5강. 고윳값과 대각화

[연 습 문 제]

1. n차 다항식의 집합 P_n와 $(n+1)$차 다항식의 집합 P_{n+1}에 대하여 사상 $L : P_n \to P_{n+1}$ 을 다음과 같이 정의했을 때, L이 선형사상임을 보이시오.

   $p(x) \in P_n$ 에 대하여 $L(p(x)) = x\,p(x) \in P_{n+1}$

2. 3차 다항식의 집합 P_3과 2×2 행렬의 집합 $\mathscr{M}_{2\times 2}(R)$ 및 R^4 에 대하여 다음 두 사상

   $L_1 : P_3 \to R^4$, $L_2 : \mathscr{M}_{2\times 2}(R) \to R^4$

   이 모두 동형사상임을 증명하시오.

3. 벡터공간 V의 기저 $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ 에 대하여 자기사상 $L : V \to V$이 $[L]_{B_V}^{B_V} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 을 만족한다. 이때 V의 기저 $B'_V = \{v_1 , v_1 + v_2 , v_1 + v_2 + v_3\}$ 에 대하여 $[L]_{B'_V}^{B'_V}$ 를 구하시오.

4. 행렬 $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ 에 대하여 Rank-Nullity 정리가 성립함을 보이시오.

— Index —

eigenValue　　　　eigenVector

1. 고윳값과 벡터 (eigenValue와 eigenVector는 선형사상의 특성을 간략히 나타내준다)

↳특별한 값이지만, 유일한 값은 아니다.(고유값은 여러개 존재 가능)

(1) 정의 행렬 ⟺ 선형사상
행렬의 고유값 ⟺ 선형사상의 고유값

체 F에 대한 벡터공간 V위의 선형사상 $L: V \to V$ 에 대하여 다음 두 조건

1) $v \neq \vec{0}$

2) $\underbrace{L(v)}_{\text{선형사상}} = \lambda v$

를 만족하는 $\lambda \in F$와 $v \in V$를 각각 고윳값과 고유벡터라고 한다.

ex) $V=(2,3)$, $L \mapsto M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

• 선형사상 에서의 표현 으로부터 eigenValue(λ)와 eigenVector(V)를 표현 할 수 있다
또한, 행렬로도 연결된다

$L(V) = M \times V^T$

$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{V} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \underbrace{-2}_{\lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{V}$ ⟺ 즉 $L(V) = MV = \lambda V$

$\therefore L(V) = \lambda V$ 행렬버전
$\lambda = -2$, $V = (2,3)$

— Index —

=특성방정식

(2) 고유방정식 (eigenValue를 구하는 방법)

$n \times n$ 행렬 M에 대하여 λ가 M의 고윳값이기 위한 필요충분조건은 다음 방정식

$$\det(\lambda I_n - M) = 0$$

을 만족하는 것이다. 이 방정식을 고유방정식이라 하며, 좌변의 식을 고유다항식이라 한다. (단, I_n은 $n \times n$ 단위행렬)

ex) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$의 고유값과 고유벡터 구하기

① λ가 M의 eigenValue 이기위한 조건

$\det(\lambda I_n - M) = 0$

$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 \\ -3 & \lambda+4 \end{pmatrix} = 0$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$　$\therefore \lambda = -1$ or $\lambda = -2$

② $\lambda = -2$가 고유값인가?

$\det\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\det\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}_{-6+6} = 0$

$\therefore \lambda = -2$는 M의 eigenValue 이다

〈Proof〉

※선형사상 버전

$L(V) = \lambda V$

$\Leftrightarrow L(V) = \lambda I(V)$

$\Leftrightarrow \lambda I(V) - L(V) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\lambda I - L)(V) = \vec{0}$　고유벡터($\vec{v} \neq 0$)

선형사상의 결과가 $\vec{0}$가 되게하는 V를 구해야 한다
⇒ kerL을 구하는 것 이다

$\therefore \underbrace{\ker(\lambda I - L)}_{\text{고유공간}}$

※행렬버전

$(\lambda I - M)v = 0$ (영행렬)

$\lambda I - M$의 영공간
⟺ 고유공간
이때의 V는 고유벡터 이다

— Index —

(3) 고유공간

고유공간
고유벡터
고유기저

선형사상 $\lambda I_V - L$ 의 핵을 고윳값 λ의 $\boxed{\text{고유공간}}$이라 한다. (단, I_V는 항등사상)

따라서 고유공간의 영벡터가 아닌 벡터는 $\boxed{\text{고유벡터}}$이다. $\underbrace{\ker(\lambda I_V - L)}_{\text{고유공간}}$ (v) 고유벡터($v \neq \vec{0}$)

또한 L의 고유벡터들로 구성된 V의 기저를 선형사상 L의 고유기저라 한다.

고유공간 ⊃ 고유벡터 ⊃ 고유기저

ex) $\underset{n \times n}{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\lambda = -1$ 일때 eigenVector 구하기

$\lambda = -1$에 대응하는 기저 $= \{(1,1)\}$

$(\lambda I_n - M)V = 0$, $n=2$

$\left(-1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\right)V = 0$

$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$

가우스·조던 $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore v_1 = v_2$, $\begin{pmatrix} v_1 = s \\ v_2 = s \end{pmatrix}$ 이면 $V = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore s=1$, $\begin{pmatrix} v_1 = 1 \\ v_2 = 2 \end{pmatrix}$ $s=2$, $\begin{pmatrix} v_1 = 2 \\ v_2 = 2 \end{pmatrix}$ ....로

s에 아무숫자나 대입하면 무수히 많은 V를 만들수 있다

$\therefore$ V의 기저 $= \{(1,1)\}$

즉, 고유벡터 $= (s, s)$ 단 $s \neq 0$

실제로 맞나 확인해보기

$s=1$, $\begin{pmatrix} v_1 = 1 \\ v_2 = 1 \end{pmatrix}$

$Mv = \lambda V$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{고유벡터}}$

단, $s \neq 0$

2. 대각화

(1) 대각화

$B=P^{-1}AP$

A는 대각화 가능행렬

P는 A를 대각화 한다

A를 대각화해서 B를 만든다

① 정의

두 정사각행렬 A, B에 대하여 방정식

$$B=P^{-1}AP \quad , \ A=PBP^{-1}$$

를 만족하는 대각행렬 B와 가역행렬 P가 존재하면, 행렬 A는 대각화 가능 행렬이라고 한다. 또한 이 경우 행렬 P는 A를 대각화한다 고 한다.

ex) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

$* \ P^{-1}=\frac{2}{1-3}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$* \ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow B$

$* \ P^{-1}AP=B$

$\underbrace{(PP^{-1})}_{E}A\underbrace{(PP^{-1})}_{E}=PBP^{-1}$

$\therefore A=PBP^{-1}$

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ -1 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -9 & 4\end{pmatrix}$

— Index —
1. 고윳값과 벡터
(1) 정의
(2) 고유방정식
(3) 고유공간
2. 대각화
(1) 대각화
(2) 중복도
(3) 닮음불변량
3. C-H 정리

② 정리

$n\times n$ 행렬 A에 대하여 다음 두 명제는 동치이다. $1 \rightleftarrows 2$ " 두 명제는 필요충분조건이다

1) A은 대각화 가능 행렬이다.

2) A은 n개의 선형독립인 $\underbrace{\text{고유벡터}}_{\vec{v}\neq 0}$를 갖는다.

$A_{n\times n}$ 에 대해

A는 대각화 가능하다 $\rightleftarrows$ A는 n개의 선형독립인 $\underbrace{\text{eigenvector}}_{\neq 0}$를 갖는다

— Index —
1. 고윳값과 벡터
(1) 정의
(2) 고유방정식
(3) 고유공간
2. 대각화
(1) 대각화
(2) 중복도
(3) 닮음불변량
3. C-H 정리

③ 대각화하는 방법

$n\times n$ 행렬 A에 대하여

Step 1. (대각화가 가능한지 판단)

n개의 선형독립인 고유벡터를 찾아 대각화 가능 행렬인지 확인한다.

Step 2.

n개의 고유벡터 $v_1, \cdots, v_n$ 로부터 행렬 $P=(v_1 v_2 \cdots v_n)$ 을 만든다.

Step 3.

$P^{-1}AP$ 은 대각행렬이 된다.

ex) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$는 대각화가 가능한가?

① eigenvalue 구하기

$\det(\lambda I_2 - A)=0$

$\det\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1\\ 0 & \lambda-2\end{pmatrix}=0$ $\quad \therefore \lambda=2$ (중근)

② eigenvector 구하기

$(\lambda I_2 - M)V=0$, $\lambda=2$

$\left(\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right)V=0$

$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=0$

$\therefore V=s\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ $s\neq 0$

$\therefore$ 고유기저 $=\{(1,0)\}$

$\therefore$ n=2 이니까, 대각화가 불가능

ex) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$에 대한 P찾기

① eigenvalue , eigenvector 구하기

$\lambda=-1 \longrightarrow \{s, s\} \rightarrow P_1=(1,1)$

$\lambda=-2 \longrightarrow \{2t, 3t\} \rightarrow P_2=(2,3)$

$\therefore P=(P_1, P_2)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ or $P=(P_2, P_1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore P^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore P^{-1}AP=B$

(2) 중복도

① 정의

λ_0가 $n\times n$ 행렬 A의 고윳값이면 이에 대응하는 고유공간의 차원을 λ_0의 기하적 중복도라 한다.

또한 A의 고유다항식에서 $\lambda-\lambda_0$가 인수로 나타나는 횟수를 λ_0의 대수적 중복도라 한다.

② 정리

정사각행렬 A에 대하여 다음 두 명제는 동치이다.

1) A은 대각화 가능 행렬이다.
2) A의 모든 고윳값에 대해서 기하적 중복도와 대수적 중복도는 같다.

(3) 닮음 불변량

① 정의

두 정사각행렬 A, B에 대하여

$$B=P^{-1}AP$$

를 만족하는 가역행렬 P가 존재하면 A, B는 서로 닮은 행렬이라 하고, 기호로 $A\sim B$라 표현한다.

② 닮음 불변량

서로 닮은 두 행렬의 다음과 같은 성질들은 서로 일치한다.

1) 행렬식	7) 고유공간의 차원
2) 가역성	8) 대각성분들의 합
3) rank	9) 대수적 중복도
4) nullity	10) 기하적 중복도
5) 고유다항식	… …
6) 고윳값	…

— Index —
1. 고윳값과 벡터
(1) 정의
(2) 고유방정식
(3) 고유공간
2. 대각화
(1) 대각화
(2) 중복도
(3) 닮음불변량
3. C-H 정리

3. C-H 정리

임의의 정사각행렬 A과 그 고유다항식

$$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^i$$

에 대하여 $f(A)=O$ 이 성립하며, 이를 케일리-해밀턴 정리라고 한다. (단, O는 영행렬)

— Index —
1. 고윳값과 벡터
(1) 정의
(2) 고유방정식
(3) 고유공간
2. 대각화
(1) 대각화
(2) 중복도
(3) 닮음불변량
3. C-H 정리

ex 1) 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 에 대하여 C-H 정리가 성립함을 확인하시오.

ex 2) 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 에 대하여 A^3 를 C-H 정리를 이용하여 A와 단위행렬 I_2 로써 표현하시오.

[연 습 문 제]

1. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) A를 대각화하는 행렬 P를 구하고 대각행렬 $B=P^{-1}AP$ 를 구하시오.

(2) 두 행렬 A, B에 대하여 본문에 제시된 10가지 닮음 불변량을 각각 확인하시오.

2. 행렬 $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $3M^5-5M^4$ 을 C-H 정리를 이용하여 구하시오.