

# 326.516 확률론 2

## 326.516 Probability Theory 2

2025년 2학기 (Fall)

|              |   |              |  |
|--------------|---|--------------|--|
| 교수           | 김지수, jkim82133@snu.ac.kr  | 조교           | 김보경, bokyung3376@snu.ac.kr<br>김현규, hgkim98@snu.ac.kr |
| 수업시간         | 화, 목 11:00 - 12:15  | 수업장소         | 25동 110호   |
| 면담시간<br>(교수) | 수 09:00 - 11:30   | 면담장소<br>(교수) | 25동 335호   |
| 면담시간<br>(조교) | 약속  | 면담장소<br>(조교) | 25동 301호   |
| 홈페이지         | <a href="https://jkim82133.github.io/326.516/2025F/">https://jkim82133.github.io/326.516/2025F/</a> |              |  |
| eTL          | <a href="https://myetl.snu.ac.kr/courses/285254/">https://myetl.snu.ac.kr/courses/285254/</a>       |              |  |

## 수업 소개

이 과목은 측도 이론(measure theory)에 기반한 확률론의 심화 과정으로, 확률론 1에서 학습한 기초 개념(대수의 법칙, 중심극한정리, 측도론 기초)을 바탕으로 보다 높은 수준의 이론과 응용을 다룬다. 강의 전반부에서는 조건부 기대(Conditional Expectation)와 마팅게일(Martingales) 이론을 집중적으로 학습하며, 둘 부등식(Doob Inequality), 마팅게일의 수렴, 선택적 정지 정리(Optional Stopping Theorem) 등을 익힌다. 후반부에는 확률론이 통계학 및 수학의 다양한 분야에서 어떻게 활용되는지를 다음과 같은 주제 중에서 선택하여 학습한다: Gaussian Process and Brownian Motion, Space of Probability Measures and Optimal Transport, Probability in High Dimension, Hausdorff measure and dimension, Random walk and Laplacian, Haar measure, Random Matrix Theory 등.

- 키워드: 조건부 기대(Conditional Expectation), 마팅게일(Martingale), 둘 부등식(Doob's Inequality), 선택적 정지 정리(Optional Stopping Theorem), 가우스 과정(Gaussian Process), 브라운 운동(Brownian Motion), 최적 수송(Optimal Transport), 집중 부등식(Concentration of Measure), 하우스도르프 측도 및 차원 (Hausdorff Measure and Dimension), 임의보행(Random Walk), 라플라시안(Laplacian), 하르 측도(Haar measure), 랜덤 행렬 이론(Random Matrix Theory)

## 수업 목표

- 조건부 기대(Conditional Expectation)와 마팅게일(Martingale)을 접하고 이해한다.
- 확률 과정(Gaussian Process, Brownian Motion, Random Walk 등)을 접한다.
- 확률 측도가 기하학 및 대수학에 어떻게 연관되어 있는지 접해본다.
- 고차원 확률 및 랜덤 행렬 이론을 접해본다.
- 확률 이론을 통계적 이론 상황에 응용할 수 있다.

## 선수과목

- 측도 이론(measure theory)의 기본적 개념, 최소한 측도(measure)와 적분(integration)의 수학적 정의 및 개념에 익숙해야 하며, 학부에서는 측도이론과 확률(M1407.002500), 실변수함수론(881.425), 대학원에서는 확률론 1(326.513), 실해석학(3341.503) 등과 같은 과목에서 다룬다.
- 선형사상, 기저, 차원 등 선형대수(linear algebra)의 기본 개념에 익숙해야 하며, 선형대수학 1(300.203A), 선형대수학(881.007) 등과 같은 과목에서 다룬다.

위의 필수과목들 외에 다음의 개념을 접해보면 좋으나 필수는 아니며, 수업에서 사용하는 개념들은 수업에서 정의한다.

- 수리통계(mathematical statistics)의 기본적 개념에 학부 수준으로 익숙하면 좋으며, 수리통계 1(326.311), 수리통계(M1399.000900), 통계이론 1(326.519A) 등과 같은 과목에서 다룬다.

## 교재 및 참고문헌

다음 책을 교재로 사용한다.

- Rick Durrett, Probability: Theory and Examples (5th Edition), Cambridge University Press, 2019.  
<https://sites.math.duke.edu/~rtd/PTE/pte.html>

그 외 다음 책들을 참고서적으로 사용할 수 있다.

- David Williams, Probability with Martingales, Cambridge University Press, 1991
- Roman Vershynin, High-Dimensional Probability: An Introduction with Applications in Data Science, Cambridge, 2018
- Olav Kallenberg, Foundations of Modern Probability (2nd Edition), Springer, 2002
- Gerald B. Folland, Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications (2nd Edition), Wiley, 1999
- Terence Tao, Topics in Random Matrix Theory, AMS, 2012  
<https://terrytao.wordpress.com/wp-content/uploads/2011/02/matrix-book.pdf>

그 외에 각 주제에 맞춰서 참조하는 많은 참고문헌들이 있다.

## 평가 방법

- 최종학점은 다음과 같이 계산한다: 과제 40%, 중간 20%, 기말 20%, 수업 참여 20%

### 과제

- 과제는 4번 제출할 예정이며 과제는 과제 제출 마감 날짜 23:59까지 eTL로 제출하거나 서면으로 제출해야 한다.
- 과제를 기한 내로 완성하지 못했을 경우 10%의 점수를 감점하고 1주일의 시간을 더 쓸 수 있다. 1주일 후까지도 제출하지 못하면 0점 처리된다.

### 중간고사와 기말고사

중간고사와 기말고사 일정은 잠정적으로 다음과 같다.

- 중간고사: 10/30(목)
- 기말고사: 12/18(목)

## 과제 협력에 관한 원칙

과제를 동료 학생과 같이 협력하는 것을 장려한다. 하지만 답안지는 반드시 본인 스스로 작성해야 한다. 도움을 받았을 때는 도움을 준 학생의 이름을 과제 제출 시 명시해야 한다. 그렇지 않으면 같은 답안을 제출한 과제는 모두 0점 처리한다.

## 일정표

아래의 일정표는 잠정적으로 작성한 것으로, 최신 일정표는 항상 홈페이지에서 확인한다.

| 날짜                 | 주제  | 비고                               |
|--------------------|---|----------------------------------|
| 1주 (9/2, 9/4)      | Introduction, Probability 1 Review  |                                  |
| 2주 (9/9, 9/11)     | Probability 1 Review  |                                  |
| 3주 (9/16, 9/18)    | Conditional Expectation   |                                  |
| 4주 (9/23, 9/25)    | Conditional Expectation, Martingales and Almost Sure Convergence                            |                                  |
| 5주 (9/30, 10/2)    | Martingales and Almost Sure Convergence   | 과제 1 마감 (10/5)                   |
| 6주                 | 추석연휴  |                                  |
| 7주 (10/14, 10/16)  | Martingales and Almost Sure Convergence   |                                  |
| 8주 (10/21, 10/23)  | Martingales and Almost Sure Convergence<br>Doob's Inequality and Convergence in $L^p$       |                                  |
| 9주 (10/28, 10/30)  | Doob's Inequality and Convergence in $L^p$  | 과제 2 마감 (10/27),<br>중간고사 (10/30) |
| 10주 (11/4, 11/6)   | Uniform Integrability and Convergence in $L^1$ ,<br>Backward Martingale and Exchangeability |                                  |
| 11주 (11/11, 11/13) | Backward Martingale and Exchangeability, Optional Stopping Theorems                         |                                  |
| 12주 (11/18, 11/20) | Selected Topics   | 과제 3 마감 (11/21)                  |
| 13주 (11/25, 11/27) | Selected Topics   |                                  |
| 14주 (12/2, 12/4)   | Selected Topics   | 과제 4 마감 (12/5)                   |
| 15주 (12/9, 12/11)  | Selected Topics   |                                  |
| 16주                |   | 기말고사 (12/18)                     |

조건부 기대값(Conditional Expectation)과 마팅게일(Martingales)을 다룬 후에는 확률론에 관한 여러 주제들 중 선택해서 다룬다. 다음의 주제들 중에 선택해서 다루거나, 또는 학생들이 희망하는 주제를 다룬다.

- Gaussian Process and Brownian Motion
- Space of Probability Measures and Optimal Transport
- Probability in High Dimension: Concentration of Measure
- Probability and Geometry: Hausdorff measure and Hausdorff dimension
- Probability and Algebra / Geometry: Random Walk, Laplacian, and relation to Algebra / Geometry of Spaces
- Probability and Algebra / Geometry: Probability and Group Action, Haar measure
- Random Matrix Theory

## 장애학생 지원사항

| 장애유형  | 강의수강 관련                              | 과제 및 평가 관련  |
|-------|--------------------------------------|---|
| 시각장애  | 교재 제작(디지털교재, 점자교재, 확대교재 등), 대필도우미 허용 | 과제 제출기한 연장, 과제 제출 및<br>응답 방식의 조정, 평가 시간 연장,<br>평가 문항 제시 및 응답 방식의 조정,<br>별도 고사실 제공 |
| 지체장애  | 교재 제작(디지털교재), 대필도우미 및 수업보조 도우미 허용    |   |
| 청각장애  | 대필 및 문자통역 도우미 활동 허용, 강의 녹취 허용        |   |
| 건강장애  | 질병 등으로 인한 결석에 대한 출석 인정, 대필도우미 허용     |   |
| 학습장애  | 대필도우미 허용                             |   |
| 지적장애  | 대필도우미 및 수업 멘토 허용                     | 개별화 과제 제출 및 대체 평가 실시  |
| 자폐성장애 |                                      |   |