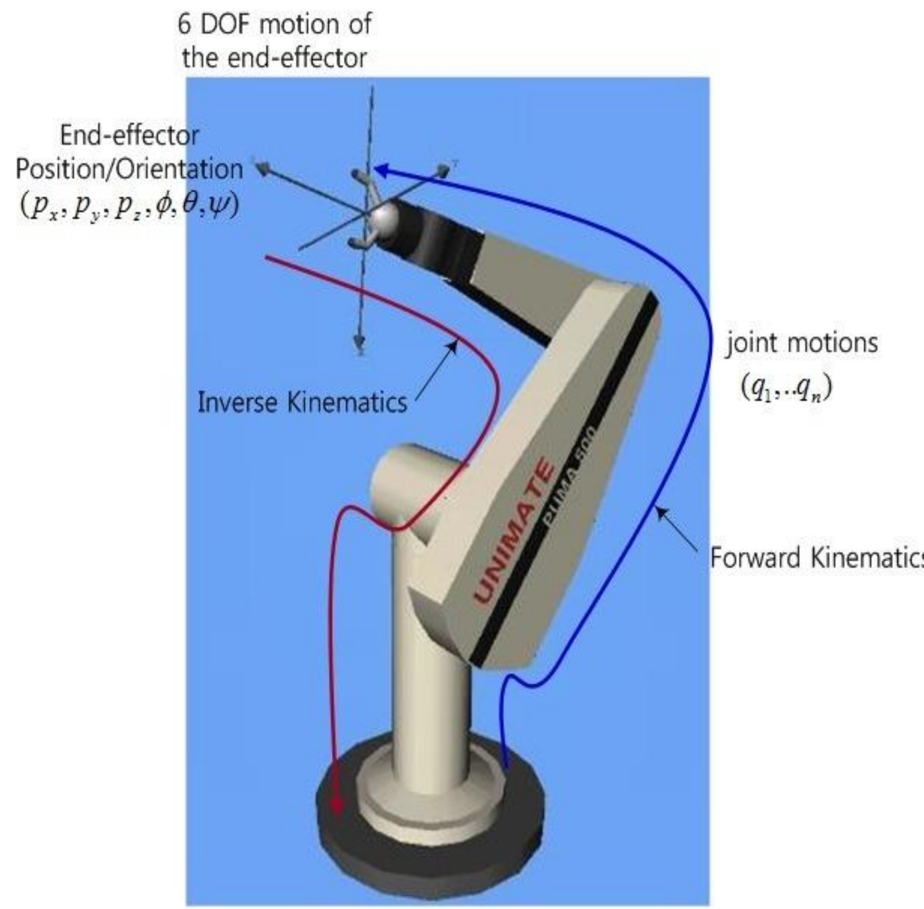
로봇기구학(Kinematics)

- Robot Kinematics

  로봇을 구성하는 각 관절과 로봇손에 대한 위치, 각도를 표현하는 것

- Forward Kinematics

- Inverse Kinematics



좌표 변환(Coordinate Transformation)

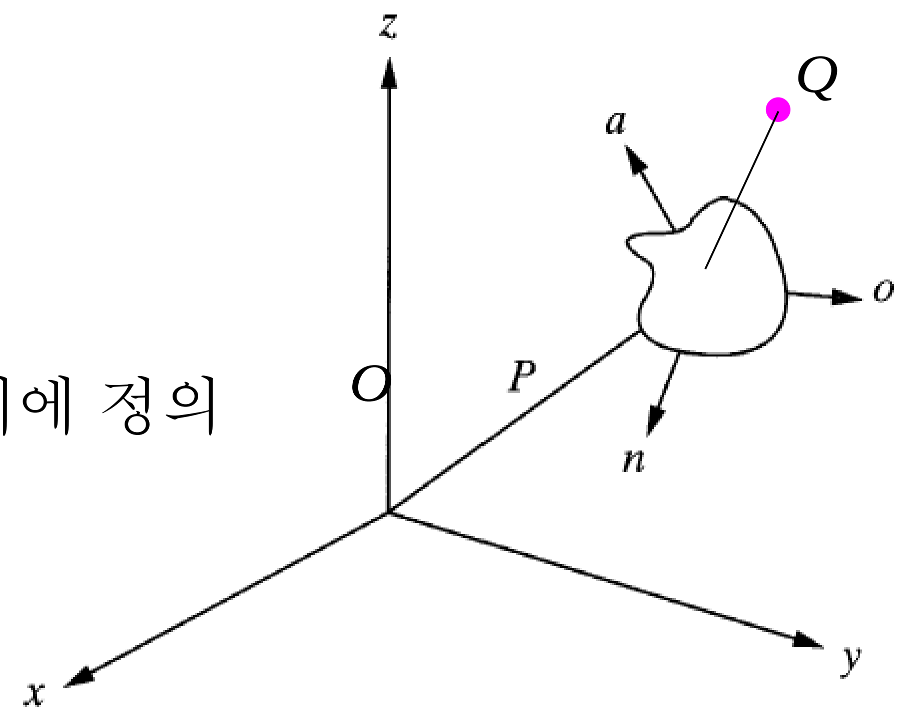
■ 좌표 변환 문제

- 기준 좌표계 : 직교하는 세방향의 단위벡터로 정의

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$

- 관절좌표계 : 로봇 동체에 정의

$$\vec{n}, \vec{o}, \vec{a}$$

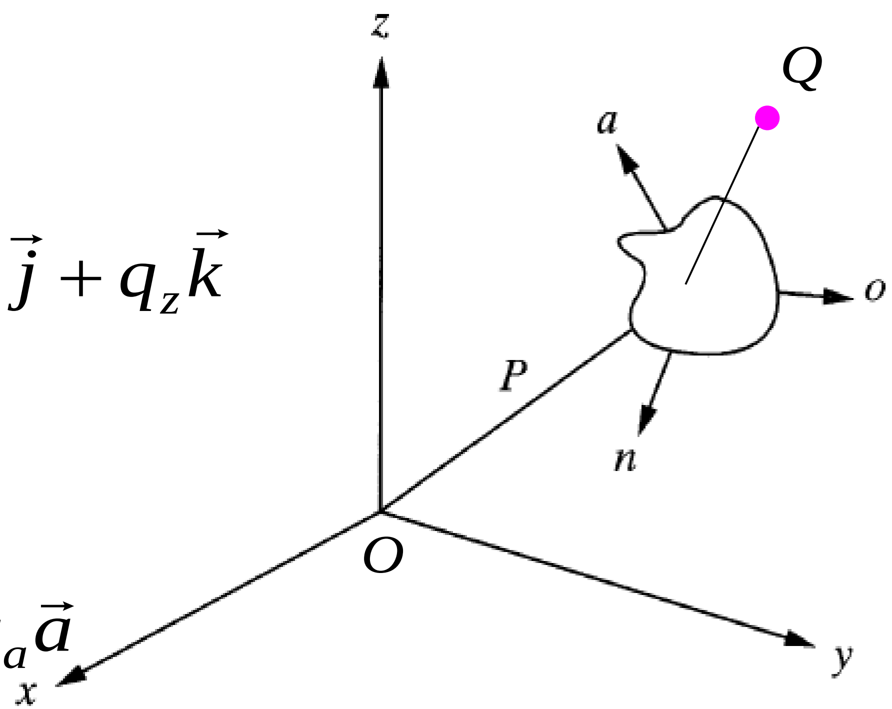


좌표 변환(Coordinate Transformation)

- 좌표 변환 문제
  - 기준 좌표계 :

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$= q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k}$$



  - 관절좌표계 : $\vec{Q}$

$$\vec{Q} = q_n\vec{n} + q_o\vec{o} + q_a\vec{a}$$

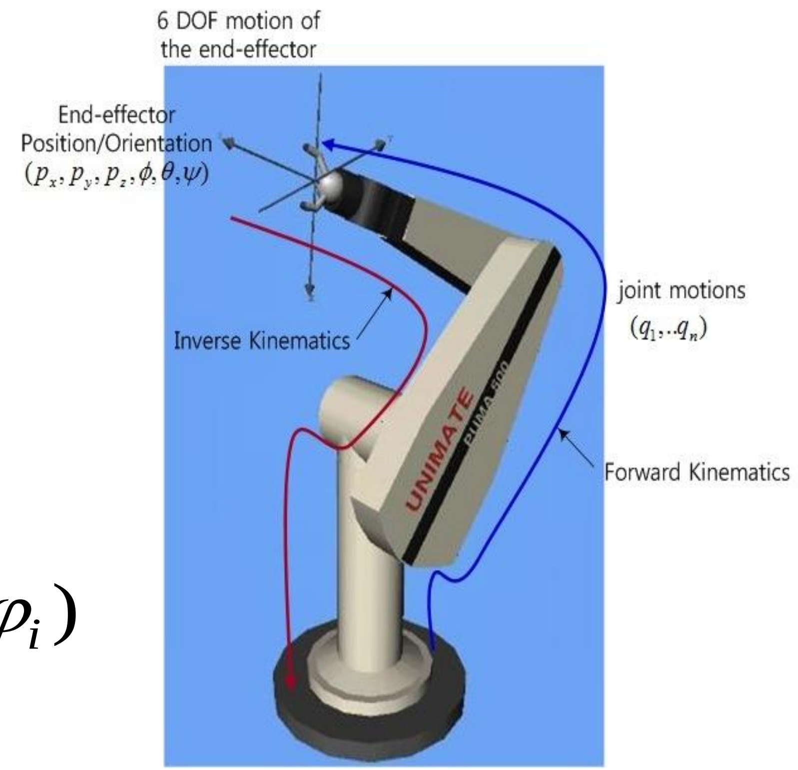
  - Kinematics Problem

$$\vec{Q} = q_n\vec{n} + q_o\vec{o} + q_a\vec{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{OQ} = q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k}$$

로봇기구학(Kinematics)

- Forward Kinematics

  각 관절의 움직임에 대하여 절대좌표계에서의 각 관절의 위치, 각도를 구하는 것



- Joint motions ➡ 절대좌표계 표현

  q_i $\quad$ $(x_i, y_i, z_i, \phi_i, \theta_i, \varphi_i)$

- Inverse Kinematics

End-effector 절대좌표계 표현 ➡ Joint motions q_i

$(x_h, y_h, z_h, \phi_h, \theta_h, \varphi_h)$

로봇기구학(Kinematics)

- 기준 좌표계와 관절 좌표계 사이의 관계

  각 관절의 움직임에 대하여 절대좌표계에서의 각 관절의 위치, 각도를 구하는 것

- 좌표 변환 행렬 : 회전, 병진운동관련 행렬

- 좌표계, 벡터 등

로봇기구학(Kinematics)

- 관절 좌표계

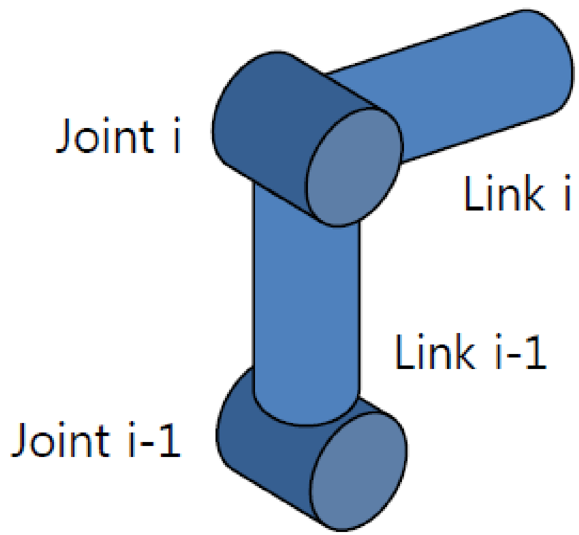
  각 관절에 고정되어 정의된 좌표계

- 기본 가정 :
  - 관절좌표계가 관절에 고정되어 있으므로 관절과 함께 회전, 직선운동을 같이 함.
  - 관절에 고정되어 있는 위치는 항상 관절좌표계의 운동과 관계없이 일정

- 비교 : 위치가 고정되어 있고 좌표계만 회전하는 경우

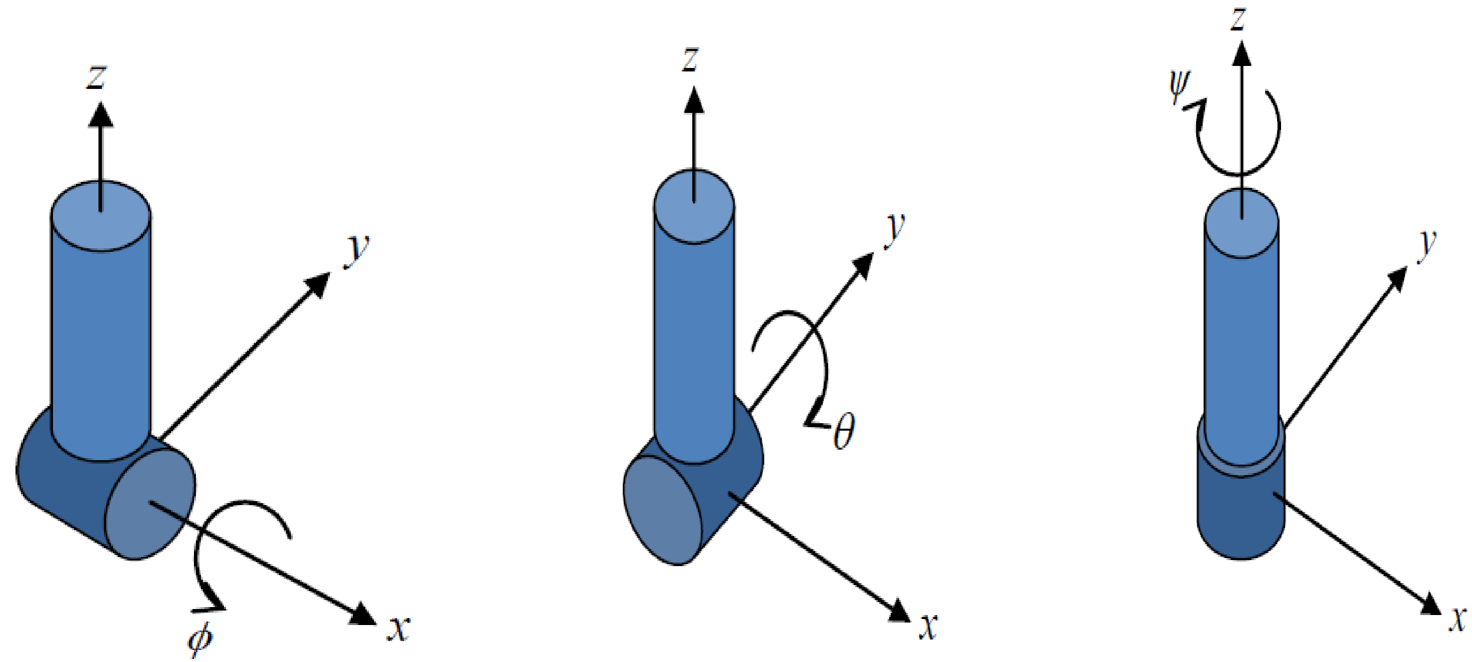
관절, 링크 (Link & Joint)

- 관절-링크쌍



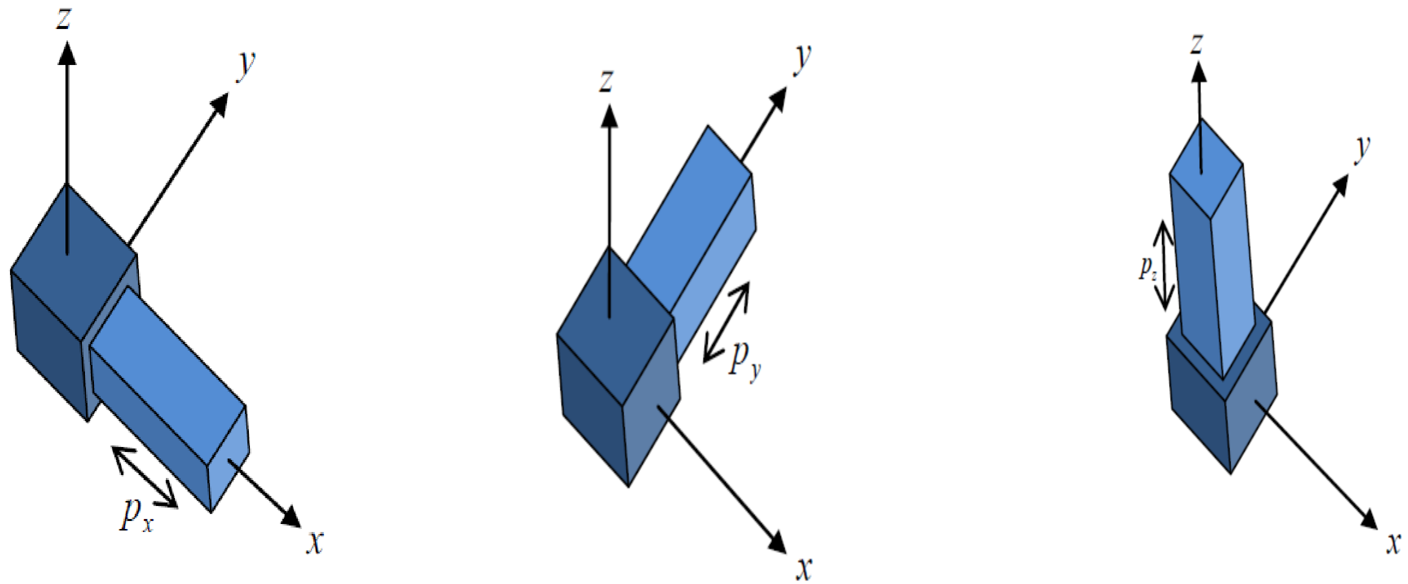
관절 (Joint)

- 회전관절 (Rotational Joint)



관절 (Joint)

- 병진운동 관절 (Translational Joint)

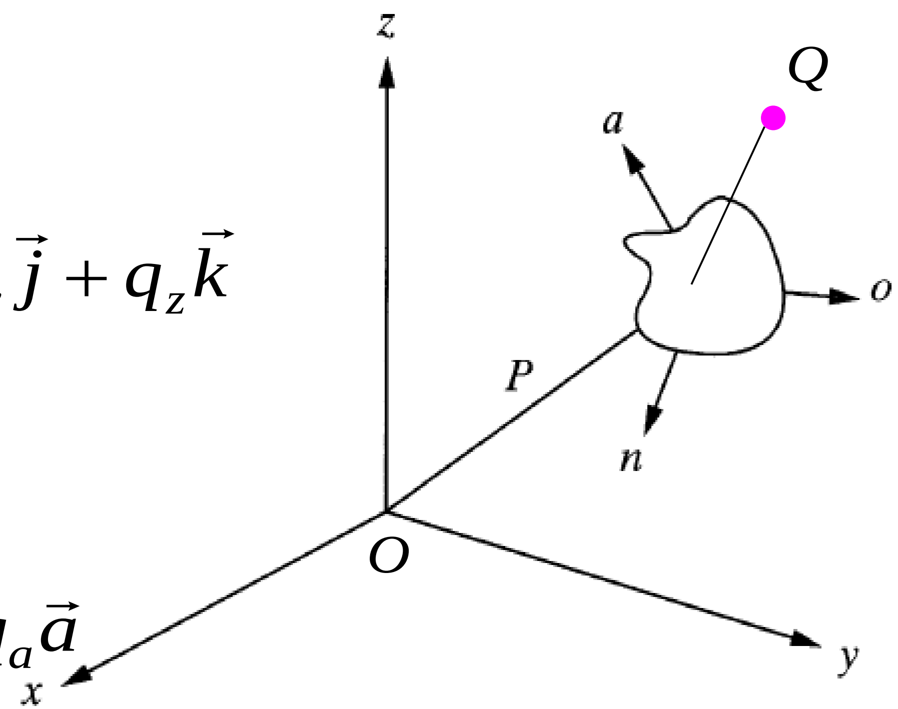


좌표 변환(Coordinate Transformation)

좌표 변환 문제

- 기준 좌표계 :

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{P} + \vec{Q}$$
$$= q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k}$$



- 관절좌표계 : $\vec{Q}$

$$\vec{Q} = q_n\vec{n} + q_o\vec{o} + q_a\vec{a}$$

- Kinematics Problem

$$\vec{Q} = q_n\vec{n} + q_o\vec{o} + q_a\vec{a} \Longleftrightarrow \overrightarrow{OQ} = q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k}$$

Ex. 회전 행렬(Rotation Matrix)

$P_1(10,0,0) \rightarrow p_2(x,y,z)$

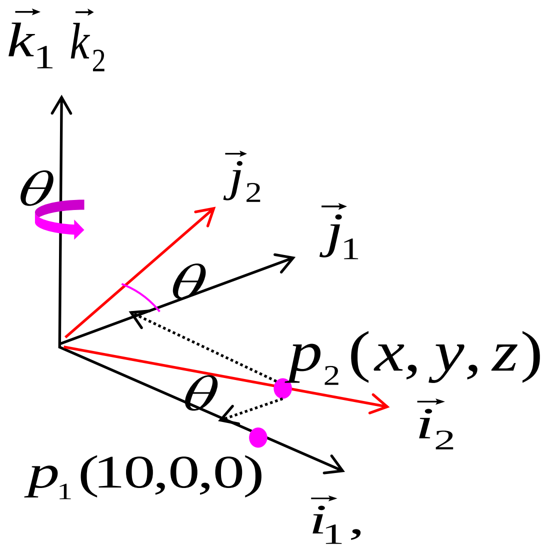
1. $\vec{k}$ 축을 중심으로 45°만큼 회전하였을 때 위치좌표

$$\vec{P}_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$$
$$= 10_1\vec{i}_1 + 0\vec{j}_1 + 0\vec{k}_1$$

$$\vec{P}_2 = x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2$$
$$= 10\vec{i}_2 + 0\vec{j}_2 + 0\vec{k}_2$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{P}_2 = x\vec{i}_1 + y\vec{j}_1 + z\vec{k}_1$$
$$\neq 10_1\vec{i}_1 + 0\vec{j}_1 + 0\vec{k}_1$$



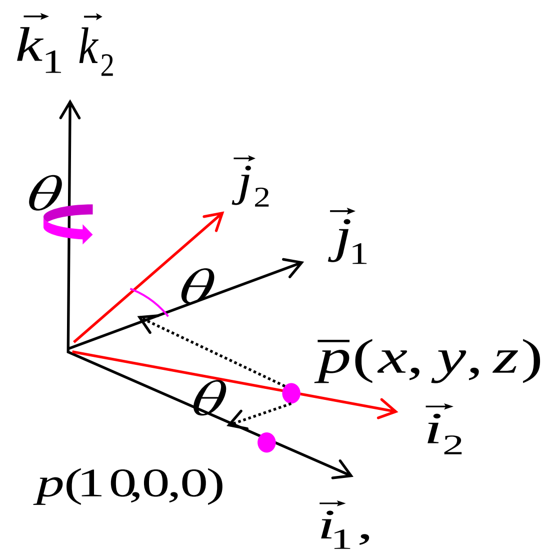
Ex. 회전 행렬(Rotation Matrix)

$P(10,0,0) \rightarrow \overline{p}(x,y,z)$

1. $\vec{k}$ 축을 중심으로 45°만큼 회전하였을 때 위치좌표

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(\vec{k},45^\circ)\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{2}} \\ \frac{10}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

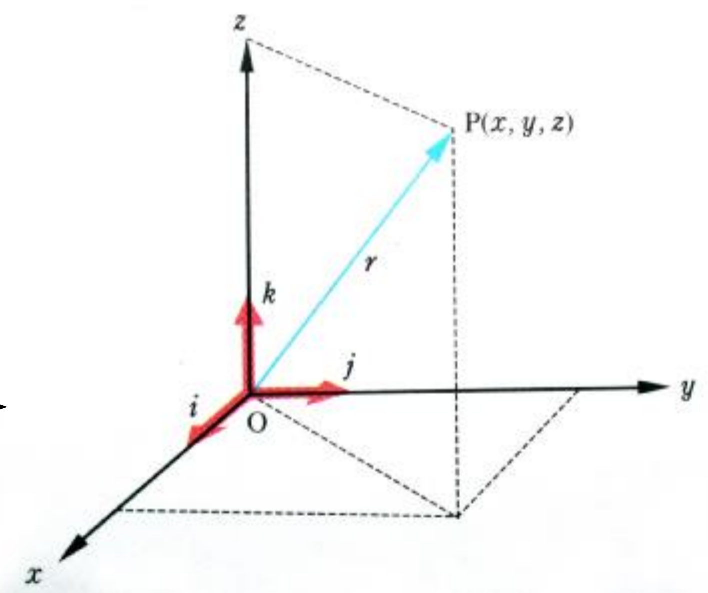


좌표계(Coordinate System)

■ 직교좌표계(Cartesian Coordinate System)

- 3차원 공간상에서 물체의 위치를 표시하기 위하여 세 개의 직교하는 기준 방향 벡터로 구성

위치벡터 3차원 공간에서의 위치벡터



- 기준 방향 단위 벡터 :

$$\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$$

$$\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}$$

- 위치벡터 $\vec{P}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

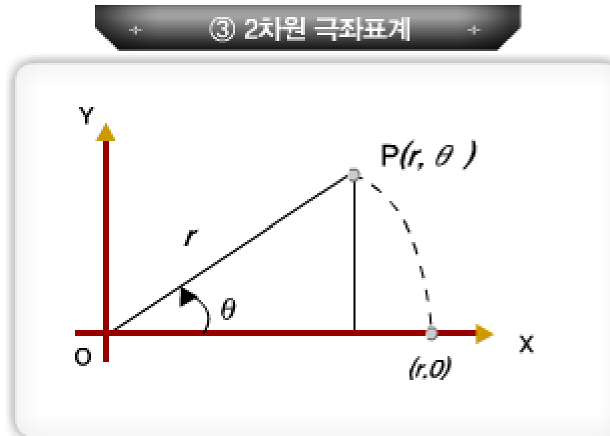
- 좌표 (Coordinates of a Position) : $P=(x,y,z)$

좌표계(Coordinate System)

■ 2차원 극좌표계(Polar Coordinate System)

- 2차원 공간상에서 물체의 위치를 거리와 각도로 표시

- 위치 : $P(r,\theta)$



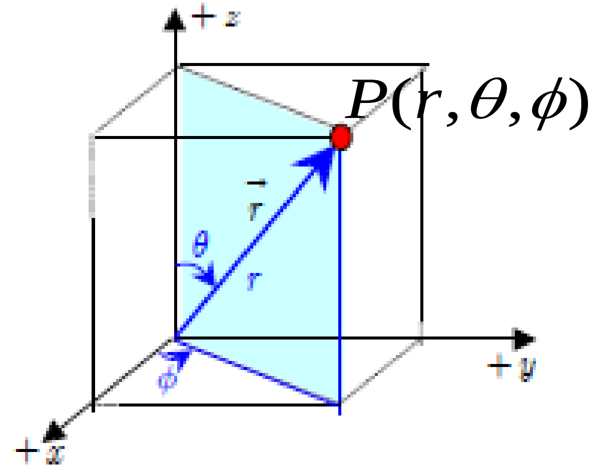
- 직교좌표계와의 관계

$$\vec{P} = r\cos\theta\vec{i} + r\sin\theta\vec{j} + 0\vec{k}$$

좌표계(Coordinate System)

3차원 극좌표계(Polar Coordinate System)

- 3차원 공간상에서 물체의 위치를 거리와 각도로 표시



- 위치 : $P(r,\theta,\phi)$

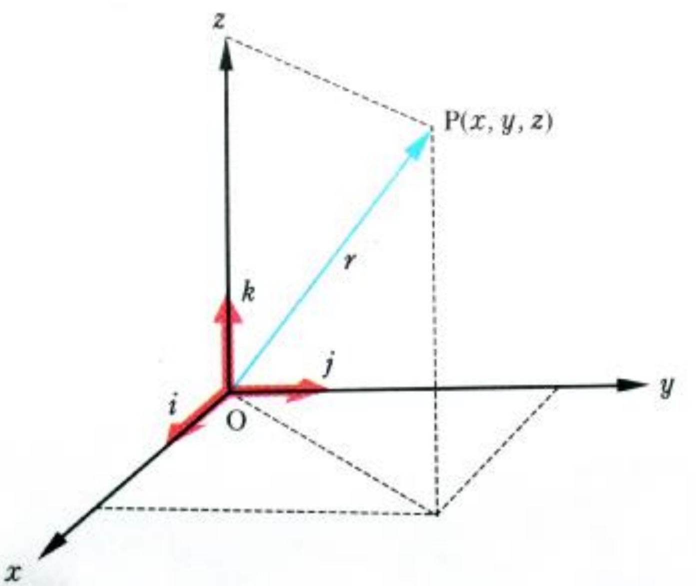
- 직교좌표계와의 관계

$$\vec{P} = r\cos\theta\cos\phi\vec{i} + r\sin\theta\sin\phi\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}$$

위치 벡터

직교좌표계(Cartesian Coordinate System)

위치벡터 3차원 공간에서의 위치벡터



- 위치벡터

$$\vec{P}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

- 모션벡터 (Motion Vector) :

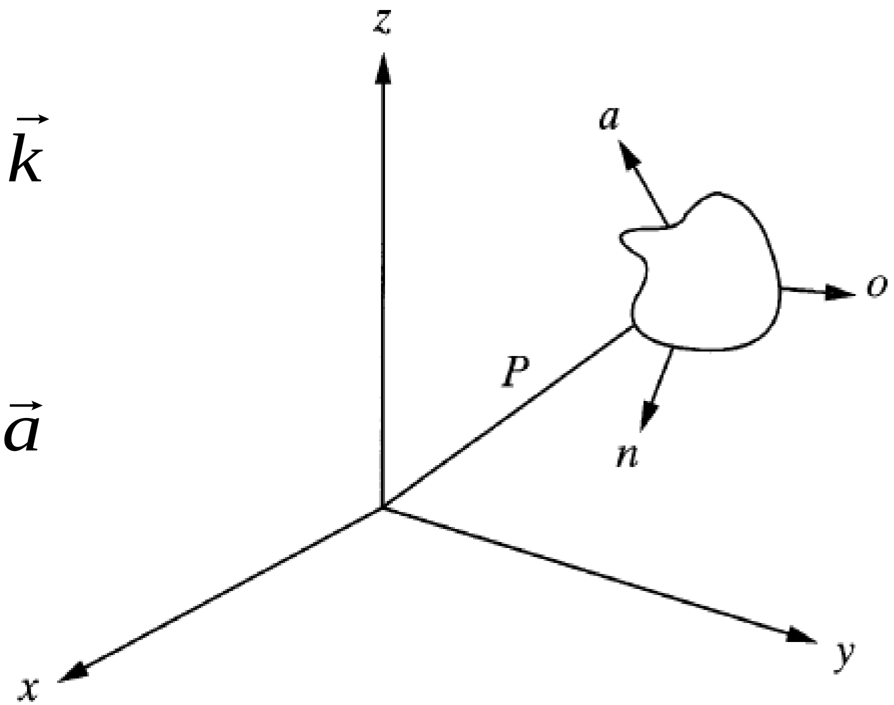
$$P(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\vec{P}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} x(t) &= \vec{P}(t)\cdot\vec{i}, \\ y(t) &= \vec{P}(t)\cdot\vec{j} \\ z(t) &= \vec{P}(t)\cdot\vec{k} \end{aligned}$$

좌표 변환(Coordinate Transformation)

- 좌표계 사이의 관계
  - 기준 좌표계 : $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$
  - 관절좌표계 : $\vec{n},\vec{o},\vec{a}$

$$\vec{n}=n_x\vec{i}+n_y\vec{j}+n_z\vec{k}$$
$$\vec{o}=o_x\vec{i}+o_y\vec{j}+o_z\vec{k}$$
$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$



좌표 변환(Coordinate Transformation)

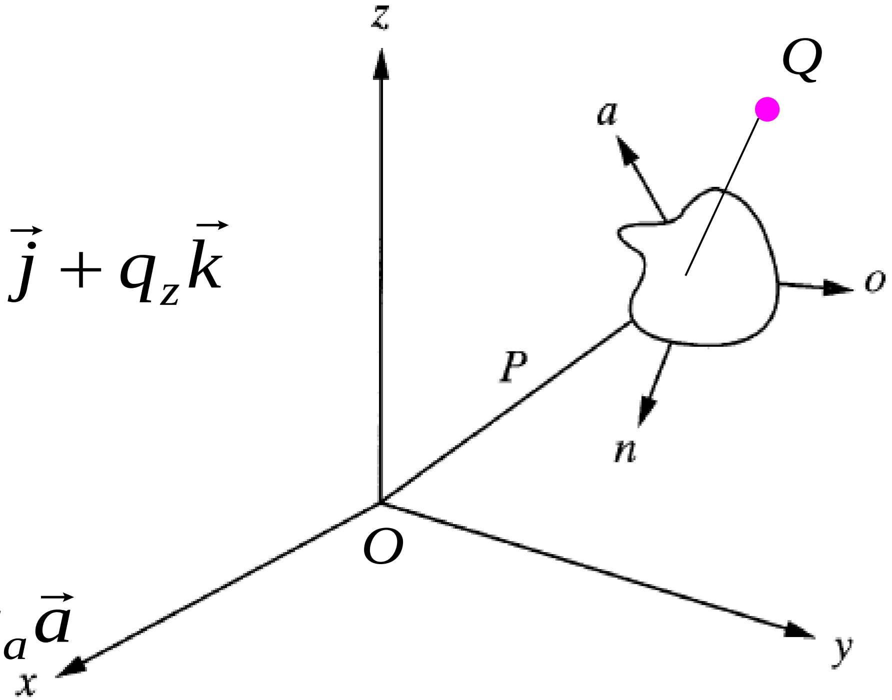
좌표 변환 문제

- 기준 좌표계 :

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{P} + \vec{Q}$$
$$= q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k}$$

- 관절좌표계 : $\vec{Q}$

$$\vec{Q} = q_n\vec{n} + q_o\vec{o} + q_a\vec{a}$$



- Kinematics Problem

$$\vec{Q} = q_n\vec{n} + q_o\vec{o} + q_a\vec{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{OQ} = q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k}$$

좌표 변환(Coordinate Transformation)

- Forward Kinematics Problem

$$\vec{Q} = q_n\vec{n} + q_o\vec{o} + q_a\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OQ} = q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k}$$

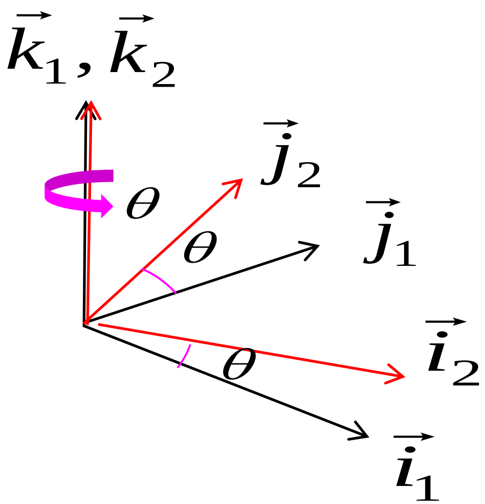
- Inverse Kinematics Problem

$$\overrightarrow{OQ} = q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{Q} = q_n\vec{n} + q_o\vec{o} + q_a\vec{a}$$

회전 행렬(Rotation Matrix)

- 기준 좌표계 $C_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$
- 회전 좌표계 $C_2(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$

기준좌표계 $C_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$의 $\vec{k}_1$ 축을 중심으로 θ 만큼 회전하여 얻어진 새로운 좌표계



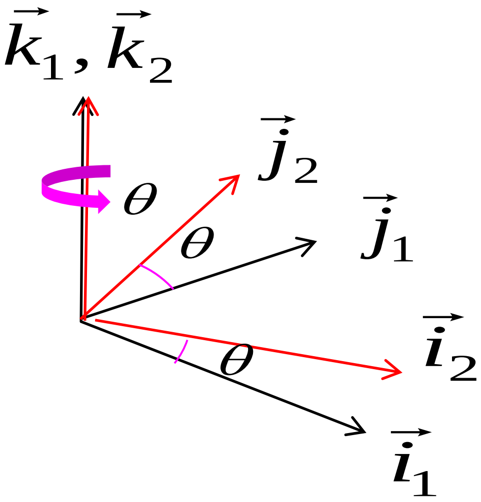
회전 행렬(Rotation Matrix)

- 기준 좌표계 $C_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ 에 대한 회전 좌표계 $C_2(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ 의 단위벡터의 표현

$$\vec{i}_2 = \cos\theta\vec{i}_1 + \sin\theta\vec{j}_1$$

$$\vec{j}_2 = -\sin\theta\vec{i}_1 + \cos\theta\vec{j}_1$$

$$\vec{k}_2 = \vec{k}_1$$

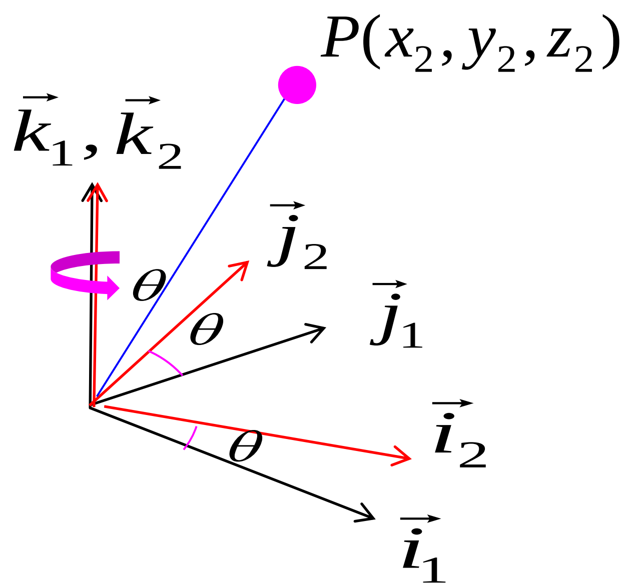


회전 행렬(Rotation Matrix)

- 회전 좌표계 $C_2(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ 에서의 위치 $P(x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{P} = x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2$$

$$\boxed{\vec{P} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1\ ?}$$



- 기준 좌표계 $C_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ 에 대한 $P(x_2, y_2, z_2)$ 의 좌표값 $P(x_1, y_1, z_1)$ 을 구하는 문제 ?

회전 행렬(Rotation Matrix)

- 벡터내적 이용 : $P(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow P(x_1, y_1, z_1)$

$$x_1 = \vec{P}\cdot\vec{i}_1, y_1 = \vec{P}\cdot\vec{j}_1, z_1 = \vec{P}\cdot\vec{k}_1$$

$$\vec{P} = x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2$$

$$x_1 = \vec{P}\cdot\vec{i}_1 = (x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2)\cdot\vec{i}_1$$

$$y_1 = \vec{P}\cdot\vec{j}_1 = (x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2)\cdot\vec{j}_1$$

$$z_1 = \vec{P}\cdot\vec{k}_1 = (x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2)\cdot\vec{k}_1$$

회전 행렬(Rotation Matrix)

- 행렬관계식 : $P(x_2, y_2, z_2) \longrightarrow P(x_1, y_1, z_1)$

$$x_1 = \vec{P}\cdot\vec{i}_1 = (x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2)\cdot\vec{i}_1 = x_2\vec{i}_2\cdot\vec{i}_1 + y_2\vec{j}_2\cdot\vec{i}_1 + z_2\vec{k}_2\cdot\vec{i}_1$$

$$y_1 = \vec{P}\cdot\vec{j}_1 = (x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2)\cdot\vec{j}_1 = x_2\vec{i}_2\cdot\vec{j}_1 + y_2\vec{j}_2\cdot\vec{j}_1 + z_2\vec{k}_2\cdot\vec{j}_1$$

$$z_1 = \vec{P}\cdot\vec{k}_1 = (x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2)\cdot\vec{k}_1 = x_2\vec{i}_2\cdot\vec{k}_1 + y_2\vec{j}_2\cdot\vec{k}_1 + z_2\vec{k}_2\cdot\vec{k}_1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}_2\cdot\vec{i}_1 & \vec{j}_2\cdot\vec{i}_1 & \vec{k}_2\cdot\vec{i}_1 \\ \vec{i}_2\cdot\vec{j}_1 & \vec{j}_2\cdot\vec{j}_1 & \vec{k}_2\cdot\vec{j}_1 \\ \vec{i}_2\cdot\vec{k}_1 & \vec{j}_2\cdot\vec{k}_1 & \vec{k}_2\cdot\vec{k}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}}$$

회전 행렬(Rotation Matrix)

- 회전 행렬 $R(C_1, C_2)$: $P(x_2, y_2, z_2) \longrightarrow P(x_1, y_1, z_1)$

$$
{}^1R_2 = R(C_1, C_2) = \begin{bmatrix} \vec{i}_2 \cdot \vec{i}_1 & \vec{j}_2 \cdot \vec{i}_1 & \vec{k}_2 \cdot \vec{i}_1 \\ \vec{i}_2 \cdot \vec{j}_1 & \vec{j}_2 \cdot \vec{j}_1 & \vec{k}_2 \cdot \vec{j}_1 \\ \vec{i}_2 \cdot \vec{k}_1 & \vec{j}_2 \cdot \vec{k}_1 & \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = {}^1R_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}_2 \cdot \vec{i}_1 & \vec{j}_2 \cdot \vec{i}_1 & \vec{k}_2 \cdot \vec{i}_1 \\ \vec{i}_2 \cdot \vec{j}_1 & \vec{j}_2 \cdot \vec{j}_1 & \vec{k}_2 \cdot \vec{j}_1 \\ \vec{i}_2 \cdot \vec{k}_1 & \vec{j}_2 \cdot \vec{k}_1 & \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}
$$

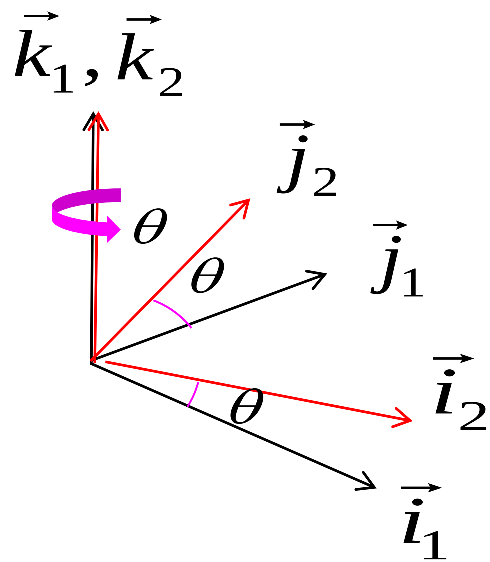
회전 행렬(Rotation Matrix)

- $R(\vec{k}_1,\theta)$: $\vec{k}_1$ 축을 중심으로 θ 만큼 회전하는 경우

$$\vec{i}_2\cdot\vec{i}_1=\cos\theta,\vec{j}_2\cdot\vec{i}_1=\sin\theta,\vec{k}_2\cdot\vec{i}_1=0$$

$$\vec{i}_2\cdot\vec{j}_1=-\sin\theta,\vec{j}_2\cdot\vec{j}_1=\cos\theta,\vec{k}_2\cdot\vec{j}_1=0$$

$$\vec{i}_2\cdot\vec{k}_1=0.\vec{j}_2\cdot\vec{k}_1=0,\vec{k}_2\cdot\vec{k}_1=1$$



$$\boxed{R(\vec{k}_1,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}$$

회전 행렬(Rotation Matrix)

- $R(\vec{i},\theta)$: $\vec{i}$ 축을 중심으로 θ 만큼 회전하는 경우

$$R(\vec{i}_1,\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- $R(\vec{j},\theta)$: $\vec{j}$ 축을 중심으로 θ 만큼 회전하는 경우

$$R(\vec{j},\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

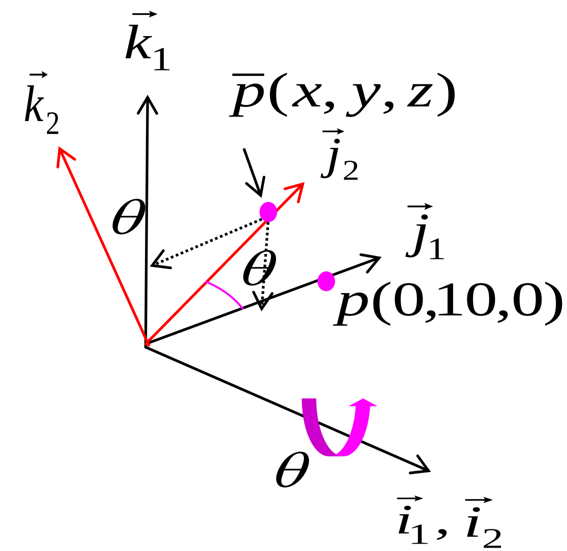
Ex. 회전 행렬(Rotation Matrix)

- $P(0,10,0)$ ➡ $\overline{p}(x,y,z)$

1. $\vec{i}$ 축을 중심으로 45°만큼 회전하였을 때 위치좌표

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(\vec{i},45°)\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{10}{\sqrt{2}} \\ \frac{10}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$



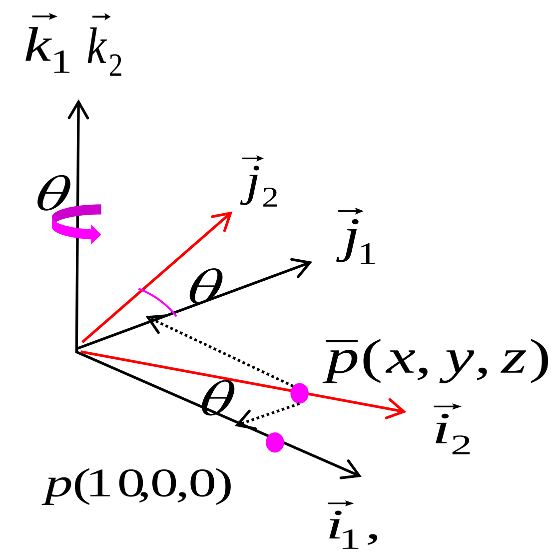
Ex. 회전 행렬(Rotation Matrix)

$P(10,0,0) \rightarrow \bar{p}(x, y, z)$

1. $\vec{k}$ 축을 중심으로 45°만큼 회전하였을 때 위치좌표

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(\vec{k},45^\circ)\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{2}} \\ \frac{10}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$



Ex. 회전 행렬(Rotation Matrix)

- $P(0,10,0)$:

1. $\vec{i}$ 축을 중심으로 45°만큼 회전하였을 때 위치좌표

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(\vec{i},45^\circ)\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- : 축을 중심으로 만큼 회전하는 경우

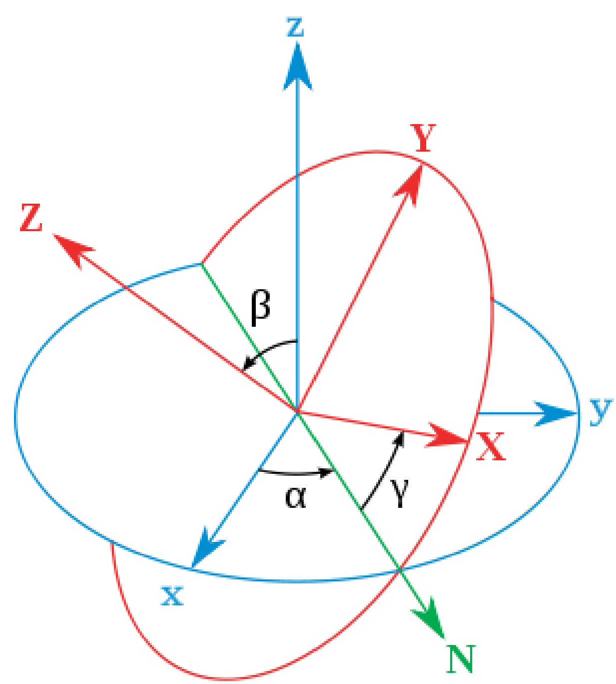
$$R(\vec{j},\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

오일러각(Euler Angle)

1) 기준좌표계의 $\vec{k}_0$ 축을 중심으로 기준좌표계를 회전각 α 만큼 회전시킨다.

2) 회전하여 얻어지는 새로운 좌표계의 $\vec{i}_1$(N)축을 중심으로 회전각 β 만큼 회전시킨다.

3) 새롭게 회전하여 얻어진 좌표계의 새로운 $\vec{k}_2$ (z) 축을 중심으로 회전각 γ 만큼 회전시킨다.



오일러각(Euler Angle)

- 기준좌표계 $C_0(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ 의 $\vec{k}_0$ 축을 중심으로 α 만큼 회전하여 새로운 좌표계 $C_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ 을 얻는 경우

- 회전행렬 ${}^0R_1 = R(\vec{k}_0, \alpha)$

$$\boxed{{}^0R_1 = R(\vec{k}_0, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

오일러각(Euler Angle)

- $C_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ 에서의 위치벡터 $\vec{P} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$

- $\vec{P} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$ 의 $C_0(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ 에서의 표현

$$\vec{P} = x_0\vec{i}_0 + y_0\vec{j}_0 + z_0\vec{k}_0$$

- 두 좌표계에서의 좌표관계

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = {}^0R_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

오일러각(Euler Angle)

- 좌표계 $C_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ 의 $\vec{i}_1$ 축을 중심으로 β 만큼 회전하여 새로운 좌표계 $C_2(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ 을 얻는 경우

- 회전행렬 ${}^1R_2 = R(\vec{i}_1, \beta)$

$$\boxed{{}^1R_2 = R(\vec{i}_1, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}}$$

오일러각(Euler Angle)

- $C_2(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ 에서의 위치벡터 $\vec{P}_2 = x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2$

- $\vec{P}_2 = x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2$ 의 $C_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ 에서의 표현

$$\vec{P}_2 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$$

- 두 좌표계에서의 좌표관계

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = {}^1R_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

오일러각(Euler Angle)

- 좌표계 $C_2(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ 의 $\vec{k}_2$ 축을 중심으로 γ 만큼 회전하여 새로운 좌표계 $C_3(\vec{i}_3, \vec{j}_3, \vec{k}_3)$ 을 얻는 경우

- 회전행렬 ${}^2R_3 = R(\vec{k}_2, \gamma)$

$$\boxed{{}^2R_3 = R(\vec{k}_2, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

오일러각(Euler Angle)

- $C_3(\vec{i}_3, \vec{j}_3, \vec{k}_3)$ 에서의 위치벡터 $\vec{P}_3 = x_3\vec{i}_3 + y_3\vec{j}_3 + z_3\vec{k}_3$
- $\vec{P}_3 = x_3\vec{i}_3 + y_3\vec{j}_3 + z_3\vec{k}_3$ 의 $C_2(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ 에서의 표현

$$\vec{P}_3 = x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2$$

- 두 좌표계에서의 좌표관계

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = {}^2R_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

오일러각 : 회전행렬

1) 기준좌표계의 $\vec{k}_1$ 축을 중심으로 기준좌표계를 회전각 α 만큼 회전시킨다.

2) 회전하여 얻어지는 새로운 좌표계의 $\vec{i}_2$(N)축을 중심으로 회전각 β 만큼 회전시킨다.

3) 새롭게 회전하여 얻어진 좌표계의 새로운 $\vec{k}_3$ (z) 축을 중심으로 회전각 γ 만큼 회전시킨다.

$$
\begin{aligned}
{}^0R_3 &= {}^0R_1\,{}^1R_2\,{}^2R_3 \\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

오일러각(Euler Angle)

- $C_3(\vec{i}_3, \vec{j}_3, \vec{k}_3)$ 에서의 위치벡터 $\vec{P} = x_3\vec{i}_3 + y_3\vec{j}_3 + z_3\vec{k}_3$
- $\vec{P} = x_3\vec{i}_3 + y_3\vec{j}_3 + z_3\vec{k}_3$ 의 $C_0(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ 에서의 표현

$$\vec{P} = x_0\vec{i}_0 + y_0\vec{j}_0 + z_0\vec{k}_0$$

- 두 좌표계에서의 좌표관계

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = {}^0R_1\,{}^1R_2\,{}^2R_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

오일러각 : Gyro 센서

- 자이로센서 : 각속도 측정센서

- 센서 측정 각속도 벡터

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i}_G + \omega_y \vec{j}_G + \omega_z \vec{k}_G$$

$\vec{i}_G, \vec{j}_G, \vec{k}_G$: 자이로 좌표계 단위 벡터

오일러각 : Gyro 센서

- 가정 : 오일럭 각 가정

$$R(\vec{k},\phi),R(\vec{j},\varphi),R(\vec{i},\theta)$$

- 측정 각속도와 오일럭 각 관계

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+R(\vec{i},-\theta)\begin{bmatrix}0\\ \dot{\varphi}\\ 0\end{bmatrix}+R(\vec{i},-\theta)R(\vec{j},-\varphi)\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}$$

오일러각 : Gyro 센서

- 측정 각속도와 오일럭 각 관계

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} w_x &= \dot{\theta} - \dot{\phi}\sin\psi \\ w_y &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ w_z &= -\dot{\psi}\sin\theta + \dot{\phi}\cos\theta\cos\psi \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{\theta} &= w_x + w_y\sin\theta\tan\psi + w_z\cos\theta\tan\psi \\ \dot{\psi} &= w_y\cos\theta - w_z\sin\theta \\ \dot{\phi} &= \frac{w_y\sin\theta + w_z\cos\theta}{\cos\psi} \end{aligned}}$$

오일러각의 계산 : 적분

- 측정 각속도와 오일러 각 관계 이용

$$\dot{\theta} = w_x + w_y \sin\theta \tan\psi + w_z \cos\theta \tan\psi$$
$$\dot{\psi} = w_y \cos\theta - w_z \sin\theta$$
$$\dot{\phi} = \frac{w_y \sin\theta + w_z \cos\theta}{\cos\psi}$$

$$\theta(t_{n+1}) = \theta(t_n + \Delta t) = \theta(t_n) + \dot{\theta}(t_n)\Delta t \quad \Leftarrow \quad \dot{\theta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \theta(t_{n+1}) &= \theta(t_n) + \dot{\theta}(t_n)\Delta t \\ &= \theta(t_n) + \left\{ \omega_x(t_n) + \omega_y(t_n) \sin\theta(t_n) \tan\varphi(t_n) + \omega_z(t_n) \cos\theta(t_n) \tan\varphi(t_n) \right\} \end{aligned}$$