

2-7:

设 $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$ 是一个 d 次多项式。假设已有一算法能在 $O(i)$ 时间内计算一个 i 次多项式与一个 1 次多项式的乘积，以及一个算法能在 $O(i \log i)$ 时间内计算两个 i 次多项式的乘积。对于任意给定的 d 个整数 n_1, n_2, \dots, n_d ，用分治法设计一个有效算法，计算出满足 $P(n_1) = P(n_2) = \dots = P(n_d) = 0$ 且最高次项系数为 1 的 d 次多项式 $P(x)$ ，并分析算法的效率。

题目分析：

若多项式 $P(x)$ 满足 $P(n_1) = P(n_2) = \dots = P(n_d) = 0$ ，则可设多项式为：

$$P(x) = (x - n_1)(x - n_2) \dots (x - n_d)$$

由于我们已知算法可在 $O(i)$ 时间内计算一个 i 次多项式与一个 1 次多项式的乘积，以及一个算法能在 $O(i \log i)$ 时间内计算两个 i 次多项式的乘积。我们只需要展开此多项式即可。为减小时间复杂度，采用分治法，将原式不断对半划分，直到变为两个多项式后进行相乘，然后依次自底向上乘，最后化为一个 d 次多项式，即可得到对应的系数。

注：由于本题题设中假设了算法，故不进行编程实现，仅进行理论分析。

算法分析：

$$T(d) = 2T\left(\frac{d}{2}\right) + O\left(\frac{d}{2} \log \frac{d}{2}\right)$$

由主定理， $f(n) = O\left(\frac{d}{2} \log \frac{d}{2}\right) = \Omega(n^{\log_2 2 + \epsilon})$ ($\epsilon > 0$) 可得：

本算法的时间复杂度为： $T(d) = O(d \log d)$