Joanna Kiesiak #22

Metody Numeryczne (MNUB) – Projekt
Zadanie #2: Aproksymacja funkcji

1. Sporządzić wykres funkcji $f\left(x\right)=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+e^{-x-2}$ w przedziale $\left[-1,1\right]$ i zaznaczyć następujący ciąg próbek jej wartości, na podstawie których dokonana zostanie następnie jej aproksymacja:

$$\left\{y_n = f\left(x_n\right) \middle| n=1,2,...,N\right\}, \text{ gdzie } x_n = -1+2\frac{n-1}{N-1} \text{ dla } N=10, 20, 30.$$

2. Opracować program aproksymacji funkcji $f\left(x\right)$ na pdstawie danych $\left\{\left(x_n, y_n\right) \middle| n=1,...,N\right\}$ metodą najmniejszych kwadratów za pomocą operatora wyznaczania pseudo-odwrotności macierzy "\"; jako bazę funkcji liniowo niezależnych przyjąć funkcje:

$$W_k\left(x\right)=\begin{cases} 2\left|x-x_k'\right|^3-3\left|x-x_k'\right|^2+1 & \text{dla } \left|x-x_k'\right|<1 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases} \quad \text{gdzie } x_k' = -1+2\frac{k-1}{K-1} \quad \text{dla } k=1,2,\ldots,K$$

Sprawdzić poprawność działania programu dla kilku par wartości parametrów N i K. Do wykresów z punktu 1 dorysować wynik aproksymacji dla wybranych wartości K.

3. Przeprowadzić systematyczne badania zależności dokładności aproksymacji od parametrów N i K; w tym celu wyznaczyć wskaźniki błędu średniokwadratowego oraz błędu maksymalnego:

$$\delta_2\left(K, N\right)=\frac{\left\|\hat{f}\left(x; K, N\right)-f\left(x\right)\right\|_2}{\left\|f\left(x\right)\right\|_2} \quad \text{i} \quad \delta_\infty\left(K, N\right)=\frac{\left\|\hat{f}\left(x; K, N\right)-f\left(x\right)\right\|_\infty}{\left\|f\left(x\right)\right\|_\infty}$$

gdzie $\hat{f}\left(x; K, N\right)$ jest funkcją aproksymującą, uzyskaną dla wartości N i K. Sporządzić trójwymiarowe wykresy funkcji $\delta_2\left(K, N\right)$ i $\delta_\infty\left(K, N\right)$ dla N w zakresie 5–50 oraz wartości $K < N$.

4. Wyznaczyć w skali logarytmicznej zależność $\delta_{2,MIN}\left(\sigma_y\right)$ dla $\sigma_y \in \left[10^{-5}, 10^{-1}\right]$, gdzie $\delta_{2,MIN}$ to minimalna wartość błędu $\delta_2\left(K, N\right)$ uzyskana dla danego poziomu zaburzenia danych σ_y. W tym celu dokonać aproksymacji za pomocą funkcji ***polyfit*** na podstawie wartości $\delta_{2,MIN}$ wyznaczonych dla kilkudziesięciu poziomów zaburzenia σ_y. Jeżeli zachodzi taka potrzeba podzielić przedział zmienności argumentu na dwa podprzedziały. Addytywne zaburzenie danych, $\tilde{y}_n = y_n + \Delta\tilde{y}_n$, zrealizować za pomocą liczb pseudolosowych $\left\{\Delta\tilde{y}_n \middle| n=1,...,N\right\}$ o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji σ_y^2, wygenerowanych za pomocą zaimplementowanej w MATLABie funkcji ***randn***.