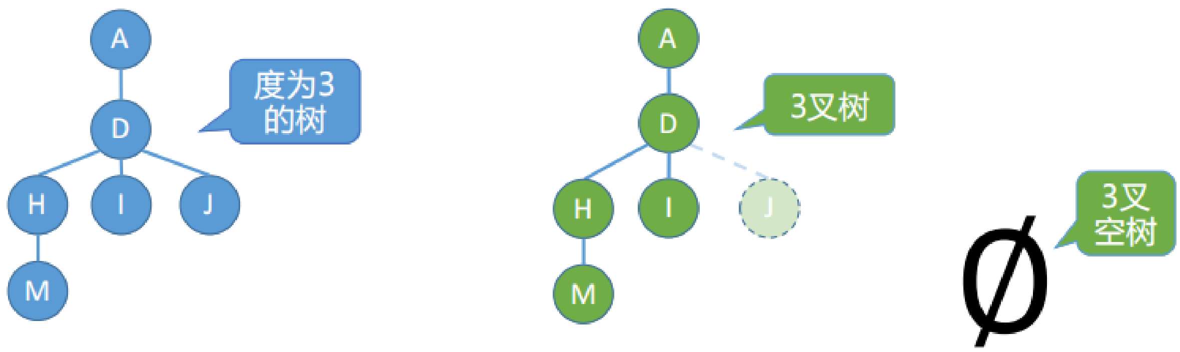
树的性质

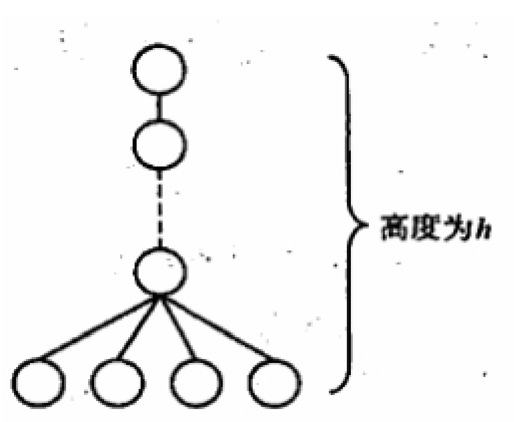
- 树中的结点数等于所有节点的度数之和加 1;
- 在 n个结点的树中有 $n-1$条边(度);
- **树的度**(指各结点的度的最大值);
- m**叉树**(指每个结点最多只能有 m个孩子的树);

度为 m的树和 m叉树比较

度为m的树	m叉树
任意结点的度 ≤ m（最多m个孩子）	任意结点的度 ≤ m（最多m个孩子）
至少有一个结点度 = m（有m个孩子）	允许所有结点的度都 < m
一定是非空树，至少有m+1个结点	可以是空树



- 度为 m的树(或 m叉树)第 i层至多有 m^{i-1}个结点($i \geq 1$),此时整棵树是一个**完全** m**叉树**;
- 高度为 h的 m**叉树**(或度为 m的树)至多有 $\frac{m^h-1}{m-1}$个结点;
- 高度为 h的 m**叉树**至少有 h个结点,高度为 h的 度为 m的树至少有 $h+m-1$个结点;

> **证明**: 在完全 m叉树中,第一层有 $m^0=1$,第二层 m^1,第三层 m^2, $\cdots$,第 h层 m^{h-1},总共 $1+m^1+m^2+\cdots+m^{h-1}=\frac{1(1-m^h)}{1-m}=\frac{m^h-1}{m-1}$.
>
> 由于 m叉树中,每一个高度至少为 1,故 至少有 h个结点;
>
> 而在度为 m的树中,至少有一个结点有 m个分支,且满足每层的结点尽可能少,即 $h-1+m$,如下图所示.
>
> 
>

- 具有 n个结点的 m叉树(或度为 m的树)的最小高度为 $\lceil\log_m(n\times(m-1)+1)\rceil$;

> **证明**: 所有结点都有 m个孩子,可由上一个性质知:
>
> 其中前 $h-1$层最多有多少个结点表示为 $\frac{m^{h-1}-1}{m-1}$,前 h层最多有多少和结点表示为 $\frac{m^h-1}{m-1}$.
>
> 故 $\frac{m^{h-1}-1}{m-1} < n \leq \frac{m^h-1}{m-1}$.
>
> 两边同时乘以 $m-1$,并 $+1$,得: $m^{h-1} < n \times (m-1) + 1 \leq m^h$
>
> 两边同取 $\log_m$,得: $h-1 < \log_m(n \times (m-1)+1) \leq h$
>
> 故 $h_{min} = \lceil \log_m(n \times (m-1)+1) \rceil$

- 设树中度为 i($i = 0, 1, 2, \cdots, m$)的结点数为 a_i,总结点个数 n为 $\sum_{i=0}^{m} a_i$ (表示结点个数之和),亦可表示为 $(\sum_{i=0}^{m} i \times a_i) + 1$(表示所有结点的度数之和 $+1$)

> 对于一棵具有 n个结点、度为 4的树来说,(A)
>
> A.树的高度至多是 $n-3$
>
> B.树的高度至多是 $n-4$
>
> C.第i层上至多有 $4(i-1)$个结点
>
> D.至少在某一层上正好有 4个结点

树的度为 4说明至少有一个结点的度为 4,故 D错误,要想树的高度最高，需使树的每一层的结点尽可能少。将每一层只放一个结点的树高度为 n，而此时将最后三个结点放到了倒数第四个结点那一层，所以高度减少了 3，故树的高度至多为 $n-3$,故 A正确, B错误,度为 4的第 i层至多有 4^{i-1}个结点, C错误.

> 度为 4、高度为 h的树，(A),
>
> A.至少有 $h+3$个结点
>
> B.至多有 $4h-1$个结点
>
> C.至多有 $4h$个结点
>
> D.至少有 $h+4$个结点

套结论

- 高度为 h的 m**叉树**(或度为 m的树)至多有 $\frac{m^h-1}{m-1}$ 个结点;
- 高度为 h的 m**叉树**至少有 h个结点,高度为 h的 度为 m的树至少有 $h+m-1$个结点;

故度为 4,高度为 h的树中,至少有 $h+4-1=h+3$个结点,至多有 $\frac{4^h-1}{3}$.

> 假定一棵度为 3的树中，结点数为 50，则其最小高度为 ().
>
> A. 3
>
> B. 4
>
> C. 5
>
> D. 6

方法一:套结论

- 具有 n 个结点的 m 叉树(或度为 m 的树)的最小高度为 $\lceil \log_m(n \times (m-1)+1) \rceil$;

由上知, $\lceil \log_3(50 \times 2+1) \rceil = \lceil \log_3 101 \rceil = 5$

方法二:计算每层的个数,求和与结点数比较

要求满足条件的树，那么该树是一棵完全三叉树。在度为 3 的完全三叉树中，第 1 层有 1 个结点，第 2 层有 $3^1=3$ 个结点，第 3 层有 $3^2=9$ 个结点，第 4 层有 $3^3=27$ 个结点，因此结点数之和为 $1+3+9+27=40$，第 5 层的结点数 $=50-40=10$ 个，因此最小高度为 5。

> **2010统考真题**：在一棵度为 4的树 T 中，若有 20个度为 4的结点， 10个度为 3的结点， 1个度为 2的结点， 10个度为 1的结点，则树 T 的叶结点个数是()。
>
> A. 41
>
> B. 82
>
> C. 113
>
> D. 122

套结论

- 树中的结点数等于所有节点的度数之和加 1;

设度为 0的结点(叶子结点)有 x 个,由题知:总结点数可表示为:
$x \times 0+10 \times 1+1 \times 2+10 \times 3+20 \times 4+1$(度数之和加 1);总结点数亦可表示为
$x+10+1+10+20$(结点个数和)

两式联立解得: $x=82$

5.1.1

> 含有 n 个结点的三叉树的最小高度是多少?

套结论

- 具有 n 个结点的 m 叉树(或度为 m 的树)的最小高度为 $\lceil \log_m(n \times (m-1)+1) \rceil$;

由上知, $\lceil \log_3(n \times 2+1) \rceil$

要求含有 n 个结点的三叉树的最小高度，那么满足条件的一定是一棵完全三叉树，设含有 n 个结点的完全三叉树的高度为 h，第 h 层至少有 1 个结点，至多有 3^{h-1} 个结点。则有

$$1+3^1+3^2+\cdots+3^{h-2}<n \le 1+3^1+3^2+\cdots+3^{h-2}+3^{h-1}$$

即 $(3^{h-1}-1)/2<n \le (3^h-1)/2$，得 $3^{h-1}<2n+1 \le 3^h$，也即 $h<\log_3(2n+1)+1$，$h \ge \log_3(2n+1)$。

由于 h 只能为正整数，$h=\lceil \log_3(2n+1) \rceil$，故这样的三叉树的最小高度是 $\lceil \log_3(2n+1) \rceil$。

5.1.2

> 已知一棵度为 4的树中，度为 $0,1,2,3$ 的结点数分别为 $14,4,3,2$,求该树的结点总数 n 和度为 4的结点个数，并给出推导过程。

设树中度为 i($i=0,1,2,\cdots,m$)的结点数为 a_i,总结点个数 n 为 $\sum_{i=0}^{m} a_i$ (表示结点个数之和),亦可表示为

$(\sum_{i=0}^{m} i \times a_i)+1$(表示所有结点的度数之和 $+1$)

设度为 4的结点个数是 a_4,由题知, $n = 14 + 4 + 3 + 2 + a_4 = 1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times a_4 + 1$

解得: $a_4 = 2, n = 25$

5.1.3

> 已知一棵度为 m的树中，有 n_1个度为 1的结点，有 n_2个度为 2的结点 $\cdots\cdots$有 n_m个度为 m的结点，问该树有多少个叶子结点?

设度为 0的结点(叶子结点)有 n_0个,设总结点个数为 n,

$$n = \sum_{i=0}^{m} n_i = n_0 + n_1 + n_2 + \cdots + n_m$$

$$n = (\sum_{i=0}^{m} i \times n_i) + 1 = n_0 \times 0 + n_1 \times 1 + n_2 \times 2 + \cdots + n_m \times m + 1$$

故 $n_0 = n_1 + 2n_2 + \cdots + mn_m + 1 - (n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$

$= n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \cdots + (m-1)n_m + 1$

$$= [\sum_{i=2}^{m} n_i \times (i-1)] + 1$$