1강. 행렬과 행렬식

1. 행렬

(1) 용어정리

성분 := 행렬 안에 배열된 구성원
(=항=원소) ⇒ a_{ij} ex) $a_{32,1}$

행 := 행렬의 가로줄

열 := 행렬의 세로줄

$m \times n$ **행렬** := m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬
⇒ $(a_{ij})_{m\times n}$ ≒ (a_{ij})

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

주대각선 := 행렬의 왼쪽 위에서 오른쪽 아래를 가르는 선 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

대각성분 := 주대각선에 걸치는, 행과 열의 지표수가 같은 성분 a_{11} a_{22} $\cdots$ a_{ii}

영행렬 := 모든 성분이 0인 행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ex) $A_{ij} - A_{ij} = O_{ij}$

전치행렬 := (a_{ij}) 에 대하여 (a_{ji}) $A \to A^T$

대칭행렬 := $A = A^T$ 인 A $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

정사각행렬 := 행, 열의 개수가 같은 행렬

단위행렬 := 모든 대각성분이 1이고, 그 외의 성분은 0인 정사각행렬
(I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_{2\times 2} \\ I_2 \end{cases}$

(2) 행렬의 연산

$m \times n$ 행렬 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ 에 대해

① 덧셈과 뺄셈

$A \pm B=(a_{ij} \pm b_{ij})$

② 상수배

상수 c 에 대해 $cA=(ca_{ij})$

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

$m \times n$ 행렬 $A=(a_{ij})$ 와 $n \times r$ 행렬 $B=(b_{jk})$ 에 대해

③ 곱셈(행렬의 합성)

$A_{m \times n} \cdot B_{n \times r}$

ex) $A_{2\times3}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B_{3\times2}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$

$AB_{2\times2}=\begin{pmatrix}6&8\\3&4\end{pmatrix}$

$AB=(c_{ik})$: $m \times r$ 행렬 $=AB_{m\times r}$

단, $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

※ 행렬의 곱셈은 교환법칙이 성립되지 않는다. $AB \neq BA$

단, 결합법칙은 성립한다

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

2. 연립일차방정식

(1) 행렬의 표현

예를 들어, $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$ 를

(첨가행렬) ① $\begin{pmatrix}1&2&5\\2&3&8\end{pmatrix}$ 표현 ⇒ 가우스 조던 소거법

② $\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}}_{\text{계수행렬}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}}_{\text{상수행렬}}$ 표현 ⇒ 역행렬 이용

(2) 가우스 조던 소거법

다음 세 가지의 기본 행 연산을 통해 연립일차방정식의 $\boxed{\text{첨가행렬}}$을 기약 행 사다리꼴로 변환하여 해를 구한다.

1) 한 행을 상수배한다.
2) 한 행을 상수배하여 다른 행에 더한다.
3) 두 행을 맞바꾼다.

*기약행 사다리꼴 (reduced row echelon form)은 유일해서 계산순서와 상관없이 같은결과가 나온다

<가우스 행렬 (row echelon Matrix)>
① 영행이 있는경우 반드시 영행이 아닌 행의 밑에 있어야 한다

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 0행이 밑에있다

② 영행이 아닌 행의 첫번째 원소는 항상 1이다 (reading Entry = 1)
③ 영행이 아닌 임의의 연속된 두 행이있을때 i번째 reading Entry는 i+1번째 r.E 보다 항상 왼쪽에 있어야 함

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ reading Entry =1

⇒ ③ 까지만 만족하면 가우스 행렬 (행 사다리꼴) row echelon Form

0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1을 포함한 Column은 1을 제외하고 모두 0이 들어가면 "기약 가우스 행렬"이라고 한다 (기약 행 사다리꼴)

<가우스 소거법 의 순서>
① 연립방정식 → 첨가행렬 $\xrightarrow{\text{by 기본행연산}}$ 가우스 행렬
② 후진대입법으로 해를 찾는다

ex) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ↓ 순서로 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 가우스 행렬 구하고

$x + z = 5$
$y - 2z = 8$ 후진대입법으로 해를 찾는다
$z = 3$
but, 기약 가우스 행렬로 만들어주는게 더 좋다

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

(3) 역행렬 이용

연립일차방정식 $\underset{\text{계수행렬}}{A}\overset{\text{미지수 행렬}}{X} = B$ 에서 A의 역행렬 A^{-1} 가 존재하면, $X = A^{-1}B$ 이다.

$AX = B$
$\underbrace{A^{-1}A}X = A^{-1}B$
$EX = A^{-1}B$
$\therefore X = A^{-1}B$

cf) 역행렬이 존재하지 않는 연립방정식에서 해를 구하면 부정 or 불능이 나온다

예를 들어,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

3. 행렬식

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에서 $\det A = |A| = ad - bc$
즉, 행렬식을 이용하면 Scalar로 수렴한다

(1) 행렬식이란?

정사각행렬 A를 하나의 $\boxed{\text{수}}$로써 대응시키는 특별한 함수. $\det A = |A|$

이때, A 가

1) 0×0 ⇨ $\det(\ ) = 0$
2) 1×1 ⇨ $\det(a) = a$
3) 2×2 ⇨ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

행렬식은 하나의 Scalar로 수렴

4) 3×3 ⇨

M_{ij} : Matrix에서 i행과 j열을 제외한 나머지

$A_{33}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ 일때, $M_{11}=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$$=+a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$$ (부호의순서는 +, −, +, −, ……)

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

ex) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}$ 일때, $|A|$?

$\rightarrow \det A = 1\times\begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}$

$=1\times(0-0)-2(0-0)+3(0-1)$

$=-3$

$\therefore |A|=-3$

5) 4×4 ⇨

$$\det A = a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}-a_{14}M_{14}$$

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$ ⇒ 즉, 차원이 커져도 계산방법은 동일하다

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

(2) 역행렬 ($A\times\boxed{}=I$), $\det A\neq0$

역행렬

행렬식이 0이면 역행렬이 존재하지 않는다. 즉, 행렬식이 0이 아닌 정사각행렬 A 의 역행렬 A^{-1} 은

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}C_{11}&C_{21}&\cdots\\C_{12}&C_{22}&\cdots\\\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}$$ Adj A (수반행렬)

(단, $C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$) $\det A$ 계산할때 이용했던 M_{ij}에서 +, −, +, − ……만 붙여준 것이다.

$A^{-1}=\det A\begin{pmatrix}+&-&+&-&+&\cdots\\-&+&-&+&-&\cdots\\+&-&+&-&+&\cdots\\\vdots\end{pmatrix}$

<역행렬의 성질>

① $\begin{pmatrix}AB=I\\ \det(B)\neq0\end{pmatrix}$ (B = A^{-1}) ⇔ $BA=I$ 이다

즉, $AA^{-1}=I$ ⇔ $A^{-1}A=I$

(증명) $AB=I$, $|B|\neq0$

$B\underbrace{AB}_{I}B^{-1}=BIB^{-1}$

$\therefore BA=I$

ex. $$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{4-6}\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ⟹ <검산> $AA^{-1}=I$?

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

(3) 크래머 공식

$AX=B$ 에서, X를 구하기 위해
$A^{-1}AX=A^{-1}B$
$\therefore X=A^{-1}B$

연립일차방정식 $AX=B$ (계수행렬, 상수행렬) 에서, A가 행렬식이 0이 아닌 정사각행렬일 때,

$$x_j=\frac{\det A_j}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&b_1&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&b_2&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&b_n&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2j}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}}$$

단, $j=1,\cdots,n$ 이고 A_j는 A의 (계수행렬) j번째 열을 B의 (상수행렬) 원소로 바꾼 행렬이다.

ex) 크래머 공식

$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$x=\dfrac{\begin{pmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}}{\det A}$, $y=\dfrac{\begin{pmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{pmatrix}}{\det A}$, $z=\dfrac{\begin{pmatrix}&&b_1\\&&b_2\\&&b_3\end{pmatrix}}{\det A}$

[연 습 문 제]

<문제풀이 Tip ① det A값을 먼저 구해보고
det A=0 이면 부정이나 불능이 나오면 계산할 필요가 없다

1. 다음 연립일차방정식을 가우스 조던 소거법 또는 역행렬을 이용하여 풀이하고, 해에 대해 탐구하시오.

(1) $\begin{cases} 2x+4y-3z=1 \\ x+y+2z=9 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 2x-3y+z=-10 \\ 3x-3y+6z=15 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+4y-2z=6 \\ x+y+2z=9 \\ x+2y-z=4 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+y+2z+4w+v=0 \\ z+w+2v=0 \\ 2x+2y-z+3w=0 \end{cases}$

2. 역행렬이 존재하는 두 정사각행렬 A, B 에 대하여 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 임을 보이시오.

3. 다음 행렬의 역행렬을 구하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

4. 정사각행렬 A 와 A 의 역행렬 A^{-1} 에 대하여 $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$ 임을 증명하시오.

5. 크래머 공식을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하시오.

(1) $\begin{cases} 5x+3y+2=0 \\ 4x-y+5=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2z=6 \\ -x-2y+3z=8 \\ -3x+4y+6z=30 \end{cases}$

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ ×(-3), ×(2) $\begin{pmatrix} -6 & -12 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 6 & 12 & -10 & 0 \end{pmatrix}$

0 0 -1 -3

$\to \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$\to \begin{cases} 2x+4y-3=1 \\ y+z=9 \\ z=3 \end{cases}$

$\to \begin{cases} x=12 \\ y=7 \\ z=3 \end{cases}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -10 \\ 3 & -3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ ×(-3)

① $|A|$

$= 1 \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} (-)(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$

$= (-18-(-3)) + (12-3) + 2(-6-(-9))$

$= 3$ ∴ $|A|=3$ → 해가 존재한다

② 해구하기

$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 & -15 \\ 2 & -3 & 1 & -10 \\ 3 & -3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$

0 0 0 0

$\to \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 & -15 \\ 2 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(문제 1) 기약행 사다리꼴로 만들기 위해선 □ 자리가 1이 되어야 한다, 나머진 0으로 만들어야한다

(1)
$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & -3 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 2 & 9 \\ 3 & 6 & \boxed{-5} & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} \times(-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 7 & 17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} \times(-3) +$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & \boxed{-2} & 7 & 17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix} \times\left(-\frac{1}{2}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix} \times(-1)\,+ \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

0으로 만들어주어야 한다

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \times(-2)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times\left(-\frac{11}{2}\right) +$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times\frac{7}{2} +$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

기약행 사다리꼴 완성

$\therefore x, y, z = 1, 2, 3$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -10 \\ 3 & -3 & 6 & 15 \end{pmatrix} \times(-3)$$

① $|A|$

$= 1 \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} (-)(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$

$= (-18-(-3)) + (12-3) + 2(-6-(-9))$

$= 3 \quad \therefore |A|$ 해가 존재한다

② 해구하기

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -10 \\ 3 & -3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ (1 row)x2 −(2row)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 3 & -3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ (1 row)x(−3) + (3 row)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1 row) + (2 row)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{5} & 25 \\ 0 & 1 & \boxed{3} & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ z=t로 치환

$\rightarrow \begin{pmatrix} x + \quad t = 25 \\ y+3t = 20 \\ t = z \end{pmatrix} \rightarrow \therefore \begin{pmatrix} z = t \\ x = 25-5t \\ y = 20-3t \end{pmatrix}$

t는 임의의 실수

∴ 부정형이다 (해가 무수히 많다)

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ (1 row)x$\frac{1}{2}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ (1 row) −(2row)
(1 row) −(3 row)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & -1 & \boxed{3} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} x+2y-z = 3 \\ -y+3 = 6 \\ 0 = 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ 불능

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2x(1row) −(3 row)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 5x(2row) −(3row)

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ ∴ $v=0$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$v=0$
∴ $w=t$, $y=s$
$z=-t$
$x=-s-2t$

∴ 부정

(추가문제) 기약행 사다리꼴 구하기

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$ (1row)x(-2) + (2row)
(2row) - (3row)x2

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 11 & 28 \end{pmatrix}$$ (1row) x$\frac{1}{2}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 11 & 28 \end{pmatrix}$$ (2row)x-3 +(3row)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$ (3row)x$\frac{1}{8}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+2y-z=1 \\ y+z=4 \\ z=2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x=-1 \\ y=2 \\ z=2 \end{pmatrix}$$

행 사다리꼴 까지만 만들어도 해를 구할 순 있다

↓ 기약행 사다리꼴 만들기

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ (3row) + (2row)
(3row)x-1 +(2row)
(3row)에서 기본행연산을 이용해서 구한다

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ (2row)x-2 + (1row)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ 기약행 사다리꼴 완성

(문제 2)

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

<증명>

$(AB)(B^{-1}A^{-1})$

$= A(BB^{-1})A^{-1}$

$= AA^{-1} = I$

$\therefore \underline{(AB)}\,\underline{(B^{-1}A^{-1})}$

두 항은 역행렬 관계에 있다

(역행렬의 정의 이용)

(문제 3) 역행렬 구하기

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \det A \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6-4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & \underline{0} & 8 \end{pmatrix}$

Tip 3x3 이상의 행렬에서는 det구할때 0을 포함한 행을 기준으로 잡고 시작하면 계산이 수월하다

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$= (6-15) + 8(5-4)$

$= -1$

$\mathrm{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5\times 8 - 0\cdot 3) \\ -(2\times 8 - 1\times 3) \\ (2\times 0 - 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -(2\times 8 - 3\times 0) \\ (1\times 8 - 1\times 3) \\ -(1\times 0 - 2\times 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} (2\times 3 - 15) \\ -(1\times 3 - 2\times 3) \\ (1\times 5 - 2\times 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \mathrm{Adj}A = \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \det A \times \mathrm{Adj}A$

$= -1\begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

(문제 5) 크래머 공식 이용해 해 구하기

(1) $\begin{cases} 5x+3y+2=0 \\ 4x-y+5=0 \end{cases}$ $\qquad x = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}}{\det A} \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}{\det A}$

① 계수, 미지수, 상수 행렬 분리

$\begin{cases} 5x+3y=-2 \\ 4x-y=-5 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \to \det\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}}_{A_1} \qquad \det\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}}_{A_2}$$

② det A 구하기

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = -17$$

③ det A_1 구하기

$$\det A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = 17$$

④ det A_2 구하기

$$\det A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = -17$$

⑤ x, y 구하기

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = -1 \qquad y = \frac{\det A_2}{\det A} = 1 \qquad \therefore\ x=-1,\ y=1$$

(2) $\begin{pmatrix} x & & +2z & =6 \\ -x & -2y & +3z & =8 \\ -3x & +4y & +6z & =30 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 30 \end{pmatrix}$

① det(A)

$$= 1\times\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 0\times\left|\quad\right| + 2\times\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -24 - 20 = -44$$

② x, y, z 해 구하기

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 8 & -2 & 3 \\ 30 & 4 & 6 \end{pmatrix}}{\det A}, \qquad \det A_1 = 6\times\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 0\times\left|\quad\right| + 2\times\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 30 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 40$$

$$\therefore\ x = \frac{40}{-44} = -\frac{10}{11}$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 8 \\ -3 & 4 & 30 \end{pmatrix}}{\det A}, \qquad \det A_3 = 1\times\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 4 & 30 \end{vmatrix} - 0\times\left|\quad\right| + 6\times\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -92 - 60 = -152$$

$$\therefore\ z = \frac{-152}{-44} = \frac{38}{11}$$