2강. 물리적 벡터

[연 습 문 제]

1. 다음 연립일차방정식을 가우스 조던 소거법 또는 역행렬을 이용하여 풀이하고, 해에 대해 탐구하시오.

(1) $\begin{cases} 2x+4y-3z=1 \\ x+y+2z=9 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 2x-3y+z=-10 \\ 3x-3y+6z=15 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+4y-2z=6 \\ x+y+2z=9 \\ x+2y-z=4 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+y+2z+4w+v=0 \\ z+w+2v=0 \\ 2x+2y-z+3w=0 \end{cases}$

2. 역행렬이 존재하는 두 정사각행렬 A, B 에 대하여 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 임을 보이시오.

3. 다음 행렬의 역행렬을 구하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

4. 정사각행렬 A 와 A 의 역행렬 A^{-1} 에 대하여 $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$ 임을 증명하시오.

5. 크래머 공식을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하시오.

(1) $\begin{cases} 5x+3y+2=0 \\ 4x-y+5=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2z=6 \\ -x-2y+3z=8 \\ -3x+4y+6z=30 \end{cases}$

── Index ──
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

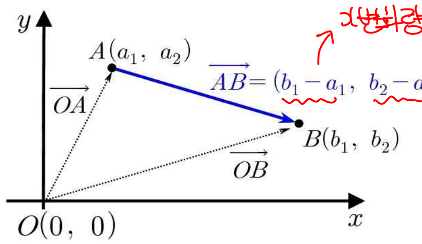
1. 벡터와 좌표계

Scalar ⟷ Vector
크기만 크기와 방향모두

(1) 평면벡터 ; R^2공간 (2차원 평면공간)

R ; 실수

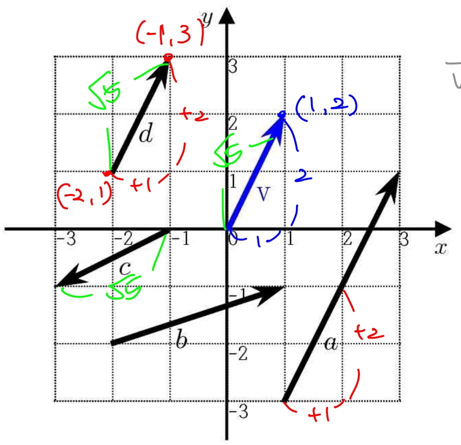
R^2 에서 크기(스칼라)와 방향의 의미를 모두 포함하는 표현 도구.



x변화량, y변화량 으로 생각해야 한다
단순히 (2,3) 으로 점의 좌표로 생각 X

↳ 위치벡터 ; 원점을 시점으로 하는벡터

── Index ──
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현



$\vec{v}$와
· 방향이 같은 벡터 : d, a
(+1증가, +2증가)
· 크기가 같은 벡터 : c, d
· 방향과 크기가 같은 벡터 : d

$\vec{v}$ = (종점 - 시점 , 종점 - 시점)
= (1 - 0 , 2 - 0) = (1, 2)
$\vec{d}$ = (-1-(-2), 3-1) = (1, 2)
∴ $\vec{v} = \vec{d}$

x가 1만큼 변할때, y는 2만큼 변하는 Vector

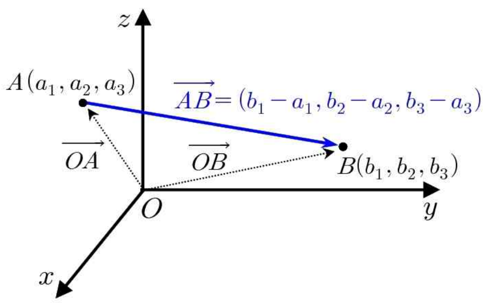
즉, 벡터는 종점, 시점이 중요한게 아니라 크기와 방향이 중요하다

Q. 벡터 v와 같은 벡터는? A. d

── Index ──
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

(2) 공간벡터 ; R^3공간 (3차원 입체공간)

R^3 에서 크기와 방향의 의미를 모두 포함하는 표현 도구.



— Index —
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

(3) n차원 벡터

R^n 상의 벡터 $\mathrm{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$
$= \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \cdots, b_n - a_n)$

- 영벡터 $\vec{0} = \mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$
- 두 벡터 $\mathrm{v} = (v_1, \cdots, v_n)$, $\mathrm{w} = (w_1, \cdots, w_n)$ 가 같다. $\Leftrightarrow v_1 = w_1, \cdots, v_n = w_n$

— Index —
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

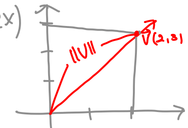
2. 벡터의 연산

(1) 노름

- 벡터의 크기 (또는 길이) 라고도 하며,
$$\|\mathrm{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$
- 노름이 1인 벡터를 단위벡터라고 한다.
  ※ 정규화 : $\dfrac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|} = \hat{v}$
- $e_1 = (1,0, \cdots,0)$, $e_2 = (0,1, \cdots,0)$ 등을 표준단위벡터라고 한다.

→ n차원 까지의 Vector를 $V=(V_1, V_2, \cdots V_n)$으로 정의한다면
$\underbrace{V_1 e_1}_{(V_1, 0, 0 \cdots)} + \underbrace{V_2 e_2}_{(0, V_2, 0, 0 \cdots)} + \cdots V_n e_n$ 으로 정의할수 있다

ex)



$\|V\| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$
정규화 $(\hat{v}) = \dfrac{V}{\|V\|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$
이때의 $\|V\| = \sqrt{\dfrac{4}{13} + \dfrac{9}{13}} = 1$
∴ $\vec{v}$의 $\|V\|$은 정규화를 거치면 크기가 1인 벡터가 된다

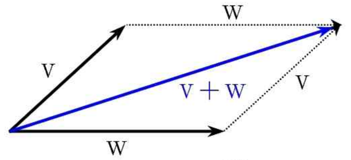
— Index —
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

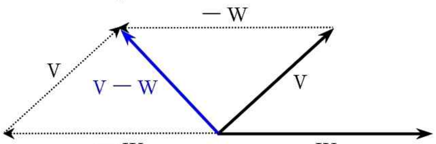
(2) 선형결합

↳ 직선의 형태

① 벡터의 덧셈과 뺄셈

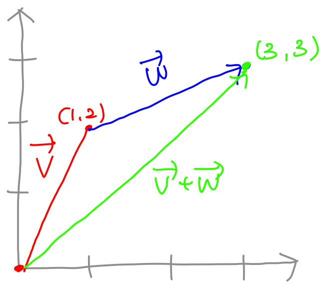
$$\mathrm{v} \pm \mathrm{w} = (v_1 \pm w_1, \cdots, v_n \pm w_n)$$



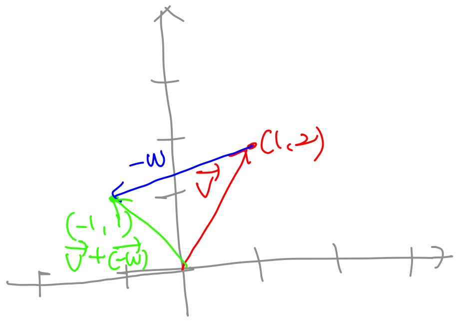


$\vec{v}$ 에서 $\vec{w}$의 반대 방향 만큼인 빼 주면 된다

벡터의 덧셈
① $V=(1,2)$, $W=(2,1)$



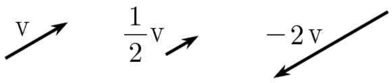
② 벡터의 뺄셈 $-W=(-2,-1)$



— Index —
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

② 벡터의 실수배

$$k\mathrm{v} = (kv_1, kv_2, \cdots, kv_n)$$



③ 선형(일차)결합 ⟵⟶ 비선형 결합

예) $w = k^2 v_1 + k^3 v_2 + \cdots$
$w = \sqrt{k} v_1 + \sqrt[3]{k} v_2 + \cdots$

즉 선형결합은 $\vec{v}$에 실수배한 것 만이다

R^n 의 벡터 $\vec{w}$ w 가 임의의 실수 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 에 대하여
실수배

$$\mathrm{w} = k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + \cdots + k_r\mathrm{v}_r \quad \text{(Vector에 실수배(k) 한 모양)}$$

의 형태로 쓰여지면, w 를 $\mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_r$ 의 선형(일차)결합이라 한다.

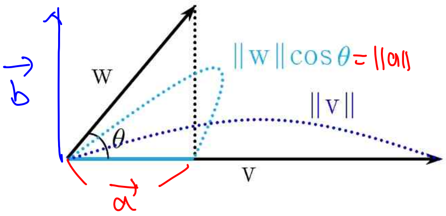
— Index —
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

(3) 스칼라 곱 (W가 V에 미치는 힘의 크기)

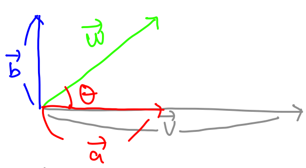
한 벡터(w)가 다른 벡터(v)의 방향에 대해 가한 힘에 의해 변화된 스칼라(크기). 점곱 또는 내적.

$$\mathrm{v} \bullet \mathrm{w} = \|\mathrm{v}\|\|\mathrm{w}\|\cos\theta$$
$$= v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n$$

(θ 는 두 벡터 v, w 가 이루는 각)



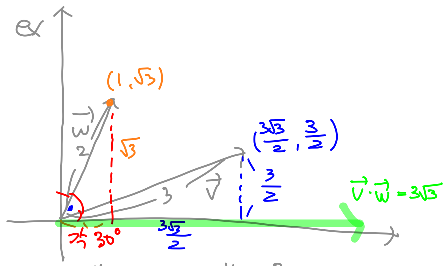
ex)



$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|V\| \cdot \|a\|$
$a+b$ → $\|a\|$
$\|W\| \times \cos\theta$ → $\frac{\|a\|}{\|W\|}$

↳ 이 경우에는 $\vec{w}$가 $\vec{v}$에 미치는 힘의 크기는 $\|a\|$ 만큼이다

ex



$\|W\| = 2$, $\|V\| = 3$

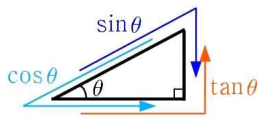
$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|V\| \times \|W\| \times \cos 30°$
$= 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= 3\sqrt{3}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3 + \cdots$
$= (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}) \bullet (1, \sqrt{3})$
$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

∴ 내적의 결과는 norm 값을 곱하게되고 Scalar 값을 갖게된다

— Index —
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

※ 삼각함수 표



θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0 ($\frac{\sqrt{0}}{2}$)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1 ($\frac{\sqrt{4}}{2}$)
$\cos\theta$	1 ($\frac{\sqrt{4}}{2}$)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0 ($\frac{\sqrt{0}}{2}$)
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

— Index —
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

※ 벡터의 연산 성질

R^n 상의 벡터 u, v, w 와 스칼라 k, m 에 대하여 다음이 성립한다.

ⓐ u＋v＝v＋u
ⓑ (u＋v)＋w＝v＋(u＋w)
ⓒ $\mathrm{u}+\vec{0}=\vec{0}+\mathrm{u}=\mathrm{u}$
ⓓ $\mathrm{u}+(-\mathrm{u})=\vec{0}$
ⓔ $k(\mathrm{u}+\mathrm{v})=k\mathrm{u}+k\mathrm{v}$
ⓕ $(k+m)\mathrm{u}=k\mathrm{u}+m\mathrm{u}$
ⓖ $k(m\mathrm{u})=(km)\mathrm{u}$
ⓗ 1u＝u
ⓘ $0\mathrm{u}=\vec{0}$, $k\vec{0}=\vec{0}$

실수배 (k)

ⓙ u • v ＝ v • u
ⓚ $\vec{0}\bullet\mathrm{u}=\mathrm{u}\bullet\vec{0}=0$
ⓛ u • (v＋w) ＝u • v＋u • w
ⓜ (u＋v) • w ＝u • w＋v • w
ⓝ $k(\mathrm{u}\bullet\mathrm{v})=(k\mathrm{u})\bullet\mathrm{v}=\mathrm{u}\bullet(k\mathrm{v})$

내적 (스칼라곱) 에서도 교환·결합·분배 법칙이 성립

— Index —
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

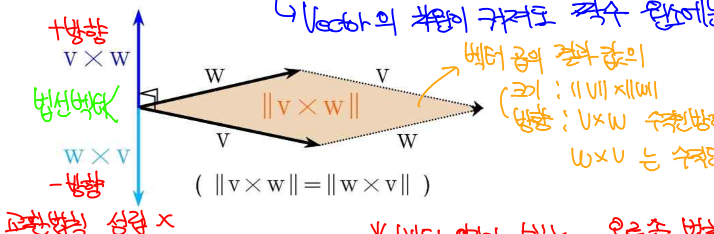
(4) 벡터 곱

(벡터의 곱은 R^3 공간 에서만 정의되고 그 결과 값은 Vector 이다)

방향은 두 벡터에 동시에 수직이고, 크기는 두 벡터의 평행사변형의 면적인 R^3 상의 벡터. 가위곱 또는 ~~외적~~. 외적표현은 좋지않다 외적은 Tensor곱이기 때문에

$$\mathrm{v}\times\mathrm{w}=\left(\begin{vmatrix}v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}v_1 & v_3\\ w_1 & w_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix}\right)$$

↳ Vector의 차원이 커져도 짝수 원소에는 － 붙여줘야 한다



(‖v × w‖＝‖w × v‖)

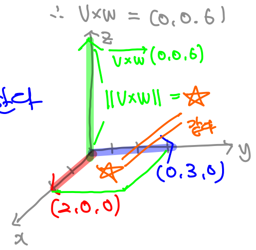
벡터 곱의 결과 값의 (크기 : ‖v‖×‖w‖ 방향 : v×w 수직인방향)을 갖는다
w×v 는 수직인 음수방향

ex) v=(2, 0, 0) , w=(0, 3, 0)

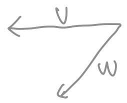
$$\mathrm{v}\times\mathrm{w} = \begin{matrix}2&0&0\\0&3&0\end{matrix},\ \begin{matrix}2&0&0\\0&3&0\end{matrix},\ \begin{matrix}2&0&0\\0&3&0\end{matrix}$$

x축 y축 z축.

$$=\left(\begin{vmatrix}0&0\\3&0\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}2&0\\0&0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}\right)$$
$$=(0, 0, 6)$$
$$\therefore\ \mathrm{v}\times\mathrm{w}=(0, 0, 6)$$



※ 벡터 외적의 부호는 오른손 법칙 이용



v×w = (+)
w×v = (−)

— Index —
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

※ 벡터 곱의 성질

R^3 상의 벡터 u, v, w 와 스칼라 k 에 대하여 다음이 성립한다. 단, 두 벡터의 순서를 바꾸면 부호만 반대이다

ⓐ u×v ＝ −(v×u) 벡터의 곱은 교환법칙, 결합법칙이 성립하지 않는다
ⓑ u×(v＋w) ＝ (u×v)＋(u×w)
ⓒ (u＋v)×w ＝ (u×w)＋(v×w)

분배법칙 성립

ⓓ $k(\mathrm{u}\times\mathrm{v})=(k\mathrm{u})\times\mathrm{v}=\mathrm{u}\times(k\mathrm{v})$ 실수배 성립
ⓔ $\mathrm{u}\times\vec{0}=\vec{0}\times\mathrm{u}=\vec{0}$
ⓕ $\mathrm{u}\times\mathrm{u}=\vec{0}$ → 동일한 벡터의 면적은 0 이다

ex) 결합법칙 × 예시

$$(\underbrace{\vec{v}\times\vec{w}}_{\vec{u}})\times\vec{w}=\vec{u}\times\vec{w}$$
$$\neq$$
$$\vec{v}\times(\underbrace{\vec{w}\times\vec{w}}_{\vec{0}})=\vec{0}$$

— Index —

1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

3. 벡터의 응용

(1) 직선의 표현

원점이 시점인 벡터

R^2 또는 R^3 에서 위치벡터가 a인 점 A 를 지나며 방향벡터가 v인 직선 상의 임의의 점 X 의 위치벡터 x는

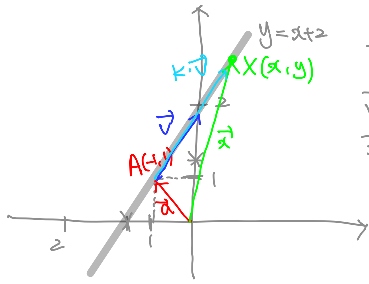
ㄴ 직선이 놓여나는 방향을 지시하는 Vector

$$\mathrm{x} = a + k\mathrm{v}$$

임의의 점 (x, y, z) 방향벡터

을 만족한다. (단, k는 임의의 실수)

ex) 2차원 평면상에서 주어진 직선의 방정식을 벡터로 표현해보기

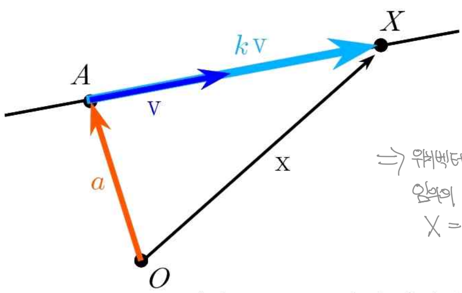


$\vec{a} = (-1, 1)$
$\vec{v} = (1, 1)$ or $(-1, -1)$
$\vec{x} = (x, y)$

$\vec{x} = \vec{a} + k\vec{v}$
$(x, y) = (-1, 1) + k(1, 1)$
$= (-1, 1) + (k, k)$
$= (k-1, k+1)$

$\therefore \begin{cases} x = k-1 \\ y = k+1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $k = x+1$, $k = y-1$ $\Leftrightarrow x+1 = y-1$
$\therefore y = x+2$
$\Leftrightarrow$

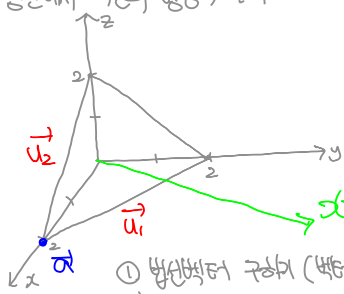
— Index —
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현



⇒ 위치벡터 (0, 0) 에서 임의의 점 X (x, y, z)가 주어질때
임의의 점 A를 이용해 구하고자 하는 벡터
X = a + kV
적당한 실수배

(단, O 는 원점이다.) 해서 구할 수 있다

ex) 3차원 공간에서 직선의 방정식 구하기



$x+y+z=2$

— Index —
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

(2) 평면의 표현 (3차원 공간에서 임의의 점에 대한 평면의 표현)

R^3 에서 위치벡터가 a인 점 A 를 지나며 $\boxed{\text{법선벡터}}$가 v인 평면상의 임의의 점 X 의 위치벡터 x는

$$(\mathrm{x} - a) \cdot \mathrm{v} = 0$$

내적

을 만족한다. 평면상에서 수직인 벡터

※ $\boxed{\text{법선벡터}}$는 평면상의 서로 다른 두 직선의 방향벡터들의 벡터 곱으로써 구하면 용이하다.

① 법선벡터 구하기 (벡터의 곱)

$\vec{u_1}$과 $\vec{u_2}$에 동시에 수직인 벡터 ⇒ 법선벡터

$\vec{u_1} = (2, 0, 0) \to (0, 2, 0)$
$= (-2, 2, 0) \Rightarrow (-1, 1, 0)$
$\vec{u_2} = (2, 0, 0) \to (0, 0, 2)$
$= (-2, 0, 2) \Rightarrow (-1, 0, 1)$

법선 벡터의 수직인 성질을 이용하는 것이지 벡터의 크기 (norm) 은 상관이 없다 ⇒ 간단하게 나눠줄수 있다

$\vec{v}$ (법선벡터) $\Rightarrow \begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} = (1, -(-1), 1) = (1, 1, 1)$.

※ $\vec{a} = (2, 0, 0)$, $\vec{x} = (x, y, z)$

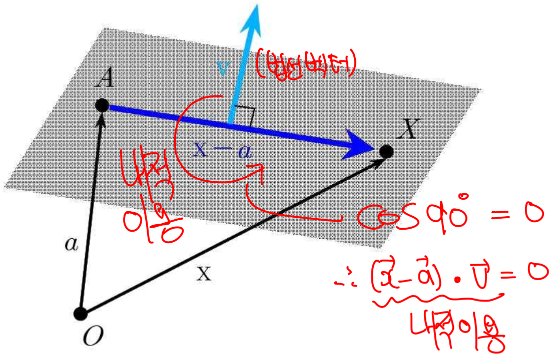
$\boxed{(x - a) \times \vec{v} = 0}$

$(x-2, y-0, z-0) \times \vec{v} = 0$

$\boxed{\therefore x + y + z = 2}$ → 평면의 방정식

— Index —

1. 벡터와 좌표계
   (1) 평면벡터
   (2) 공간벡터
   (3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
   (1) 노름
   (2) 선형결합
   (3) 스칼라 곱
   (4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
   (1) 직선의 표현
   (2) 평면의 표현



(단, O 는 원점이다.)

예) $\vec{v}$가 $\vec{x}-\vec{a}$ 에 미치는 힘의 크기는 당연히 0 이다
90°

[연 습 문 제]

1. 다음 두 벡터 u, v의 사잇각 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값을 구하시오. <내적 문제>
   (1) $\mathrm{u}=(-3,\ 5),\ \mathrm{v}=(2,\ 7)$
   (2) $\mathrm{u}=(2,\ 1,\ 3),\ \mathrm{v}=(1,\ 2,\ -4)$
   (3) $\mathrm{u}=(2,\ 0,\ 1,\ -2),\ \mathrm{v}=(1,\ 5,\ -3,\ 2)$

2. 다음 두 벡터 u, v에 의해 결정되는 평행사변형의 넓이를 구하시오. < 벡터 곱 연산의 결과인 norm → 평행사변형의 면적 >
   (1) $\mathrm{u}=(2,\ 3,\ 0),\ \mathrm{v}=(-1,\ 2,\ -2)$
   (2) $\mathrm{u}=(-3,\ 1,\ -3),\ \mathrm{v}=(6,\ -2,\ 6)$

① 직선의 방정식

3. 두 점 $(-1,\ -1,\ 0)$, $(2,\ 0,\ 1)$ 을 지나는 직선이 세 점 $(1,\ -1,\ 0)$, $(1,\ 2,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 2)$ 을 지나는 평면과 만나는 교점의 좌표를 구하시오. ② 평면의 방정식
   ① ② 연립
   평면에 직선이 뚫고 지나가는 모양

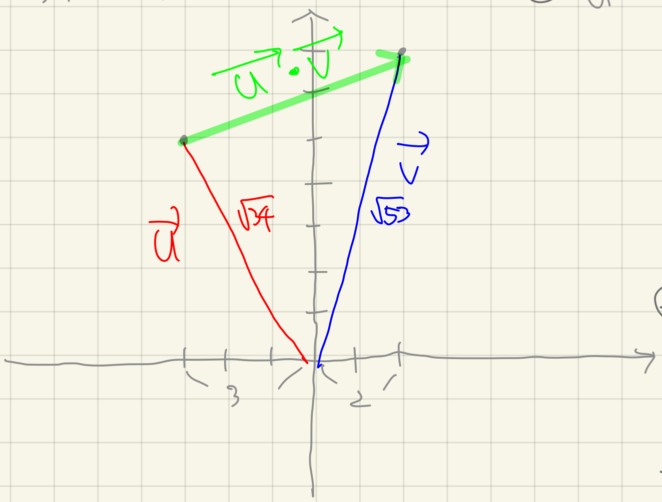
4. 두 벡터 $\mathrm{u}=(2,\ 0),\ \mathrm{v}=(1,\ 3)$ 를 이용하여 행렬식 $\det\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$ 의 절댓값이 2차원 공간에서 어떤 기하적인 의미를 갖는지 고찰하시오.

5. 세 벡터 $\mathrm{u}=(2,\ 0,\ 0),\ \mathrm{v}=(0,\ 3,\ 0),\ \mathrm{w}=(1,\ 1,\ 1)$ 를 이용하여 행렬식 $\det\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ 의 절댓값이 3차원 공간에서 어떤 기하적인 의미를 갖는지 고찰하시오.

〈2장 문제풀이〉

(문제 1) 두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$ 에 대해 사잇각 $\cos\theta$ 구하기

(1) $\vec{u} = (-3, 5)$, $\vec{v} = (2, 7)$



① $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|u\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|u\| \times \|v\|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\sqrt{34}\times\sqrt{54}}$$

15
2
34
54
136
170
1736

② $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-3, 5)\cdot(2, 7)$

$= (-3\times2) + (5\times7) = 29$

$$\therefore \cos\theta = \frac{29}{\sqrt{1736}}$$

(2) $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (1, 2, -4)$

① $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|v\| \times \|u\| \times \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|v\|\|u\|}$$

$\|u\| = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{14}$

$\|v\| = \sqrt{1^2+2^2+(-4)^2} = \sqrt{21}$

② $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2, 1, 3)\cdot(1, 2, -4)$

$= 2+2-12 = -8$

③ $$\cos\theta = \frac{-8}{\sqrt{14}\times\sqrt{21}} = \frac{-8}{7\sqrt{6}} = \frac{-8\sqrt{6}}{42} = \frac{-4\sqrt{6}}{21}$$

(3) $u = (2, 0, 1, -2)$, $v = (1, 5, -3, 2)$

① $u\cdot v = \|u\| \|v\| \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|u\|\|v\|}$$

$\|u\| = \sqrt{4+0+1+4} = 3$

$\|u\| = \sqrt{1+25+9+4} = \sqrt{39}$

② $u\cdot v = 2+0+(-3)+(-4)$

$= -5$

③ $$\cos\theta = \frac{-5}{3\sqrt{39}}$$

(문제2) $\vec{u}, \vec{v}$ 에 의해 결정되는 평행사변형 넓이 구하기

$\overrightarrow{u \times v}$ 의 $\|\overrightarrow{u \times v}\|$와 같다

(1) $u=(2,3,0)$, $v=(-1,2,-2)$

① $\overrightarrow{u \times v} \Rightarrow \begin{matrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{matrix} \Rightarrow (-6, -(-4), 7)$

$\therefore \overrightarrow{u \times v} = (-6, 4, 7)$

② $\|\overrightarrow{u \times v}\| = \sqrt{36+16+49} = \sqrt{101}$

(2) $u=(-3,1,-3)$ $v=(6,-2,6) \times (-\frac{1}{2})$ → $u=(-3,1,-3)$
$v=(-3,1,-3)$

$\therefore$ 벡터의 성질에 의해 u와 v는 (크기가 같고 방향이 반대인) vector 이여서 0가 나온거다

① $\overrightarrow{u \times v} = \begin{matrix} -3 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 6 \end{matrix} \Rightarrow (0, -0, 0) = \vec{0}$

② $\|\overrightarrow{u \times v}\| = \vec{0}$

u와 v가 서로 평행한 관계이기 때문에 평행사변형이 만들어 질 수 없다

(문제3) 두 점을 지나는 직선이 세점을 포함한 평면과 만나는 교점의 좌표 구하기

① 직선의 방정식 연립 ② 평면의 방정식

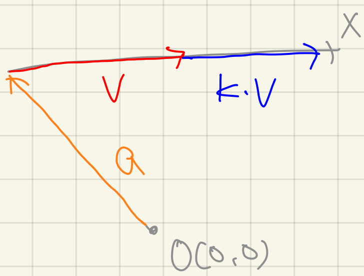
① 직선

두점 $(-1,-1,0)$, $(2,0,1)$

방향 벡터 V

⇒ V가 평면과 무조건 만나니까 두 점의 변화량이 방향 벡터가 된다

방향 $\vec{v} = (2-(-1), 0-(-1), 1-0)$
$= (3,1,1)$ ✓
or
$(-1-2, -1-0, 0-1)$
$= (-3,-1,-1)$ ✓ 변화량 이니까 둘다 가능



$X(x,y,z) = \vec{a} + k\vec{v}$

(-1,1, or (2,0,1) 중 아무거나 써도 상관 없다

$= (-1,1,0) + k(3,1,1)$

$\boxed{= (3k-1, 2, 1)}$

$6k = -1$

$k = -\frac{1}{6}$

$6k - 2 + 3$

$k =$

② 평면 $(1,-1,0)$, $(1,2,0)$, $(0,0,2)$

$\vec{u}$, $\vec{w}$

$\vec{u} = (0,3,0)$
$\vec{w} = (-1,1,2)$ $)) \rightarrow \vec{v} = ((3\times2)-(0\times1), -((0\times2)-(0\times -1)), (0\times1 - 3\times(-1)))$

$\therefore \vec{v} = (6,0,3) \Rightarrow (2,0,1)$

법선 V 성질 이용 $(\vec{x}-\vec{a})\cdot\vec{v} = 0$

(x,y,z) $(-1,1,0)$ $(2,0,1)$

$\rightarrow (x+1, y-1, z)\cdot(2,0,1)$

$= 2(x+1) + 0(y-1) + z$

$= 2x + 2 + z$ $\therefore \boxed{2x+2+z=0}$ 평면의 방정식

$2x+2+z=0$
$3k-1$, 1

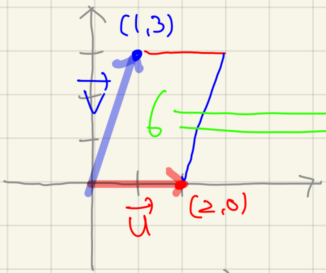
$\Rightarrow 2(3k-1)+3=0$

$\therefore k = \frac{4}{7}$

교점의좌표 $= (\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$

(문제4) $\vec{u}=(2,0)$, $\vec{v}=(1,3)$, $\left|\det\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\right|$

이 가치는 2차원 공간에서의 기하학적 의미?



$\left|\det\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\right| = 6$

즉, 평행사변형의 넓이는 $\left|\det\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\right|$

= 벡터의 곱

ex 2) $\vec{u}'=(a,b,0)$
$\vec{v}'=(c,d,0)$ 일 때, $\vec{u}' \times \vec{v}' = ((b\times0-0\times d), -(a\times0-0\times c), (ad-bc))$

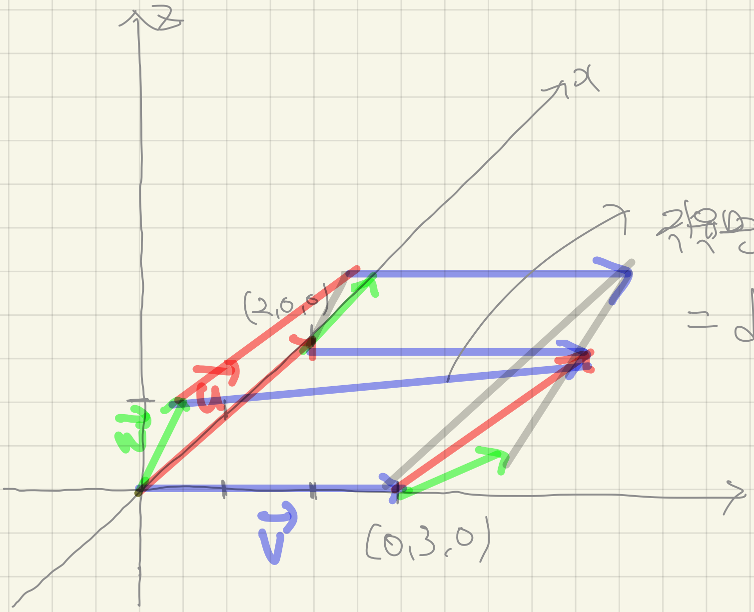
평행사변형 넓이
$= \|\vec{u}', \vec{v}'\|$
$= \sqrt{\det\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}$
$= \left|\det\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\right|$

결론)

$\det\begin{vmatrix}2&0\\1&3\end{vmatrix}$ = 평행사변형 넓이 $= \|\vec{u}' \times \vec{v}'\|$

(문제5) $\vec{u}=(2,0,0)$ $\vec{v}=(0,3,0)$ $\vec{w}=1,1,1$

$\det\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\1&1&1\end{pmatrix}$



직육면체의 부피 $= \det\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&0\\1&1&1\end{vmatrix}$