4강. 선형사상

[연 습 문 제]

1. 지난 강의에서 배운 대수구조들의 관계도를 작성하시오.

2. 다음의 연산이 부여된 집합이 벡터공간인지 아닌지 판별하고, 아니라면 그 이유를 설명하시오.
   (1) 표준적인 벡터덧셈과 아래의 스칼라배가 부여된 모든 실수 3-튜플 $(x,\ y,\ z)$ 의 집합.
   $$k(x,\ y,\ z) = (k^2x,\ k^2y,\ k^2z)$$
   (2) 표준적인 행렬덧셈과 스칼라배가 부여된 모든 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 꼴의 2×2 대각행렬 집합.

3. 세 벡터 $\mathrm{u} = (-1, 0, 1, 2)$, $\mathrm{v} = (2, 1, 3, 0)$, $w = (3, -1, 2, 5)$ 에 대하여 다음 중 $span\{\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}\}$ 의 벡터인 것을 모두 고르시오.
   ① $(0, 0, 0, 0)$　　② $(2, 2, 2, 2)$
   ③ $(3, 6, 7, -12)$　　④ $(9, 0, 11, 12)$

4. R^4 의 부분집합 $\{(2, 2, -6, -2), (2, 0, -2, 1), (3, 1, -5, 0)\}$ 가 선형독립인지 아닌지 판별하고, 아니라면 각 벡터를 나머지 두 벡터의 선형결합으로 표현하시오.

5. R^3 에 대해서 ① 정규지만 직교아닌, ② 직교지만 정규 아닌, ③ 정규직교인 기저의 예를 드시오.

1. 선형사상

(1) 선형사상

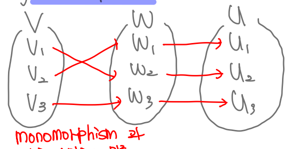
① 정의

F-벡터공간 V, W에 대하여 V의 성질을 보존하는, 다음 두 조건을 만족하는 사상 $L : V \to W$

〈선형 사상의 조건〉

1) $L(u+v) = L(u) + L(v)$ $(u,\ v \in V)$ 가산성
2) $L(kv) = kL(v)$ $(k \in F,\ v \in V)$ 동차성

ex) isomorphism (v는 모두 V에서 나온것이고 모두 일대일 대응)



monomorphism 과 epimorphism 만족

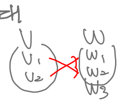
이때는 V에서 적용되는 법칙이 W, U에서도 적용된다

즉, Isomorphism은 동일한 대수구조를 판별함에 있어 매우 중요하다

② 관련 용어

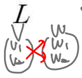
$L : V \to W$가 선형사상일 때, (정의역 V, 공역 W)

* 핵 (kernel) : $\ker L = L^{-1}(\vec{0}) = \{v \in V \mid L(v) = \vec{0}\}$ ⟺ Ker L = 결과가 $\vec{0}$가 되는 벡터들의 집합
* 상 (Image) : $\operatorname{im} L = L(V) = \{L(v) \in W \mid v \in V\}$ ⟺ im L = 선형연산의 모든 결과가 V의 원소 v안에 속한다 ⟺ 마치 공역과 같다
* 자기사상 (endomorphism) : $V = W$ 인 L ⟺ 즉, 정의역 = 공역 일때
* 단사사상 (monomorphism) : $L(u) = L(v) \Rightarrow u = v$ 인 L ⟺



선형사상의 결과가 $\begin{pmatrix} L(v_1) = L(w_2) \\ L(v_2) = L(w_1) \end{pmatrix}$로 대응한다면 이로 만든 벡터 $\begin{pmatrix} v_1 = w_2 \\ v_2 = w_1 \end{pmatrix}$도 동일한 상이다

* 전사사상 (epimorphism) : $L(V) = W$ 인 L ⟺



남는거 없이 대응될때 즉, 공역 = 치역

* 동형사상 (isomorphism) : 단사사상인 전사사상 ⟺ monomorphism and epimorphism
* 자기동형사상 (auto morphism) : 자기사상인 동형사상 ⟺ 즉 자기자신 V=W

* 항등사상 (Identity morphism) : $L(v) = v$ 인 $L\,(= I_V)$
* 사상의 합성

: 두 선형사상 $L_1 : V \to U$, $L_2 : U \to W$ ⟺ $V \xrightarrow{L_1} U \xrightarrow{L_2} W$

의 합성은 $L_2 \circ L_1 : V \to W$ 로 쓴다.

$L_2 \circ L_1 = V \to W$ (순서에 주의하자)

* 역사상 (Inverse morphism)

1) $L_2 \circ L_1 = I_V$ (Identity morphism) 일 때, L_2를 L_1의 왼쪽 역사상, L_1를 L_2의 오른쪽 역사상이라 한다.

2) 왼쪽 역사상이자 오른쪽 역사상을 양쪽 역사상 또는 역사상이라 한다. ⟺ $\begin{pmatrix} L_2 \circ L_1 = I_V \\ L_1 \circ L_2 = I_V \end{pmatrix}$

(행렬이 곱해져도 선형사상이다)

(2) 여러 선형사상

$L : V \to W$ 가 선형사상이고 $v \in V$ 일 때,

① $L(v) = \vec{0}$: 영사상 (선형사상의 결과가 항상 $\vec{0}$가 나올때)

② $L(v) = v$: 항등사상

③ $L(v) = kv$ (단, k는 스칼라)

④ $L(v) = Mv^{(T)}$ Vector를 쓸때 보통 (1,2,3)가로로 쓰는데 / 그렇게 하면 행렬의 곱셈이 정의되지 않기 때문에 T를 붙여준다
(단, $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$, $V = F^n$, $W = F^m$)

$\underset{3\times3}{A} \times \underset{1\times3}{B}$ → 정의 되지 않는다
$\underset{3\times3}{A} \times \underset{3\times1}{B}$ → 정의 된다

⑤ $L(v) = \langle v, v_0 \rangle$ (단, $v_0 \in V$)

…

<Proof> 선형사상을 만족하려면 가산성, 동차성 만족해야 한다

① 1) 가산성
$L(v_1+v_2) = \vec{0} \iff L(v_1) + L(v_2) = \vec{0}$
$v_1+v_2 = \vec{0}$, $L(v_1) = \vec{0}$, $L(v_2) = \vec{0}$

2) 동차성
$L(k \times v) = \vec{0}$
$v = \vec{0}$
$k \times \vec{0} = \vec{0}$
$kL(v) = \vec{0}$
$\therefore L(k\times v) = kL(v)$

②
1) 가산성
$L(v_1+v_2) = v_1+v_2 = L(v_1+v_2)$
$L(v) = v$

2) 동차성
$L(kv) = k \times v = kL(v)$

— Index —
1. 선형사상
(1) 선형사상
(2) 여러 선형사상
2. 선형대수학의 기본정리
3. 차원정리
(1) 차원정리
(2) 비둘기집 원리
4. 계수정리
(1) 관련 용어
(2) 계수정리

2. 선형대수학의 기본정리 (선형사상과 행렬은 대수구조상 같더라~)

F-벡터공간 V, W 에 대해 V에서 W로의 선형사상들의 집합을 $\mathcal{L}(V, W)$라 하고, 다음과 같이 $\mathcal{L}(V, W)$ 위에 합과 스칼라배를 정의한다. ($v \in V$, $k \in F$)

1) $(L_1 + L_2)(v) = L_1(v) + L_2(v)$ 선형사상의 가산성

2) $(kL)(v) = kL(v)$ 선형사상의 동차성

이제 F위의 $m \times n$ 행렬들의 집합을 $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ 라 하고, 두 사상 f, g 를

$$(\mathcal{L}(V,W), +, \cdot) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} (\mathcal{M}_{m\times n}(F), +, \cdot)$$

(f : 선형사상 → Matrix
g : Matrix → 선형사상)

선형대수학 에서는 $f \to g$ 와 $g \to f$ 의 경우에서 정의된다

— Index —
1. 선형사상
(1) 선형사상
(2) 여러 선형사상
2. 선형대수학의 기본정리
3. 차원정리
(1) 차원정리
(2) 비둘기집 원리
4. 계수정리
(1) 관련 용어
(2) 계수정리

다음과 같이 정의한다.

$f : \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{M}_{m\times n}(F)$
↓ $\mathcal{L}$의 원소 "L"
, $f(L) = [L]_{B_W}^{B_V} = M$

$g : \mathcal{M}_{m\times n}(F) \to \mathcal{L}(V, W)$
, $g(M) = L_M$ $\left([L_M(\mathrm{v})]_{B_W} = M[\mathrm{v}]_{B_V}\right)$

——— 기호 정의 ———

Basis

1) B_V는 V의, B_W는 W의 순서기저. 즉, 기저의 원소들은 순서가 정해져 있고 바뀌지 않는다.

B_V : V라는 Vector공간의 Basis
B_W : W라는 Vector공간의 순서 Basis
Basis(기저)는 { } 집합이다 집합은 순서가 없다, B_W는 Basis 내에서 순서를 따진다

ex) 1)
$V = \mathbb{R}^3 \Rightarrow B_V = [\underset{v_1}{(1,0,0)}, \underset{v_2}{(0,1,0)}, \underset{v_3}{(0,0,1)}]$
B_V는 V의 순서 Basis 이다
즉, B_V는 Tuple 이다

2) $\mathrm{v} \in V$, $\mathrm{v} = k_1\mathrm{v}_1 + \cdots + k_n\mathrm{v}_n$ 에 대해

$[\mathrm{v}]_{B_V} = (k_1, \cdots, k_n)^T$ 선형결합시 계수만 따와서 Transpose 한 것

3) $[L]_{B_W}^{B_V} = \left([L(\mathrm{v}_1)]_{B_W} \cdots [L(\mathrm{v}_n)]_{B_W}\right)$

선형사상 $B_V \to B_W$로 가는 것

2) $V = \mathbb{R}^3 \Rightarrow B_V = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ (v_1, v_2, v_3)

$v \in V$, $V = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$
$= (k_1, k_2, k_3)$
$(k_1, k_2, k_3)^T = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \Rightarrow [V]_{B_V}$

즉, V를 표현 하는데 Basis로 표현한다

3) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ 에서 $L : \underset{V}{\mathbb{R}^2} \to \underset{W}{\mathbb{R}^3}$, ($\mathcal{L}$의 원소들)

$L(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \times V$, $B_W = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ (w_1, w_2, w_3)

$V_1 = (1,1)$, $V_2 = (2,2)$, $V_3 = (3,3)$ $\in \mathbb{R}^2$

$L(V_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow [L(V_1)]_{W_1}^{V_1} \in \mathbb{R}^3$

$L(V_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow [L(V_2)]_{W_2}^{V_2}$ 〃

$L(V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} \Leftrightarrow [L(V_3)]_{W_3}^{V_3}$ 〃

$\Leftarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} \Updownarrow M_{3\times3}(\mathbb{R}) = [L]_{B_W}^{B_V}$

$\therefore \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) \longrightarrow M_{3\times3}(\mathbb{R})$
$\Leftrightarrow [L(V)]_{B_W}^{B_V}$

ex) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$ ~> n=2

$V = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ ← V의 원소 v
$B_V = \{(1,0), (0,1)\}$ ← V의 기저 정의

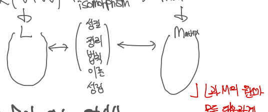
$[L_M(V)]_{B_W} = M \cdot [V]_{B_V}$
$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 = W$

$\therefore L_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 인 선형사상

그러면 f와 g는 모두 동형사상이다. 또한 두 사상 f와 g는 서로 역사상 관계이다.

※ f와 g는 isomorphism이다

$\mathcal{L}(V, W) \xleftrightarrow{\text{isomorphism}} M_{m\times n}(F)$



① f와 g가 동형 사상이다
f : 선형 사상임을 만족 해야 한다, isomorphism 만족
가산성, 동차성
g : 〃 , 〃
f∘g ⇒ isomorphism 만족

② f와 g는 역사상 이다
$\begin{pmatrix} f\circ g = I \\ g\cdot f = I \end{pmatrix}$ 만족해야 한다

※ f와 g는 역사상

$(f\circ g)(M) = f(g(M)) = f(L_M) = f(L) = M$ ($\because$ 정의)
$\therefore f\circ g$는 Identify basis
$(g\cdot f)(L) = g(f(L)) = g(M) = L(M) = L$
$\therefore g\cdot f$는 Identity basis

— Index —
1. 선형사상
(1) 선형사상
(2) 여러 선형사상
2. 선형대수학의 기본정리
3. 차원정리
(1) 차원정리
(2) 비둘기집 원리
4. 계수정리
(1) 관련 용어
(2) 계수정리

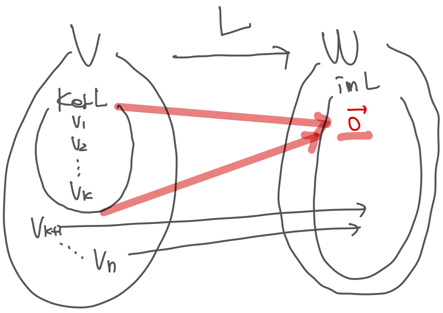
3. 차원정리

(1) 차원정리

유한차원 벡터공간 V와 선형사상 $L: V \to W$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\dim(V) = \dim(\ker L) + \dim(\operatorname{im} L)$$

V의 차원 = kerL 의 차원 + imL의 차원
0에 대응되는 갯수 / 나머지의 갯수



— Index —
1. 선형사상
(1) 선형사상
(2) 여러 선형사상
2. 선형대수학의 기본정리
3. 차원정리
(1) 차원정리
(2) 비둘기집 원리
4. 계수정리
(1) 관련 용어
(2) 계수정리

(2) 비둘기집 원리

① 따름정리

차원이 같은 두 유한 차원 벡터공간 V, W사이에 선형사상 L이 정의되어 있으면 다음이 성립한다.

L은 전사 $\Leftrightarrow$ L은 단사 $\Leftrightarrow$ L은 전단사
epimorphism / monomorphism / isomorphism

<Proof>
(1) L : epimorphism ⇒ L : monomorphism
$\dim(V) = \dim(W) = n$ 이면
if) L : epimorphism (공역의 모든 원소 ⊃ 치역원소)
$\Leftrightarrow \dim(L(V))$
$\Leftrightarrow \dim(\operatorname{im} L)$ (∵ 〃)
$\Leftrightarrow n$
∴ 차원정리에 의해
$\dim(V) = \dim(\ker L) + \dim(\operatorname{im} L)$
$\dim(\ker L) = \dim(\operatorname{im} L) - \dim(V)$
$= n - n$
$= 0$
$\Rightarrow \ker L = \{\vec{0} \in V\}$

$L(V_1) = L(V_2)$, $\forall V_1, V_2 \in V$
$\Rightarrow L(V_1) - L(V_2) = \vec{0}$
$\Rightarrow L(V_1 - V_2) = \vec{0}$
$\Rightarrow V_1 = V_2$
$\therefore L(V_1) = L(V_2) \Leftrightarrow V_1 = V_2$

② 비둘기집 원리 (Vector 다음정리의 결합버전)

공집합이 아닌 두 유한집합 A, B 의 크기가 서로 같을 때, 함수 $f:A\to B$ 는 다음을 만족한다.

f는 전사 ⇔ f는 단사 ⇔ f는 전단사

4. 계수정리 (차원정리의 행렬버전)

(1) 관련 용어

행렬 $M\in\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ 에 대하여

* 열공간 : M의 열벡터들로 생성된 공간 (열 벡터를 span한 공간)
  열계수 : 열공간의 차원, col-rank$M$
* 행공간 : M의 행벡터들로 생성된 공간 (행벡터를 span한 공간)
  행계수 : 행공간의 차원. row-rank$M$
* 영공간 : 연립방정식 $MX=0$ 의 해공간 (Matrix 미지수 matrix, 영행렬)
  nullity$M$: M의 영공간의 차원

ex) $M=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\in M_{2\times3}(\mathbb{R})$

√ 열공간 $=\text{span}(S)=\{(3,1),(1,0),(2,-1)\}=\mathbb{R}^2$

span(S)가 기저가 되기위한 조건 ① 선형독립 ② $v\in V$

① $a(3,1)+b(1,0)+c(2,-1)=\vec{0}$

$3a+b+2c=0$
$a-c=0$ ← $a=c$

$3a+b+2a=0$
$5a=-b$
$a=c$

$\begin{pmatrix}a=1, b=-5, c=1\\a=2, b=-10, c=2\\ \vdots\end{pmatrix}$

∴ span(S)는 선형종속이다.
∴ $\text{span}(S)=\mathbb{R}^2$
(span의 3개의 벡터는 선형독립을 만족 X
→ 2개의 벡터로 다른 1개의 벡터를 생성할 수 있어서
$\dim(\text{span}(S))=2$가 나온다)

√ col-rank$M$ $=\dim(\mathbb{R}^2)=2$

√ 행공간 $=\text{span}(S)=\{(3,1,2),(1,0,-1)\}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}3&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&1&2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&5\end{pmatrix}$

∴ $\text{span}(S)=\{(1,0,-1),(0,1,5)\}$

↓ Linear Combination

$a(1,0,-1)+b(0,1,5)=\vec{0}$

$\begin{pmatrix}a=0\\b=0\end{pmatrix}$ ∴ span(S)는 선형독립 이다 (기저의 조건 만족)

√ row-rank$M=2$
(∵ 차원 = 기저의 원소 갯수)

√ 영공간

$MX=0\iff\begin{pmatrix}3&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\iff\begin{pmatrix}3x+y+2z=0\\x-z=0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x=z\\3x+y+2z=0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x=z\\y=-5z\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}z=t\\x=t\\y=-5t\end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\overset{\text{자유변수}}{t}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}}_{\text{해공간 기저}}$

∴ nullity$M=1$
(즉, nullity ⇒ 기저의 갯수
자유변수의 갯수)

√ 영공간 ex2)

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=t(\ )+s(\ )+k(\ )$

자유변수 t, s, k가 nullity의 갯수(기저 원소갯수) 가 된다.

∴ nullity $=3$

$\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&4\\0&0&1&5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\text{col-rank}=3\\\text{row-rank}=3\end{pmatrix}$

(2) 계수정리 (rank theorem)

① 계수정리

행렬 $M\in\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\text{col-rank}M=\text{row-rank}M$$

이때 행렬 M의 행공간 및 열공간의 공통차원을 M의 계수 rank$M$ 이라 한다.

⇔ row-rank
⇔ col-rank

<Proof>

행렬 A를 M의 기약행 사다리꼴 이라 하자

$\begin{pmatrix}\text{col-rank}M=\text{col-rank}A\\\text{row-rank}M=\text{col-rank}A\end{pmatrix}$ ex) $\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&4\\0&0&1&5\end{pmatrix}$ 의

Col-rank=3 (leading entry 1을 포함한 column의 원소 갯수)
‖
row-rank=3 (r.e 1을 포함한 row 갯수)
‖
M-rank=3 (leading Entry 1의 갯수)

— Index —

= 계수정리

② Rank-Nullity 정리

행렬 $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(F)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$n = \text{rank} M + \text{nullity} M$$

$\Updownarrow$

$\dim(V) = \dim(\text{im}\, L) + \dim(\ker L)$

<Proof>

A는 $M_{m\times n}$의 기약행사다리꼴
rank $M = r$ 이면,
$\Rightarrow$ A의 leading entry $=1$의 갯수 $= r$
$\therefore Mx = 0 \Rightarrow$ 자유변수 갯수 $= n-r$
$(z = t)$
$\therefore$ nullity $M = n-r$
즉, rank M + nullity $M = r + (n-r) = n$

[연 습 문 제]

$a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots$

1. n차 다항식의 집합 P_n와 $(n+1)$차 다항식의 집합 P_{n+1}에 대하여 사상 $L : P_n \to P_{n+1}$ 을 다음과 같이 정의했을 때, L이 선형사상임을 보이시오.

   $p(x) \in P_n$ 에 대하여 $L(p(x)) = x\,p(x) \in P_{n+1}$

2. 3차 다항식의 집합 P_3과 2×2 행렬의 집합 $\mathcal{M}_{2\times 2}(R)$ 및 R^4 에 대하여 다음 두 사상

   $L_1 : P_3 \to R^4$, $L_2 : \mathcal{M}_{2\times 2}(R) \to R^4$

   이 모두 동형사상임을 증명하시오.

3. 벡터공간 V의 기저 $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ 에 대하여 자기사상 $L : V \to V$이 $[L]_{B_V}^{B_V} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 을 만족한다. 이때 V의 기저 $B'_V = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ 에 대하여 $[L]_{B'_V}^{B'_V}$ 를 구하시오.

4. 행렬 $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ 에 대하여 Rank-Nullity 정리가 성립함을 보이시오.

(4강)

f와 g는 모두 동형사상이다

<Proof> ※ f에 대해서

(1) 선형사상

① 가산성

$\forall i \in \{1, 2, \cdots n\}$, $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V, W)$,

$(L_1 + L_2)(v_i) = L_1(v_i) + L_2(v_i)$ ∵ 선형사상의 정의

$\therefore [(L_1+L_2)(v_i)]_{B_W} = [L_1(v_i)]_{B_W} + [L_2(v_i)]_{B_W}$ ∵ 정의

예) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

$[L_1 + L_2]_{B_W}^{B_V} = [L_1]_{B_W}^{B_V} + [L_2]_{B_W}^{B_V}$

$\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{pmatrix}$

즉 각각의 Column의 합 ⇒ Matrix

$\therefore f(L_1 + L_2) = f(L_1) + f(L_2)$

(∵ f의 정의)

② 동차성

$\forall k \in F$, $\forall i \in \{1, \cdots n\}$

$[(kL)(v_i)]_{B_W}$

$= k[L(v_i)]_{B_W} \Longleftrightarrow \underbrace{[kL]_{B_W}^{B_V}}_{f(kL)} \Longleftrightarrow \underbrace{k[L]_{B_W}^{B_V}}_{kf(L)}$

$L(v_i)_{B_W}$ ~ $i = 1 \cdots n$ 까지 $[L]_{B_W}^{B_V}$ 만족한다

$\therefore f(kL) = kf(L)$

①, ②를 모두 만족하기 때문에

f는 선형사상이다

(2) isomorphism = monomorphism ① and epimorphism ②

① monomorphism

$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V, W)$

$f(L_1) = f(L_2)$

$\Longleftrightarrow [L_1(v_i)]_{B_W} = [L_2(v_i)]_{B_W}$, $\forall i \in (1, \cdots n)$

$\Longleftrightarrow L_1(v_i) = L_2(v_i)$, $B_V = \{v_1 \cdots v_n\}$

한편, $\forall v \in V$, $\forall (k_1 \cdots k_n) \in F$

Search that, $v = k_1 v_1 + \cdots k_n v_n$ (∵ $\{v_1 \cdots v_n\} = B_V$)

$= \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$

$L_1(v_i) = L_2(v_i)$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i L_1(v_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i L_2(v_i)$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} L_1(k_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} L_2(k_i v_i)$

(∵ 스칼라 배의 정의)

$\Longleftrightarrow L_1(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots k_n v_n) = L_2(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots k_n v_n)$

(∵ 벡터의 결합 법칙)

$\Leftrightarrow L_1(v) = L_2(v)$

$\therefore L_1 = L_2$

결론) $f(L_1) = f(L_2) \Longleftrightarrow L_1 = L_2$

$\therefore$ monomorphism 이다

① f와 g가 동형 사상이다

f : 선형 사상임을 만족 해야 한다, isomorphism 만족

가산성, 동차성

g : 〃 , 〃

$f \circ g$ ⇒ isomorphism 만족

② f와 g는 역사상 이다

$\begin{pmatrix} f \circ g = I \\ g \circ f = I \end{pmatrix}$ 만족해야 한다

② epimorphism

$\forall M \in M_{m \times n}(F)$, $[M]^i$: M의 i번째열로 정의한다면

$[L(v_i)]_{B_W} \mid = [M]^i$ $\forall i \in (1 \cdots n)$

즉, $\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ M^1 & M^2 & M^3 \end{array}$ $= [L(v_i)]_{B_W}$

Surely, $[L]_{B_W}^{B_V} = M$ $\therefore f(L) = M$

결론) epimorphism이다

(4강 문제풀이)

1. $P(x) \in P_n$ 에 대해 $L(P(x)) = xP(x) \in P_{n+1}$ 선형사상 임을 보여라 ⟨① 가산성, ② 동차성⟩ 만족

① 가산성 $(L(u+v) = L(u) + L(v))$

$$L(p_1(x)+p_2(x)) = x(p_1(x)+p_2(x)) = xp_1(x) + xp_2(x) = Lp_1(x) + Lp_2(x)$$

$\therefore L(p_1(x)+p_2(x)) = Lp_1(x) + Lp_2(x)$ 가산성을 만족한다

② 동차성 $(L(kv) = kL(v))$

$$L(kp(x)) = k \cdot L(p(x)) = k \cdot xp(x) = k \cdot L(p(x)) = L(kp(x))$$

$\therefore$ 동차성 만족

2. isomorphism을 증명

① L_1, L_2가 선형사상 임을 증명

② L_1, L_2가 monomorphism and epimorphism 임을 증명

3. $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ $L : V \to V$ $[L]_{B_V}^{B_V} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B'_V = \{\underbrace{v_1}_{u_1}, \underbrace{v_1+v_2}_{u_2}, \underbrace{v_1+v_2+v_3}_{u_3}\}$ $[L]_{B'_V}^{B'_V} = ?$

V의 기저 $B_V \to B'_V$로 재정의 된다

① $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$B_V = v_1 \; v_2 \; v_3$

$$-3v_1 + v_2 = -4u_1 + u_2 \quad (-4, 1, 0)$$
$$4v_1 + v_3 = 4u_1 - u_2 + u_3 \quad (4, -1, 0)$$
$$7v_1 - 2v_2 = 9u_1 - 2u_2 \quad (9, -2, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [L]_{B'_V}^{B'_V}$$

$u_1 = v_1$, $u_2 = v_1 + v_2$, $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$ $\Leftrightarrow$ $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 - v_1$, $v_3 = u_3 - v_1 - v_2$ $\Leftrightarrow$ $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 - u_1$, $v_3 = u_3 - u_1 - (u_2 - u_1) = u_3 - u_2$

4. $\underset{n \times n}{M} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ 에 대해 Rank-Nullity가 성립함을 보여라

$n = \text{Rank } M - \text{nullity } M$

$1+0+16$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -26 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 - 4a - 26b - 37c + 13d = 0 \\ v_2 - 2a - 12b - 16c + 5d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 4a + 26b + 37c - 13d \\ v_2 = 2a + 12b + 16c - 5d \end{cases}$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow a\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 26 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_3} + d\underbrace{\begin{pmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B_4}$$

$\therefore \text{nullity } M = n\{B_1, B_2, B_3, B_4\} = 4$