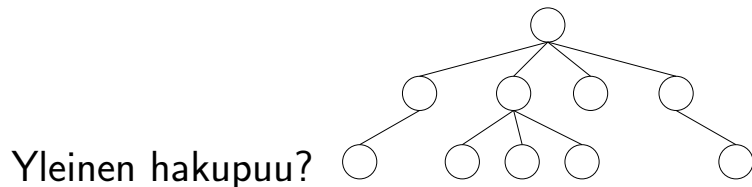


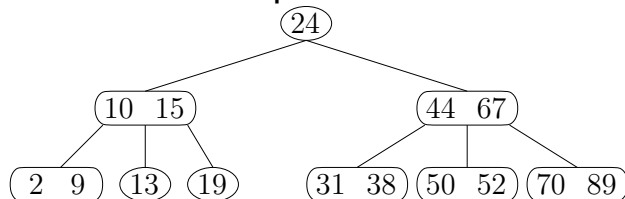
Binäärihakupuu



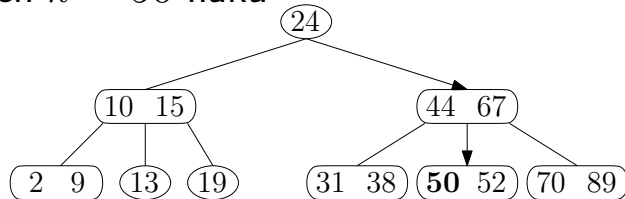
Yleinen hakupuu?

## Monitiehakupuu (multi-way search tree)

### Esimerkki monitiehakupuusta

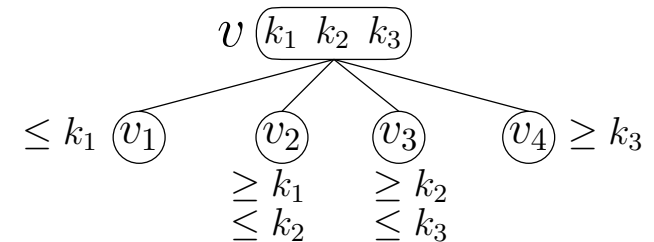


### Avaimen $k = 50$ haku



## Monitiehakupuu (multi-way search tree)

### Monitiehakupuu:

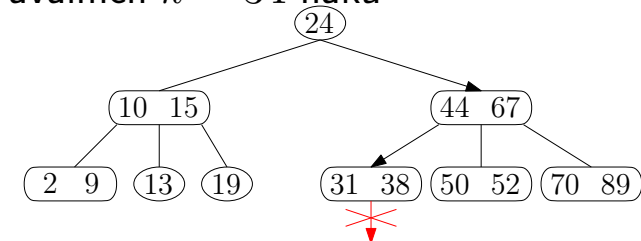


- $d$  lapsisolmua  $\Leftrightarrow d - 1$  avainta
- lapsen  $v_i$  alipuun avaimet  $\geq k_{i-1}$  ja  $\leq k_i$
- ▷  $k_0 = -\infty, k_d = \infty$

Sisäsolmuissa vähint. yksi avain  $\Rightarrow$  vähint. 2 lasta

## Monitiehakupuu (multi-way search tree)

### Esim. avaimen $k = 34$ haku



Haun työmäärä per solmu? Miten solmun  $v$  avaimet  $k_i$ , alkio  $x_i$  ja lapsisolmut  $v_i$  talletetaan?

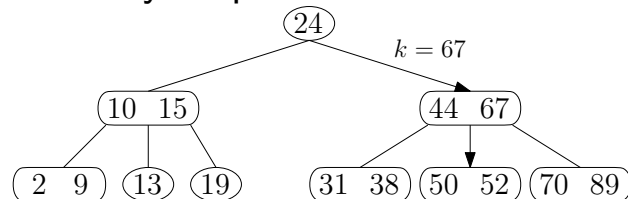
- sekvenssi  $\Rightarrow$  työ  $= \mathcal{O}(d)$  ( $d$ : lapsilkm)
- esim. AVL-puu  $\Rightarrow$  työ  $= \mathcal{O}(\log(d))$

Käsiteltyjä solmuja?  $\mathcal{O}(h)$  (puun korkeus)

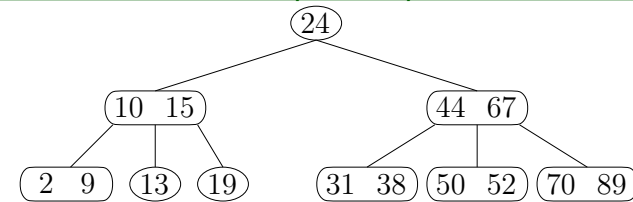
**B-puu:** monitiehakupuu, jossa:

- **minimiaste**  $t$  ( $t \geq 2$ )
  - ▷ kullakin sisäsolmulla vähintään  $t$  lasta
  - ▷ kullakin solmulla vähintään  $t - 1$  avainta
  - ▷ paitsi juuri: jos puu ei tyhjä, juurisolmulla vähintään 1 avain ( $\Rightarrow$  vähintään 2 lasta)
- kussakin solmussa korkeintaan  $2t - 1$  avainta
  - ▷  $\rightarrow$  korkeintaan  $2t$  lasta
- jokainen lehtisolmu samalla tasolla

Avaimen  $k$  lisäys B-puuhun



- edetään avaimen  $k$  hakupolku lehtisolmuun asti
  - ▷ jos  $k_i = k$ , jatketaan esim. vasemmalle (lapseen  $v_i$ )
- avain  $k$  lisätään omalle paikalleen lehtisolmussa (avainten lineaarinen järjestys)

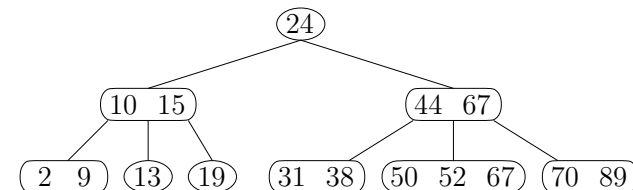
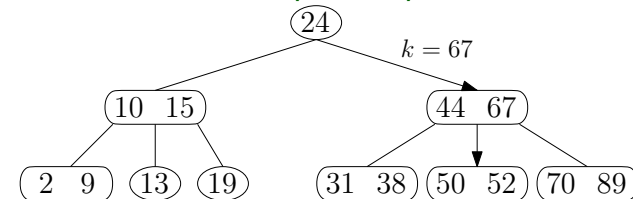


B-puu, jonka minimiaste on  $t = 2$ : **(2,4)-puu**

- sisäsolmulla saa olla 2, 3 tai 4 lasta

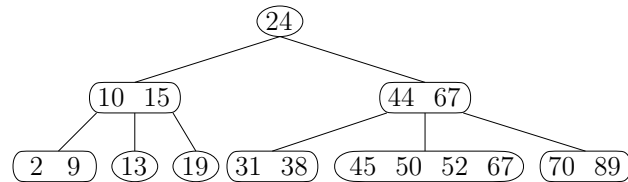
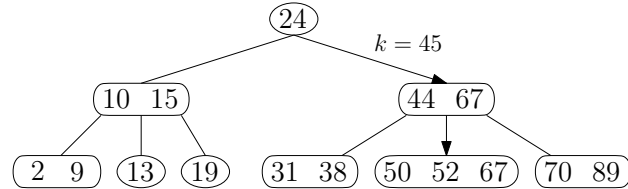
$n$ -solmuisen B-puun korkeus  $h$ ?

- väh.  $t$  lasta, lehdet tasakorkeudella  $\Rightarrow h \leq$  täydellisen  $t$ -asteisen puun korkeus  $= \mathcal{O}(\log_t(n))$



## Tasapainotettu monitiehakupuu: B-puu

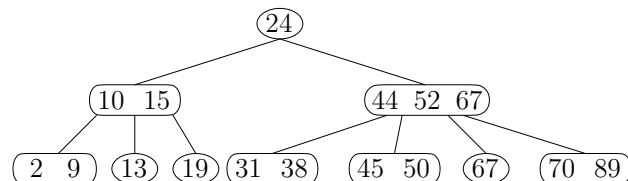
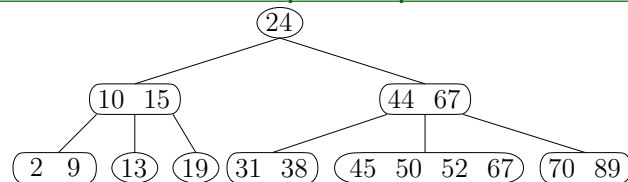
Lisätään edelleen  $k = 45$



B-puussa sallittu  $2t - 1$  avainta

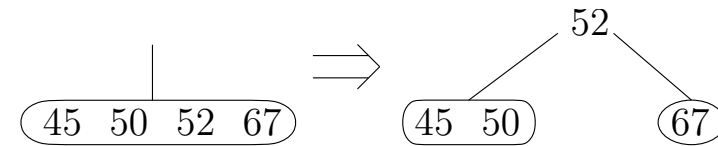
- Solmussa  $2t$  avainta  $\Rightarrow$  ns. **ylivuoto**

## Tasapainotettu monitiehakupuu: B-puu



## Tasapainotettu monitiehakupuu: B-puu

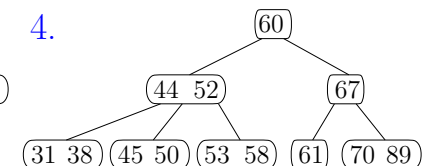
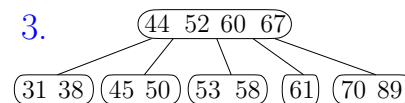
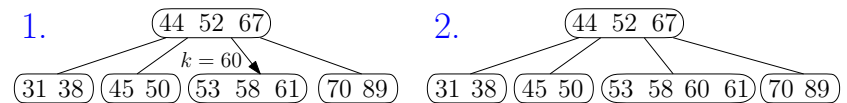
Ylivuodon korjaaminen



- solmu jaetaan kahtia:
  - ▷  $t$  avainta yhteen solmuun
  - ▷ 1 avain lisätään vanhempaan
  - ▷ loput  $t - 1$  toiseen solmuun
- jos ei vanhempaa (jaettiin juuri), luodaan uusi juuri

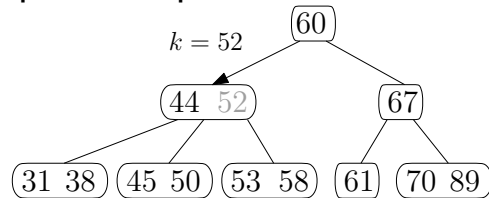
## Tasapainotettu monitiehakupuu: B-puu

Jako voi johtaa vanhemman ylivuotoon

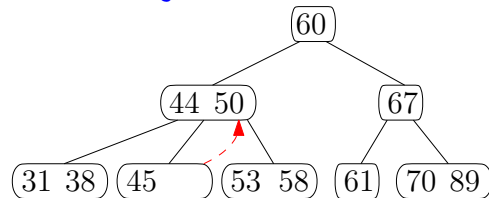


- ylivuotojen korjauksen työmäärä?  $\mathcal{O}(t \log(n))$
- solmun lisäys ainoastaan juurisolmun jaossa  $\rightarrow$  lehdet säilyvät samalla tasolla

Avaimen  $k$  poisto B-puusta

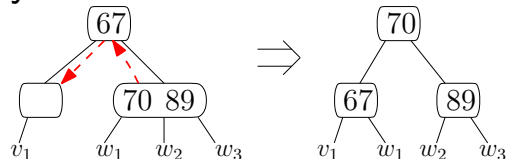


- jos  $k$  sisäsolmussa, korvataan edeltäjäavaimella  
 ▶ myös seuraaja olisi ok, vrt. binäärihakupuu

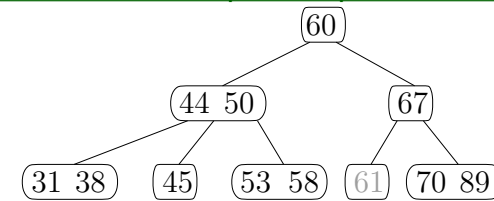


Solmun  $v$  alivuodon korjaaminen

- tapaus 1: solmulla  $v$  vierekkäinen sisar  $w$ , jossa yli  $t - 1$  avainta



- tehdään **siirto**:
  - ▶ solmujen  $v$  ja  $w$  välinen avain solmuun  $v$
  - ▶ solmun  $w$  solmun  $v$  puoleisin avain vanhempaan (äskän siirretyn avaimen tilalle)
  - ▶ solmun  $w$  solmun  $v$  puoleisin alipuu solmuun  $v$  (solmu/lapsimäärät tasapainoon)

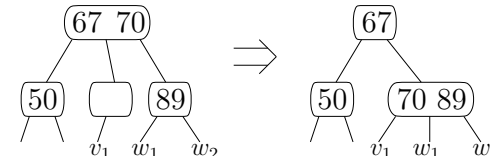


Poisto: lehtisolmun avainten lukumäärä pienenee

- aina ok, jos kyseessä juurisolmu
- muut solmut: B-puu vaatii, että avaimia vähintään  $t - 1$

▶ solmussa  $t - 2$  avainta  $\Rightarrow$  ns. **alivuoto**

- tapaus 2: solmun  $v$  (kummallakin) vierekkäisellä sisarella  $w$  tasan  $t - 1$  avainta



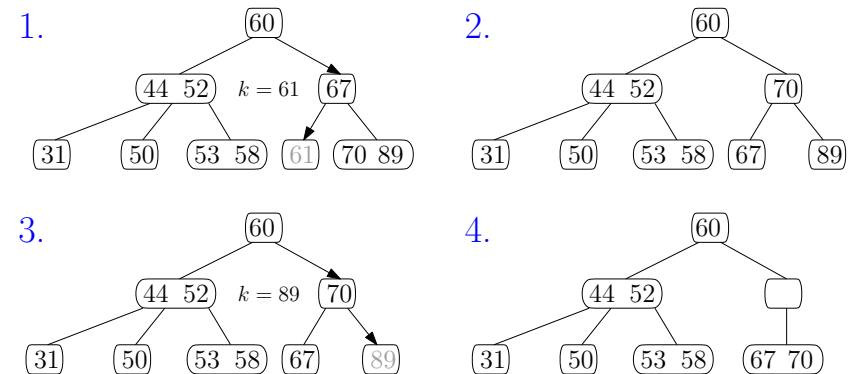
- tehdään **sulautus**:
  - ▶ solmujen  $v$  ja  $w$  avaimet sekä niiden välinen avain vanhemmasta uuteen solmuun  $v'$
  - ▶ vanhemman avaimet/lapset vähenevät yhdellä
  - ▶  $v'$  perii solmujen  $v$  ja  $w$  alipuut (solmu/lapsimäärien tasapaino säilyy)

### Tasapainotettu monitiehakupuu: B-puu

- sulautus voi johtaa alivuotoon vanhemmassa
- alivuotojen korjauksen työmäärä?  $\mathcal{O}(t \log(n))$
- alivuoto juurisolmussa: vain jos avaimia 0
  - ▷ tällöin juurella oltava tasan 1 lapsi → vanha juuri pois, tilalle sen ainoa lapsi (lehtisolmut pysyvät samalla tasolla)

### Tasapainotettu monitiehakupuu: B-puu

Vielä yksi esimerkki poistoista



### Tasapainotettu monitiehakupuu: B-puu

Vielä yksi esimerkki poistoista...

