Τεχνητή Νοημοσύνη

2η γραπτή σειρά ασκήσεων

Καλογερόπουλος Ιωάννης
Α.Μ.: 03116117

Άσκηση 1

1.
$p \Rightarrow (\neg (q \Rightarrow (r \wedge (s \Rightarrow t))))$

Αντικαθιστώντας τις συνεπαγωγές με βάση τη σχέση $(a \Rightarrow b) \equiv (\neg a \vee b)$:

$\rightarrow \neg p \vee (\neg (q \Rightarrow (r \wedge (s \Rightarrow t))))$

$\rightarrow \neg p \vee (\neg (\neg q \vee (r \wedge (s \Rightarrow t))))$

$\rightarrow \neg p \vee (\neg (\neg q \vee (r \wedge (\neg s \vee t))))$

Μεταφέροντας την άρνηση μπροστά στις ατομικές προτάσεις εφαρμόζοντας επαναληπτικά De Morgan:

$\rightarrow \neg p \vee (q \wedge (\neg r \vee (s \wedge \neg t)))$

Επιμερίζοντας τις διαζεύξεις με βάση τη σχέση: $(a \vee (b \wedge c)) \equiv ((b \wedge c) \vee a) \equiv ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$.

$\rightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (\neg r \vee (s \wedge \neg t)))$

$\rightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee ((\neg r \vee s) \wedge (\neg r \vee \neg t)))$

$\rightarrow (\neg p \vee q) \wedge ((\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg t))$

Αφού το αποτέλεσμα δεν επιδέχεται απλοποιήσεις με βάση τις σχέσεις: $(\alpha \vee \alpha) \equiv \alpha, (\alpha \wedge \alpha) \equiv \alpha$, προκύπτει:

$(\neg p \vee q) \wedge ((\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg t))$

Επομένως, η κανονική συζευκτική μορφή της αρχικής πρότασης είναι:

{[¬p, q], [¬p, ¬r, s], [¬p, ¬r, ¬t]}.

2.

$\exists x.\forall y.\exists z.(A(x,y,z)\wedge\neg B(z)\Rightarrow\neg(\forall w.(C(x,w,z)\vee K(y))))$

Αντικαθιστώντας τις συνεπαγωγές με βάση τη σχέση $(a\Rightarrow b)\equiv(\neg a\vee b)$:

$\rightarrow \exists x.\forall y.\exists z.(\neg A(x,y,z)\vee B(z)\vee(\neg(\forall w.(C(x,w,z)\vee K(y)))))$

Με βαση τη: $\neg(\forall x.a)\equiv(\exists x.\neg a)\, και\, \neg(\exists x.a)\equiv(\forall x.\neg a)$

$\rightarrow \exists x.\forall y.\exists z.((\neg A(x,y,z)\vee B(z))\vee(\exists w.(\neg C(x,w,z)\wedge\neg K(y))))$

Αφού προσδώσουμε μοναδικά ονόματα στις μεταβλητές (που ισχύει ήδη), αφαιρούμε τους υπαρξιακούς ποσοδείκτες, εφαρμόζοντας Skolemisation:

$\rightarrow \forall y((\neg A(x,y,f_1(y))\vee B(f_1(y)))\vee(\neg C(x,f_2(y),f_1(y))\wedge\neg K(y)))$

$\rightarrow (\neg A(x,y,f_1(y))\vee B(f_1(y)))\vee(\neg C(x,f_2(y),f_1(y))\wedge\neg K(y))$

Επιμερίζοντας τις διαζεύξεις:

$\rightarrow$
$[(\neg A(x,y,f1(y))\vee B(f1(y)))\vee(\neg C(x,f2(y),f1(y)))]\wedge[(\neg A(x,y,f1(y))\vee B(f1(y)))\vee\neg K(y)]$

$\rightarrow [\neg A(x,y,f1(y))\vee B(f1(y))\vee\neg C(x,f2(y),f1(y))]\wedge[\neg A(x,y,f1(y))\vee B(f1(y))\vee\neg K(y)]$

Αφού η παραπάνω σχέση δεν επιδέχεται απλοποίηση της μορφής: $(\alpha\vee\alpha)\equiv\alpha,(\alpha\wedge\alpha)\equiv\alpha$, τελικά η cnf μορφή:

{[¬A(x,y,f1(y)), B(f1(y)), B(f1(y))], [¬A(x,y,f1(y)), B(f1(y)), ¬K(y)]}

<u>Άσκηση 2</u>

1. $\forall x.R(x,x)$ (Ανακλαστική)
2. $\forall x.\forall y.(R(x,y)\Rightarrow R(y,x))$ (Συμμετρική)
3. $\forall x.\forall y.\forall z.(R(x,y)\wedge R(y,z)\Rightarrow R(x,z))$ (Μεταβατική)

- Μοντέλο που ικανοποιεί τις <u>1 και 2 αλλά όχι την 3</u>:

  Θεωρούμε ότι $x,y,z\in\mathbb{R}$ και $R(x, y)$ ισχύει αν $|x - y| \leq 1$.

Η **ανακλαστική** ιδιότητα είναι προφανής, αφού
$|x - x| = 0 \leq 1$, για κάθε x.
Η **συμμετρική** ιδιότητα ισχύει και αυτή λόγω του "απόλυτου", αφού $|x - y| = |y - x|$, άρα αν R(x, y) τότε θα ισχύει και R(y, x), για κάθε x, y.
Η **μεταβατική** ιδιότητα δεν ισχύει, ενώ ένα αντιπαράδειγμα είναι το παρακάτω:
$|6 - 5| = 1$, $|7 - 6| = 1$, αλλά $|7 - 5| = 2$, δηλαδή, ενώ ισχύει $R(5, 6) \wedge R(6, 7)$, δεν ισχύει R(5, 7).

- Μοντέλο που ικανοποιεί τις <u>1 και 3 αλλά όχι τη 2</u>:

  Θεωρούμε ότι $x,y,z \in \mathbb{R}$ και R(x, y) ισχύει αν $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$.
  Η **ανακλαστική** ιδιότητα είναι προφανής, αφού
  $x \leq x$, για κάθε x.
  Η **συμμετρική** ιδιότητα δεν ισχύει, με αντιπαράδειγμα:
  $5 \leq 6$ αλλά όχι $5 \leq 6$, δηλαδή ισχύει R(5,6) αλλά όχι R(6,5).
  Η **μεταβατική** ιδιότητα ισχύει, αφού για κάθε $x,y,z \in \mathbb{R}$ αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε προφανώς $x \leq z$. Άρα:
  $R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x,z)$.

- Μοντέλο που ικανοποιεί τις <u>2 και 3 αλλά όχι την 1</u>:

  Θεωρούμε ότι $x,y,z \in S$, όπου $S = \{a, b, c\}$ και
  R(x, y) = {(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)}.
  Η **ανακλαστική** ιδιότητα δεν ισχύει αφού **δεν** ισχύει R(c, c).
  Η **συμμετρική** και η **ανακλαστική** ιδιότητα προφανώς ισχύουν.

<u>Άσκηση 3</u>

Μετατρέποντας τις προτάσεις σε CNF, έχουμε αντίστοιχα:

1. $[\neg R(x_1, x_1) , R(x_1, y_1)]$
2. $[\neg R(x_2, y_2) , R(y_2, x_2)]$
3. $[\neg R(f(x_3), x_3)]$
4. $[\neg R(x_4, x_4)]$

(1), (2), (3) |= (4)

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο αποδεικνύουμε ότι το (1),(2),(3)∧¬(4) δεν είναι ικανοποιήσιμο. Έτσι, αρχικά, ορίζουμε τη γνώση K από τις 1, 2, 3 και εισάγουμε την ¬4, συμβ. 4’.
Ως αναλυθέν των 1 και 4’ προκύπτει:
R(x, y), ως αναλυθέν αυτού με την 2 το R(y, x) και τέλος ως αναλυθέν της τελευταίας με την 3 (θέτοντας f(x) = y) το κενό.
Άρα, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

(1), (3), (4) |= (2)

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία προσθέτουμε στις 1,3,4 την ¬2, συμβ. 2’.

Παίρνοντας όλα τα δυνατά ζευγάρια καταλήγουμε είτε σε προτάσεις που ήδη διαθέτουμε είτε σε αδύνατους συνδυασμούς. Συνεπώς, το ζητούμενο **δεν ισχύει**.

Άσκηση 4

- Όλες οι χώρες ανήκουν σε κάποια ήπειρο.

  ∀x (Χώρα(x) ⇒ ∃y (Ήπειρος(y) ^ ΑνήκειΣε(x, y))

- Μερικές χώρες έχουν πληθυσμό πάνω από 300 εκατομμύρια.

  ∃x (Χώρα(x) ∧ ΜεγαλύτεροςΑπό(πληθυσμός(x), 300000000))

- Δεν υπάρχουν χώρες που να ανήκουν σε τρεις ηπείρους.

  ¬(∃x∃y∃z∃w(Χώρα(x) ∧ Ήπειρος(y) ∧ Ήπειρος(z) ∧ Ήπειρος(w) ∧ ΑνήκειΣε(x, y) ∧ ΑνήκειΣε(x, z) ∧ ΑνήκειΣε(x, w) ∧
  ¬(y=z) ∧ ¬(y= w) ∧ ¬(z = w))

- Κάποια χώρα της Αμερικής είναι πολυπληθέστερη από όλες τις χώρες της Ευρώπης.

  ∃x(Χώρα(x) ∧ ΑνήκειΣε(x, Αμερική) ∧
  ∀y(Χώρα(y) ∧ ΑνήκειΣε(y, Ευρώπη) ⇒
  ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(x), πληθυσμός(y)))

- Υπάρχουν τουλάχιστον δύο χώρες με πληθυσμό πάνω από 300 εκατομμύρια.

  ∃x∃y(x ≠ y ∧ Χώρα(x) ∧ Χώρα(y) ∧
  ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(x), 300000000)∧
  ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(y), 300000000))

- Η Κίνα και η Ινδία είναι οι δύο πολυπληθέστερες χώρες

  ∃x∃y (x = Κίνα ∧ y = Ινδία ∧
  ∀z(Χώρα(z) ∧
  (ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(z), πληθυσμός(x) ∨
  ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(z), πληθυσμός(y)))⇒
  (z = x∨ z = y)))

  Μια εναλλακτική προσέγγιση θα ήταν η εξής:

  ∀x(Χώρα(x) ∧ (¬(x = Κίνα)) ∧ (¬(x = Ινδία)) ⇒
  ΜεγαλύτεροΑπό(Πληθυσμός(Κίνα), Πληθυσμός(x)) ∧
  ΜεγαλύτεροΑπό(Πληθυσμός(Ινδία), Πληθυσμός(x)))

Καλογερόπουλος Ιωάννης
Α.Μ.: 03116117