wykład 1

Ród Bernulich

- Jackob Bernoulie uciekinier z Netherlandów, bo był kalwinistą, pojechał do Bazylei założył ród Bernoulich, był prawie aptekarzem, miał 12 dzieci

- Hieronymous prowadził aptekę
- Jacob Bernoulli 1655-1705, Uniwersytet W Bazylei, bardzo biegły w językach klasycznych. Wbrew ojcu który chciał go kształcić na teologię, uczył się sam, przez chwilę był w galilei, potem we francji natkną się na dzieła kartezjusza, w Angli, oraz w Holandi zaczął publikować, na początku na tematy astronomiczne, te podróże dału mu duże kontakty. Wrócił do Bazylei, tam umarł. Najważniejsze działo - `Ars Conjectandi` wyd. pośmiertne, np prawo wielkich liczb. prowadził pokazy eksperymentalnej fizyki
- Jan brat Jakoba(1667-1748), przez pewnien czas Jakob go uczył, potem się pokłucili, wraz z Janem mocno się kłucili. mieli trudne charaktery jako 15-latek przez rok był w terminie, uczył się fachu kupieckiego, studiował potem medycynę, wprowadził jako obowiazkowy przedmiot `pokazy eksperymentalnej fizyki`, prace laibnica była trudne, więc jak umiał je dobrze omowawiać, to dostawał zaproszenie do fracni, poznał de de L'Hospital. w 1699 rozwiązuje problem jackoba jaki kształt ma ciężki łańcuch zawieszony w dwóch punktach. to był pierwszy DUŻY problem który jan bernulie rozwiązał. Ważna książka: pierwszy tom zbioru listów między Leibnizem i Johannem Bernoullim. W 1689 jedzie do holandi do grolinger ma kilku synów, zagajmuje sie zagadnieniem barysto... zagadnienie izoperymetryczne, jaka krzywa ogranicza obszar o najmnijeszym polu. w 1705 roku wraca do bazyleie(religine i chorobowe) wie że zwolni się stanowisko na katedrze greki, dostaje katedrę matematyki po swoim zmarłym bracie, do końca życia: analiza matematyczna fizyka, konflikt z synem (danielem) o podstawy hydrodynamiki nazywali go arhimedesem swoich czasów
- mikołaj II i daniel, synowie jakuba, studiowali u jana dostali zaproszenie do peterburga gdzie mieli dostać katedry matmatyki nowo utworzonej uczelni. mikołaj zaraz po przyjeźździe do petersburga zachorwał na febre i zmarł. jego młodszy brat skończył medysynę w heindeburgu, petem bazylei zrobił doktorat, przeniósł się do wenecji, dalej studiował medycynę, upublikował tam pierwsze swoje dzieło, ćwiczenia matematyczne-opracował metodę pomiaru ciśnienia rtęci (wbicie igły i pattrzenie na słupek rtęci, ciągle używane w samolocie) konstruował też klepsydry które działały by też na morzu za co dostał nagrodę na uczelni, pewnie datego dostał zaposzenie do peterburga, pracował wspólnie z eulerem. Ważne dzieło Hydrodynamika 1738, pracował na zagadniemi mechaniki 1784 roku wraca do bazylei ? zdobywa nagrodę akademi paryskiej wraz z ojcem, katedra botaniki → fizjolagia → fizyka otrzymał 10-krotnie nagrodę akademi paryskiej, podstaawy kinetycznej wlasnosci gazów
- Guillaume Francois Antoine de L'Hospital 1661-1704 zaczął od kariery

wojskowego, rzucił bo krótkowzroczny, w 1691 poznał jahna bernuliego który na jego prośbę dał cykł wykładów, potem te wykłady przeniosły się ddo …… posiadłości de L'Hopital zaproponował bernuliemu stałą pensję za to że tylko u niego będzie wydawał swoje osiągniecia, korespodencja trwałą dość długo, książki: Analiza nieskończenie małych 1696 pierwszy podręcznnik rachunku różniczkowego wyddawany przez blisko 100 lat na podstawie korespendycji bernuli Hospital Michel Rolle 1652-1719 postrzegaliśmy zawsze geometrią jako naukę ścisłą a nawet jako źródło ścisłości

- spór o nieskończenie małe Varignon i Leibniz mówienie o matematyce jako sprawie za którą trzeba sie opowiadać trzeba było poowoływać specjalną komisję aby rozsądzić tą sprawę książki: Traite d'Algebre 1690 (algorytm eliminacji gaousa) O nowym systemie nieskończonosci 1703 filozofia mtematyki, krytyka leibniza 1706 varignon do johanna Barnuligeo Mr Rolle wreszcie się nawrócił
- Abraham de moivre 1667- 1754 franzcóz trafia do więzienia na 1 do 3 lat nie wiadomo dokładniej wyjechał do agli nie możne znaleźć pracy na żadnym uniwarsytecie mimo starań newtona i jego uczniów, żyje z prywatnych lekcji Książki: The doctine of chances 1718 podwaliny statystki, rachunek prawdopodobieństwa wspóczesny centralne twierdzzenie …
- problem bazylejski, suma kwadratów kolejnych liczb

motyw podrózny

prześladowania religijne, oświecoony manarcha ztrudni u siebie, wędrowaniie za posadami uniwersyteckimi

uniwersytet Bazylei

- był bardzo Kalwinowski, bardzo tradycjonalistyczny

inne

słynne zadanie o igle pozwala w eksperymentalny spowób liczbę pi do 3 miejsc po przecinku, przy 2 tys rzutów

Wykład 2

Euler i inni

- wiek XVIII wiekiem rewolucji naukowej (poprzedni był smutny)
  - Owocna współpraca Akademii Naukowych
  - Pierszy miedzynarodowy projekt (francja Hishpania) zbadania kształtu ziemi
    - newton spłaszczona
    - hiszpanie że jejko
    - wyprawa do laponii 1736-37
    - wyprawa do Ekwadoru 1735-44
- Miedzynarodowy projekt zbadania odleglości Słońca od ziemi:
  - przejście wenus przez tarczę Słońca 1761 - nie udało się 1769 - udało się
    - król Ludwik XV
  - w wyprawie blali udział:
    - benjamin franklin michał łamonsow, james coook
    - pewien francuski uczony pojechał na obserwację do indii dwa razy miał pochmurną pogodę
- Daniel Bernoulli Grnoningen 1700
  peterburg 1725-1733
  Prawo bernuliego: prędkość + ciśnienie + stała = const

  - Hydrodenamika mierzenie ciśnienia
- Leonard Euler
  - Bazylea 1707 -1727 - nauka u Johanna Bernoulliego
  - Petersburg 1727-1741 pracował razem z Daniel Bernoulli wydz Matematyki
  - Berlin 1746-1766
    - Frederyk Wielki - był wielkim mecenasem kultury
    - od 1735 roku pogorszenie się wzroku
    - jako ślepiec zrobił najwięcej, napisał ¾ matematyki XVIII
    - poważny człowiek, religijny nie pasowały mu imprezy Fredyka, frederyk go wywalił
    - Katarzyna Wielka zaprosiła go do Petersburga 1766-1783, katarzyna wielka finansowała badania, sprawdzala co uczeni zrobili
    - zajmował się Astronomią teorią liczb, topologia, hydrodynamiką, Am
- matematyka eulorowska:
  - podążaj za formułami a one doprowadzą cię do prawdy”
  - równania Eulera płynu o stałej gęstośći …………
  - suma szeregu $\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ metoda niezbyt ścisła, ale uzasadnił ją numerycznie
- Joseph Louis Langrange 1736-1766 Turyn
  - założył Towarzystwo naukowe w turyn
  - Berlin 1766-1787 Frederyk wielki zaprosił go, Mecenique analytique astronamia
  - Paryż:
    - rewolucja francuska 1789-1799
    - system metryczny

    * mieszał się w: mechanikę astronomie
- mimo że włoch to francuzi uważali go za swojego ze względu na nazywisko

  historia matematyki to przepakowywyanie uszkodanych butelek matematyki

dwa teleskopy w punktach langrange

- zadada najmnieszego działania
- zagadnienie trzech ciał
- Analiza matematyczna
- monografie
- Równania różniczkowe

Wykład 3

Rozwój algebry w XIX wieku

gauss

- K. F. 1777-1855, pochodził z nizin społecznych ojciec był robotnikiem sezonowym

- Disquisitiones Arithmeticae - najbardziej wpływowawa książka z teori liczb w matematyce dysktetnej, ukazła sie w 1801 roku sfinansowana przez księcia Brunszwiku, była droga w druku przez skomplikowane wzory w rozdziale 5-tym. Chyba ostatnia książka o matematyce w łacinie. wpierwszym rozdziale o kongruencji np modulo 2
  - prawo wzajemności gaussa;
  - prawo wzajmności dla reszt kwadratowych, nastoletni gausse to udowodnił, potem dowiód to na jeszcze 5 innych sposobów;
  - dowód zasadniczego tw. Algebry, pierwszy poprawny;

teoria Galois:

- Norweg Niels Henrik Abel (1802-1829):

  robił pierwszy potężny postęp w rozwiązywaniu równań wielomianowych po renesansowych wyczynach Włochów. Wykazał mianowicie, że nie ma uniwersalnych wzorów literowych na pierwiastki wielomianu stopnia 5

- Evarsite Galois (1811-1832) udowdonił że pewnych równań nie da się rozwiązać, teoria grup;

P.Lejeune-Dirichlet (1805-1859)

- matematyk niemiecki francuskiego pochodzenia. W swoim dowodzie twierdzenia o liczbach pierwszych w postępie arytmetycznym użył grupy charakterów zredukowanej grupy reszt mod m. charaktery Dirichleta.
- udowdodnił że szereg odwrotnosci liczb pierwszych jest rozbieżny (częśći, wszystkich to euler)

- patologiczne funkcje: funkcja niecałkowalna: D(x)= 1 dla wymiernych, 0 dla niewymiernych

Kummer (1810-1893)

- urodził się w legnicy, studiował we wrocławiu, docelowo trafił na katedrę matematyki do berlna;
- udowodnił WTF
- W kierunku bikwadratowego prawa wzajemności

Początki algebry liniowej i nieprzemiennej

Hermann Grassmann - został specjalistą od sansskryptów, językoznawca.
Hermann Grassmann w Niemczech tzn.najpierw w Szczecinie, gdzie był nauczycielem a potem w Berlinie, gdzie był profesorem, stworzył pierwsze podstawy teorii przestrzeni wektorowych.rozumiał podstawowe znaczenie pojęć liniowej niezależności i generowania podprzestrzeni przez układ wektorów. Był zadowolony z możliwości uprawiania geometrii niezależnie od wymiaru przestrzeni!
William Hamilton w Irlandii stworzył kwaterniony. Są to czterowymiarowe wyrażenia a + bi + cj + dk, gdzie a, b, c, d R a i, j, k są specjalnymi symbolami, które mnoży się następująco: Zwykłe liczby rzeczywiste a, b, c, d są przemienne ze wszystkim. Zbiórkwaternionów jest pierwszym przykładem ciała nieprzemiennego, czyli takiej struktury algebraicznej, gdzie wykonalne są cztery działania arytmetyczne, ale nie wymagamy koniecznie, aby mnożenie było przemienne. W procesie uogólniania pojęcia liczby kwaterniony są najbliższym kuzynem liczb zespolonych – trójek liczb nie da się sensownie mnożyć (Frobenius)

- Zasłużeni dla rozwoju teorii grup w 19 wieku matematycy to na pewno A. Cayley i F. Klein. A. Cayley pierwszy podał aksomaty grupy, ale jednocześnie udowodnił swoje słynne twierdzenie o reprezentacji:każda grupa może być traktowana jako grupa permutacji pewnego zbioru. Natomiast F. Klein znalazł spektakularne zastosowania pojęcia grupy w geometrii jako takiej. Mianowicie zdefiniował geometrię jako teorię niezmienników pewnej grupy przekształceń. Niech G1 = {1, 2, 3, 4} przy czym działaniem jest mnożenie modulo 5. Natomiast niech G2 = {1, 3, 5, 7}; tym razem działanie to mnożenie modulo 8.W grupie G1 potęgi elementu 2 to: 2, 4, 8 = 3, 6 = 1 dają wszystkie elementy G1. Natomiast potęgi dowlnego elementu g G2 dają tylko g , 1. Obie grupy mają po 4 elementy, ale są algebraicznie różne: G1 jest cykliczna , a G2 to czwórkowa grupa Kleina

- Jeśli w układzie równań liniowych można tak pododawać równania stronami (wcześniej mnożąc obie strony tych równań przez liczby $6 = 0$) aby otrzymać równanie ewidentnie sprzeczne: $0 \cdot x1 + 0 \cdot x2 + \ldots + 0 \cdot xn = 1$, to wyjściowy układ równań też nie ma żadnych rozwiązań. Jeśli uzyskanie tak ewidentnej sprzeczności nie jest możliwe to wyjściowy układ ma rozwiązania. Twierdzenia Hilberta o zerach (Nullstellensatz) uogólnia to
- Drugie z fundamentalnych twierdzeń Hilberta w algebrze to twierdzenie Hilberta o bazie. Stwierdza ono w zasadzie, że każdy układ równań wielomianowych (również o nieskończenie wielu równaniach!) jest równoważny układowi równań ze skończoną liczbą równań. Oba powyższe twierdzenia wyniosły geometrię algebraiczną na istotnie wyższy poziom, niż zostawili ją włoscy geometrzy algebraiczni 19. wieku. Twierdzenie to zdetronizowało w pewnym sensie wiodącą teorię niezmienników.

Wykład 4

aksjomamtyzacja geometrii XVII-XIX

rodzaje geometri:

- **euclidesowa** ;
- sferyczna;
- wykreślna;
- **rzutowa** ;
- **nieeuklidesowa (hiperboliczna)** ;
- różniczkowa;
- algebraiczna; przez długi czas ludzie wierzyli że instnieje tylko jedna poprawna geometria - euclidesowa;

geometria rzutowa:

- około 1420 roku Filippo Brunelleschi namalował pierwszy obraz na którym widać perspektywe malarską
- podstawy naukowe malerskiej perspektywie nadał Leon Battista Alberti w książce o zasadach malarskich. Zawdzięczamy mu zasady geometri rzytowej:
  - linie proste pozostają proste;
  - linie proste albo równoległe albo się przecinają;
- przyczynił się też leonardo da vinci niceron (krzsło nicerona
- pierwsze teoretyczne podstawy dał: Gigard desargaus, zawdzięczamy mu zasadnicze twierdzenie geometri rzutowej w szczególności twiedzenie noszące dziś imię desargausa. wprowadził pojęcie dwustosunku.
  - władysław zajączkowski Lwów 1882 notatki wykładów;
- Johannes kepler wprowadził pojęcie punktu w nieksończoności

- tw Blaise Pascala o sześciokącie i elipsie
- john victor Poncelet: w niewoli u rosjan wymyślił całą geometrię rzutową

- Karl george christian von staudt wykreślenie styczenej do okręgu za pomocą samej linijki

- metryka Klaina

euclidesowa:

- elementy euclidesa
  - podręcznik uniwesytecki, jedyny podręcznik geometri
  - bardzo popularna książka, 2 pod wzgędem wydań
- nasir ad-dina at-tusi
- john wallis eksjomat rówoważny 5-temu euclidesa

geometria nieeuclidesowa:

- Girolamo saccharii (1667 - 1733:
  - *euclides oczysczony od wszelkiej skazy...*

  W pracy tej przyjął pierwsze cztery postulaty Euklidesa i udowodnił 26 twierdzeń, bazując tylko na tych aksjomatach oraz zaprzeczeniu V postulatu. Saccherii zajmował się także czworokątem, wcześniej rozważanym między innymi przez Chajjama. Wysunął także trzy hipotezy dotyczące miary kątów przy podstawie górnej w tym czworokącie, hipotezę kąta rozwartego, ostrego i prostego. Pierwszą z nich obalił.

  Saccherii wykazał, że istnieją trzy rodzaje geometrii zależne od tego, czy przyjmiemy, że suma kątów wewnętrznych w trójkącie jest większa, równa czy też mniejsza od sumy dwóch kątów prostych.

  Przyjmując, że suma kątów wewnętrznych w trójkącie jest większa od dwóch kątów prostych, Saccherii doszedł do sprzeczności z faktem, iż prosta jest figurą nieograniczoną. Gdy przyjął, że suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa dwóm kątom prostym, otrzymał geometrię euklidesową, w trzecim zaś przypadku doszedł do stwierdzenia, że dwie proste mogą się nieskończenie zbliżać do siebie, nigdy się nie przecinając. Według siebie, doszedł do poszukiwanej sprzeczności, czyli tym samym udowodnił aksjomat Euklidesa

JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777)

Szwajcarski matematyk JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777) w dziele Die Theorie der Parallellinien (Teoria równoległych, 1766) bada czworokąt o trzech kątach prostych.

Lambert rozpatruje trzy hipotezy w związku z miarą kąta wewnętrznego. Hipotezę kąta rozwartego obala, kąta prostego uznaje za równoważną aksjomatowi Euklidesa, natomiast co do hipotezy kąta ostrego, to nie obala jej, lecz zauważa, że wtedy suma kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie jest mniejsza niż . Ponadto bada pola trójkątów, o właśnie takiej sumie miar kątów wewnętrznych. Zauważa, że jest ono równe [...] Dostrzega także, że pole jest proporcjonalne do wartości [...] którą nazywa defektem trójkąta. Korzysta z tego faktu i dowodzi twierdzenie, że nie istnieje podobieństwo figur.

ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833)

był francuskim matematykiem. Wydał podręcznik do geometrii pod tytułem Elémentes de geométrie (Początki geometrii, 1794), w którym to zawarł dowód" V postulatu Euklidesa.

Twórcy geometrii nieuklidesowej

FARKAS BOLYAI (1775-1856)

przyjaciel Gaussa, urodził się w Nagyszeben, dzisiaj jest to Sibiu - środkowa Rumunia. Był studentem uniwersytetu w Getyndze, gdzie poznał Gaussa. Zaczął też rozważać niezależność V postulatu. Swoje badania konsultował z Gaussem.

Łobaczewski

urodził się w Rosji. Jego ojciec - geodeta zmarł w 1796 roku, a więc na krótko po jego narodzeniu. Dzięki rencie po ojcu, Łobaczewski oraz jego dwóch braci, mogli pobierać nauki. Nikołaj ukończył gimnazjum w Kazaniu, a natępnie w roku 1807 wstąpił na Uniwersytet Kazański. Jednym z jego profesorów był Johann Martin Teodor Bartels, były nauczyciel Gaussa. W roku 1811 zostaje jego asystentem, a następnie adiunktem, w końcu w roku 1816 został mu nadany tytuł profesora.

W roku 1826, opublikował prace, która została wydana drukiem w formie artykułu w kazańskiej czasopiśmie naukowym. Łobaczewski zawarł w niej swoją wizję geometrii nieeuklidesowej. Przełomowe poglądy zamieszczone w artykule zostały jednak zignorowane. W 1840 ukazało się w Berlinie tłumaczenie tej pracy na język niemiecki, pod tytułem Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien (Geometryczne rozważania w teorii prostych równoległych, 1840). Wprowadza on funkcję, dzisiaj znaną jako funkcja Łobaczewskiego. Funkcja ta przyporządkowuje długości odcinka miarę odpowiedniego kąta, zwanego kątem równoległości. Łobaczewski dowodzi, że kąt równoległości jest kątem ostrym, oraz wartość funkcji wyraża się wzorem:

Eugenio Beltroni 1835-1899

model nieeuclidesowej geometri

Felix Klein 1849-1925

model trochę lepszy

- na podstawie jego badań wykazno że geometria Bolyaia-Łobaczewski jest niesprzeczna

David Hilbert:

Opublikowana Grundlagen der Geometrie, 1899

- Aksjomaty incydencji (8)
- Aksjomaty uporządkowania (dodany aksjomat Pascha) (4)
- Aksjomaty przystawiania (5)
- Aksjomat równoległości (1)
- Aksjomaty ciągłości (2, w tym aksjomat Archimedesa)

Wykład 4

W poprzek działów matematyki

pozycja geometri w amteamtyce w XXVIII:

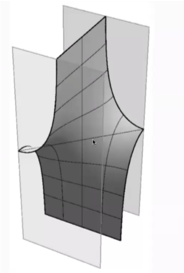
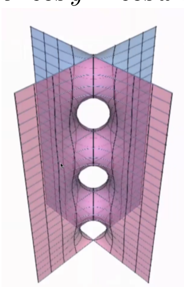
- utraciła swoją pozycję, ale nadal pozostała "wzorcem niedościgłej precycji rozumowania"
- rozwój rachunku różniczkowego: badanie nowych krzywych i powierzchni
- poszukiwanie nowego miejsca, zastosowanian, powierzchnie minimalne;

kluczowe pojęcia współczesnej geometrii:

- rozmaitość
- krzywizna

powierzchnie minimalne:

- leonard euler oraz Lagrange Jaka powierzchnia rozpięta na dwóch danych okręgacg ma najmniejsze pole: katenoida
- leagrange essej o nowej metodzie wyznaczania maksimów i minimów nieoznaczonych formuł całkowych
- narzędzie inteligentnej mrówki, po płaskiej powierzchni chodzi mrówka, wbija pręt prostopadły do powierzchni, następnie przcina płaszczynami przechodzącymi przez ten punkt …
- j. b meusnier 1776 udowodnił ważne twierdzenie odnośnie tego.
- krzywizna gaussa, krzywizna średnia (stałą ma np bańka mydlana)
- Odkrycie Meusniera: helikoida też stałą średnia krzywizna =0
  - czy takich powierzchni jest więcej?
  - na ile skomplikowene mogą być?
  - czy mogą mieć dziury na wylot?
- twierdzeni eulor stwierdzić w 1744 jedyną powierdznchnią obrotową minimalną jest katanoida.
- twierdzenie Catalan 1842 jedyną prostokreśną powierzchnią minimalną nie licząc płaszczyzny jest helikoida

- wymyślili równanie na powierzchnię minimalną scherka próbował je rozwiązywać w szczególnej postaci: dzięki temu odkrył dwie nowe powierzchnie minimalne:
  - $e^z \cos y = \cos x$ 
  - 
- reprezentacja Ennepera-Weiertrassa: daje możliwość konstrukcji ∞ wielu przykładów

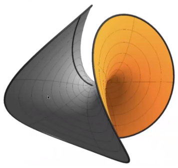
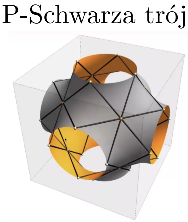


Figure 1: powierzchnia Ennepera

Hermann Amandus Schwarz (uczeń Weierstrassa)

- zasada symetrii Schwarza w analizie zespolonej
- Rozwiązanie zadanienia plateau (problem kostrukcji powierzchni minimalnej o danym brzegu dla dowolnego konturu z 4 odcinków.
- powierzchnia P-Schwarza trójokresowa powierzchnia minimalna 
- małpie siodło
  szalony chydraulik
  nieograniczona powierchnia schwarza

Bernhard Riemann 1826-1866

zajmował się m. in. analizą matematyczną teorią liczb i geometrią różniczkową

- słynny wykład habilitacyjny:

  O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii (1854):

- powstanie geometrii riemannowskiej, stworzenie gruntu pod późniejszy rozwój teorii względności. geometria to nie tylko punkty i proste, nie zajmujemy się eksjomatem 5

- rękopis 1860-61 odkryty pośmiertnie; nowa jednoparametrowa rodzina powierzchni minimalnych R_λ takich że każda płaszczyzna pozioma przecina R_λ wzdłuż okręgu.
- problem głowy
- patologiczne funkcje: dziwne przykłady funkcji całkowalnych, np funkcja nieskończenie razy nieciągła

Sophus Lie 1842-1899:

- grupy liego i algebry liego

Felix Klein 1849-1925

- w wieku 23 profesura w Erlangen
- wielki wpływ na rozwój geometrii
- program erlangeński: są różne geometrie każda z niech bada tylko te własności figur które są zachowane przez przekształcenia, należace do ustalonej grupy przekształceń danej przestrzeni

morały

- siłą napędową matematyki nie jest jest chęć rozwijania teorii tylko pragnienie i potrzeba rowiązywania problemów
- rozwój teorii odbywa się niejako drugorzędnie: motywuje go potrzeba precyzji myślenia i tworzenia spójnych, a zarazem zwięzłych i eleganckich podstaw rozumowania;
- najciekawsze rzeczy w matematyce dzieją się na styku różnych jej działów

Wykład 5

Rygoryzacja analizy i fizyka matematyczna w XIX wieku

ojcowie mechaniki:

Euler
d'Alembert
Lagrange

Laplace

fourier:

zaangazował sie w rewolucje, w związku z tym cudem uszedł wielkiemu terorowi
napisał fundamentalne działo o rozchodzeniu się w ciałach stałych
szeregi furiera: każdą funkcję o okresie 2π można zapisać jako jakiś szereg; bardzo ważne w matematyce(napędza metamatykę od 200 lat)

- Abel 1826, Dirichlet 1829 de bois-Reymond 1873

rygoryzacja analizy:

Cauchy: cours d'Analyse 1821

wykłady z rachunku różniczkowego 1829
przyjaciel lagrange, to on pokierował jego rozwojem; był bardzo religijny, wręcz ostentacyjny, dopiero w 1815 dostaje posadę uniwersytecką

dzięki niemu mamy ścisłe definicje:

- ścicła definicja funkcji
- granica
- ciągłość funkcji
- zbieżność szregu
- całki - poprzez sumy całkowe/pole pod wykresem
- pochodnej - granica ilorazu różnicowego nieudało mu się:
- rozwiązać problemu z rózróznienim zbieżności punktowej i jednostajnej;
- brak jaojęcia zupełności liczb rzeczywistych po 1831 wyjeżdża z francji bo rewolucja, cały majątek uległ konfiskacie
- patologiczne funkcje: funkcja ∞ wiele różniczkowalna, nieanalityczna

Karl Weierstrass:

syn pruskiego urzędnika - poborcy podatkowego, matematyczny samouk, studiował na akademii w minle, miał posadę nauczycielską później, gdzie uczył właściewie wszystkiego, uczelnie biły się o niego, wygrał uniwersytet w berlinie
zasługi:

- pojecie jednostajnej zbieżności
- ścisłe dowody, formalizm $\epsilon - \delta$
- rozróznienie supremum i maksimum;
- twierdzenie Bolzano-Weierstrassa;
- pierwsze konstrukcje liczb rzeczywistych z wymiernych - zupełność;
- wielki wkład w teorię funkcji analitycznych;
- patologiczne funkcje: funkcja ciągła nigdzie nieróżniczkowalna

bolzano

Praski piar, zakonnik, zamiast doktorat z teologi zrobił z matematyki; dziekan filozofii na uniwersytecie karola; skazany za swoje wolnosciowe poglądy; został wygnany, kilka lat spedził na zadupiu, był cenzurowany; jego dokoniania, uznany za heretyka

- praca nad usunięciem “nieskończenie małych”
- twierdzenie o wartościach średnich;
- twierdzenie Bolzano-weierstrasa;
- ciągi cauchiego, dowód ich zbieżności, dobry opis; przykład funkcji ciągłej nigdzie nie różniczkowalnej;
- zbiór nieskończony jest równoliczny ze swoim właściwym podzbiorem;
- wizjoner wykraczający po za swoje czasy, dopiero w ostatnich latach życia odzyskał honory, wrócił do pragi w 41

Gauss

- definicja limsup i lim inf
- znał się na wszystkim, ale mało publikował, publikował tylko gotowe rezultaty, pisał listy do shumachera

Abel

- norweski matematyk, udowodnił że nie ma rozwiązań równań stopnia 5 ogólnych, żył tylko 27 lat, był biedny, studiował w oslo, tylko dzięki sponsorom udało mu sie coś osiągnąć
- wytknął i poprawił część
- szereg $\sin\phi - \frac{1}{2}\sin 2\phi$ kontrpszykad do twierdzenia causchegie, f ciagla dązy do nieciąglej
- zachowanie szeregów potęgowych, kryteria i tw. Abela;

de bois-reymond

- patologiczne funkcje: funckcja ciągła ktróej szerego furie jest rozbieżny

w związku z nową definicją ciągłości trzeba było doprecyzować całkowanie

green gauss stoke

- jak chcemy scałkować funkcję po brzegu obszru
- twierdzenia pozwalajace zamieniać całkę wyżej wymierąwą na niżej wymiarowa
- **Green** angielski piekarz, hobbista, na koniec życia pijak, na uniwersytet poszedł w wieku 41 lat, traktat o metodach wyznaczania rozkładu ładunku
  - tożnsamości greena
  - metada funkcji greena, rozwiązywania równań różńiczkowych
- twierdzenie stokesa

fizyka matematyczna - elektreczność i magnetyzm

Fizyka matematyczna

ELEKTRYCZNOŚĆ I MAGNETYZM

Annus Mirabilis 1820:

lipiec — odkrycie elektromagnetyzmu - Oersted
przepływ prądu przez przewodnik wywołuje pole magnetyczne

wrzesień — Ampère wyjaśnia doświadczenie Oersteda

październik — prawo Biota - Savarta

listopad — cewki z prądem są elektromagnesami
ich rdzenie żelazne ulegają namagnesowaniu
(Arago, Ampère, Davy).

następne kilkanaście lat: odkrycie indukcji elektromagnetycznej (Faraday), samoindukcji (Lenz), idea pola elektromagnetycznego i linie sił (znów Faraday) ...

Trudna droga do analizy wektorowej

- koniec XVIII w. — analiza zespolona $a+bi$ $i^2=-1$
- XIX w: Równania Cauchy-Riemanna (d'Alembert)
wzór Cauchy'ego i systematyczna teoria całek po konturach (Cauchy)
geometryczna interpretacja liczb zesp. (Argand, Gauss)

lata 30, 40, 50 — „szkoła francuska analizy zesp.": Puiseux, Liouville, Hermite
lata 50-60 — Riemann wiąże analizę zesp. z metodami teorii potencjału
analiza zesp. wielu zmiennych, metody algebraiczne

- lata 40 i później — kwaterniony $a+bi+cj+dk$
$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$

sposób liczenia na punktach przestrzeni 4-wymiarowej — wygodniejszy zapis np. tożsamości Greena

- dopiero koniec XIX w — zapis wektorowy (z gradientem, rotacją, dywergencją, il. wektorowym) — Gibbs, Heaviside

---

Termodynamika po Fourierze

- lata 20-te – Carnot (maszyny cieplne)
- lata 40-te – zasada zachowania energii (Joule, Mayer, Helmholz)
- lata 50-te – II zasada termodynamiki (Clausius, W. Thomson)
- lata 60-70 te – początki fizyki statystycznej:
  entropia (Clausius),
  potencjały termodynamiczne (Gibbs)
- lata 70-te – Boltzmann: mechanika statystyczna
  powiązanie mechaniki cząsteczek gazu z obserwowanymi wielkościami makroskopowymi – temperatura, ciśnienie

$\Downarrow$

współczesna statystyka, teoria informacji
wielka i ważna część współczesnej fizyki.

Wykład 6

Podstawy matematyki. Od Dedekinda i Cantora do Cohena.

Terra incognita

W trakcie XIX w. coraz częściej zaczęły się w matematyce pojawiać wyniki, problemy i techniki, które prowadziły do wątpliwości dotyczących statusu twierdzeń matematyki, natury obiektów matematycznych, zakresu dopuszczalnych metod:

geometrie nieeuklidesowe,

kontrprzykłady, „dziwne” obiekty,

coraz śmielsze używanie nieskończonych zbiorów,

niekonstruktywne dowody istnienia.

Podstawy

W okresie od ok. 1870 r. do lat 30. XX w. rozwinęła się nowa dziedzina nauk matematycznych, która niekoniecznie przyniosła odpowiedzi na pytania j.w., ale umożliwiła ich znacznie głębsze zrozumienie.

Dziedzina ta, później nazwana podstawami matematyki, powstała wskutek syntezy:

teorii mnogości, czyli teorii zbiorów,

rozwijającej się z początku odrębnie nowoczesnej logiki.

Odkrywcy nowych światów: Getynga, lata 50.

W latach 1855-59 w Getyndze obok siebie pracowało trzech znaczących zwolenników nowych metod i:

zastępowania rachunków myślami

- P. G. Lejeune Dirichlet (1805-59)
- Bernhard Riemann (1826-66)
- Richard Dedekind (1831-1916)

Odkrywcy nowych światów: Getynga, lata 50.

Dirichlet: jeden z najwcześniejszych zwolenników rozważania funkcji będących dowolnymi przyporządkowaniami liczb, niekoniecznie danymi regułą.

Riemann: m.in. wprowadził ogólne pojęcie rozmaitości (Mannigfaltigkeit); oprócz ciągłych dopuszczał rozmaitości dyskretne, mające elementy zamiast punktów.

Dedekind: chcąc odzyskać jednoznaczność rozkładu w strukturach typu Z[$\surd$5] (por. 2-3 = (1 + $\surd\surd{-5}$)(1-$\surd\surd{-5}$)) wprowadził elementy idealne (ideały), czyli pewne zbiory elementów, i wykonywał na nich operacje algebraiczne.

Opozycja: Berlin i inni, lata 50. i później

We wpływowej szkole berlińskiej panowała z kolei nieufność wobec nadmiernej ogólności. Ceniono ścisłość, a dowody istnienia miały polegać na konstrukcji odpowiednich obiektów:

Ernst Kummer (1810-93)

Karl Weierstrass (1815-97) Weierstrass: stanowisko dość umiarkowane. Niechętny jednak np. ogólnymi pojęciu „funkcji różniczkowalnej" jako niejasnemu, chciał się skupić na nieskończonych sumach (szeregów) możliwie prostych funkcji.

Leopold Kronecker (1831-1916) Kronecker: dużo dalej idący, zwolennik redukcji całej matematyki do liczb naturalnych. Przeciwny niekonstruktywnym dowodom istnienia i używaniu aktualnej nieskończoności.

> „Dobry Bóg stworzył liczby całkowite. Wszystko inne to ludzka robota".

Dowód twierdzenia Bolzano-Weierstrassa („każdy ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny") K. uznawał za „jawny błąd logiczny"; obiecywał konstrukcję kontrprzykładu!

Dedekind

Pod silnym wpływem Dirichleta i Riemanna, ale o zupełnie innym temperamencie intelektualnym: „myślał wolniej", chciał wszystko zrozumieć dogłębnie i usystematyzować.

W trakcie swoich badań z algebraicznej teorii liczb (ideały!) uświadomił sobie przydatność zbiorów w matematyce.

Zdecydowany zwolennik dopuszczenia aktualnej nieskończoności. Autor definicji zbioru nieskończonego.

W zasadzie był głównym autorem uczynienia teorii zbiorów fundamentem matematyki, tj. zbudowania Z, Q, R, C za pomocą liczb naturalnych i operacji na zbiorach.

Definicja liczb rzeczywistych: Ciągłość i liczby niewymierne, 1872. Systematyczna konstrukcja zbiorów liczbowych: Was sind und was sollen die Zahlen, 1888.

Dedekind: systemy liczbowe Za N można uznać dowolny system złożony ze zbioru S, elementu 1 € S i przekształcenia różnowartościowego ϕ: S→ S$\setminus\{1\}$ taki, że dla dowolnego $K \subseteq S$, jeśli $1 \in K$ i dla każdego $k \in K$ zachodzi (k) € K, to K = S.

Konstrukcja Z: za liczbę całkowitą np. -2 uznajemy zbiór {(0,2), (1,3), (2,4),...}. Budowa Q z Z w podobnym duchu.

R to przekroje w liczbach wymiernych, czyli takie podzbiory $A \subseteq Q$ że $A! = ! =$
Q
A, w A nie ma największego elementu i każda liczba mniejsza od pewnego elementu A sama jest w A.

Cantor

Doktorat z teorii liczb, ale potem zajął się analizą, zwłaszcza reprezentacją funkcji za pomocą szeregów trygonometrycznych.

Był także autorem alternatywnej wobec Dedekinda konstrukcji liczb rzeczywistych (via ciągi Cauchy'ego liczb wymiernych).

W badaniach nad szeregami przydatne okazało się pojęcie pochodnej zbioru S: zbioru tych punktów na prostej, w których dowolnie małym otoczeniu jest inny punkt z S:

Okazało się, że dla pewnych zbiorów S warto wziąć ich kolejne pochodne: $S', S'', S''', ..., s^{(n)}$ wziąć iloczyn ich wszystkich: $S^{(\infty)}$ i potem wziąć pochodną jeszcze raz: $S^{(\infty+1)}$.

To skłaniało do głębszego badania zbiorów na prostej.

Cantor: odkrycie nieprzeliczalności

Z korespondencji Cantor-Dedekind z końca 1873 r.: C: [29 XI] Czy da się przyporządkować liczbom rzeczywistym liczby naturalne tak, żeby to było jedno-jednoznaczne? Wiem, że można tak ponumerować liczby wymierne.

D: Nie wiem. Chyba nie warto tego badać, bo brak zastosowań. Ale wiem, że można tak ponumerować liczby rzeczywiste algebraiczne.

C: [7 XII] Nie, liczb rzeczywistych nie da się tak ponumerować!

D: [8 XII] Lieber Herr! Gratuluję pięknego osiągnięcia! Dowód można uprościć: ...

C: [25 XII] Wysłałem do Journal für die reine und angewandte Mathematik artykuł z tymi wynikami. Za radą Weierstrassa skupiam się w nim na liczbach algebraicznych. Wykorzystuję Pana komentarze i sposób ujęcia.

D: [Przez dłuższy czas] -

Cantor 1874

Artykuł Cantora nosił tytuł O pewnej własności zbioru [Inbegriff] wszystkich liczb rzeczywistych algebraicznych.

Nacisk kładzie się w nim, zgodnie z tytułem, na przeliczalność zbioru liczb rzeczywistych algebraicznych.

Z naszego punktu widzenia najważniejszym elementem artykułu jest dowód, że liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalnie wiele.

Dowód opiera się na tym, że przecięcie zstępującego ciągu niepustych przedziałów domkniętych $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq ...$ jest niepuste.

Cantor używa nieprzeliczalności R głównie jako narzędzia w nowym dowodzie tw. Liouville'a o istnieniu liczb przestępnych (tj. niealgebraicznych).

Cantor 1878: równoliczność prostej i płaszczyzny

Praca Cantora Przyczynek do teorii rozmaitości w tym samym czasopiśmie co poprzednio.

Główny wynik: istnieje jedno-jednoznaczne przyporządkowanie między prostą R a przestrzenią R", dla dowolnego n naturalnego.

Idea dowodu, dla n = 2:

$(0, b_1b_2b_3...; 0, c_1c_2c_3...) \to 0, b_1c_1b_2c_2...$

Czyli: przestrzenie różnych wymiarów są równoliczne!

Cantor 1879-84: CH i liczby porządkowe

Seria 6 prac pt. O nieskończononych liniowych rozmaitościach punktów w Mathematische Annalen. Na podstawie piątej części cyklu książka Podstawy ogólnej teorii rozmaitości (1883).

Analiza pozaskończonych iteracji pochodnej zbioru na prostej. Wniosek: każdy zbiór postaci S' albo jest co najwyżej przeliczalny, albo zawiera niepusty podzbiór Pt. że P = P', który musi być równoliczny z R. Czyli: CH zachodzi dla zbiorów postaci S'.

Kluczowy skutek uboczny: liczby porządkowe!

$0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1_1 \omega + 2, ..., \omega \cdot 2, \omega\omega, ., l.3.klasy, 4.klasy....$

Częściowa unifikacja teorii liczb kardynalnych (mocy zbiorów) i liczb porządkowych. Do pełnej brakowało dowodu, że każdy zbiór S można dobrze uporządkować, tj. ustawić w takim porządku, by w każdym niepustym podzbiorze S był element najmniejszy. (W istocie: ponumerować elementy S kolejnymi liczbami porządkowymi.)

Cantor 1891: metoda przekątniowa

Po 1884 Cantor na dłuższy czas przestaje publikować w pismach matematycznych. Ale w 1891 na zjeździe Niemieckiego Związku Matematyków ma referat z nowym dowodem nieprzeliczalności R.

Sedno: każdy zbiór L jest mocy ściśle mniejszej niż zbiór funkcji z L do {0, 1}. („Twierdzenie Cantora", na poniższym rysunku dla L = N.)
Uwaga: cantor nie wspomina o zbiorze wszystkich podzbiorów L!

Recepcja, lata 80. i 90.

Nieprzejednana opozycja ze strony Kroneckera. Sceptycyzm także ze strony znacznej części Francuzów (np. Hermite, Picard).

Bendixson (1883) koryguje dowód CH dla zbiorów domkniętych. Mittag-Lefler używa wyników Cantora w dowodzie ważnego twierdzenia w analizie zespolonej (1884).

1898: za pomocą operacji teoriomnogościowych, E. Borel identyfikuje dużą klasę zbiorów, którym można w sensowny sposób przypisać miarę („długość"/„pole"/„objętość"). Wcześniej w tym kierunku: Harnack, du Bois-Reymond, Jordan.

1890: Hilbert publikuje niekonstruktywny dowód twierdzenia o bazie. Paul Gordan: „to nie matematyka, to teologia"!

Równolegle: G. Frege dąży do pokazania, że twierdzenia matematyki wynikają z zasad logiki, obejmującej dla niego teorię zbiorów. G. Peano wraz z uczniami formalizuje podstawowe twierdzenia matematyczne w języku symbolicznym.

Paradoksy

Często przyjmowane bezrefleksyjnie: dla dobrze określonej własności W istnieje zbiór {x: W(x)}. Wielu badaczy we wczesnym okresie rozwoju teorii mnogości traktuje to jako prawo logiki.

Od 1895 r. zaczynają się jednak pojawiać antynomie. M.in.:

Nie istnieje {x:x jest liczbą porządkową}. (Cantor ok. 1897, C. Burali-Forti 1897)

Nie istnieje {x: x jest liczbą kardynalną}. (Cantor ok. 1897).

Bertrand Russell 1901: nie może istnieć $x : x \notin x$. (Znów argument przekątniowy!)

Russell pisze o tym do Peana i Fregego; Frege jest załamany. [NB. Ten sam paradoks odkrył Zermelo, nieco wcześniej.]

Problemy Hilberta

Na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 1900 r. Dawid Hilbert ma wystąpienie, w którym omawia szereg problemów otwartych, mających w znacznej mierze kształtować matematykę XX w. Pierwsze dwa problemy z listy dotyczą podstaw matematyki.

1. Powołując się na Cantora, Hilbert proponuje udowodnić, że: „każdy system nieskończenie wielu liczb. rzeczywistych [...] jest równoważny bądź zbiorowi liczb naturalnych, 1,2,3,..., bądź zbiorowi wszystkich liczb rzeczywistych, a zatem continuum".
   Przy tej okazji Hilbert omawia również pytanie, czy zbiór liczb rzeczywistych można dobrze uporządkować, wspominając, że tego spodziewa się Cantor.

2. Za kluczowy problem dotyczący aksjomatów Hilbert uznaje wykazanie, że aksjomaty arytmetyki
   "są niesprzeczne, tj. że skończona liczba kroków logicznych opartych na nich nie może nigdy doprowadzić do sprzecznych rezultatów".
   Z kontekstu jest jasne, że chodzi o aksjomatykę liczb rzeczywistych. Hilbert wyraża przekonanie, że istnienie obiektu matematycznego należy utożsamić z niesprzecznością jego aksjomatyzacji. Komentarz do problemu zdradza świadomość, że sprzeczny jest np. zbiór wszystkich liczb kardynalnych.

Zermelo 1904 dobre uporządkowanie

Ernst Zremelo (1871-1953)

Zermelo 1904: dobre uporządkowanie

W 1904 r. Zermelo ogłasza w *Mathematische Annalen* artykuł *Dowód, że każdy zbiór można dobrze uporządkować.*

Wielu matematykom wydawało się to niewiarygodne, niewiele wcześniej na ICM G. König przedstawiał dowód, że R się nie da.

W kolejnym numerze Math. Ann. były 4 artykuły polemiczne wobec Zermela (Borel, Jourdain, Bernstein, Schoenflies).

Stopniowo krytyka skupiła się na użytym przez Zermela aksjomacie wyboru (AC): „Dla każdego zbioru A niepustych zbiorów istnieje przyporządkowanie, które na argumencie $S \in A$ przyjmuje jako wartość jakiś element S".

Zermelo chciał traktować ten aksjomat, zasugerowany mu przez analityka E. Schmidta, jako zasadę logiczną. Zwracał uwagę, że była już wielokrotnie używana bez odnotowania.

Zermelo 1908: aksjomatyzacja

W 1908 r. Zermelo publikuje pracę zawierającą aksjomatyzację teorii mnogości. Jest to częściowo odpowiedź na paradoksy, częściowo obrona dowodu twierdzenia o dobrym uporządkowaniu.

Wśród aksjomatów są m.in. istnienie zbioru pustego i zbioru nieskończonego, aksjomaty gwarantujące wykonalność podstawowych operacji na zbiorach, a także AC.

W miejsce problematycznego aksjomatu istnienia zbioru obiektów o danej własności Zermelo proponuje aksjomat wyróżniania:

Dla dowolnego zbioru S i dobrze określonego wyrażenia W(x) istnieje zbiór $\{x \in S : W(x)\}$.

Aksjomatyczna teoria mnogości od Zermela do lat 30.

Nieprzyjemne konsekwencje AC: m.in. niemierzalny zbiór Vitalego 1905, paradoks Banacha-Tarskiego 1924.

Niezależność AC od teorii mnogości z urelementami: Fraenkel 1922.

Dodatkowe aksjomaty: zastępowanie (Fraenkel- stąd nazwa ZF(C), Skolem, von Neumann), ufundowanie (Mirimanoff, von Neumann, Zermelo).

Porządna definicja liczb kardynalnych i porządkowych (v. Neumann); hierarchia kumulatywna (v. Neumann, Zermelo), klasyfikacja potencjalnych modeli ZF (Zermelo).

Trend ku sformalizowaniu aksjomatyki w logice pierwszego rzędu (Skolem, następnie von Neumann - contra Zermelo; później Bernays, Tarski, Quine, Gödel).

Kontrpropozycja: Russell, Whitehead i teoria typów

Bertrand Russell wraz z A. N. Whiteheadem próbują uniknąć paradoksów i zbudować podstawy matematyki za pomocą alternatywnej wobec teorii mnogości teorii typów. Ich praca owocuje trzytomowymi Principia Mathematica (1910-13).

Idea: przypisać obiektom matematycznym hierarchicznie uporządkowane typy. Obiekt {x: W(x)} jest dopuszczony, ale musi być typu wyższego niż wszystkie typy, o których mowa w W(x).

Radykalna opozycja: Brouwer i intuicjonizm

L. E. J. Brouwer (1881-1966)

Brouwer, wybitny topolog, już w doktoracie (1907 r.) zgłaszał niekonwencjonalny punkt widzenia na podstawy matematyki, który zaczął systematyzować w 1918-19:

Dowody istnienia powinny zawsze być konstrukcjami.

Dowód $A \vee B$ musi wskazywać, który człon został udowodniony.

Wobec obiektów nieskończonych nie można stosować prawa wyłączonego środka ($A \vee \neg A$).

Prowadzi to do radykalnie innej matematyki (intuicjonistycznej).

Umiarkowana opozycja: Francuzi, Weyl

Poincaré: źródłem paradoksów było używanie definicji niepredykatywnych, definiujących obiekt za pomocą własności kolekcji, do której on sam należy (zbioru wszystkich zbiorów, zbioru wszystkich podzbiorów R itp.)

Po ogłoszeniu przez Zermela dowodu twierdzenia o dobrym uporządkowaniu wybitni matematycy francuscy (Poincaré, Baire, Borel, Lebesgue) zgłaszali wątpliwości co do AC, choć większość z nich sama go nieświadomie użyła.

Hermann Weyl, wybijający się uczeń Hilberta, w Das Kontinuum (1918) proponuje: można traktować klasycznie, ale o liczbach rzeczywistych trzeba już rozumować predykatywnie.

W 1921 r. Weyl zaostrza stanowisko: porównuje niekonstruktywne dowody istnienia do papierowego pieniądza, domaga się rewolucji - czyli intuicjonizmu Brouwera.

Potęga państwa: program Hilberta

Hilbert reaguje na pomysły Brouwera i Weyla niezwykle ostro:

> Brouwer to nie, jak sądzi Weyl, rewolucja, ale powtórzenie (...) próby puczu. Teraz, gdy potęga państwa została tak dobrze przygotowana i wzmocniona przez Fregego, Dedekinda i Cantora, pucz ten jest z góry skazany na niepowodzenie. [1922]
>
> Nikt nie powinien móc nas wypędzić z raju, który stworzył dla nas Cantor. [1926]

Potęga państwa: program Hilberta

Program Hilberta, przedstawiony w dojrzałej postaci w pracy O nieskończoności (1926):

- Wyrazić całą matematykę albo dostatecznie bogaty fragment jako system aksjomatyczny, sformułowany w języku formalnym i zupełny (dowodzi lub obala każdą tezę wyrażalną w języku).
- Metodami czysto finitystycznymi pokazać, że w tym systemie nie da się udowodnić sprzeczności.

W latach 20. Hilbert oraz jego uczniowie i współpracownicy

(P. Bernays, J. von Neumann, W. Ackermann) odnoszą pewne sukcesy na drodze do realizacji programu, dowodząc niesprzeczności pewnych fragmentów aksjomatyki dla arytmetyki liczb naturalnych.

Pełen sukces wydaje się bliski. W 1928 r. Hilbert sugeruje, że w zasadzie został już osiągnięty...

Grom z jasnego nieba: Gödel

Kurt Gödel (1906-78)

W obronionym w 1930 r. w Wiedniu doktoracie Gödel udowodnił twierdzenie o pełności dla logiki pierwszego rzędu, które było w pewnym sensie formalnym potwierdzeniem Hilbertowskiej idei „niesprzeczność implikuje istnienie".

1. Twierdzenie Gödla

Jeśli T jest niesprzecznym systemem aksjomatycznym, dla którego istnieje algorytm rozstrzygający, które ciągi znaków są aksjomatami, a ponadto T dowodzi pewnych podstawowych faktów na temat arytmetyki liczb naturalnych, to istnieje zdanie G w języku T takie, że:

(1) G wyraża prawdziwą tezę na temat liczb naturalnych,

(ii) T nie dowodzi G.

Zdanie G jest dowodliwie w T równoważne „T nie dowodzi G".

Gödel anonsował też II twierdzenie:

T dowodzi implikacji („T jest niesprzeczna" $\rightarrow$ G),

a zatem T nie dowodzi zdania „T jest niesprzeczna".

Morał: nie ma jedynie słusznej" aksjomatycznej podstawy matematyki. Można rozważać różne, a silniejsze będą dowodzić niesprzeczności słabszych (hierarchia „siły niesprzeczności").

Zamiast epilogu: Gentzen, znów Gödel, Cohen, ...

- Gerhard Gentzen 1936:

Indukcja matematyczna (dla bardzo prostej własności) długości liczby porządkowej o dowodzi niesprzeczności standardowej aksjomatyki arytmetyki liczb naturalnych/teorii zbiorów skończonych.

(Trudność udowodnienia niesprzeczności można mierzyć 1. porządkowymi!)

- Gödel 1940:

Jeśli system ZF jest niesprzeczna, to ZFC + CH też. Co więcej, oba te systemy dowodzą tych samych zdań na temat zbiorów skończonych. (Budowa tzw. uniwersum zbiorów konstruowalnych wewnątrz uniwersum zbiorów spełniającego aksjomaty ZF.)

- Paul Cohen 1964:

Jeśli system ZF jest niesprzeczna, to ZFC+$\neg$CH też. Co więcej, oba te systemy dowodzą tych samych zdań na temat zbiorów skończonych. (Rozszerzanie struktury spełniającej ZF za pomocą nowej techniki forcingu.)