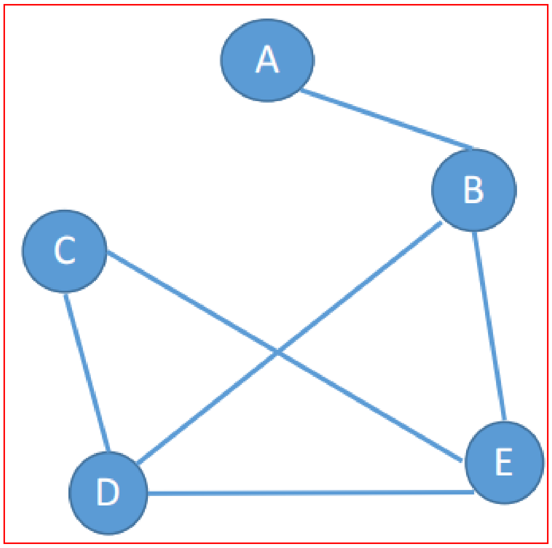
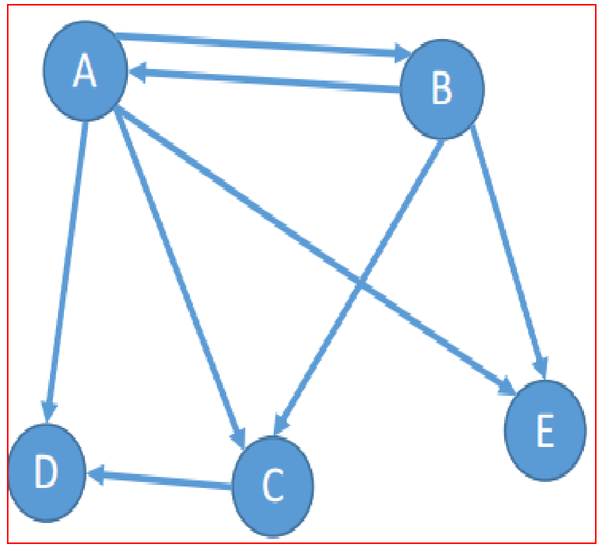
图 $G(Graph)$由**顶点集** $V(Vertex)$和**边集** $E(Edge)$组成,记为 $G=(V,E)$,其中 $V(G)$表示图 G中`顶点`的有限非空集; $E(G)$表示图 G中`顶点之间的关系(边)`集合.若`V={` $v_1,v_2,\cdots,v_n$ `}`, 则用 $|V|$表示图 G中顶点的个数,也称图 G的阶, `E={` $(u,v)|u\in V,v\in V$ `}`,用 $|E|$表示图 G中边的条数.

注: 线性表可以是空表,树可以是空树,但图**不可以是空**,即**顶点集** V一定是**非空集**;但**边集** E**可以为空**,即图中只有顶点没有边.

- **无向图、有向图**





> **无向图**：若边集 E是**无向边**(简称**边**)的有限集合时,则图 G为无向图(如上左图).**边**是顶点的**无序对**,记为 (v,w)或 (w,v),且满足 $(v,w)=(w,v)$,其中 v,w是顶点.可以说 w和 v互为`相邻点`,边 (v,w)`依附于`顶点 w和 v,或者说边 (v,w)和顶点 v,w相`关联`.
>
> **有向图**：若边集 E是**有向边**(简称**弧**)的有限集合时,则图 G为有向图(如上右图).**弧**是顶点的**有序对**,记为 , 其中 v,w是顶点, v称为弧尾, w称为弧头, $\langle v,w\rangle$称为从顶点 v到顶点 w的弧,也称 v`邻接到` w,或 w`邻接自` v. 注意 $\langle v,w\rangle\neq\langle w,v\rangle$.

- **简单图、多重图**

> **简单图**：不存在`重复边`;不存在顶点到自身的边(`自环`).
>
> **多重图**：图 G中某两个结点之间的边数多于一条，又允许顶点通过同一条边和自己关联，则 G为多重图.

- **顶点的度、入度和出度**

> **在无向图中**：(一般不考虑`入度`和`出度`)
>
> 顶点 v的度是指依附于**该顶点的边的条数**,记为 $TD(v)$.
>
> 在具有 n个顶点, m条边的无向图中,全部顶点的度的和等于边数的 2倍(**每条边和两个顶点相关联**),即
>
> $$\sum_{i=1}^{n}TD(v_i)=2m$$
>
> **在有向图中**：
>
> 入度是以顶点 v为**终点**的有向边的数目,记为 $ID(v)$;
>
> 出度是以顶点 v为**起点**的有向边的数目,记为 $OD(v)$;

> 顶点 v的度等于其**入度和出度之和**,即 $TD(v) = ID(v) + OD(v)$.
>
> 在具有 n个顶点, m条边的有向图中,有向图的全部顶点的**入度之和**与**出度之和**相等,并且等于边数(**每条有向边都有一个起点和终点**),即 $\sum_{i=1}^{n} ID(v_i) = \sum_{i=1}^{n} OD(v_i) = m$,全部顶点的度的和为 $2m$.

- **顶点和顶点的关系描述**

> **路径**：顶点 v_p到顶点 v_q之间的一条路径是指顶点序列 $v_p, v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_m}, v_q$,顶点之间有可能`不存在`路径;
>
> **回路**：第一个顶点和最后一个顶点相同的路径称为回路或环;
>
> **简单路径**：在路径序列中,**顶点不重复出现**的路径称为简单路径;
>
> **简单回路**：除第一个顶点和最后一个顶点外,其余顶点不重复出现的回路称为简单回路;
>
> **路径长度**：路径上边的数目;
>
> **点到点的距离**：从顶点 u出发到顶点 v的**最短路径**若存在,则此路径的长度称为从 u到 v的距离.若从 u到 v根本不存在路径，则记该距离为无穷(∞);
>
> **连通**：**无向图**中，若从顶点 v到顶点 w有路径存在，则称 v和 w是**连通**的;
>
> **强连通**：**有向图**中，若从顶点 v到顶点 w和从顶点 w到顶点 v之间都有路径，则称这两个顶点是**强连通**的

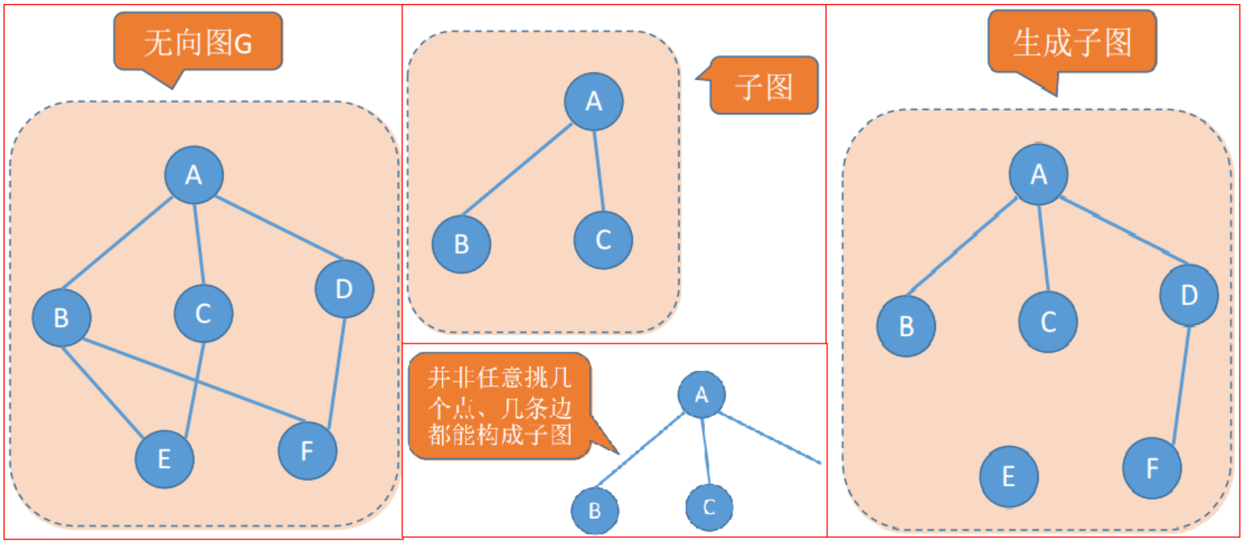
- **连通图、强连通图**

> 若图 G中任意两个顶点都是连通的,则称图 G**连通图**,否则称为**非连通图**.
>
> 对于 n个顶点的无向图 G,
>
> 若 G是**连通图**,则**最少**有 $n-1$条边;
>
> 若 G是**非连通图**,则**最多**可能有 C_{n-1}^{2}(其中 $n-1$个点相互组合)

> 若图中任何一对顶点都是强连通的,则称此图为**强连通图**.
>
> 对于 n个顶点的有向图 G,
>
> 若 G是**强连通图**,则**最少**有 n条边(形成回路)

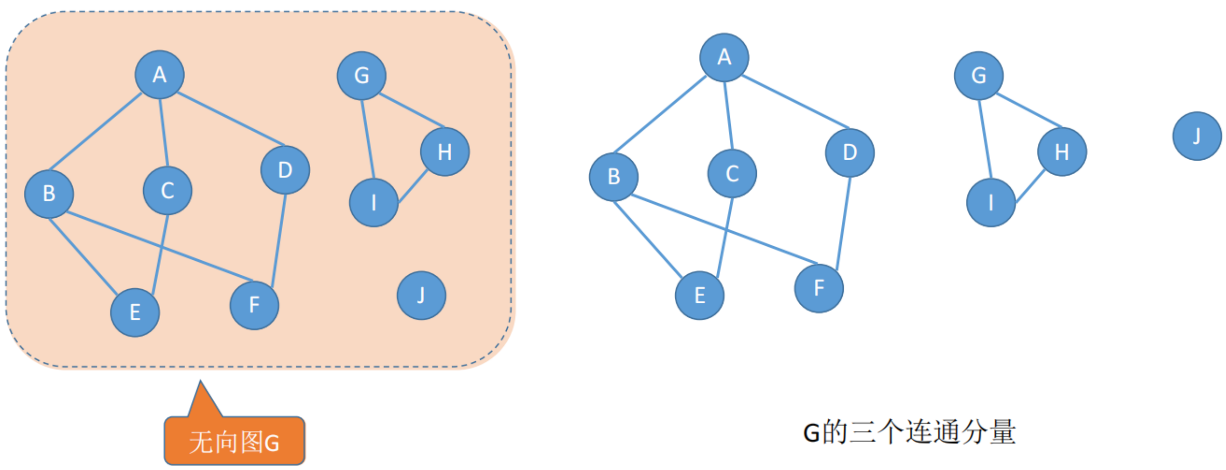
- **子图**

> 设有两个图 $G = (V, E)$和 $G' = (V', E')$,若 V'是 V的子集,且 E'是 E的子集,则 G'是 G的**子图**.
>
> **注意**:并非 V和 E的任何子集都能构成 G的子图,因为这样的子集可能不是图,即 E的子集中的某些边关联的顶点可能不在这个 V的子集中.
>
> 若满足 $V(G') = V(G)$的子图 G',称其为 G的**生成子图**.
>
> 此处只给出**无向图**,**有向图**同理.



- **连通分量**

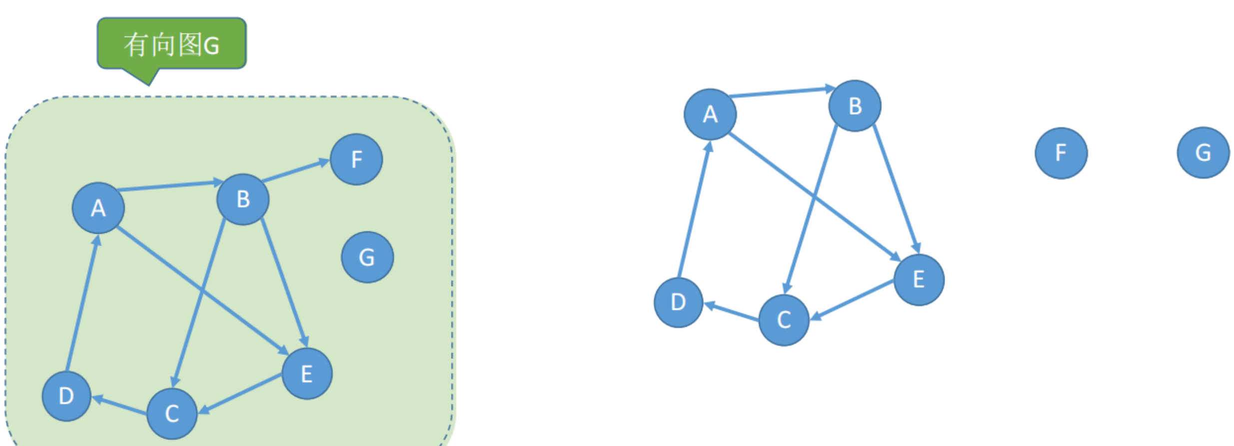
> 无向图中的**极大连通子图**称为**连通分量**.
>
> **极大连通子图**：子图必须**连通**,且包含尽可能多的**顶点和边**.



G的三个连通分量

- **强连通分量**

> 有向图中的**极大强连通子图**称为有向图的**强连通分量**.
>
> **极大强连通子图**：子图必须**强连通**,同时保留尽可能多的**边.**



G的三个强连通分量

- **生成树、生成森林**

> 连通图的**生成树**是包含图中全部顶点的一个**极小连通子图**(边尽可能的少,但要保持连通).
>
> 若图中顶点数为 n,则它的生成树含有 $n-1$条边.对生成树而言,若**删除**它的一条边,则会变成**非连通图**;若增加一条边,则会形成一个**回路**.
>
> 在**非连通图**中,**连通分量的生成树**构成了非连通图的**生成森林**.

- **边的权、带权网/图**

> **边的权**：在一个图中,每条边都可以标上具有某种含义的数值,该数值称为该边的权值.
>
> **带权图/网**：边上带有权值的图称为带权图,也称网.
>
> **带权路径长度**：当图是带权图时,一条**路径上所有边的权值之和**,称为该路径的带权路径长度.

- **几种特殊形态的图**

> **无向完全图**：无向图中任意两个顶点都存在边.若无向图的顶点数 $|V|=n$,则 $|E|\in[0,C_n^2]=[0,\frac{n\times(n-1)}{2}]$.
>
> **有向完全图**：有向图中任意两个顶点之间都存在方向相反的两条弧.若有向图的顶点数 $|V|=n$,则 $|E|\in[0,2C_n^2]=[0,n\times(n-1)]$.
>
> **稀疏图和稠密图**：边数很少的图称为稀疏图,反之为稠密图,一般来说 $|E|<|V|\log|V|$时，可以将 G 视为稀疏图.
>
> **树**：不存在回路，且连通的**无向图**. n个顶点的图，若 $|E|>n-1$，则**一定有回路(环)**
>
> **有向树**：一个顶点的入度为 0(该点为**根结点**)、其余顶点的入度均为 1的有向图，称为有向树.

> 一个有 28条边的非连通无向图至少有()个顶点.
>
> A. 7
>
> B. 8
>
> C. 9
>
> D. 10

若 G是**非连通图**,则**最多**可能有 C_{n-1}^2(其中 $n-1$个点相互组合)

故 $C_{n-1}^2=\frac{(n-1)(n-2)}{2}=28$,化简得: $n^2-3n-54=0$,解得 $n=-6$(舍去)或 $n=9$.

> 无向图 G有 23条边,度为 4的顶点有 5个,度为 3的顶点有 4个,其余都是度为 2的顶点,则图 G至少有()个顶点.
>
> A. 11
>
> B. 12
>
> C. 15
>
> D. 16

在具有 n个顶点, m条边的无向图中,全部顶点的度的和等于边数的 2倍(**每条边和两个顶点相关联**),即

$$\sum_{i=1}^{n} TD(v_i) = 2m$$

设度为 2的结点个数为 n_2,已知全部顶点的度数为 $2 \times 23 = 46$.

故 $n_2 \times 2 + n_3 \times 3 + n_4 \times 4 = n_2 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 = 46$

解得 $n_2 = 7$

故总结点数为 $n = n_2 + n_3 + n_4 = 7 + 4 + 5 = 16$.

> 在有 n个顶点的有向图中,顶点的度最大可达()
>
> A. n
>
> B. $n-1$
>
> C. $2n$
>
> D. $2n-2$

此图必然为**有向完全图**,任意一个顶点最多与其他的 $n-1$个顶点有**一对指向相反**的边相连,故顶点的度为 $2 \times (n-1) = 2 \times n - 2$.

> 具有 6个顶点的无向图,当有()条边时能确保是一个连通图.
>
> A. 8
>
> B. 9
>
> C. 10
>
> D. 11

假设该图是非连通无向图,此时最多可能有 $C_{n-1}^2 = C_5^2 = 10$,若此时再连一条边,可变为连通图,故此时的边数为 $10 + 1 = 11$.

> 若具有 n个顶点的图是一个环,则它有()棵生成树.
>
> A. n^2
>
> B. n
>
> C. $n-1$
>
> D. 1

因为 n个顶点构成的**环**共有 n条边,去掉其中任意一条便是一棵生成树,所以共有 n种情况.

> **2010统考真题**: 若无向图 $G = (V, E)$中含有 7个顶点,要保证图 G在任何情况下都是连通的,则需要的边数最少是().
>
> A. 6
>
> B. 15
>
> C. 16
>
> D. 21

假设该图是非连通无向图,此时最多可能有 $C_{n-1}^2 = C_6^2 = 15$,若此时再连一条边,可变为连通图,故此时的边数为 $15 + 1 = 16$.

> **2013统考真题**：设图的邻接矩阵 A如下所示,各顶点的度依次是().
>
> $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
>
> A. $1, 2, 1, 2$
>
> B. $2, 2, 1, 1$
>
> C. $3, 4, 2, 3$
>
> D. $4, 4, 2, 2$

在有向图中,分别计算它的**入度**(看对应**列** 1的个数)和**出度**(看对应**行** 1的个数),**顶点的度**为`入度+出度`

它们的入度分别是 $1, 2, 1, 2$,出度分别为 $2, 2, 1, 1$,故各顶点的度分别为 $3, 4, 2, 3$.

> 2**017统考真题**：已知无向图 G含有 16条边,其中度为 4的顶点个数为 3,度为 3的顶点个数为 4,其他顶点的度均小于 3.图 G所含的顶点个数至少是().
>
> A. 10
>
> B. 11
>
> C. 13
>
> D. 15

无向图边数的 2倍等于各顶点度数的总和,由于其他顶点的度均小于 3,即当度为 2时,对应的顶点最小,设度为 2的顶点个数是 n_2,故 $2 \times n_2 + 3 \times 4 + 4 \times 3 = 2 \times 16$,解得 $n_2 = 4$,故总结点数为 $n = n_2 + n_3 + n_4 = 4 + 4 + 3 = 11$.

6.1.1

> 图 G是一个非连通无向图，共有 28条边，该图至少有多少个顶点?

若 G是**非连通图**,则**最多**可能有 C_{n-1}^2(其中 $n-1$个点相互组合)

故 $C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 28$,化简得: $n^2 - 3n - 54 = 0$,解得 $n = -6$(舍去)或 $n = 9$.

由于图 G 是一个非连通无向图，在边数固定时，顶点数最少的情况是该图由两个连通子图构成，且其中之一只含一个顶点，另一个为完全图。其中只含一个顶点的子图没有边，另一个完全图的边数为 $n(n-1)/2=28$，得 $n=8$。所以该图至少有 $1+8=9$ 个顶点。

6.1.2

> 如何对无环有向图中的顶点号重新安排可使得该图的邻接矩阵中所有的 1都集中到对角线以上?

- **方法一**

将顶点号的**出度**根据大小进行**排序**,出度最大的顶点编号为 1,依次到出度最小的顶点编号为 n.

调整,若存在弧 $\langle v, w\rangle$,忽略 v和 w的出度,都把 v编号在顶点 w的编号之前,只有 $v \leq w$弧 $\langle v, w\rangle$对应的 1才能在邻接矩阵的上三角.

- **方法二**

采用**拓扑排序**对顶点重新安排.