Historia Matematyki II
Wydział MIM, 2021–22

Wykład 2.5
W poprzek działów matematyki (geometria i nie tylko): przykłady z okolic XIX wieku

Paweł Strzelecki

30 marca 2022

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Pozycja geometrii w matematyce ca. 1700+

- Początkowo: utrata niegdysiejszej wiodącej pozycji, choć nadal nimb ‘wzorca niedościgłej precyzji rozumowania’;

- Rola rozwoju geometrii analitycznej i rachunku różniczkowego: **możliwość badania zupełnie nowych krzywych i powierzchni**;

- *Stopniowe* poszukiwanie nowego miejsca, w związku z problemami **innych działów** matematyki i zastosowań, w tym **rachunku wariacyjnego** i **fizyki**;

  - Przykład takiej sytuacji: **powierzchnie minimalne**

Kluczowe pojęcia współczesnej geometrii

- **Rozmaitość**

- **Krzywizna**

Kluczowe pojęcia współczesnej geometrii

- **Rozmaitość**
  - np. okrąg, sfera, torus, zbiór wszystkich obrotów przestrzeni trójwymiarowej, zbiór wszystkich położeń litery **F** w przestrzeni, ...
  - w ogólności: *wszystko, co w małej skali wygląda w każdym miejscu (z grubsza) tak, jak fragment przestrzeni euklidesowej, ale może jest jakoś zakrzywione, posklejane itp.*
- **Krzywizna**

Kluczowe pojęcia współczesnej geometrii

- **Rozmaitość**
  - np. okrąg, sfera, torus, zbiór wszystkich obrotów przestrzeni trójwymiarowej, zbiór wszystkich położeń litery **F** w przestrzeni, ...
  - w ogólności: *wszystko, co w małej skali wygląda w każdym miejscu (z grubsza) tak, jak fragment przestrzeni euklidesowej, ale może jest jakoś zakrzywione, posklejane itp.*
- **Krzywizna**
  - "sposób pomiaru" zakrzywienia, określający lokalne i globalne cechy rozmaitości, m.in. to, na ile odbiega ona od jakiegoś symetrycznego, eleganckiego modelu.

Przykłady rozmaitości cd.

1. **rozmaitości jednowymiarowe:** krzywe gładkie, bez dziobków, zagięć, załamań i samoprzecięć – np. okrąg i prosta

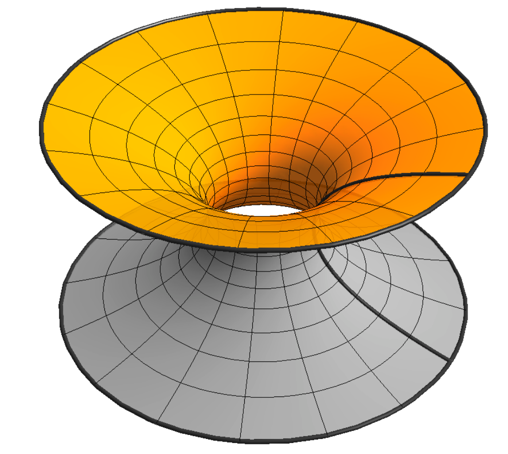
2. **rozmaitości dwuwymiarowe:** sfera, torus, precel, butelka Kleina, wstęga Möbiusa; ogólnie: wszelkie powierzchnie gładkie, bez ostrych szpiców, zagięć, kantów etc.

3. **rozmaitości trójwymiarowe,** np. sfera $\mathbb{S}^3$ jest zbiorem tych punktów (x, y, z, t) przestrzeni czterowymiarowej $\mathbb{R}^4$, które spełniają

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\,.$$

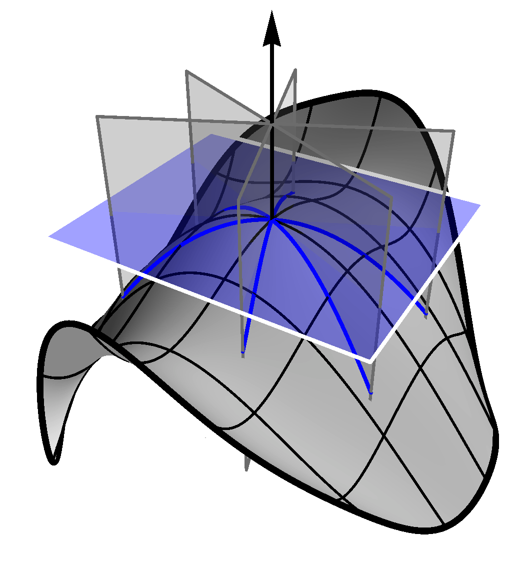
4. …itd.

Przykład tematu badań: powierzchnie minimalne. Euler i Lagrange.



- L. Euler, 1744: jaka powierzchnia obrotowa, rozpięta na dwóch danych okręgach, ma najmniejsze pole? Katenoida.
- J.L. Lagrange, 1760: ogólne pytanie o takie powierzchnie. Praca *Essai d'une nouvelle méthode pour determiner les maxima et minima des formules intégrales indéfinies*.

Jak mierzyć krzywiznę powierzchni?

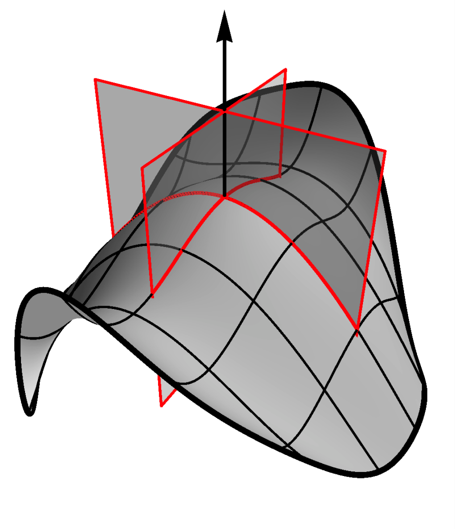


Instrukcja dla inteligentnej mrówki na powierzchni:

- Ustalić punkt. Wbić tam pręt $\perp$ do powierzchni Σ.
- Ciąć powierzchnię płaszczyznami $P \perp \Sigma$.
- Mierzyć krzywiznę krzywych w $P \cap \Sigma$.

Meusnier; krzywizny główne

Mrówka: "dobrze, ale co mam z tymi wynikami zrobić?"



J.-B. Meusnier (1776): *Wśród krzywych otrzymanych na powierzchni w taki sposób są dwie, z których jedna ma największą krzywiznę, a druga najmniejszą; te dwie krzywe są prostopadłe.*

Kierunki tych krzywych to **kierunki główne**, a ich krzywizny to **krzywizny główne**, κ_1 i κ_2.

Krzywizna średnia i krzywizna Gaussa

Krzywizna średnia H: suma krzywizn głównych,

$$\mathrm{H} = \kappa_1 + \kappa_2 \,.$$

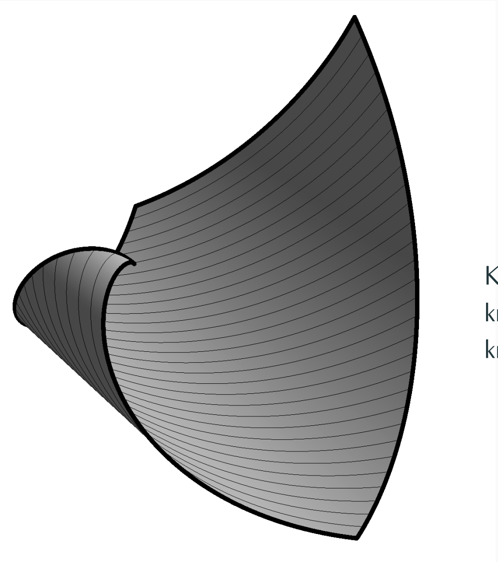
Krzywizna Gaussa K: iloczyn krzywizn głównych,

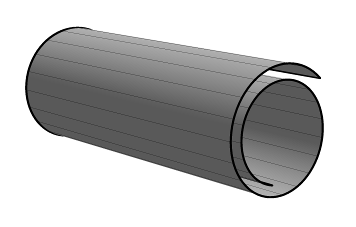
$$\mathrm{K} = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \,.$$

Theorema Egregium (C.F. Gauss, 1827). K jest niezmiennikiem izometrii: *jeśli deformujemy powierzchnię, bez rozciągania i ściskania, zachowując długość wszystkich krzywych na tej powierzchni, to krzywizna Gaussa się nie zmienia.*

(I dlatego krawcy muszą robić zaszewki, a kulistych lampionów nie można zrobić z jednego kawałka papieru).

Wniosek z Theorema Egregium: kartka papieru ma $K = 0$





Kartka papieru, wygięta lub zwinięta, ma krzywiznę Gaussa równą 0. Zmienia się tylko krzywizna średnia.

Średnia krzywiza a pole powierzchni; powierzchnie minimalne

Następujące warunki są równoważne:

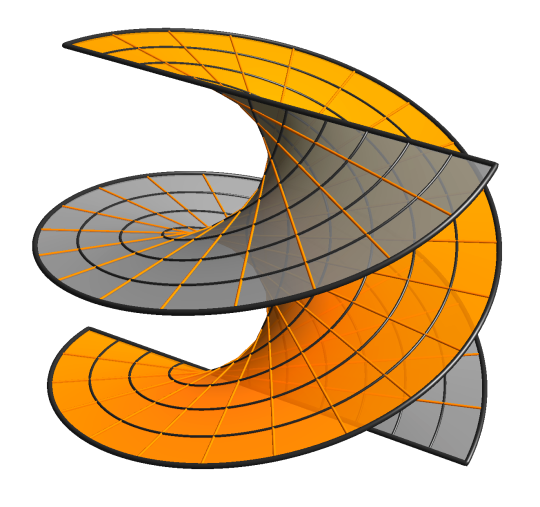
1. Każdy odpowiednio mały fragment Σ realizuje minimum pola powierzchni;
2. Σ ma średnią krzywiznę $H = 0$.

Definicja: powierzchnię o średniej krzywiźnie równej zero nazywa się **powierzchnią minimalną**.

Intuicyjna interpretacja: powierzchnia minimalna jest w pobliżu każdego swojego punktu **idealnym siodłem**, jednakowo wygiętym w obie strony.

(**Stała średnia krzywizna**: mają ją elastyczne powierzchnie, które dzielą dwa zbiorniki z gazem o różnym ciśnieniu)

Odkrycie Meusniera: helikoida ma $H = 0$



Helikoida to powierzchnia, zamiatana przez prostą, która:

- obraca się w płaszczyźnie poziomej, gdy zarazem…
- …ta płaszczyzna porusza się i wektor jej prędkości jest pionowy.

Naturalne pytania:

- Czy powierzchni minimalnych jest dużo?
- Czy na każdej zamkniętej krzywej można rozpiąć taką powierzchnię? **Chyba tak** (eksperyment z błonami mydlanymi).
- Na ile skomplikowane mogą być takie powierzchnie?
- Czy np. mogą mieć “dziury na wylot”, jak torus czy precel?

Jedyne znane powierzchnie minimalne na przełomie w okolicach 1800: płaszczyzna, katenoida i helikoida.

Charakteryzacja helikoidy i katenoidy

Twierdzenie (Euler, 1744). Jedyną obrotową powierzchnią minimalną jest katenoida.

Definicja. Powierzchnia jest prostokreślna, jeśli przez każdy jej punkt przechodzi prosta, zawarta w tej powierzchni.

Twierdzenie (Catalan, 1842). Jedyną prostokreślną powierzchnią minimalną, nie licząc płaszczyzny, jest helikoida.

Równanie powierzchni minimalnych i pomysł Scherka

- Jeśli wykres $u\colon \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}$ jest powierzchnią minimalną, to

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0\,.$$

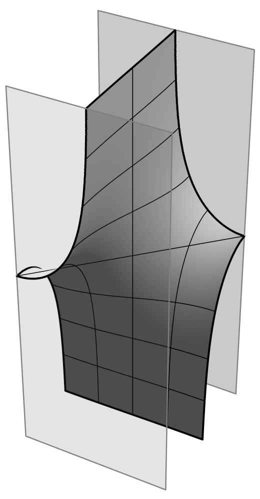
- Heinrich Scherk (1830+): **szukać rozwiązań szczególnej postaci,**

$$u(x,y) = f(x) + g(y).$$

- Efekt: równania **zwyczajne** zamiast **cząstkowych**.
- Odkrycie dwóch powierzchni Scherka. Jedną z nich opisuje równanie równanie $e^z \cos y = \cos x$.

Powierzchnia $e^z \cos y = \cos x$ jest okresowa.

Można wyznaczyć $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x$ i $\cos y$ mają ten sam znak.

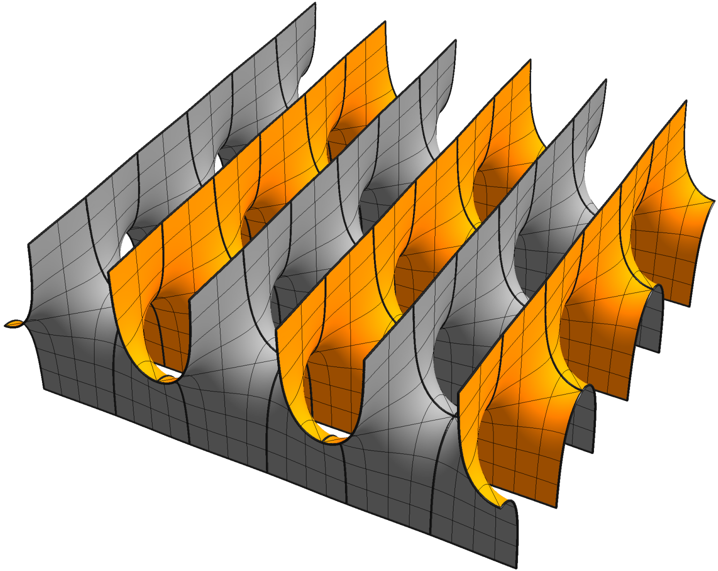


Fragment S powierzchni Scherka.

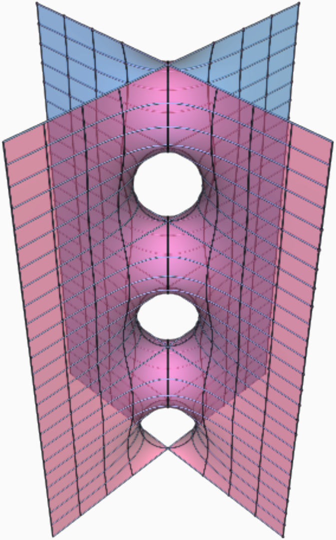
Resztę powierzchni można zeń wygenerować przez odbicia lustrzane względem płaszczyzn, do których S przylega pod kątem $\perp$.

Cała powierzchnia: *jednakowe wieże, rozstawione na czarnych polach nieskończnonej szachownicy.*

Powierzchnia $e^z \cos y = \cos x$, widok "całości"



Druga powierzchnia Scherka



Obie powierzchnie Scherka mają osie obrotu i płaszczyzny symetrii.

Wydaje się, że Scherk nie wiedział, iż każdą powierzchnię minimalną M można:

1. obracać o 180 stopni względem każdej prostej zawartej w M,
2. odbijać względem każdej płaszczyzny $\perp M$.

1863: reprezentacja Ennepera–Weierstrassa

Twierdzenie. Funkcja $F = (F_1, F_2, F_3)\colon \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{R}^3$ parametryzuje powierzchnię minimalną $\Leftrightarrow$

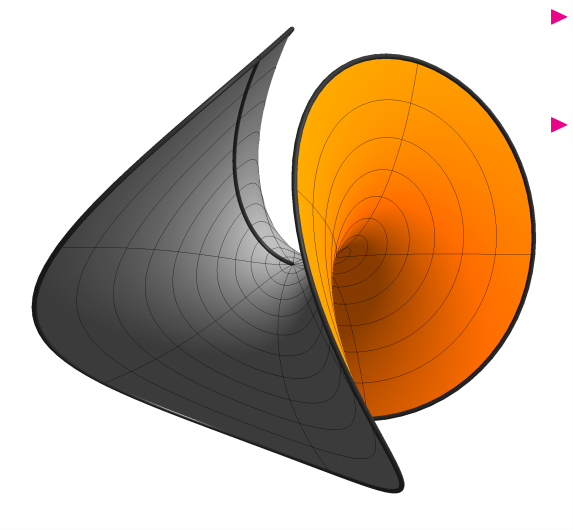
$$F_k(z) = \mathrm{Re}\left(\int_0^z \varphi_k(\xi)\, d\xi\right), \qquad k = 1, 2, 3,$$

$$\varphi_1 = f(1 - g^2), \quad \varphi_2 = i \cdot f(1 + g^2), \quad \varphi_3 = 2fg$$

dla pewnej funkcji holomorficznej $f \not\equiv 0$ i funkcji meromorficznej $g \not\equiv 0$, takiej, że fg^2 jest funkcją holomorficzną.

Skutek: możliwość konstrukcji ∞ wielu przykładów.

Przykład – powierzchnia Ennepera



- Otrzymujemy ją, biorąc $f \equiv 1$, $g(z) = z$;
- Gdy zwiększamy promień dysku D, zaczynają się pojawiać samoprzecięcia.

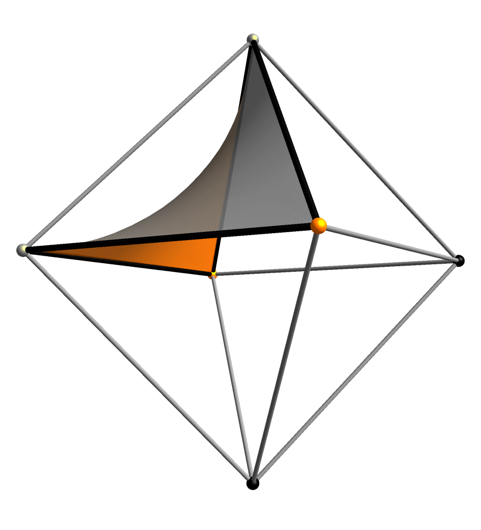
Hermann Amandus Schwarz (uczeń Weierstrassa)

- Zasada symetrii Schwarza w analizie zespolonej. Dwie reguły:

    1. Jeśli powierzchnia minimalna M zawiera prostą p, to p jest osią obrotu M (o 180 stopni).
    2. Jeśli płaszczyzna P przecina powierzchnię minimalną M pod kątem $\perp$, to P jest płaszczyzną symetrii M.

- Rozwiązanie zagadnienia Plateau (= problemu konstrukcji powierzchni minimalnej o danym brzegu) dla **dowolnego** konturu z 4 odcinków.

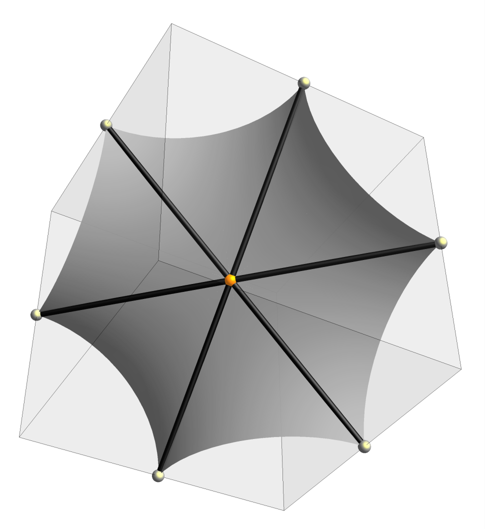
Powierzchnia P Schwarza: trójokresowa powierzchnia minimalna



- Fragment P: powierzchnia minimalna, rozpięta na 4 krawędziach ośmiościanu foremnego;
- Są 2 płaszczyzny symetrii;
- Każda z 4 symetrycznych części tego fragmentu nazywa się

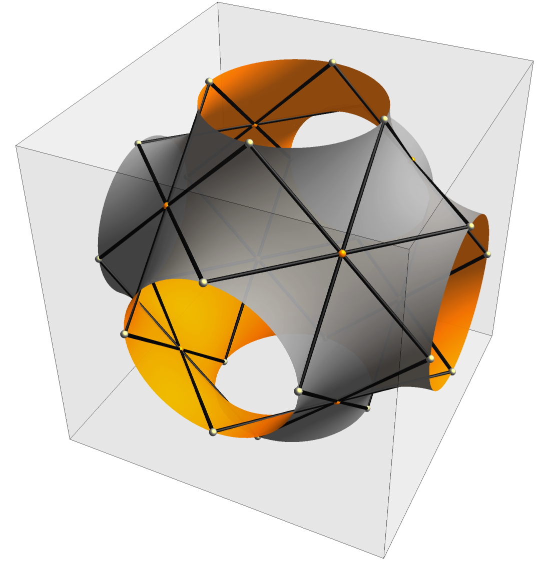
  Flächenstück.

Powierzchnia $\mathbb{P}$, cd.



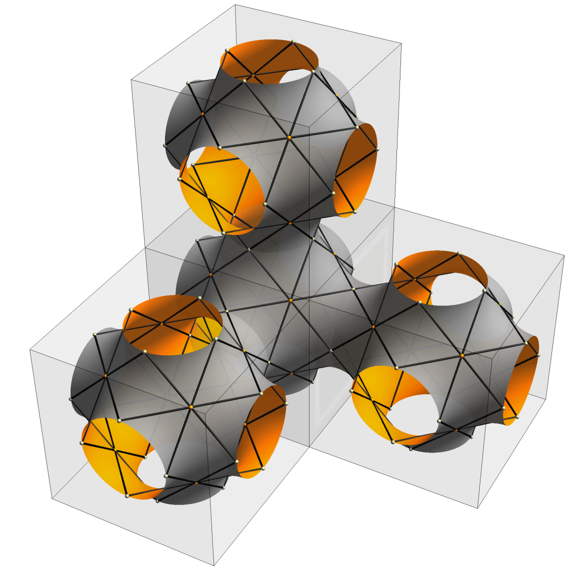
- Większy fragment $\mathbb{P}$;
- Przez punkt w środku przechodzą 3 proste;
- Małpie siodło w kształcie parasola zbudowanego z 12 *Flächenstück*;
- Brzeg parasola dotyka ścian kostki pod kątem prostym.

Powierzchnia P: komórka z 8 parasoli



- Brzeg z sześciu okręgów;
- Płaszczyzny każdego okręgu powierzchnia dotyka pod kątem prostym;
- Sześć takich płaszczyzn ogranicza sześcian.

Powierzchnia P



- Przesuwając komórki, można tworzyć nieograniczoną powierzchnię minimalną;
- Dzieli ona przestrzeń na 2 przystające labirynty.

Zespolone obroty powierzchni minimalnych

Uwaga. We wzorach Ennepera–Weierstrassa można wprowadzić obrót:

$$F_{k,\theta}(z) = \operatorname{Re}\left(\int_0^z \varphi_k(\xi)\, d\xi\right), \qquad k = 1, 2, 3,$$

$$\varphi_1 = e^{i\theta} f(1 - g^2), \quad \varphi_2 = i \cdot e^{i\theta} f(1 + g^2), \quad \varphi_3 = 2e^{i\theta} fg.$$

Inaczej: zamiast f bierzemy $e^{i\theta} f$, gdzie $\theta \in [0, 2\pi]$.

Dla różnych θ powierzchnie F_θ są izometryczne.

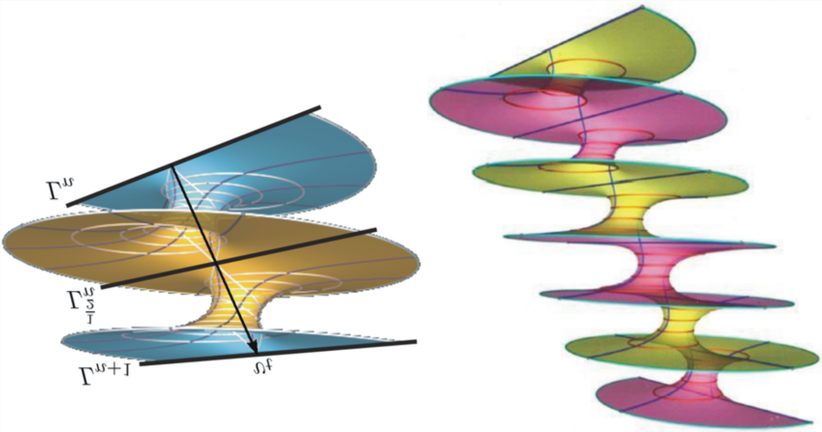
Bernhard Riemann, 1826–1866

Zajmował się m.in. analizą matematyczną teorią liczb i geometrią (różniczkową)

Słynny wykład habilitacyjny *O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii* (1854):

powstanie **geometrii riemannowskiej**, stworzenie gruntu pod póxniejszy rozwój **ogólnej teorii względności**.

Riemann i powierzchnie minimalne



- Rękopis z 1860–61, odkryty pośmiertnie; *nowa, jednoparametrowa rodzina* powierzchni minimalnych R_λ takich, że każda płaszczyzna 'pozioma' przecina R_λ wzdłuż okręgu. Ilustracja: Matthias Weber, Bonn / Indiana.

Dygresja: słowo o późniejszych losach teorii powierzchni minimalnych

- 1873: Joseph Plateau, hipoteza: *wśrod powierzchni rozpiętych na krzywej o skończonej długości istnieje taka, która ma najmniejsze pole*.
- 1928: René Garnier rozwiązuje zagadnienie Plateau dla łamanych w $\mathbb{R}^3$;
- 1930–1931: Jesse Douglas i Tibor Radó niezależnie rozwiązują zagadnienie Plateau;
  - Radó: aproksymacja wielokątami i powierzchniami wielościanów;
  - Douglas: szukać minimów innego funkcjonału!
- 1936: Douglas dostaje jeden z pierwszych dwóch medali Fieldsa (Radó ma 41 lat, drugi medal dostaje Lars Ahlfors).

Żywy dział matematyki do dziś.

Sophus Lie, 1842–1899

Doktorat *Over en Classe geometriske Transformationer*, 1871

Trzytomowa *Theorie der Transformationsgruppen*, 1882–1893

Wśród uczniów: Elie Cartan, Kazimierz Żorawski

Wśród bliskich przyjaciół: Felix Klein

Felix Klein, 1849–1925

- 1872 (w wieku 23 lat!) profesura w Erlangen;
- wielki wpływ na rozwój geometrii;
- tzw. **program erlangeński**: są **różne** geometrie; każda z nich bada **tylko** te własności ‘figur’, które są zachowane przez przekształcenia, należące do ustalonej **grupy przekształceń (danej) przestrzeni**.

Zamiast zakończenia

- Siłą napędową matematyki nie jest chęć rozwijania teorii, tylko pragnienie i potrzeba rozwiązywania problemów;
- Rozwój teorii odbywa się niejako drugorzędnie: motywuje go potrzeba precyzji myślenia i tworzenia spójnych, a zarazem zwięzłych i eleganckich podstaw rozumowania;
- Najciekawsze rzeczy w matematyce dzieją się **na styku** różnych jej działów.