3강. 수학적 벡터

→ 4차원 이상의 벡터가 이루고 있는 구조는
수학적 벡터의 본질에서 벗어난다
(물리적 기하적으로 벗어나도 수학적 벡터에서는
상관 없다)

[연 습 문 제]

1. 다음 두 벡터 u, v의 사잇각 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값을 구하시오.
   (1) $u=(-3,\ 5)$, $v=(2,\ 7)$
   (2) $u=(2,\ 1,\ 3)$, $v=(1,\ 2,\ -4)$
   (3) $u=(2,\ 0,\ 1,\ -2)$, $v=(1,\ 5,\ -3,\ 2)$

2. 다음 두 벡터 u, v에 의해 결정되는 평행사변형의 넓이를 구하시오.
   (1) $u=(2,\ 3,\ 0)$, $v=(-1,\ 2,\ -2)$
   (2) $u=(-3,\ 1,\ -3)$, $v=(6,\ -2,\ 6)$

3. 두 점 $(-1,\ -1,\ 0)$, $(2,\ 0,\ 1)$ 을 지나는 직선이 세 점 $(1,\ -1,\ 0)$, $(1,\ 2,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 2)$ 을 지나는 평면과 만나는 교점의 좌표를 구하시오.

4. 두 벡터 $u=(2,\ 0)$, $v=(1,\ 3)$ 를 이용하여 행렬식 $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 의 절댓값이 2차원 공간에서 어떤 기하적인 의미를 갖는지 고찰하시오.

5. 세 벡터 $u=(2,\ 0,\ 0)$, $v=(0,\ 3,\ 0)$, $w=(1,\ 1,\ 1)$ 를 이용하여 행렬식 $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 의 절댓값이 3차원 공간에서 어떤 기하적인 의미를 갖는지 고찰하시오.

1. 대수구조

(1) 대수구조

수 뿐 아니라 수를 대신할 수 있는 모든 것을 대상으로 하는 집합과 그 집합에 부여된 연산이 여러 가지 공리로써 엮인 수학적 대상.

간단히 일련의 연산들이 주어진 집합을 대수구조라고 한다.

Structure

(2) 여러 대수구조

반군 : 집합과 그 위의 결합법칙을 따르는 하나의 이항 연산을 갖춘 대수구조.

모노이드 : 항등원을 갖는 반군.

연산의 결과가 제자신이 나온다

군 : 역원을 갖는 모노이드.

아벨군(가환군) : 교환법칙이 성립하는 군.

환 : 덧셈에 대하여 아벨군, 곱셈에 대하여 반군을 이루고 분배법칙이 성립하는 대수구조.

항등원

덧셈 $A+\square=A$

$\square=0$

∴ 덧셈의 항등원은 0이다

곱셈 $A\times\square=A$

$\square=1$

∴ 곱셈의 항등원은 1이다

가군 : 어떤 환의 원소에 대한 곱셈이 주어지며, 분배법칙이 성립하는 아벨군.

가환환 : 곱셈이 교환법칙을 만족하는 환.

나눗셈환 : 0이 아닌 모든 원소가 역원을 가지며, 원소의 개수가 둘 이상인 환.

체 : 가환환인 나눗셈환. 즉, 사칙연산이 자유로이 시행 될 수 있고 산술의 잘 알려진 규칙들을 만족하는 대수구조.

2. 벡터공간

(1) 벡터공간

체 F에 대한 가군 $(V,+,\cdot)$ 을
벡터공간, V의 원소를 벡터라 한다.
이때 $+$는 벡터의 덧셈이고, $\cdot$는 벡터의 스칼라배다. Vector x k배

참고> $+ : V\times V \to V$ 인 함수
$\cdot : F\times V \to V$ 인 함수

<벡터 공간의 조건>

— Index —
1. 대수구조
(1) 대수구조
(2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
(1) 벡터공간
(2) 선형생성
(3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
(1) 노름공간
(2) 내적공간
(3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

① $(V,+)$ 는 아벨군이다. $(\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w}\in V)$

1) $(\mathrm{u}+\mathrm{v})+\mathrm{w}=\mathrm{u}+(\mathrm{v}+\mathrm{w})$
2) $\mathrm{u}+\mathrm{v}=\mathrm{v}+\mathrm{u}$

교환, 결합 법칙 성립

3) $\mathrm{u}+\vec{0}=\mathrm{u}$ 인 $\vec{0}$가 V에 존재한다.
4) $\mathrm{u}+(-\mathrm{u})=\vec{0}$ 인 $-u$가 V에 존재한다. 역원

② $(V,+,\cdot)$는 F의 가군이다. $(k,m\in F)$ (k, m : scalar , u : vector)

1) $k\cdot(m\cdot\mathrm{u})=(km)\cdot\mathrm{u}$
2) F의 곱셈 항등원 1에 대해 $1\cdot\mathrm{u}=\mathrm{u}$
3) $(k+m)\cdot(\mathrm{u}+\mathrm{v})=k\cdot\mathrm{u}+m\cdot\mathrm{u}+k\cdot\mathrm{v}+m\cdot\mathrm{v}$

— Index —
1. 대수구조
(1) 대수구조
(2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
(1) 벡터공간
(2) 선형생성
(3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
(1) 노름공간
(2) 내적공간
(3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

(2) 선형생성

① 부분벡터공간

벡터공간 V상에서 정의된 덧셈과
스칼라배에 대하여 그 자체로서 벡터공간
이 되는 V의 부분집합 W를 V의
부분벡터공간 또는 부분공간이라 한다.

span 이라고도 한다

② 선형생성

벡터공간 V의 공집합이 아닌 부분집합 $S=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 내의 벡터들의 가능한 모든 $\boxed{\text{선형결합}}$으로 이루어진, V의 부분벡터공간을 S의 (선형)생성 $span(S)$ 이라 한다. 즉,

Vector × Scalar 배 (k)

$$span(S)=\left\{\sum_{i=1}^{n} k_i v_i \,\middle|\, k_i \in F,\ v_i \in S\right\}$$

이때 S가 $span(S)$을 (선형)생성한다라고 한다. n차원 실수공간 Vector

ex) $S=\{(1,0),(0,1)\}$ S의 모든 원소로 부터 선형결합이 가능하다

$F=\mathbb{R}$ (실수)

$\Rightarrow Span(S)=\{k(1,0)+m(0,1) \mid (k,m\in\mathbb{R})\}$ Scalar

$=\{(k,m)\}$

$=\mathbb{R}^2$ (2차원 실수공간 Vector)
2차원 유클리드 공간

⇒ S집합은 2차원 실수공간 Vector를 생성한다

Linear Independence

(3) 선형독립

(집합 내의 Vector 들의 상호 연관성이 있는지 판단하는 개념) 선형독립을 이용하면 계산의 처리속도 ↑

벡터공간 V의 공집합이 아닌 부분집합 $S=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 에 대하여

$$k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_nv_n=\vec{0}$$

$$\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0$$

이면 S가 선형독립(Linearly independence)이라고 한다. 만약 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 외의 다른 해가 존재하면 S가 선형종속(Linear dependence)이라고 한다.

ex) $S_1=\{(1,0),(0,1)\}$
↓ 선형결합
$k_1(1,0)+k_2(0,1)=\vec{0}$
$k_1=k_2=0$
∴ S_1은 선형독립집합
→ k가 오로지 1개존재

$S_2=\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$
↓ 선형결합
$k_1(1,0)+k_2(0,1)+k_3(1,1)$
$k_1=k_2=k_3=0$
or $k_1=1, k_2=1, k_3=-1$
or $k_1=2, k_2=2, k_3=-2$
⋮
∴ S_2는 선형종속집합
→ k가 여러개 존재

3. 여러 벡터공간

(1) 노름공간

노름이 부여된 K−벡터공간 $(V, \|\cdot\|)$ Vector의 원소가 ‖_‖ 안에 들어간다

노름이란 $\forall u, v \in V$, $\forall k \in K$ 에 대해 아래 세 조건을 만족시키는 함수 $\|\cdot\|: V \to [0, \infty)$ 이다. $(K\in\{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$ 실수, 복소수

1) $\|kv\|=|k|\|v\|$
2) $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$
3) $\|v\|=0 \Leftrightarrow v=\vec{0}$

norm의 조건

• norm과 Inner product의 관계
$V=(V_1,V_2)$
$\|V\|=\sqrt{V_1^2+V_2^2}$
$V\circ V=(V_1,V_2)\circ(V_1,V_2)$
$=V_1^2+V_2^2$
∴ $\|V\|=\sqrt{V\circ V}$

내적공간은 norm공간의 상위호환 이다

(2) 내적공간

내적이 부여된 K−벡터공간 $(V,\ \langle\cdot,\cdot\rangle\ )$

내적이란 $\forall \mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w}\in V,\ \forall k\in K$ 에 대해

아래 네 조건을 만족시키는 함수

$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to K$ 이다. $(K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\})$

1) $\langle \mathrm{u}+\mathrm{v},\mathrm{w}\rangle=\langle \mathrm{u},\mathrm{w}\rangle+\langle \mathrm{v},\mathrm{w}\rangle$

2) $\langle k\mathrm{u},\mathrm{v}\rangle=k\langle \mathrm{v},\mathrm{u}\rangle$

3) $\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle=\overline{\langle \mathrm{v},\mathrm{u}\rangle}$ (−를 빼면 실수만에도 만족한다) 켤레복소수 기호

4) $\mathrm{v}\neq\vec{0}\Rightarrow\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle>0$

자기자신 내적

$\vec{v}\cdot\vec{u}$: 실수공간 에서만 정의될때

$\langle\vec{v},\vec{u}\rangle$: 실수, 복소수 공간 모두에서 정의 되는 내적의 기호

ex) (1) $\langle(1,0)+(0,1),(2,3)\rangle$
$=\langle(1,1),(2,3)\rangle$
$=1\times2+1\times3=5$
$=\langle(1,0),(2,3)\rangle+\langle(0,1),(2,3)\rangle$
$=2+3=5$

cf) 내적공식
$\vec{v}\cdot\vec{w}=\|v\|\|w\|\cos\theta$
$=v_1w_1+v_2w_2+\cdots$

(4) $\langle(2,3),(2,3)\rangle$
$=2^2+3^2=9>0$

$\langle U+V,W\rangle$
$=\langle U+V\rangle+\langle U+W\rangle$

$\langle(1,2)+(3,1)\rangle+\langle(3,1),(2,3)\rangle$
$=\langle(1,2)+(3,1)\rangle$

(3) 유클리드공간

음이 아닌 정수 n에 대하여 n차원

유클리드공간 R^n 은 실수집합 R 의 n번

곱집합이며, 이를 n차원 실수 벡터공간

으로써 정의하기도 한다.

이 위에 내적 $\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{u}_i\mathrm{v}_i=\mathrm{u}\bullet\mathrm{v}$ 을

정의하면 점곱, 스칼라곱 이라고도 한다.

실수에 대해서만 inner Product 하면 유클리디안 공간 내에서 정의 된다

4. 기저와 차원

basis Dimension

① 기저

벡터공간 V의 부분집합 B가

선형독립이고 V를 생성할 때, B를 V의

기저라 한다. ② ①

② 차원(기저의 갯수가 차원이다)

B가 벡터공간 V의 기저일 때 B의

원소의 개수를 V의 차원 $\dim(V)$라 한다.

ex) 기저의 예시
$V=R^2$
$B_1=\{(1,0),(0,1)\}\Longrightarrow \mathrm{Span}(B_1)$ V의 부분집합 B_1은 새로운 V를 생성한다 ②
↓ Linear Combination
$k_1(1,0)+k_2(0,1)=\vec{0}$
∴ B_1은 선형 독립이다 ①
$\dim(B_1)=n(B_1)=2$
∴ ①② 모두만족하니까 B_1은 V의 기저이다

$B_2=\{(1,0),(0,1),(1,1)\}\Rightarrow \mathrm{Span}(B_1)$
$k_1(1,0)+k_2(0,1)+k_3(1,1)=\vec{0}$
k는 무수히 많은 해가 존재
∴ B_2은 선형종속이다
$\dim(B_2)$
$=n(B_2)=3$
∴ B_2은 V의 기저가 아니다

Regular Bases

③ 정규기저 (B의 모든 원소 b에 대해 모든 norm 값이 1일때)

$\|b_1\|=1$
$\|b_2\|=1$
$\vdots$
$\|b_n\|=1$

다음 조건을 만족하는 노름공간 V의 기저 B를 정규기저라 한다.

$$\forall b \in B \ , \ \|b\| = 1$$

Orthogonal Bases

④ 직교기저 (B의 임의의 원소 b_1, b_2에서 내적한 결과 $=0$)

다음 조건을 만족하는 내적공간 V의 기저 B를 직교기저라 한다.

$$\forall b_1, \ b_2 \in B \ , \ \langle b_1, b_2 \rangle = 0$$

ex) R^2에 대해 (2차원 유클리디안 공간에서)

	정규기저	표준기저
$B_1 = \{(2,0), (1,1)\}$ (b_1, b_2)	$\|b_1\|=2$, $\|b_2\|=1$ X	$\vec{b_1}\cdot\vec{b_2} = (2\times1)+(0\times1) = 2$ X
$B_2 = \{(1,0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$	$\|b_1\|=1$, $\|b_2\|=1$ O	$\vec{b_1}\cdot\vec{b_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ X
$B_3 = \{(1,1), (1,-1)\}$	$\|b_1\|=\sqrt{2}$, $\|b_2\|=\sqrt{2}$ X	$\vec{b_1}\cdot\vec{b_2} = 0$ O
$B_4 = \{(1,0), (0,1)\}$	$\|b_1\|=1$, $\|b_2\|=1$ O	$\vec{b_1}\cdot\vec{b_2} = 0$ O

$\to$ ∴ Standard Bases

— Index —
1. 대수구조
(1) 대수구조
(2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
(1) 벡터공간
(2) 선형생성
(3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
(1) 노름공간
(2) 내적공간
(3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

⑤ 정규직교기저

정규기저이자 직교기저인 내적공간의 기저를 정규직교기저라 한다. ($\|b_n\|=1$ and $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$)

특히 R^n의 정규직교기저 (n차원 유클리디안 공간 내에서~)

$\{(1,0,\cdots,0), (0,1,\cdots,0), \cdots, (0,0,\cdots,1)\}$

를 표준기저라 한다. ($\|b_n\|=1$ and $\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}=0$)

Standard Bases

[연 습 문 제]

1. 이번 강의에서 배운 대수구조들의 관계도를 작성하시오.

2. 다음의 연산이 부여된 집합이 벡터공간인지 아닌지 판별하고, 아니라면 그 이유를 설명하시오.
   (1) 표준적인 벡터덧셈과 아래의 스칼라배가 부여된 모든 실수 3-튜플 (x, y, z) 의 집합.
   $$k(x, y, z) = (k^2x, k^2y, k^2z)$$
   (2) 표준적인 행렬덧셈과 스칼라배가 부여된 모든 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 꼴의 2×2 대각행렬 집합.

3. 세 벡터 $\mathrm{u}=(-1,0,1,2)$, $\mathrm{v}=(2,1,3,0)$, $w=(3,-1,2,5)$ 에 대하여 다음 중 $span\{\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w}\}$ 의 벡터인 것을 모두 고르시오.

   ① $(0,0,0,0)$　　② $(2,2,2,2)$

   ③ $(3,6,7,-12)$　　④ $(9,0,11,12)$

4. R^4 의 부분집합 $\{(2,2,-6,-2),(2,0,-2,1),(3,1,-5,0)\}$ 가 선형독립인지 아닌지 판별하고, 아니라면 각 벡터를 나머지 두 벡터의 선형결합으로 표현하시오.

5. R^3 에 대해서 ① 정규지만 직교아닌, ② 직교지만 정교아닌, ③ 정규직교인 기저의 예를 드시오.

〈3강 문제풀이〉

(문제2)

(1) $k(x,y,z) \neq (k^2x, k^2y, k^2z)$ 성립하냐?

$(k_1+k_2)^2(x,y,z)$

$=((k_1+k_2)^2x, (k_1+k_2)^2y, (k_1+k_2)^2z)$

$k_1^2(x,y,z)+k_2^2(x,y,z)$

(2) ~~가능하다~~

(문제3).

$u=(-1,0,1,2)$, $v=(2,1,3,0)$, $w=(3,-1,2,5)$ 에 대해 Span{u, v, w}의 벡터인것은?

Linear Combination으로 Span이 되나?

① $(0,0,0,0)$

Linear Combination

$au+bv+cw=(0,0,0,0)$

$a(-1,0,1,2)+b(2,1,3,0)+c(3,-1,2,5)=(0,0,0,0)$

L.C의 결과가 (0,0,0,0)이 나온다면 해볼 필요도 없다

$$\left(\begin{array}{l} -a+2b+3c=0 \\ b-c=0 \\ a+2b+2c=0 \\ 2a+5c=0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{가우스 조던 소거법}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 11 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} a+5c=0 \\ b-c=0 \\ c=0 \\ 3c=0 \end{array}\right) \quad \therefore a,b,c=0$$

대입

② $(2,2,2,2)$

$$\left(\begin{array}{l} -a+2b+c=2 \\ b-c=2 \\ a+2b+2c=2 \\ 2a+5c=2 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \times\left(-\tfrac{1}{5}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$0c=14$

∴ 불능

(문제4)

$\{(2,2,-6,-2),(2,0,-2,1),(3,1,-5,0)\}$ 가 선형 독립인지 판별.

u, v, w

↓ Linear Combination

$a(2,2,-6,2)+b(2,0,-2,1)+c(3,1,-5,0)=\vec{0}$ ⟺ a, b, c 의 해가 1개 이면 선형독립

$$\begin{cases} 2a+2b+3c=0 \\ 2a+c=0 \\ -6a-2b-5c=0 \\ -2a+b=0 \end{cases}$$

가우스 조던 소거법도 가능하지만 빠른 계산을 위해 연립 방정식 으로도 유추할 수 있다

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sim$ 기약행 사다리꼴로 더 변형할 수 없다

$\therefore\ a=-\frac{1}{2}c$

$b=-c$

$$\begin{pmatrix} a=-\frac{1}{2},\ b=-1,\ c=1 \\ a=-1,\ b=-2,\ c=2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

∴ 무수히 많은 해가 존재한다

⇒ 선형 종속이다

선형결합 으로 표현하기)

① $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$, $c=1$ 일때

$-\frac{1}{2}u-1v+1c$

$=-\frac{1}{2}(2,2,-6,-2)-(2,0,-2,1)+(3,1,-5,0)$

② $a=-1$, $b=-2$, $c=2$ 일때

$\Rightarrow -(2,2,-6,-2)-2(2,0,-2,1)+2(3,1,-5,0)$

(문제5)

① regular bases 이고 not Othogonal bases

$\|b_n\|=1$ $\qquad \langle b_1,b_2,b_3\cdots b_n\rangle=0$

$\{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

b_1 $\quad b_2$ $\quad b_3$

$\|b_n\|=(1,1,1)$

$\langle b_1\cdots b_n\rangle=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$

$=\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}\cdot\vec{b_3}$

$=0+0+0=0$

② $\{(2,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

③ $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$