# 21级实验室暑假第十讲



- ➤ 状压dp ➤ 树形dp



状态dp表示的不是一个有意义的数值,例如前面章节的花费、价值、 长度等,而是代表了**集合的数量**。 这种处理复杂集合问题的DP,叫做状态压缩DP。 集合的状态很多,操作复杂,往往把方案用二进制数("压缩"到这个二进制数中)来表示和操作。二进制操作有与、或、取反、移位 (注意使用的时候**注意其优先级顺序**,记不清建议都加上括号)等。



在n×n(1≤n≤10) 的棋盘上放k(0≤k≤n²) 个国王

国王可攻击相邻的 8 个格子, 求使它们 无法互相攻击 的 方案总数

### 八相邻:

通常意义上的八相邻指的是当前元素的上、下、左、右、左上、右上、左下、右下八个方向

这种 棋盘放置类 问题,在没有事先知道一些特定 性质 的情况下来做,都会想到 爆搜

本题的数据规模, 也是向着 爆搜 去设置的

如果我们直接 爆搜,则 时间复杂度 为 $O(2^{n^2})$ 是会超时的,因此会想到用 记忆化搜索 来进行优化



在n×n(1≤n≤10) 的棋盘上放k(0≤k≤n²) 个国王

国王可攻击相邻的 8 个格子, 求使它们 无法互相攻击 的 方案总数

考虑一下如何进行 动态规划

由于在第 i 层放置国王的行为, 受到 i-1 层和 i+1 层以及 i 层的状态影响

那么我们就可以规定从上往下枚举的顺序,这样考虑第 i 层状态时,只需考虑 i-1 层的状态即可

于是乎我们可以考虑把层数 i 作为动态规划的 阶段 进行 线性DP

而第 i 阶段需要记录的就是前 i 层放置了的国王数量 j,以及在第 i 层的 棋盘状态 k

# 状压dp

### 小国王

在n×n(1≤n≤10)的棋盘上放k(0≤k≤n²)个国王

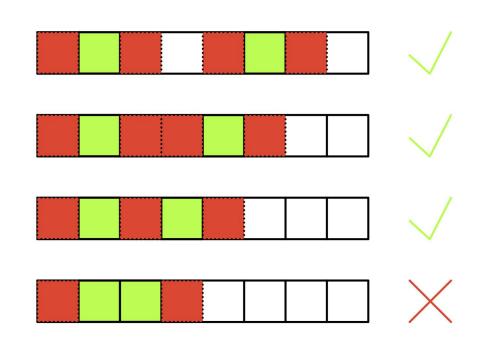
国王可攻击相邻的 8 个格子, 求使它们 无法互相攻击 的 方案总数

这里先分析一下, 哪些 棋盘状态 是合法的, 哪些 棋盘状态的转移 是合法的

### 合法的棋盘状态

如右图所示,绿色方块为摆放国王的 位置,红色方块为**王的 攻击范围** 

只要任意王之间只要 **不相邻**,就是 合法的状态





### <u>小国王</u>

在n×n(1≤n≤10) 的棋盘上放k(0≤k≤n²) 个国王

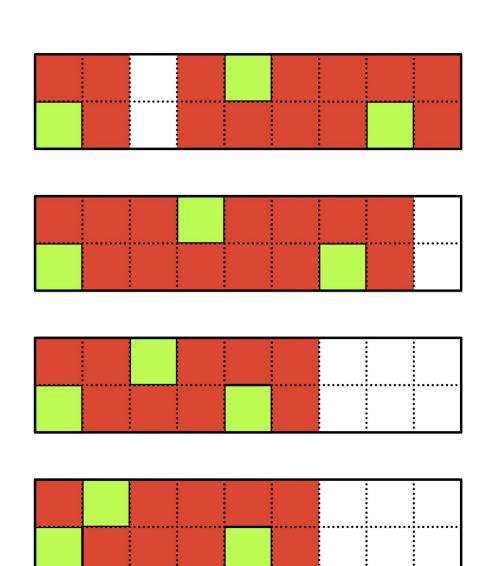
国王可攻击相邻的 8 个格子, 求使它们 无法互相攻击 的 方案总数

这里先分析一下,哪些 **棋盘状态** 是合法的,哪 些 **棋盘状态的转移** 是合法的

### 合法的棋盘转移状态

如右图所示,绿色方块为**摆放国王的位置**,红色方块为王的 攻击范围

只要任意王的 纵坐标不相邻,就是 合法的转移状态





在n×n(1≤n≤10) 的棋盘上放k(0≤k≤n²) 个国王

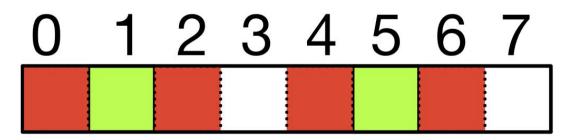
国王可攻击相邻的 8 个格子, 求使它们 无法互相攻击 的 方案总数

我们可以用 二进制 来表示当前的状态

怎么用二进制表示状态?

若(state >> i) == 1 则表示在当前状态中,第 k(0≤i<n) 个位置放置了国王(下标从 0 开始)

再举一个简单的例子,见下图:



用二进制表示该状态,就是(00100010)2



在n×n(1≤n≤10) 的棋盘上放k(0≤k≤n²) 个国王

国王可攻击相邻的 8 个格子, 求使它们 无法互相攻击 的 方案总数

状态表示:集合f[i,j,k]:考虑前 i 层的棋盘,前 i 层放置了 j 个国王,且第 i 层状态是 k(二进制)的方案

属性f[i,j,k]: 方案的总数 Sum

状态计算[i,j,k]:  $f[i,j,k] = \sum_{pre} f[i-1,j-cnt_k,pre]$ 

初始状态: f[0,0,0]=1

目标状态:  $\sum_{i=1}^{n} f[n,k,st]$  (其中st为最后一行的合法状态)

其中pre是**枚举的能够与k合法存在于相邻行中的所有状态**, cnt<sub>k</sub>表示状态k中的国王数量



### <u>小国王</u>

在n×n(1≤n≤10) 的棋盘上放k(0≤k≤n²) 个国王

国王可攻击相邻的 8 个格子, 求使它们 无法互相攻击 的 方案总数

状态表示:集合f[i,j,k]:考虑前 i 层的棋盘,前 i 层放置了 j 个国王,且第 i 层状态是 k(二进制)的方案

属性f[i,j,k]: 方案的总数 Sum

状态计算f[i,j,k]: 
$$f[i,j,k] = \sum_{pre} f[i-1,j-cnt_k,pre]$$

这样直接做,时间复杂度是 O(n³k2n2n)是会超时的

但是我们可以通过预处理所有的 合法状态,以及合法的 相邻转移状态,以及 合法状态 摆放的国王数量

因为虽然状态很多。但是 合法状态 并不多, 合法的转移状态 更不多



在n×n(1≤n≤10) 的棋盘上放k(0≤k≤n²) 个国王

国王可攻击相邻的 8 个格子, 求使它们 无法互相攻击 的 方案总数

## 必要函数

```
✓ 检测当前状态x是否不存在相邻的1
int check(int x)\{//检测x是否不存在相邻的1(存在相邻的1返回0,不存在返回1)
   for(int i=0;i<n;i++)</pre>
       if((<u>(x>>i)&1</u>)&&((x>>(i+1))&1))//存在相邻的1
           return 0;
   return 1;
                             int count(int x){//统计状态x的1的个数
                                 int res=0;
✓ 统计当前状态x的1(放置)的个数
                                 for(int i=0;i<n;i++)</pre>
                                     if((x>>i)&1)
                                         res++;
                                     //res+=(x>>i&1);//也可直接写成这种
                                 return res;
    2022年8月1日星期-
```

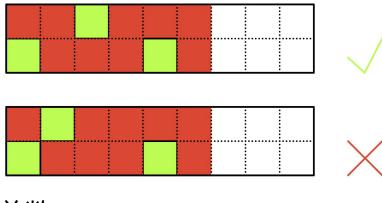


2022年8月1日星期一

### 小国王

在n×n(1≤n≤10) 的棋盘上放k(0≤k≤n²) 个国王 国王可攻击相邻的 8 个格子,求使它们 无法互相攻击 的 方案总数

vector<int> state;//保存所有合法状态



### 预处理阶段

12

```
int cnt[MAXM];//统计每个状态的个数
vector<int> pre[MAXN];//保存当前状态的相邻合法状态的下标,注意不是相邻合法状态的值
for(int i=0; i<(1<<n); i++)</pre>
   if(check(i)==1){//是合法状态
                                            a&b表示检测状态之间是否直接相邻(有边相邻),
       state.push_back(i);//保存合法状态
                                            若为0,表示为无边相邻;
       cnt[i]=count(i); //更新cnt值
                                            check(a|b)表示状态之间整合后是否有邻边
for(int i=0;i<state.size();i++)</pre>
   for(int j=0;j<state.size();j++){</pre>
       int a=state[i],b=state[j];
       if((<u>(a&b)==0</u>)&&check(a|b)==1)//注意要写成(a&b),不然先计算b==0(优先级问题)
          pre[i].push_back(j);//保存下标
```



在n×n(1≤n≤10) 的棋盘上放k(0≤k≤n²) 个国王 国王可攻击相邻的 8 个格子, 求使它们 无法互相攻击 的 方案总数

//printf("%11a\n",f[n+1][m][0]);

### 执行阶段

```
f[0][0][0]=1;
                                                         虽然看着4层循环,但是通过预处理
//循环n可写成n+1,此时直接输出f[n+1][m][0]的值
for(int i=1;i<=n;i++)//枚举每一层i
   for(int j=0;j<=m;j++)//枚举个数j
       for(int a=0;a<state.size();a++)//枚举当前状态
           for(int b=0; b<pre[a].size(); b++){//枚举当前状态相邻的合法状态
              int temp_cnt=cnt[state[a]];
               if(j>=temp_cnt)//同时前i层的个数应大于等于当前行的个数
                  f[i][j][state[a]]+=f[i-1][j-temp_cnt][state[pre[a][b]]];
11 \text{ res=0};
for(int i=0;i<state.size();i++)</pre>
      res+=f[n][m][state[i]];
printf("%11d\n",res);
```

**所有的合法状态**,合法状态很少, 合法的转移状态也少, 故不会超时

# **状压**dp

扩展: 玉米田

农夫约翰的土地由 M×N 个小方格组成,现在他要在土地里种植玉米。(1<=M,N<=12)

非常遗憾,部分土地是不育的,无法种植。

而且, 相邻的土地不能同时种植玉米, 也就是说种植玉米的所有方格之间都不会有公共边缘。

该题与小国王类似,它是距离长度为1的4个方向不能放置,故方法与小国王类似,当前第i行的状态是由上一行i-1的某些状态转移而来。

但是需注意的是,需考虑**田地中有不能种植的地方**,可通过**将当前行不能种植的地方用1表示,能种植的地方用0** 表示,形成一个二进制数,再将其与当前行的放置状态进行与运算,如果结果不为0,存在不能种植的土地上进行了放置(存在冲突)。

#### 大 大 大 大 大 大 大

扩展: 炮兵阵地

司令部的将军们打算在 N×M 的网格地图上部署他们的炮兵部队。 (N<=100, M<=10)

一个 N×M 的地图由 N 行 M 列组成, 地图的每一格可能是山地 (用 H 表示), 也可能是平原 (用 P 表示), 如下图。

在每一格平原地形上最多可以布置一支炮兵部队(山地上不能够部署炮兵部队); 一支炮兵部队在地图上的攻击范围 如图中黑色区域所示:

如果在地图中的灰色所标识的平原上部署一支炮兵部队,则**图中的黑色的 网格表示它能够攻击到的区域:沿横向左右各两格,沿纵向上下各两格。** 

图上其它白色网格均攻击不到。

从图上可见炮兵的攻击范围不受地形的影响。

现在,将军们规划如何部署炮兵部队,在防止误伤的前提下(保证任何两支炮兵部队之间不能互相攻击,即任何一支炮兵部队都不在其他支炮兵部队的攻击范围内),在整个地图区域内最多能够摆放多少我军的炮兵部队。

₽₽	$\mathbb{P}_{\ell^2}$	H₽	P₽	Η₽	H₽	P₽	P₽
₽₽	H₽	P₽	He	P₽	H₽	P₽	P₽
P₽	P₽	P₽	H₽	H₽	H₽	P₽	H₽
H₽	$\mathrm{P}\varphi$	H₽	P	P₽	$P\varphi$	P₽	H₽
H₽	P₽	P₽	P₽	P₽	H₽	P₽	H₽
Hø	P₽	P₽	Ħρ	₽₽	H₽	H₽	P₽
H₽	$H^{\wp}$	H₽	$P_{\theta^2}$	$P^{a_2}$	$P_{\ell^2}$	$P_{\bullet^{j}}$	Ηψ

# 状压dp

扩展: 炮兵阵地

该题无非是玉米田的一个再扩展,它是距离长度为2的4个方向不能放置,此时当前第i行的状态是由上一行i-1和上上一行i-2的某些状态转移而来,故状态表示还需扩展一层,即f[i,k,l],该题未规定数量限制,可去掉前i行的数量j,k表示当前行的状态,l表示当前行的状态

直接开所有的状态空间,空间复杂度是 O(N×2M×2M)是会爆内存的,故需要采用滚动数组实现

同时也需要考虑田地的问题,与玉米田采用的思想类似,此处不作解释

P₽	P₽	Hφ	P₽	H₽	Ηø	P₽	P₽	1
P₽	H₽	P₽	He	P₽	H₽	P₽	P₽	43
P₽	Pφ	P₽	H₊₃	H₽	H₽	P₽	H₽	47
H₽	$\mathrm{P} e$	H₽	P	$\mathrm{P} \rho$	Pe	P₽	H₽	4
Η÷	P₽	P₽	P₽	P₽	H₽	P₽	H₽	+
H₽	₽ø	P₽	H₽	P₽	H₽	H₽	P₽	42
H₽	H₽	H₽	$P_{\Phi}$	P₽	$P^{\omega}$	$\mathbb{P}^{\mathbb{P}}$	H₽	47

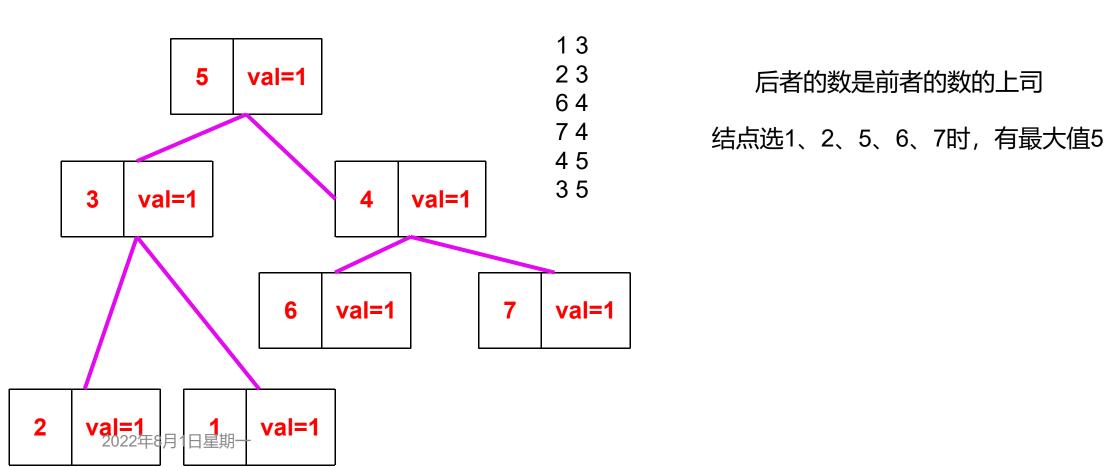


在树这种数据结构上进行的DP:给出一棵树,要求以最少的代价(或取得最大收益)完成给定的操作。

在树上做动态规划,显得非常合适:树本身有"子结构"性质(树和子树),具有递归性,符合DP的性质。

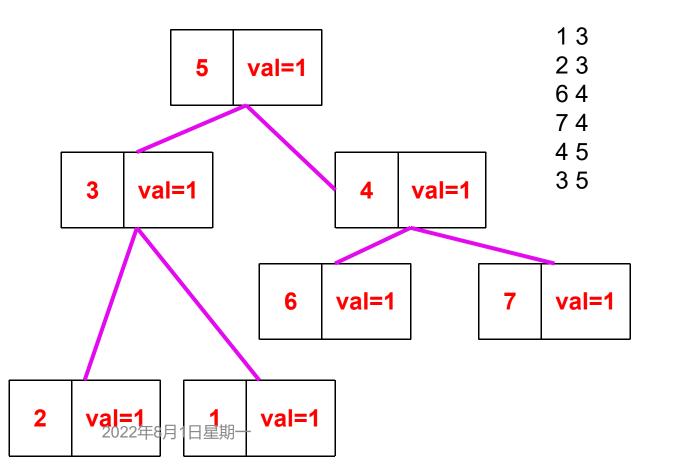
### 没有上司的舞会

一棵有根树上,每个结点有一个权值。相邻的父结点和子结点只能选择一个,问如何选择,使得总权值之和最大。(邀请员工参加宴会,为了避免员工和直属上司发生尴尬,规定员工和直属上司不能同时出席。)



### 没有上司的舞会

一棵有根树上,每个结点有一个权值。相邻的父结点和子结点只能选择一个,问如何选择,使得总权值之和最大。(邀请员工参加宴会,为了避免员工和直属上司发生尴尬,规定员工和直属上司不能同时出席。)



### 定义状态:

dp[i][0]:不选择当前结点的最优解;dp[i][1]:选择当前结点时的最优解。

### 状态转移方程,有两种情况:

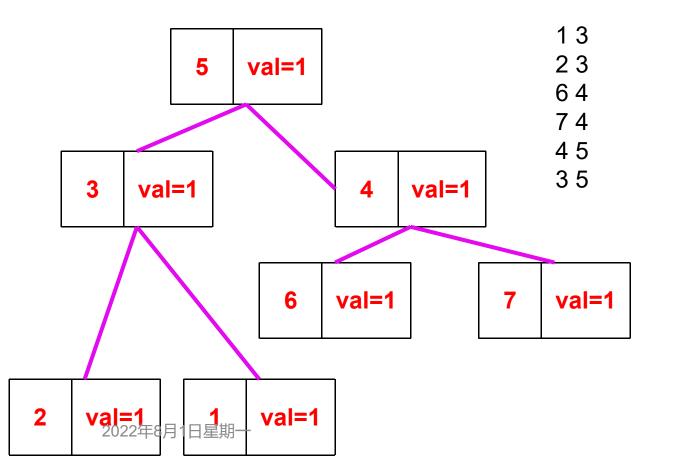
(1) 不选择当前结点,那么**它的子结点可选可** 不选,取其中的最大值:

dp[u][0] += max(dp[son][1], dp[son][0])

(2) 选择当前结点,那么**它的子结点不能选**: dp[u][1] += dp[son][0];

### 没有上司的舞会

一棵有根树上,每个结点有一个权值。相邻的父结点和子结点只能选择一个,问如何选择,使得总权值之和最大。(邀请员工参加宴会,为了避免员工和直属上司发生尴尬,规定员工和直属上司不能同时出席。)

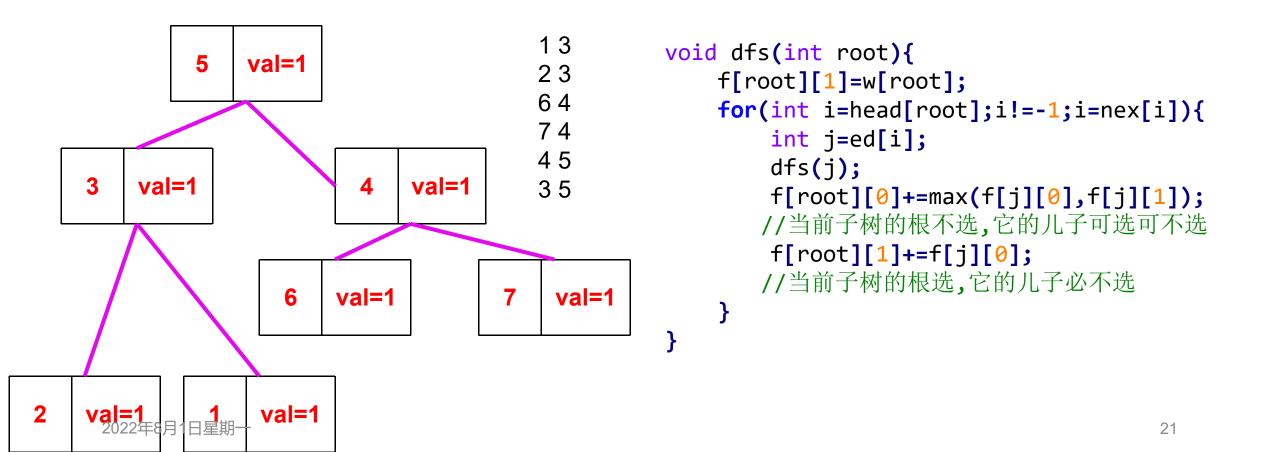


- (1) 建树。采用链式前向星,建 立关系树。
- (2) 树的遍历。可以用DFS,从 根结点开始进行记忆化搜索。
  - (3) DP。

复杂度: O(n)

### 没有上司的舞会

一棵有根树上,每个结点有一个权值。相邻的父结点和子结点只能选择一个,问如何选择,使得总权值之和最大。(邀请员工参加宴会,为了避免员工和直属上司发生尴尬,规定员工和直属上司不能同时出席。)





### 树的最长路径

给定一棵树,树中包含 n 个结点(编号1~n)和 n-1 条无向边,每条边都有一个权值。

现在请你找到树中的一条最长路径。

换句话说,要找到一条路径,使得使得路径两端的点的距离最远。

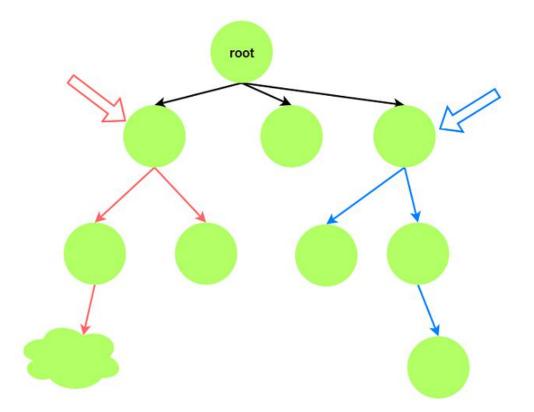
注意:路径中可以只包含一个点。

#### 树的最长路径

### 状态表示 dp(u)

➤ 集合:任意以一点作为树根后,树节点相对根就有了高低之分.dp(u)表示最高节点为u的所有路径集合.

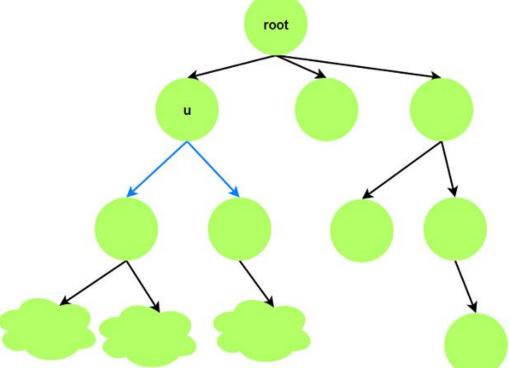
➤ 属性: Max路径长度的最大值.



### 树的最长路径

### 状态计算:

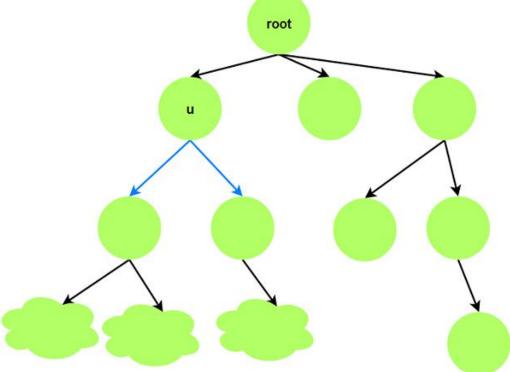
- ✓ 为保证当前节点u是路径最高点, 向下枚举以子节点为根到叶节点的最长路径.
- ✓ dp(u)即所有其子节点向下的路径的最长与次长值之和,若路径值为负数可以忽略.
- ✓ 在确定根后, 树的边应该为有向边. 为**防止节点"回头"向上搜索**, 在dfs过程中加入参数fa —当前节点的父节点.



### 树的最长路径

### 状态计算:

- ✓ 为保证当前节点u是路径最高点, 向下枚举以子节点为根到叶节点的最长路径.
- ✓ dp(u) 即**所有其子节点向下的路径的最长与次长值之和**, 若路径值为负数可以忽略.
- ✓ 在确定根后, 树的边应该为有向边. 为**防止节点"回头"向上搜索**, 在dfs过程中加入参数fa —当前节点的父节点.



#### 树的最长路径

### 状态计算:

- ✓ 为保证当前节点u是路径最高点, 向 下枚举以子节点为根到叶节点的最长 路径.
- ✓ dp(u) 即**所有其子节点向下的路径的** 最长与次长值之和, 若路径值为负数 可以忽略.
- ✓ 在确定根后, 树的边应该为有向边. 为**防止节点"回头"向上搜索**, 在dfs过程中加入参数fa —当前节点的父节点.

```
int dfs(int u,int fa){
   int dis=0;//从当前点往下走的最大长度
   int d1=0,d2=0;//d1表示最大值,d2表示次大值
   for(int i=head[u];i!=-1;i=nex[i]){
       int j=ed[i];
       if(j==fa)
          continue;
       int d=dfs(j,u)+val[i];
       dis=max(dis,d);
       if(d>=d1)//d>=最大值,更新最大值和次大值
          d2=d1, d1=d;
       else if(d>d2)//d>次大值,更新次大值
          d2=d;
   res=max(res,d1+d2);//更新最终结果
   return dis;
```



### 树的最长路径

扩展:关于无权树的直径(最长路径)求解

对于无权树(可认为边权均为1), 可以按如下方法求树的直径:

- ✓ 取任意一点a为起点,找到距离a最远的一点u.
- ✓ 找距离u最远的节点v.

u→v的路径即为树的一条直径.

### 树的最长路径

### 扩展: 关于无权树的直径(最长路径)求解

证明: 若u→v不是树的一条直径,即u不是一条直径(最长路

径)的端点.

假设树中直径c→d,与树中直径a→u存在两者关系.

#### 1. 二者无交点

### 树上任意两点联通, 所以从a存在一条到d的路径.

由于距离a最远的顶点是u(用[x,y]表示x到y的长度),故

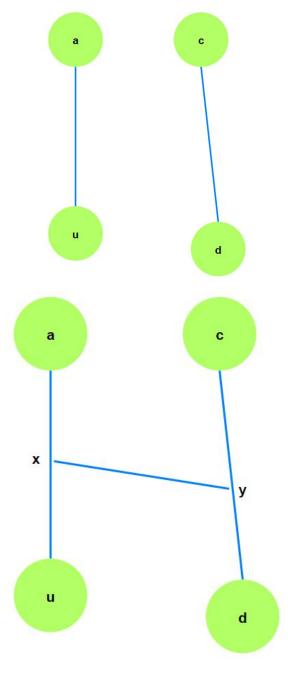
 $[a,x]+[x,u] \ge [a,x]+[x,y]+[y,d]$ 

可推出[x,u] $\geq$ [x,y]+[y,d]

该式移项[x,u] $-[x,y] \ge [y,d]$ ,此时[x,u] $+[x,y] \ge [y,d]$ 也成立

两边同时加上[y,c]可得到[x,u]+[x,y]+[y,c] $\geq$ [y,d]+[y,c]=[c,d],

由于[y,d]+[y,c]即树的直径 $c \rightarrow d$ ,所以从u到c也是直径,即u作为直径的一个端点





### 树的最长路径

### 扩展: 关于无权树的直径(最长路径)求解

证明:若u→v不是树的一条直径,即u不是一条直径(最长路径)的端点.

假设树中直径c→d,与树中直径a→u存在两者关系.

### 2. 二者有交点

可以认为x→y退化为一个点. 可以用类似的方式证明.

$$[a,x]+[x,u] \ge [a,x]+[x,d] \Longrightarrow [x,u] \ge [x,d]$$

两边同时加上[x,c]

$$[x,u]+[x,c] \ge [x,d]+[x,c]=[c,d]$$

故u亦可作为c的直径的另一个端点

