

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

KONŠTRUKCIA GRAFOV POMOCOU MOBILNÝCH
AGENTOV

Diplomová práca

2014

Bc. Jakub Kováč

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

KONŠTRUKCIA GRAFOV POMOCOU MOBILNÝCH AGENTOV

Diplomová práca

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: 2508 Informatika
Školiace pracovisko: Katedra Informatiky
Školiteľ: prof. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.

Bratislava, 2014

Bc. Jakub Kováč

Obsah

Všeobecná konštrukcia	1
1 Všeobecná konštrukcia	1
1.1 Definícia	1
1.1.1 Jedna značka pre porty	4
1.1.2 Dve a viac značiek pre porty	5
1.2 Mriežka	6
1.2.1 Jedna značka pre porty	6
1.3 N-rozmerná kocka	10
1.3.1 2-rozmerná kocka	19
1.3.2 3-rozmerná kocka	19
1.3.3 4-rozmerná kocka	21
Literatúra	23

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Kapitola 1

Všeobecná konštrukcia

1.1 Definícia

Definícia 1. Model sa skladá z grafu a agenta. Graf má nemeniteľné lokálne číslovanie koncov hrán vo vrchole, podľa poradia vzniku. Koniec hrany, ktorý vznikol ako prvý, má číslo 1. Prvý koniec vznikne spolu s vrcholom, zvyšné otvorením portu. Počiatočný graf obsahuje práve jeden izolovaný vrchol a nič viac. Akonáhle sú otvorené dva porty s rovnakými značkami, vznikne medzi nimi nová hrana a tieto porty tým zaniknú.

Agent môže vo vrchole, v ktorom sa nachádza, vykonávať tieto operácie: pohnúť sa po hrane do susedného vrcholu, otvoriť port so značkou, vytvoriť hranu do nového vrchola v ktorom sa následne ocitne. Agent rozlišuje hrany podľa lokálneho číslovania ich koncov vo vrchole, kde sa práve nachádza. Agent vie ktorý koniec patrí hrane po ktorej prišiel do vrcholu. Agent začína vo vrchole počiatočného grafu.

Agent pri vykonávaní algoritmu konštrukcie grafu nemá obmedzenú výpočtovú silu ani pamäť. Množina značiek portov je konečná a vopred daná. Efektivita algoritmu konštrukcie daného grafu sa pri tomto modeli meria počtom pohybov agenta (tj. sumou počtu návštev cez všetky vrcholy) pri danej množine značiek portov, tento počet sa snažíme minimalizovať.

Označenie 1. Označenie operácií agenta: - nová hrana = NH - otvoriť port (s číslom n) = $OP(n)$ - prejsť sa po hrane s lokálnym číslom konca k = Sk

Označenie 2. Agent začína v grafe, ktorý sme už nazvali počiatočný graf - v našom prípade obsahuje jeden izolovaný vrchol. Graf, ktorý má agent skonštruovať, budeme volať cieľový, konečný alebo konštrupvaný. Graf existujúci v danom kroku konštrukcie v modeli budeme volať aktuálny graf alebo len graf.

Poznámka 1. Pri práci s neorientovanými grafmi používame pojem "hrana vedie z vrchola v do vrchola u " len na rozlíšenie týchto dvoch vrcholov od seba.

Označenie 3. *Nad prvkami grafu, konštruovaného jedným agentom (sú to najmä vrcholy, hrany i porty), existuje prirodzené úplné usporiadanie podľa poradia ich vzniku, podľa ktorého môžeme o jednom prvku vyhlásiť, či je starší, mladší alebo rovnako starý ako iný prvok. Platí, že hrana je rovnako stará ako jej druhý port. Všeobecne prvky vzniknuté jednou operáciou sú rovnako staré.*

Označenie 4. *Krokom agenta budeme nazývať vykonanie operácie, pri ktorej sa zmení vrchol, v ktorom sa agent nachádza.*

Označenie 5. *Portová hrana je hrana, ktorá vznikla operáciou OP_k , kde k je značka portu, ktorého otvorením hrana vznikla.*

Označenie 6. *Kostrová hrana je hrana, ktorá vznikla operáciou NH .*

Poznámka 2. *Ako neskôr ukážeme - "kostrové hrany" tvoria kostru grafu.*

Označenie 7. *Medzi otvorením prvého a druhého portu portovej hrany h , prejde agent po slede vrcholov. Najmenší cyklus z tohto uzavretého sledu obsahujúci hranu h budeme označovať tvorivý cyklus hrany h . Hrany tohto cyklu bez hrany h tvoria konštrukčnú cestu hrany h .*

Označenie 8. *Postupnosť návštev vrcholov a hrán v poradí v akom ich agent vykonal počas konštrukcie cieľového grafu budeme volať tvorivý sled grafu.*

Lema 1. *Agent počas pohybu v grafe musí ísť po hranách grafu. Tieto po momente keď po nich prešiel, už v grafe trvale existujú.*

Dôkaz. Žiadna operácia agentovi nedovoľuje priamo prejsť medzi dvoma vrcholmi, ktoré nespája hrana. Môže však vytvoriť kostrové hrany a potom otvorením portu vznikne hrana, ktorá mu umožní dostať sa do vrcholov grafu, ktoré vytvoril predtým. Neexistuje spôsob ako v našom modeli odstrániť hranu z grafu. \square

Lema 2. *Ak agent odíde z vrcholu v ktorom je súčet počtov incidentných hrán a otvorených portov nižší, ako je počet hrán s ktorými má byť vrchol incidentný v cieľovom grafe, tak sa doň počas konštrukcie musí agent neskôr ešte vrátiť.*

Dôkaz. Neexistuje postupnosť operácií agenta, pomocou ktorej môže agent vytvoriť hranu do existujúceho vrchola bez jeho návštevy, ak v ňom nie je otvorený port pre túto hranu. Operácia NH vytvorí z vrchola v ktorom sa nachádza do nového vrcholu, ktorý predtým v grafe neexistoval a operáciou OP_k môže agent vytvoriť hranu z vrchola v ktorom sa nachádza do vrchola v ktorom je otvorený port so značkou k . Teda ak sa v danom vrchole agent nenachádza a nemá v ňom otvorený port pre hranu, ktorú ide skonštruovať, nemôže to urobiť bez návštevy tohto vrchola. \square

Lema 3. *Hrany vytvorené operáciou "nová hrana" tvoria kostru grafu.*

Dôkaz. Okrem inicializačného vrcholu, všetky vrcholy vzniknú operáciou "nová hrana" (NH). Každý vrchol okrem inicializačného je spojený hranou, s lokálnym číslom konca hrany 1, s nejakým starším vrcholom (vrchol, ktorý vznikol skôr). Po týchto hranách sa dá z každého vrchola grafu dostať do inicializačného, teda podgraf, tvorený hranami pochádzajúcimi z oprácií NH, je súvislý. Počet týchto hrán je zároveň o jeden menší ako počet vrcholov, teda ide o kostru. \square

Lema 4. *Hrany, ktoré agent prejde od otvorenia prvého portu hrany po otvorenie druhého, tvoria v grafe s novovzniknutou hranou uzavretý sled.*

Dôkaz. Je to dané operáciami, ktoré môže agent vykonať. Agent totiž prechádza len po hranách v grafe. Z vrchola ide do incidentnej hrany a z hrany do incidentného vrchola. Pričom žiadna hrana nemôže zaniknúť, teda medzi otvorením dvoch portov prejde agent po nejakom slede v grafe. Novovzniknutá hrana spája koncový a začiatkový bod tohto sledu; tvorí s ním teda uzavretý sled. \square

Poznámka 3. *Zo sledu z vety 4 vieme vybrať kružnicu.*

Lema 5. *Minimálny počet hrán, ktoré agent potrebuje prejsť pri konštrukcii hrany pomocou portov je rovný alebo väčší ako dĺžka najmenej kružnice, na ktorej sa táto hrana v konštruovanom grafe nachádza.*

Dôkaz. Nájdeme menší takýto sled ako je najkratšia kružnica. Tento tvorí s novovzniknutou hranou uzavretý sled. Z neho vieme vybrať kružnicu, čo je spor s minimálnosťou najkratšej kružnice. Keďže neexistuje v našom modeli možnosť, aby hrana zanikla, musí sa táto "nová" najkratšia kružnica nachádzať aj v konštruovanom grafe. \square

Lema 6. *Ak má agent k dispozícii dostatočný počet značiek portov, tak sa problém efektívnej konštrukcie grafu redukuje na hľadanie najkratšieho sledu v ktorom sú všetky vrcholy. Pri hamiltonovskom grafe ide o hamiltonovskú kružnicu.*

Dôkaz. Agent skonštruuje graf takto: prechádza vrcholmi, podľa najkratšieho sledu obsahujúceho všetky vrcholy, pričom mu sačí jedna návšteva každého vrcholu, v ktorom otvorí potrebný počet portov príslušných značiek. Ak má v slede prejsť do vrcholu, ktorý ešte neexistuje, použije operáciu NH. \square

Poznámka 4. *Aj v tomto prípade je možná ďalšia optimalizácia a to na počet použitých značiek pre porty. Celkovo to funguje takto: agent otvorí port so značkou k , vytvorí pár kostrových hrán a následne v nejakom vrchole otvorí druhý port s rovnakou značkou, čím sa mu táto uvoľní. V každom vrchole, ktorý medzitým vytvorí, musí otvoriť porty,*

pre všetky hrany v konštruovanom grafe, s ktorými je v ňom tento vrchol incidentný. Pri tom nemôže použiť značku k . Vo všeobecnosti teda platí, že čím kratšie sú porty otvorené, tým menší je celkový počet potrebných značiek.

Lema 7. *Vrchol v grafe musí agent navštíviť minimálne $\frac{\deg(v)}{|Z|*2}$ krát, kde Z je množina značiek pre porty, ktorú ma agent k dispozícii.*

Dôkaz. Pri každej návšteve môže agent otvorením portov so všetkými značkami vytvoriť nové hrany do vrcholov, v ktorých sú otvorené príslušné porty a následne otvoriť toľko portov s navzájom rozdielnymi značkami, koľko má k dispozícii značiek (dvojica portov rovnakej značky v jednom vrchole by vytvorila slučku a v našom modeli uvažujeme hrany bez slučiek). \square

Poznámka 5. *Ako ukážeme neskôr, pri obmedzenom množstve značiek portov môže byť výhodnejšie neminúť všetky značky pre porty v jednom vrchole, aj za cenu opakovanej návštevy. Výhodnejšie v tomto prípade znamená, že agent pri danej konštrukcii vykoná menej krokov.*

1.1.1 Jedna značka pre porty

Lema 8. *Najmenej krokov agent na konštrukciu konkrétnej hrany medzi už existujúcimi vrcholmi použije, ak pôjde do najbližšieho z nich, otvorí v ňom port a následne najkratšou cestou po už existujúcich hranách prejde do druhého vrcholu a otvorí v ňom port.*

Dôkaz. Agent má k dispozícii len jednu značku pre porty. Teda počas konštrukcie hrany medzi už existujúcimi vrcholmi, žiadne nové hrany v grafe, ktoré by ležali na ceste medzi koncami tejto hrany nevzniknú. Jediné nové hrany môžu vzniknúť operáciou NH, ale tieto by viedli do "slepej uličky" (komponentu grafu obsahujúceho len nové vrcholy a spojeného mostom so zvyškom grafu), z ktorej by sa musel agent vracieť a je zrejmé, že ak ich konštrukciu vynechá, z pohľadu najmenšieho počtu ťahov na konštrukciu tejto portovej hrany nič nepokazí. V neorientovanom grafe pri jednej značke pre port je najkratšia cesta od otvorenia prvého po otvorenie druhého portu hrany rovnaká bez ohľadu na to, v ktorom vrchole agent otvorí prvý port hrany. Jediné, čo sa mení, je počet krokov po otvorení prvého z portov. Aby bol tento a teda aj celkový počet krokov čo najkratší, pôjde agent do najbližšieho z vrcholov konštruovanej portovej hrany. \square

Lema 9. *Agent, ktorý má k dispozícii len jednu značku pre porty, musí prejsť pri konštrukcii grafu aspoň k krokov, kde $k = \min_{i=1}^y \{ \sum_{e \in G(E); e \notin G(K_i)} j(e) - 1 \}$, kde K je kostra grafu G ; y je počet navzájom rôznych kostier grafu G ; $j(e)$ je najmenšia kružnica v grafe obsahujúca hranu e a K_i je i -ta kostra, pričom $K_i \equiv K_j \iff i \equiv j$*

Dôkaz. Podľa vety 5 musí agent prejsť pri konštrukcii hrany aspoň dĺžku minimálnej kružnice bez jednej - bez hrany ktorú tým konštruuje. Keďže má k dispozícii len jednu značku pre porty, ďalšiu hranu môže začať konštruovať až keď dokončil predošlú. Pri každej hrane prejde teda aspoň dĺžku najmenšej kružnice, v ktorej sa táto hrana nachádza mínus jedna. Dokopy prejde agent ich súčet. \square

Lema 10. *Po použití operácie NH, ktorou vznikne hrana h , sa agent už nedostane do už existujúceho vrchola bez následného použitia operácie OP, ktorá vytvorí hranu do vrcholov starších ako h , alebo bez opätovného prejdenia po hrane h .*

Dôkaz. Vrchol v , ktorý vznikne operáciou NH je so zvyškom grafu spojený len hranou h , ktorá tvorí most, do vzniku hrany operáciou OP, medzi komponentmi na oboch stranách tohto mostu. Teda jediný spôsob ako prejsť medzi týmito dvomi časťami grafu je po moste, ktorý ich spája - po hrane h . \square

Lema 11. *Existuje graf, pri ktorého konštrukcii na najmenej krokoch, agent skonštruuje kostrové hrany, ktoré s konštruovanou portovou hranou netvoria tvoriaci cyklus.*

Dôkaz. Napríklad cyklus, kde do každého vrchola pridáme hranu do vrchola stupňa jedna. Je zrejmé, že pri konštrukcii týchto vrcholov stupňa jedna, agent určí operácie NH a S1, lebo nemôže ostať vo vrchole ak ešte nedokončil graf a iná hrana z neho nevedie. Tiež je zrejmé, že takýto graf má práve jednu portovú hranu a to ľubovoľnú hranu cyklu. Pri jej konštrukcii prejde agent cez všetky vrcholy v cykle a ak by neskonštruoval príslušný vrchol stupňa jedna incidentný s vrcholom cyklu, pri jeho prvej návšteve, musel by sa doň vrátiť a teda vykonať viac krokov. Agent teda otvorí port a skonštruuje vrcholy cyklu, pričom v každom skonštruuje aj príslušný vrchol stupňa jedna s ktorým je tento incidentný. \square

1.1.2 Dve a viac značiek pre porty

Ušetriť (agent vykoná menej krokov) oproti situácii, keď agent môže použiť len jednu značku pre porty možno v prípade že má k dispozícii viacero značiek pre porty vtedy, ak konštruovaný graf obsahuje cykly, ktoré majú spoločné hrany. Vtedy, ak agent pri konštrukcii niektorej hrany, prechádza vrcholom s ktorým bude incidentná niektorá portová hrana, ktorú bude konštruovať po tejto, v ňom otvorí port. Následne sa do tohto vrchola už nemusí pri konštrukcii tejto nasledujúcej portovej hrany vracáť otvoriť port, ak existuje kratšia cesta do druhého koncového vrchola tejto hrany. V metrike vzdialeností, kde sa počíta počet hrán najkratšej cesty medzi dvomi vrcholmi ako ich vzdialenosť platí trojuholníková nerovnosť. Z tohto dôvodu agent nevykoná viac krokov pri najlacnejšej (na najmenej krokov) konštrukcii portovej hrany ak jeden port tejto

hrany otvorí skôr oproti konštrukcii kde ho otvorí neskôr, pričom sa kroky rátaajú až po dokončení predošlej portovej hrany. Krok, vykonaný agentom v čase, keď má tento otvorených viacero porto, sa do celkového súčtu počíta len raz. Ako neskôr ukážeme, nie vždy spôsobí snaha skonštruovať jednu hranu na čo najmenej krokov zlepšenie celkového počtu krokov agenta počas konštrukcie cieľového grafu.

TODO ... lemy o tvoriacom cykle grafu pri viacerých značkách pre porty ...

1.2 Mriežka

Definícia 2. *Mriežka veľkosti $n \times m$ je graf $P_n \times P_m$*

Definícia 3. *Cyklická mriežka veľkosti $n \times m$ je graf $C_n \times C_m$.*

V tejto kapitole sa budeme zaoberať mriežkou a cyklickou mriežkou. Na to, aby sme sa v týchto dvoch grafoch dokázali dobre orientovať, zavedieme pojem dimenzie a jej súradnice. Pričom využívame, že oba grafy sú produktmi kartézského súčinu.

Označenie 9. *Pojem dimenzie v produkte kartézského súčinu G , grafov U a V zavedieme prirodzene vzhľadom na označenie vrcholov produktu ako usporiadanej dvojice (u, v) , kde $u \in U$ a $v \in V$. i -tou dimenziou vrchola produktu tohto súčinu bude i -ty člen tejto dvojice. Súradnicou v dimenzii i je prvok na i -tej pozícii v usporiadanej dvojici. Pre zjednodušenie označíme vrcholy pôvodných grafov prirodzenými číslami od 1 po m rešpektíve od 1 po n . Vrcholy produktu kartézského súčinu týchto dvoch grafov budú pre dosť veľké m, n napríklad $(2, 4)$, $(5, 17)$, $(9, 1)$, atď.*

Poznámka 6. *Pri mriežke a cyklickej mriežke budeme číslovať vrcholy pôvodných grafov tak, aby sa označenia susedných vrcholov líšili o jedna, v prípade cyklickej mriežky budú v pôvodných grafoch - cykloch spojené aj vrcholy 1 a n , repektíve 1 a m .*

Lema 12. *Pri konštrukcii portovej hrany v mriežke aj v cyklickej mriežke, ktoré nemajú žiaden rozmer menší ako štyri, urobí agent medzi otvorením prvého a druhého portu najmenej tri kroky.*

Dôkaz. Najmenší cyklus v oboch grafoch má dĺžku štyri. Teda medzi otvorením dvoch portov hrany vykoná agent najmenej tri pohyby po hranách. Buď prejde po už existujúcich alebo vytvorí novú operáciou NH. □

1.2.1 Jedna značka pre porty

Lema 13. *Kostrové hrana je staršia, vznikla skôr, ako všetky portové hrany incidentné s jej mladším koncovým vrcholom.*

Dôkaz. Aby agent mohol otvoriť vo vrchole port, musel už tento vrchol existovať. Jediná operácia ktorou mohol vrchol vzniknúť je operácia NH. Mladší vrchol vznikol spolu s kostrovou hranou a preto doň predtým nemohli viesť žiadne hrany. \square

Lema 14. *Tvoriaci cyklus hrany h obsahuje len hrany staršie ako h .*

Dôkaz. Tvoriaci cyklus obsahuje hrany, po ktorých agent prešiel, keď konštruoval hranu h . Museli teda v čase po prechode agenta už existovať a sú preto staršie ako hrana h , ktorú agent vytvoril až potom, ako po týchto hranách prešiel. \square

Lema 15. *Každý tvoriaci cyklus je možné nahradiť tvoriacim cyklom, ktorý obsahuje len hrany kostry a príslušnú portovú hranu.*

Dôkaz. Majme tvoriaci cyklus hrany h . Každú portovú hranu, okrem h v ňom nahradíme jej tvoriacim cyklom, až kým nemáme uzavretý sled na kostrových hranách a hrane h . Z neho vieme vybrať tvoriaci cyklus hrany h . \square

Označenie 10. *Graf prislúchajúci dimenzii d grafu G je d -ty činiteľ kartézskeho súčinu, ktorého je G produktom.*

Označenie 11. *Hrana v mriežke a cyklickej mriežke vedie medzi dvomi vrcholmi, ktoré sa líšia v práve jednej dimenzii a v tejto majú súradnice vrcholov, ktoré spolu susedia v grafe, ktorý prislúcha danej dimenzii. Teda ak je to prvá dimenzia jedná sa o prvý člen kartézskeho súčinu a ak je to druhá dimenzia o druhý. Súradnica hrany budeme volať súradnicu k , ak k je najvyššia súradnica v danej dimenzii a hrana spája vrchol s najnižšou a najvyššou súradnicou dimenzie, alebo nižšia zo súradníc v ktorých sa líšia vrcholy spojené touto hranou.*

Hranu so súradnocou k budeme volať niekedy hrana v súradnici k . Rovnako budeme používať pojem dimenzia hrany a hrana dimenzie.

Označenie 12. *Prechodom po súradnici budeme volať prechod agenta po hrane danej súradnice.*

Označenie 13. *Susedná súradnica súradnice k v dimenzii d , je každá súradnica vrchola spojeného hranou v grafe prislúchajúcom dimenzii d s vrcholom so súradnicou k .*

Lema 16. *Portová hrana v súradnici k v cyklickej mriežke má v tvoriacom cykle odlišnú paritu počtu prechodov po súradnici k ako majú počty prechodov po ostatných súradniciach. V ostatnej dimenzii majú všetky počty prechodov po každej súradnici rovnakú paritu.*

Dôkaz. Aby otvoril druhý port hrany, agent musí svoju pozíciu zmeniť tak, aby sa nachádzal na susednej súradnici v dimenzii v ktorej sa líši s vrcholom s otvoreným prvým portom v dimenzii kam má viesť konštruovaná hrana. Keď rozdelíme pohyby agenta medzi jednotlivé dimenzie, môžeme jeho pohyb premietnuť do grafov týchto dimenzií. Budeme teda sledovať len to ako sa mení tá, ktorá súradnica agenta pri jeho pohybe po tvoriacom cykle. Keďže vrcholy v ktorých otvára porty sa líšia iba v dimenzii konštruovanej hrany, v jednej dimenzii majú rovnakú súradnicu. Do grafu tejto dimenzie sa pohyb agenta premietne ako uzavretý sled, kde skončí vo vrchole, v ktorom začal. Poďme spočítať paritu prechodov po jednotlivých súradniciach v slede do ktorého sa v tomto grafe premietne prechod agenta. Vezmeme tie výskyty toho istého vrcholu, medzi ktorými sú výskyty len iných vrcholov a to každého najviac raz. Takže aké pohyby mohol urobiť agent medzi dvomi najbližšími návštevami nejakého vrcholu? Mohol sa vrátiť zo susedného vrchola - zo vzdialenejšieho už nie, lebo susedný, cez ktorý by išiel by sa vyskytol na tomto slede viackrát ako raz. Alebo mohol agent prejsť po ceste, kde cieľom aj východiskom je tento vrchol. Takáto cesta je buď prázdna alebo obsahuje všetky iné vrcholy a je to vlastne prejdenie cyklu dookola. V prvom prípade sa parita prechodov po súradniciach zachová, lebo agent prešiel tam a späť po rovnakej súradnici. V druhom prípade sa zmení parita prechodov pre všetky súradnice. V oboch prípadoch sa teda zachová rovnosť parít prechodov jednotlivých súradníc, ak platila aj predtým. Vieme teda, že medzi dvomi najbližšími výskytmi vrchola sa nič nepokazí. Na začiatku je počet prechodov pre každú súradnicu rovnaký - nulový a teda majú rovnakú paritu. Pri ďalšom počítaní môžeme teda tieto výskyty preskočiť - skontrať. Na takto upravenom slede postup opakujeme, až kým nemáme každý vrchol najviac raz okrem koncového a začiatočného, čo je ten istý. Preň platia rovnaké pravidlá a teda pre túto dimenziu je veta dokázaná.

V dimenzii konštruovanej hrany sa bude pri otváraní druhého portu nachádzať vo vrchole susednej súradnice k súradnici vrchola s prvým portom. Ak pridáme do sledu aj konštruovanú portovú hranu, dostaneme uzavretý sled, pre ktorý platí predošlý dôkaz. Z toho je jasné, že iba prechody po konštruovanej hrane majú odlišnú paritu počtu svojich výskytov. \square

Lema 17. *Pri ľubovoľnej konštrukcii cyklickej mriežky G rozmerov $n \times m$ s jednou značkou pre porty, existuje aspoň jedna hrana pri konštrukcii ktorej agent vykoná aspoň $n-1$ krokov v prvej dimenzii a súčasne aspoň jedna portová hrana, pri konštrukcii ktorej agent vykoná aspoň $m-1$ krokov v druhej dimenzii, môže ísť o tú istú hranu.*

Dôkaz. Ako sme už povedali kostrové hrany sú hrany, ktoré vznikli operáciou NH a tieto hrany tvoria kostru grafu; ako bolo spomenuté grafom nazývame každý medziprodukt konštrukcie počnúc počiatočným vrcholom až po konečný skonštruovaný graf. Každý

kinštrukcii grafu G zodpovedá nejaká kostra z kostrových hrán. Počet krokov, ktoré agent vykonal pri konštrukcii hrany h je súčet počtu krokov do vrchola v , v ktorom otvoril prvý port hrany a počet krokov z vrchola v do vrchola u , v ktorom otvoril druhý port hrany, tento sled z u do v tvoria s portovou hranou uzavretý sled. Tento sled obsahuje tvoriaci cyklus danej portovej hrany. Majme ľubovoľnú konštrukciu cyklickej mriežky G a k nej zodpovedajúcu kostru. Ukážeme, že pre ňu platí tvrdenie vety. Táto kostra určuje aj, ktoré hrany grafu sú portové - tie, ktoré nie sú v kostre. Pripomeňme si, že kostra zodpovedajúca konštrukcii je kostra tvorená práve všetkými hranami, ktoré vznikli operáciami NH . Ukážeme, že existuje aspoň jedna hrana, ktorej tvorivý cyklus bez tejto hrany obsahuje jej súradnicu párny počet krát - teda ostatné súradnice v tejto dimenzii nepárny počet krát. Rovnako to dokážeme pre obe dimenzie. Možné sú dva prípady, buď ide o dve rôzne hrany, alebo o jedinú hranu. Keďže agent musel prejsť do susednej súradnice vrchola s prvým portom hrany a nemohol tak urobiť v jej súradnici, musel prejsť po všetkých ostatných súradniciach a teda vykonať aspoň $n-1$ respektíve $m-1$ krokov v prípade, že platí alternatíva s dvomi rôznymi hranami. Alebo $n+m-1$ ak platí alternatíva s jedinou hranou. Nazveme ich pre lepšiu orientáciu dotknuté hrany. Pozrieme sa na ľubovoľnú kostru. V tejto kostre sa nachádzajú všetky vrcholy grafu. Aký je tvorivý cyklus jednotlivých portových hrán. V tvorivom cykle portovej hrany h je možné nahradiť niektorú portovú hranu jej tvorivou cestou. Takýmto nahrádzaním postupne vieme nahradiť všetky portové hrany. Keď z výsledného sledu vyberieme konštrukčnú cestu, tento už obsahuje iba kostrové hrany. Pozrime sa na paritu počtu prechodov jednotlivých súradníc v tejto ceste. Tvrdíme, že ak sme nenahrádzali hranu, ktorej tvorivá cesta obsahovala súradnicu tejto hrany párny počet krát, výsledná tvorivá cesta na kostrových hranách bude obsahovať nepárny počet prechodov po súradnici hrany h . Toto je zrejmé. Ak výskyt hrany nahradíme cestou, kde sa táto hrana nachádza nepárny počet krát, počet prechodov po súradnici hrany sa nezmení. Toto zároveň implikuje, že prechody po ostatných súradniciach sa na tejto ceste nachádzajú párny počet krát zvlášť pre každú súradnicu. Teda nezmení sa ani parita prechodov po ostatných súradniciach. Čo sa týka parít počtov prechodov v ostatnej dimenzii, tak tu platí to isté, ak nahrádzame hranu jej tvorivou cestou, kde je počet prechodov po súradnici tejto hrany párny, tak aj vo výslednom slede je počet prechodov párny pre každú súradnicu tejto dimenzie.

Keďže výsledný sled, ktorý vznikol nahradením tvorivej cesty portovej hrany h vedie len po kostrových hranách a na tých neexistuje cyklus, tvorivá cesta hrany h vybraná z tohto sledu zachováva paritu prechodov po jednotlivých súradniciach takú, aká je v tomto slede. Kostra je totiž strom a ak sa na slede vyskytne dvakrát ten istý vrchol, tak medzi dvomi jeho susednými výskytmi je párny výskyt prechodov po jednotlivých

súradniciach a teda ho môžeme zo sledu vybrať - skontraovať na jeden výskyt tohto vrchola. Jediná šanca ako pri pohybe po strome navštíviť opätovne niektorý vrchol je vrátiť sa doň.

Na kostre existuje pre každú portovú hranu jediná tvorivá cesta, inak by na nej bol cyklus, čo je spor. Vezmime si teraz dimenziu d a vrcholy, ktoré majú v ostatnej dimenzii rovnakú súradnicu, označme ju k . Indukovaný podgraf na týchto vrchoch je cyklus. Niektoré jeho hrany sú kostrové, ostatné sú portové. Pokiaľ má každá portová hrana tvorivú cestu na kostre s nepárnym počtom prechodov po jej súradnici, existuje na kostre cyklus, čo je spor. Tento cyklus získame z uzavretého sledu vytvoreného z indukovaného grafu týchto vrcholov, kde portové hrany nahradíme ich tvorivými cestami na kostre. Vo výslednom slede sa každá hrana bude nachádzať nepárny počet krát a ako sme už ukázali, ak vyberieme niektorú portovú hranu f , vieme z tohto cyklu vybrať jej tvorivú cestu, ktorá zachová paritu prechodov po jednotlivých hranách. Keďže sa však v tomto slede nachádza prechod po súradnici hrany f párny počet krát, bude sa aj v ceste, čo je spor. Napríklad s tým, že táto hrana má tvorivú cestu na kostre s nepárnym počtom výskytov jej súradnice, alebo že v kostre existuje medzi dvomi vrcholmi - koncovými vrcholmi hrany f , práve jedna cesta. Z toho vyplýva, že niektorá nahradzaná hrana mala tvorivú cestu s párnym počtom prechodov po jej súradnici. Teda pre každú dimenziu existuje hrana, ktorej tvorivá cesta obsahuje nepárne počty prechodov po súradniciach tejto dimenzie. A agent pri jej konštrukcii musí vykonať aspoň $n - 1$ krokov pre prvú dimenziu a iných $m - 1$ krokov pre druhú dimenziu. \square

Lema 18. *Mriežku $m \times n$ je možné s použitím jedinej značky pre port zostrojiť pomocou $3m(n - 1) + m$ pohybov, kde $m \leq n$.*

Dôkaz. Agent vykonáva: OP, NH, NH, NH, OP, $(n-2)$ krát (OP, S1, NH, NH, OP), S1, NH, HN, OP čím vytvorí prvý riadok mriežky. Následne vykoná $(m-1)$ krát (NH, OP, S1, S2, NH, OP, $(n-1)$ krát (OP, S1, S2, NH, OP)) \square

Lema 19. *Na zostrojenie mriežky $m \times n$, kde $m \leq n$ potrebuje agent s jednou značkou pre porty vykonať aspoň $3m(n - 1) + m$ krokov.*

Dôkaz. \square

1.3 N-rozmerná kocka

Vrcholy spojené hranou sa líšia práve v jednej súradnici. Každéj hrane z vrcholu možno priradiť súradnicu v ktorej sa jej druhý vrchol od tohto odlišuje. Toto priradenie je injekcia. Susedia vrchola sa navzájom líšia v práve dvoch súradniciach. Pri pohybe po

hrane mením jednu súradnicu svojej pozície. Z tohto vyplývajú obmedzenia pre úsporu pohybov pridávaním značiek pre porty. Napríklad pri použití dvoch značiek pre porty potrebuje agent na vytvorenie dvoch nových portových hrán aspoň 5 ťahov. Úspora nastáva, keď port pre druhú hranu otvorím už počas cesty za otvorením portu prvej hrany.

Lema 20. *Dva vrcholy, ktoré sa navzájom líšia v práve dvoch súradniciach majú práve dvoch spoločných susedov.*

Dôkaz. Susedné vrcholy sa líšia práve v jednej súradnici. Spoločný sused dvoch vrcholov sa líši v práve jednej súradnici od každého z nich. Teda má všetky súradnice rovnaké ako jeden z nich a líši sa v jednej z tých dvoch. Teda ju má rovnakú ako druhý vrchol. Druhý z týchto súradníc má potom odlišnú od druhého vrchola. Čiže sa od každého z nich líši v práve jednej súradnici. Toto dáva práve dva rôzne vrcholy, ktoré susedia z oboma. Vrchol, ktorý sa od jedného z vrcholov líšiacich sa v dvoch súradniciach líši v nejakej inej, sa od druhého líši v troch súradniciach a teda s ním nesusedí. \square

Otázkou ostáva, koľko hrán vie agent vytvoriť počas jednej návštevy vrcholu otváraním portov?

Lema 21. *Pri jednej návšteve vrcholu môže agent vytvoriť najviac $(\frac{n}{2} - 12) > \#dimenzii$ hrán otvorením portu.*

Poznámka 7. *Rátajú sa hrany, ktoré vzniknú hneď tj. pri ktorých agent otvorením portov vytvorí druhý (posledný) koniec.*

Dôkaz. Je zrejmé: že vo všetkých vrcholoch, kam majú tieto hrany viesť, už agent bol; medzi dvomi vrcholmi vedie najviac jedna hrana. Z tohto a predošlej vety vyplýva, že po návšteve n vrcholov môže agent otvorením portu vytvoriť z vrcholu, kde sa nachádza, najviac $(\frac{n}{2} - 12) > \#dimenzii$ hrán. Z týchto $(\frac{n}{2} - 12)$ vrcholov sa od neho každý líši v inej súradnici, lebo ak by sa dva líšili v rovnakej, museli by to byť totožné vrcholy. \square

Lema 22. *Existuje taká postupnosť n vrcholov, že pri návšteve posledného agent vytvorí $(\frac{n}{2} - 12) >> \#dimenzii$ hrán.*

Dôkaz. Ak vezmeme takúto postupnosť odzadu, vyzerala by až na substitúciu dimenzií takto: 1, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, ... \square

Poznámka 8. *Avšak ľahko vidieť, že žiadne iné portové hrany by medzi vrcholmi v tejto postupnosti vzniknúť nemohli.*

Skúsme teda nájsť postupnosť (cestu v hyperkocke) s najväčším možným počtom portových hrán medzi jej vrcholmi.

Označenie 14. *O hrane povieme, že vedie v dimenzii k , ak sa vrcholy, ktoré spája, líšia v práve tejto dimenzii.*

Je jasné, že v akomkoľvek súvislom slede vrcholov povedie hrana medzi dvojicami nasledujúcich vrcholov, ide o hrany po ktorých agent prejde z vrcholu do vrcholu. Portová hrana môže vzniknúť medzi vrcholmi, ktoré sa líšia v práve jednej súradnici, lebo iné hrany v hyperkocke nie sú.

Označenie 15. *Poloha agenta je vyjadrená súradnicami v jednotlivých dimenziách kocky. v každej dimenzii môže nadobúdať jednu z dvoch súradníc. Označme ich 0 a 1. Pri prechode po hrane agent preklopí jednu z týchto súradníc v práve jednej dimenzii na druhú.*

Lema 23. *V ľubovoľnej postupnosti hrán medzi vrcholmi hyperkocky spojenými hranou, sa nachádza párny počet hrán v každej dimenzii okrem dimenzie v ktorej sa tieto vrcholy líšia a teda v nej vedie hrana medzi nimi.*

Dôkaz. Takéto dva vrcholy sa líšia v práve jednej dimenzii. Ak agent zmenil pri pohybe svoju polohu v nejakej dimenzii nepárny počet krát, tak je v tejto dimenzii v inej polohe ako bol na začiatku. Ak to nie je dimenzia v ktorej sa líši koncový vrchol od začiatočného - agent sa nenachádza v koncovom vrchole, lebo polohy agenta a tohto vrcholu nie sú rovnaké. \square

Označenie 16. *Ak viem súradnice vrchola, môžem postupnosť ťahov agenta zapísať ako postupnosť zmien jeho súradníc v jednotlivých dimenziách.*

Ak sa nachádza v takejto postupnosti medzi vrcholmi, medzi ktorými vzniká portová hrana dvakrát hneď za sebou číslo nejakej dimenzie, znamená to, že agent šiel tam a späť a tieto dva prvky môžeme z postupnosti vylúčiť, lebo je to z pohľadu tejto dvojice vrcholov zbytočný pohyb. Ak takto zredukujeme niektorú postupnosť, získame inú, v ktorej ide agent po podmnožine hrán z pôvodnej a na rovný alebo menší počet pohybov.

Poznámka 9. *Pripomeniem, že hľadáme taký sled, že počet portových hrán medzi jeho vrcholmi je na daný počet značiek pre porty a počet portových hrán, ktoré vzniknú medzi jeho vrcholmi, najkratší možný.*

Ak má agent dostatok značiek pre porty, nezaujima nás poradie v akom vrcholy postupnosti navštívil. Úlohu teda môžeme zredukovať na hľadanie takej množiny vrcholov

veľkosti m , ktorá tvorí zo všetkých takto veľkých množín najmenší rez od zvyšku grafu. Pri konštantnom stupni vrcholov to znamená, že v takej vedie najviac hrán medzi vrcholmi v tejto množine. Keď sa pozrieme na vrcholy a pravidlá ich spájania hranami, zistíme, že tieto vedú len v nejakej kocke a čím viac rozmerov kocka má, tým viac hrán vedie medzi jej vrcholmi. Teda aj v n -rozmernej kocke povedie najviac hrán medzi vrcholmi takej množiny, ktorej indukovaný graf je izomorfný kocke. Vrchol k -rozmernej kocky sa nachádza v k $(k-1)$ -rozmerných kockách, ktoré sú jej podgrafmi. Teda budeme hľadať množinu m bodov, ktoré sa dajú pokryť kockami čím vyššieho rozmeru a nemusíme si všímať kocky ktoré sú podgrafmi týchto kociek. tieto kocky sa však môžu prekrývať.

Lema 24. *S každou hyperkockou v ktorej vrchol neleží ho spája najviac jedna hrana. Ktorá vedie v inej dimenzii ako sú dimenzie tejto hyperkocky.*

Dôkaz. Každý vrchol hyperkocky má hrany vo všetkých jej dimenziách. Vo zvyšných dimenziách sú vrcholy hyperkocky totožné, lebo sa dva susedné líšia práve v jednej. Vrchol mimo hyperkocky spojený s vrcholom v nej sa od neho líši v inej dimenzii a v tejto sa líši teda aj od všetkých ostatných. Zároveň je vo všetkých dimenziách hyperkocky totožný s vrcholom z nej a teda sa líši v aspoň jednej dimenzii hyperkocky od jej ostatných vrcholov a má teda s nimi aspoň dve rodieľne dimenzie. Nemôže ho preto s nimi spájať hrana. \square

Lema 25. *Bijektívna substitúcia dimenzií na všetkých vrcholoch podgrafu hyperkocky zachováva hrany medzi vrcholmi. Rovnako aj preklopenie súradníc v niektorej dimenzii.*

Dôkaz. Ak sa dva vrcholy líšia práve v jednej dimenzii, budú sa v práve jednej dimenzii líšiť aj po tejto substitúcii, lebo dimenzie v ktorých boli rovnaké sa zobrazia na rovnaké a tá v ktorej sa kíšili sa u oboch zobrazí na rovnakú a budú sa v nej líšiť aj naďalej; teda medzi nimi povedie hrana. Pri preklopení súradníc sa medzi vrcholmi zachovávajú rovnosti a rozdiely v danej dimenzii, teda aj hrany. \square

Lema 26. *Vrcholy súvislého podgrafu hyperkocky s počtom vrcholov m sa navzájom líšia v najviac $m-1$ súradniciach.*

Dôkaz. Vezmime kostru tohto podgrafu. Táto má $m-1$ hrán. Každá vedie v niektorej dimenzii. Cesta v tejto kostre udáva v ktorých dimenziách sa daná dvojica jej koncových vrcholov líši. Všetky cesty v tejto kostre idú cez najviac $m-1$ rôznych dimenzií, čo je jej počet hrán. V ostatných dimenziách sa dané vrcholy nelíšia, majú v nich teda navzájom rovnaké súradnice. \square

Lema 27. *Podmnožina m bodov hyperkocky, ktoré indukujú graf s najvyšším počtom hrán je súvislá.*

Dôkaz. Nech existujú dva komponenty. Na jednom z nich urobíme postupné poprekĺpávanie súradníc tak, aby susedil niektorý jeho bod s bodom v druhom komponente a teda medzi nimi viedla hrana. Čiže vyberieme jednu dimenziu v ktorej sa líšia a vo všetkých ostatných dimenziách, kde majú rozdielne súradnice preklápame postupne súradnice jedného z vrcholov. V prípade, že počas tohto postupu vznikne hrana spájajúca vyhrané dva komponenty, skončíme skôr. Pôvodné hrany sa zachovávajú a jedna nová pribudne, čo je spor s najvyšším počtom hrán. Tieto kroky môžeme urobiť bez toho, aby sa dva vrcholy zobrazili na seba. Ak budeme robiť preklápávanie súradníc po jednotlivých dimenziách, v tom prípade, ak by sa nejaký vrchol transformovaného komponentu podgrafu zobrazil na niektorý vrchol druhého komponentu, musela by medzi nimi viesť predtým hrana, teda stav v ktorom by boli komponenty prepojené a preklápávanie by teda už nepokračovalo. \square

Potrebuje vybrať m vrcholový indukovaný podgraf hyperkocky tak, aby počet hrán v ňom bol maximálny možný.

Lema 28. *Vrcholy podgrafu hyperkocky sa dajú rozdeliť na dve množiny A, B podľa súradnice vo vybranej dimenzii. Počet hrán vedúcich z vrcholov v jednej množine do vrcholov v druhej množine je rovný alebo menší ako mohutnosť menšej z nich. Čiže $|\{e | e = (a, b); a \in A; b \in B\}| \leq \min\{|A|, |B|\}$*

Dôkaz. Každý vrchol má v jednej dimenzii najviac jednu hranu a hrana vedie v danej dimenzii medzi dvoma vrcholmi vtedy ak je to jediná dimenzia v ktorej majú rozdielne súradnice. V inej dimenzii medzi A a B hrana viesť nemôže, lebo by musela viesť medzi vrcholmi líšiacimi sa v najmenej dvoch dimenziách - v dimenzii hrany a v dimenzii podľa súradníc ktorej sú A a B vytvorené. Teda hrany medzi A a B môžu viesť len v jednej dimenzii a do menšej z A, B môže viesť najviac toľko hrán v jednej dimenzii, koľko má vrcholov. \square

Lema 29. *Keď vezmeme z podgrafu hyperkocky len vrcholy, ktoré majú hranu v jednej vybranej dimenzii a označíme nimi indukovaný podgraf G . Vieme vrcholy G rozdeliť na dva izomorfné indukované podgrafy hyperkocky G_1 a G_2 podľa súradnice vrchola v tejto dimenzii.*

Dôkaz. Vrcholy, medzi ktorými vedie hrana sa líšia v práve jednej dimenzii, v ostatných dimenziách sú rovnaké. Keď teda vezmeme hrany vedúce medzi G_1 a G_2 a vytvoríme podľa nich bijektívne zobrazenie medzi týmito podgrafmi tak, aby sa dva vrcholy medzi ktorými vedie hrana vo vybranej dimenzii zobrazili na seba, dostaneme izomorfizmus. Ak totiž viedla medzi dvoma vrcholmi hrana, bude hrana viesť aj medzi ich obrazmi, lebo tieto majú rovnaké súradnice ako ich vzory vo všetkých dimenziách okrem jednej,

kde sa oba obrazy od svojich vzorov líšia a teda majú súradnicu v tejto dimenzii rovnakú; obaja sú v komponente, kde majú túto súradnicu rovnakú všetky vrcholy. Ak sa teda líšili v jednej súradnici vzory, budú sa aj obrazy a ak sa líšili vzory vo viacerých súradniciach, budú sa v rovnakých súradniciach líšiť aj obrazy. Zobrazenie je teda izomorfizmus. \square

Lema 30. *Existuje indukovaný podgraf G hyperkocky na m vrcholech, ktorý je možné postupne rozdeliť podľa dimenzií až po jednovrcholové indukované podgrafy tak, že v každom kroku rozdelíme vrcholy každého podgrafu s počtom vrcholov aspoň dva do dvoch podmnožín A a B . Takých, že $|A| - |B| \leq 1$.*

Dôkaz. Dôkaz bude konštrukčný. Budeme postupne deliť m vrcholovú množinu i ďalšie z nej vzniknuté množiny na menšie, až kým nedostaneme m jednoprvkových množín vrcholov. Pritom budeme postupne určovať súradnice jednotlivých vrcholov.

Budeme postupovať postupne po dimenziách, až kým budú všetky množiny jednoprvkové. Vezmeme množinu M , rozdelíme ju na dve časti M_1, M_0 také že $|M_1| - |M_0| \leq 1$. Vrcholy v M_1 budú mať v tejto dimenzii súradnicu 1 a vrcholy v M_0 budú mať v tejto dimenzii súradnicu 0. Ak je množina jednoprvková a delenie niektorých iných ešte pokračuje, dostane v každej ďalšej dimenzii súradnicu 1. Ak má kocka viac dimenzií ako je potrebných, aby obsiahla všetkých m vrcholov podgrafu, tak môžu dostať tieto vrcholy v týchto zvyšných dimenziách ľubovoľné súradnice, ale pre všetky vrcholy musí byť súradnica v každej z týchto dimenzií rovnaká. Tým sme zistili súradnice vrcholov vo všetkých dimenziách, podľa ktorých podgraf delíme. Pre účely tejto vety na súradniciach ostatných dimenzií nezáleží a môžu byť ľubovoľné. \square

Lema 31. *Pri delení z vety 30 vedie medzi množinami vrcholov M_1 a M_0 , ktoré vznikli rozdelením jednej množiny M podľa tohto delenia, práve toľko hrán, ako je mohutnosť menšej z týchto množín. Pričom, ak má kocka viac dimenzií ako je potrebných, aby obsiahla všetkých m vrcholov podgrafu, tak môžu dostať tieto vrcholy v týchto zvyšných dimenziách ľubovoľné súradnice, ale pre všetky vrcholy musí byť, na rozdiel od predošlej vety, súradnica v každej z týchto dimenzií rovnaká.*

Dôkaz. Stačí ukázať, že menší z indukovaných podgrfov má vo väčšom izomorfny obraz podľa vety 29. Vtedy vedie z každého vrchola v menšom podgrafe hrana do nejakého vrchola vo väčšom podgrafe a týchto hrán je presne toľko, koľko je vrcholov menšieho podgrafu. Teda potrebujeme dokázať, že vo väčšom podgrafe existuje skupina vrcholov, ktorej budú súradnice v dimenziách pridelené rovnako ako vrcholom v menšom podgrafe. Pridelovanie súradníc je deterministické, teda rovnako veľkým množinám vrcholov v rovnakej fáze budú popridelované súradnice vo zvyšných dimenziách rovnako. Na menší a väčší podgraf sa rozdelia grafy s nepárnym počtom vrcholov. Použijeme

úplnú indukciu. Báza indukcie bude množina veľkosti tri. Menšie podgrafy sú už len veľkosti dva a jedna. Jednovrcholový sa už ďalej nedelí a dvojvrcholový sa rozdelí na dva jednovrcholové. Predpokladáme, že pre delenie množín s mohutnosťou menšou ako n platí veta. Dokážeme, že potom musí platiť aj pre množinu M mohutnosti n : Ak je n párne, dá sa množina rozdeliť na dve množiny rovnakej mohutnosti, ktorých vrcholom sa zvyšné dimenzie poprikladujú rovnako. Teda každý vrchol v jednej bude mať iný vrchol v druhej množine s ktorým sa bude líšiť v práve jednej dimenzii a to v tej podľa ktorej sme M rozdelili. Ak n je nepárne, vzniknú dve množiny M_1, M_2 . Obe z nich už podľa IP spĺňajú tvrdenie vety. Rozdelia sa každá na dve množiny, pričom z množiny s párnou mohutnosťou vzniknú dve rovnako veľké množiny M_{11}, M_{12} a množina M_{21} tejto veľkosti vznikne aj z množiny s nepárnou mohutnosťou. Druhá množina M_{22} z tejto množiny bude mať o prvok viac alebo menej. Prvé tri množiny sa už budú deliť rovnako, teda viem povyberať trojice vrcholov, každý z inej množiny, ktoré budú mať vo zvyšných dimenziách rovnaké súradnice. Medzi dvomi vrcholmi z M_{11}, M_{12} , označme ich m_{11}, m_{12} , povedie hrana, lebo sa líšia práve v jednej dimenzii. Tretí vrchol, označme ho m_{21} bude spojený hranou s niektorým z tých dvoch, pretože pri druhom delení jeden z nich dostal rovnakú súradnicu ako on v dimenzii druhého delenia a teda sa líšia iba v dimenzii prvého delenia množiny M . Ak je prvok m_{21} spojený s prvkom z M_{22} , označme ho m_{22} , potom je m_{22} spojený aj s tým prvkom z dvojice m_{11}, m_{12} , s ktorým nie je spojený m_{21} . Prvok m_{22} neexistuje iba vtedy, ak $|M_{22}| < |M_{21}|$. Ak $|M_{22}| > |M_{21}|$ potom v M_{22} majú všetky vrcholy z M_{21} izomorfný obraz a teda aj príslušná časť z párnej množiny. Z horeuvedeného vyplýva, že menšia množina z prvého delenia má obraz, izomorfný a spĺňajúci podmienky vety 29, vo väčšej množine vzniknutej z tohto delenia a keďže medzi vzorom a obrazom vedie hrana, veta platí. \square

Lema 32. *Maximálny počet hrán, ktoré môžu viesť v podgrafe hyperkocky indukovanom m bodmi je daný postupnosťou a_m , kde $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; a pre $\forall i < 2$; $a_i = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + a_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} + a_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}$*

Dôkaz. V dôkaze použijeme úplnú indukciu. Báza indukcie je očividná: hyperkocka nemá slučky a teda v jej jenovrcholovom indukovanom grafe nevedie hrana a hyperkocka nemá násobné hrany, teda v jej indukovanom dvojvrcholovom podgrafe môže viesť najviac jedna hrana. Predpokladáme, že pre všetky členy s indexom menším ako m platí, že udávajú najväčší možný počet hrán v indukovanom podgrafe hyperkocky zo všetkých množín jej bodov, ktorých mohutnosť je rovná indexu daného člena postupnosti. ďalej predpokladáme, že pre každého člena postupnosti s menším indexom platí tvrdenie vety. Ukážeme, že existuje indukovaný podgraf hyperkocky s m bodmi s najvyšším možným počtom hrán G taký, ktorý niektorá dimenzia delí na polovice G_1 a G_2 , teda na množiny vrcholov, ktorých mohutnosti sa líšia najviac o jedna. To vyplýva z toho, že neexistuje taký podgraf hyperkocky, ktorý by delila inak a mal by

zároveň vyšší počet hrán. Nech taký podgraf G' existuje. Potom ho vybraná dimenzia delí na podgrafy s počtom bodov a_i, a_j . Keďže sú obe neprázdné, sú menšie ako m a teda pre ne platí indukčný predpoklad. $a_i = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + a_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} + a_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}$ a $a_j = \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + a_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} + a_{\lceil \frac{j}{2} \rceil}$. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $i < j$. Aby sme zjednodušili indexovanie označme $a_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} = a_{i1}; a_{\lceil \frac{i}{2} \rceil} = a_{i2}; a_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} = a_{j1}$ a $a_{\lceil \frac{j}{2} \rceil} = a_{j2}$. Je zrejmé, že $a_{i2} - a_{i1} \leq 1$ a $a_{j2} - a_{j1} \leq 1$. Ak teda rozdelíme G podľa dimenzie, ktorá ho delí na G_1 a G_2 , ich mohutnosti budú bez ujmy na všeobecnosti $a_{i2} + a_{j1}; a_{j2} + a_{i1}$. Z IP zároveň platí, že G_1 a G_2 majú aspoň tak dobré rozdelenie ako na množiny veľkostí a_{i2}, a_{j1} respektíve a_{j2}, a_{i1} . Počet hrán, ktoré vedú vo podgrafe G' je teda $a_{m'} = i + \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + a_{i1} + a_{i2} + a_{j1} + a_{j2}$. Je zrejmé, že menšia z množín na ktoré sa rozdelí G bude mať veľkosť $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ a v týchto podmnožinách vedie aspoň $a_{i1} + a_{j2} + \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ respektíve $a_{j1} + a_{i2} + \lceil \frac{i}{2} \rceil$ hrán. Čiže $a_m \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + a_{i1} + a_{j2} + \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + a_{j1} + a_{i2} + \lceil \frac{i}{2} \rceil$. Z toho si ľahko ukážeme, že $a_m \geq a_{m'}$. $a_m - a_{m'} \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lceil \frac{i}{2} \rceil - i - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ a keďže $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor \geq \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ potom platí, že $a_m - a_{m'} \geq 0$. Tým sme dokázali, že neexistuje lepšie rozdelenie podgrafu hyperkocky indukovaného m vrcholmi ako rozdelenie na polovice. Z predošlých viet vyplýva, že takéto rozdelenie je možné. \square

Dôkaz. Zoberme jednu takúto dimenziu a rozdelme body na dve množiny, podľa toho, či v nej majú 1 alebo 0. Platia dve veci: medzi týmito dvomi množinami vedie najviac toľko hrán, koľko má menšia z nich vrcholov; v iných dimenziách už medzi týmito vrcholmi hrany nevedú. Prvá vec vyplýva z toho, že každý vrchol má v jednej dimenzii najviac jednu hranu (pri nekompletnej hyperkocke, pri kompletnej práve jednu). Druhá vyplýva z toho, že hrana spája vrcholy, ktoré sa líšia práve v jednej súradnici a vedie v dimenzii tejto súradnice. Ak by mala viesť medzi týmito dvomi množinami hrana v nejakej inej súradnici, musela by spájať vrcholy, ktoré sa líšia v najmenej dvoch súradniciach (v tej ktorá rozdeľuje vrcholy na dve množiny a v tej v ktorej vedie táto hrana), čo nemôže.

Na tieto dve množiny sa teda môžeme pozrieť na každú zvlášť a znova ich deliť podľa ďalších súradníc až kým sa nerozpadnú na jednovrcholové množiny. Najväčší možný počet hrán vedúcich v tejto množine vrcholov je ohraničený zhora sumou veľkosti menších množín cez všetky takéto delenia.

Toto ohraničenie získame spätne. Na konci máme m izolovaných vrcholov. Ako mohli byť pospájané tak, aby medzi nimi viedol najväčší možný počet hrán? Začnime s m izolovanými vrcholmi. V každom momente je jasné, že nech sa najmenšia množina odrezala od ľubovoľnej inej, rátal sa ako maximálny počet hrán mohutnosť tejto množiny. Počet delení množín je konštantný, na čo sa dá ľahko použiť klasický príklad s lámaním čokolády na m kúskov. Horné ohraničenie počtu hrán vedúcich v množine bodov získame ako súčet minimál cez všetky delenia. Pozrime sa na dve naj-

menšie množiny v ľubovoľnej fáze delenia a pozrime sa na ne odspodu, tj. pri spätnej konštrukcii delenia z konečných jednovrcholových množín - teda na ich postupné spájanie. Tvrdíme, že ľubovoľné spájanie nie je lepšie ako spojenie dvoch najmenších množín. Sporom, nech existuje také najlepšie spájanie, ktoré nespája dve najmenšie množiny a súčet jeho minim je ostro väčší ako takého, ktoré ich spája.

- TODO lema

Lema 33. *Majme množinu množín vrcholov, označme ju M . Nech existuje taká postupnosť spájania týchto množín, ktorého súčet bude najvyšší možný. Nech sa v ňom nenachádza spojenie najmenšej množiny s inou v prvom kroku, ukážeme že existuje poradie, kde sa nachádza o krok skôr, ktoré je aspoň také dobré alebo pôvodné nie je najlepšie.*

Dôkaz. Ak sa najmenší prvok spája s množinou, ktorá bola v M , vieme spojenie minima s ňou presunúť do úplne prvého kroku spájania. Ak sa spája s množinou, ktorá vznikla spojením dvoch množín, premiestnime krok pripojenia minima hneď za krok pri ktorom táto množina vznikla. Označme množiny z ktorých táto množina vznikla A, B a mohutnosť minima označme C , $|A| = a$; $|B| = b$; $|C| = c$. Bez ujmy na všeobecnosti $a \leq b$. Spájanie nebolo optimálne, lebo v jeho súčte sa nachádza $c+a$, keby sa však spojila najprv množina A s C tak by bol celkový súčet väčší, lebo by obsahoval buď $c+b$ alebo $c+(a+c)$.

□

Každý vrchol je 0-rozmernou kockou sám o sebe. Všetky hrany, ktoré medzi nimi môžu viesť v prvej dimenzii, v druhej, tretej atď. ... TODO výde z toho hyperkocka a elegantnejšie ako predtým :) – stále sa mi to mezda dokázané, že iný výber vrcholov nedá viac hrán ...

Treba maximalizovať počet dvojíc lísiacich sa v práve jednej dimenzii ... V každej dimenzii má vrchol max jednu hranu

To že medzi vrcholmi vedie hrana znamená, že sú spolu v nejakej hyperkocke. V čím väčšej sú, tým viac hrán z nich ide.

Ukážeme že maximalizácia n -rozmerných kociek maximalizuje počet $n-1$ rozmerných. Vezmeme najväčšiu maximálnu disjunktnú množinu $n-1$ rozmerných kociek. Aké je poprepájanie týchto kociek hranami pri ktorom je najviac $n-1$ rozmerných kociek?

Ak vedie hrana medzi vrcholmi a tieto sú spojené každý hranami rovnakej dimenzie s inými dvomi vrcholmi, vedie hrana aj medzi týmito dvomi vrcholmi. Je to dané tým, že ak odstránime dimenziu v ktorej vedie hrana, tieto vrcholy sa zobrazia na seba.

Kocka vyššej dimenzie vznikne, ak spojíme dve $n-1$ rozmerné kocky hranami podľa nejakého izomorfného zobrazenia dostaneme n -rozmernú kocku, ktorá má n choosen $- 1$

$n-1$ rozmerných kociek.

□

Izolované vrcholy \rightarrow jednorozmerné kocky \rightarrow dvojrozmerné kocky \rightarrow ... vždy dve spojíme na jednu s vyšším rozmerom ...

Čiže trade-off medzi počtom značiek a pohybov ... stačí jedna návšteva vrcholu ... otvorí pri nej všetky porty ... počet značiek = počet mimokostrových (portových) hrán ...

Čím vyššia dimenzia kocky, tým je menej kostrových hrán oproti portovým \rightarrow stačí menej pohybov na použitie daného množstva značiek.

Ak vrcholov nie je presne toľko, ako v nejakej n -rozmernej kocke tj. 2^n tak ich vyberáme z vrcholov najmenšej kocky s väčším počtom vrcholov tak, že vezmeme vrcholy nejakej $(n-1)$ rozmernej kocky, ktorá je jej podgrafom, v ďalšom kroku zvyšok vrcholov vyberieme z ešte nepoužitých tak, aby tvorili kocku čo najväčšej dimenzie a tak ďalej, kým nevyberieme všetky vrcholy. Každá n -rozmerná kocka sa dá rozdeliť na dve disjunktné $(n-1)$ -rozmerné kocky. Každý vrchol takejto kocky je spojený s práve jedným vrcholom z druhej kocky. Agent teda vždy nájde kocku ktorá je najmenšia taká, že má viac vrcholov. Jednu z týchto kociek pokryje a zvyšné vrcholy umiestni do druhej kocky rekurzívnym spôsobom.

Týmto sme vyriešili hľadanie postupnosti k vrcholov s najväčším počtom hrán medzi nimi. Teraz treba zistiť, ako veľká musí byť množina značiek potrebná na konštrukciu týchto hrán. Ak má agent minúť čo najmenej značiek pri tvorbe portových hrán, treba aby ostali porty otvorené čo najkratšie - čas meriame pohybmi agenta.

Počet značiek, ktoré agent potrebuje pre konštrukciu n -rozmernej kocky je suma dva na i minus jedna pre i od jedna po n . (po konštrukcii jednej kocky ostávajú otvorené porty do druhej a agent potrebuje rovnaký počet značiek ako na predošlú ... - lenže postupne sa uvoľňujú) pozn. bude to teda asi \sum portov pre štvrtinovú kocku + dva na i minus jedna

1.3.1 2-rozmerná kocka

Elementárny prípad. Stačí jedna portová značka a tri pohyby - operácie NH.

1.3.2 3-rozmerná kocka

1 značka Pri použití jednej značky na porty vie agent trojrozmernú kocku zostrojiť na 15 pohybov: OP, NH, NH, NH, OP, OP, S1, NH, NH, OP, OP, S2, S2, NH, OP, OP, S1, S1, NH, OP, OP, S1, S2, S3, OP. Na menej sa to nedá. Agent potrebuje skonštruovať 5 mimokostrových hrán a na každú potrebuje aspoň 3 pohyby.

2 značky Trojrozmernú kocku pri použití dvoch značiek na porty dokáže agent zostrojiť na 11 pohybov a menej sa nedá. Operácie agenta: OP1, NH, NH, OP2, NH, OP1, NH, OP1, NH, OP2, NH, OP2, NH, OP1, OP1, S1, S1, S2, OP1, S1, OP2 Na menej sa nedá, pretože porty treba otvoriť medzi dvojicou vrcholov líšiacich sa v práve jednej súradnici. Teda medzi otvorením portov jednej hrany potrebuje agent aspoň dve preklopenia na rovnakej súradnici a jedno na inej. Vie využiť najviac jedno preklopenie, ktoré nastalo pri konštrukcii predošlej hrany, čiže na konštrukciu hrany potrebuje najmenej dva ďalšie pohyby. Na konštrukciu prvej hrany potrebuje tri pohyby.

$$3 + 2 * 8 = 11$$

3 značky Trojrozmernú kocku agent za použitia troch portových značiek zostrojí na 9 pohybov. Na menej sa nedá. Operácie agenta: OP1, OP3, NH, NH, OP2, NH, OP1, NH, OP1, NH, OP2, NH, OP2, NH, OP1, OP3, S3(?), S1, OP2 S použitím menšieho množstva pohybov to agent urobiť nemôže. Kým vznikne prvá portová hrana - značka sa uvoľní na ďalšie použitie, vytvorí agent tri nové vrcholy. Teda je vo štvrtom vrchole. Súčet stupňov predošlých troch je deväť, z čoho päť zaberú nové hrany. To znamená, že do jedného z týchto vrcholov sa agent bude musieť vrátiť otvoriť port alebo z neho vytvoriť novú hranu. Keby tento vrchol bol tretí podľa vzniku, tak sa doň agent môže vrátiť na jeden ťah. Tu môžu nastať dve možnosti: pôjde tam otvoriť port alebo vytvoriť novú hranu. Ak otvoriť port, bude mu chýbať značka na štvrtom vrchole podľa vzniku a bude sa musieť vrátiť aj do neho. Ak otvorí port s novouvolnenou značkou na štvrtom vrchole a z tretieho urobí NH. Ocitne sa vo vrchole v ktorom nemôže otvoriť port, lebo sa nelíši v práve jednej súradnici od žiadneho z vrcholov v ktorých sú porty pootvárané. Teda v oboch prípadoch potrebujem ďalšie dva pohyby, ktoré nie sú operáciou NH. Ak sa agent nevráti hneď do vrchola, v ktorom neotvoril port, bude musieť prejsť do niektorého z jeho dvoch susedov (lebo z nich už odišiel a z iného vrchola sa tam nedostane). To sú dva pohyby okrem operácií NH. Počet operácií NH je konštantný pre daný graf a rovná sa počtu hrán kostry. V tomto prípade je to sedem. Teda agent vybavený tromi rôznymi značkami na porty potrebuje aspoň deväť krokov na konštrukciu trojrozmernej kocky.

4 značky 4 rôzne značky portov agentovi na konštrukciu trojrozmernej kocky stačia: OP1, OP2, NH, OP3, NH, OP4, NH, OP1, NH, OP1, NH, OP4, NH, OP3, NH, OP2, OP1 Agent vzkoná sedeme pohybov, čo je nevyhnutné minimum na konštrukciu trojrozmernej kocky. Pridanie ďalších značiek už teda nič nevylepší.

1.3.3 4-rozmerná kocka

1 značka Ak chcem skonštruovať portové hrany použitím troch pohybov na hranu a žiadne ďalšie pohyby, tak musím vo vrchole, kam otvorením portu vznikne nová portová hrana, otvoriť port znovu. Portové hrany teda budú tvoriť súvislý ťah.

Všetkých hrán v štvorrozmernej kocke je 32, pričom kostrových je 15. Portových hrán je teda 17. Sled portových hrán sa nemôže pretínať, pretože nemôže existovať vrchol do ktorého nevedie kostrová hrana a každý vrchol má stupeň 4. Keďže stupeň vrcholov je párny, kostru treba zostrojiť tak, aby dva z nich mali nepárny stupeň a zvyšné párny. Čo je nutná podmienka zostrojenia jediného ťahu zo všetkých zvyšných hrán. Kostra má aposť dva listy a stupeň listov je nepárny. Ak teda kostra nemá mať väčší počet listov, musia mať zvyšné vrcholy stupeň dva. Kostra je teda cesta. Ukážeme, že nie je možné zostrojiť štvorrozmernú kocku na $3 * 17 = 51$ pohybov. Vrcholy v ktorých kostra-cesta začína majú tri portové hrany. Aby sme použili len tri pohyby na jednu portovú hranu, potrebujeme začať portové hrany konštruovať v jednom z týchto vrcholov. v týchto vrcholoch začína aj cesta-kostra. Keďže kostra vzniká tak, že na už existujúcim vrchole vykoná agent operáciu NH, v každom momente je práve jeden vrchol v ktorom môže byť agent, ak má skonštruovať graf na 51 pohybov. Tým však, že agent odišiel z prvého vrchola a tomu chýbajú ešte dve hrany, sa doň bude musieť vrátiť a otvoriť v ňom port. V konštruovanom grafe (medzivýsledku) sa však agent od prvého vrchola vzdaluje každou portovou hranou. Pri skonštruovaní posledného vrchola bude teda od prvého v medzivýsledku konštrukcie ďalej ako tri a teda nie je schopný skonštruovať graf týmto spôsobom. Vrchol do ktorého ide agent konštruovať portovú hranu musí byť v medzivýsledku vzdialený práve tri od druhého vrchola s otvoreným portom a súčasne sa musí líšiť v práve jednej dimenzii. Pri tomto postupe žiadny takýto vrchol k poslednému skonštruovanému vrcholu v momente otvorenia portu nie je a jediný, ktorý sa tak dá vytvoriť je pomocou prechodu po novej portovej hrane a dvoch opráciách NH, alebo po troch opráciách NH. Ak použije prvý spôsob, kým sa dá, dostane sa do bodu z ktorého sa už tento nedá uplatniť a už nebude schopný skonštruovať ďalšiu hranu na tri pohyby. Pri použití druhého spôsobu z inicializačného vrchola trikrát sa dostane agent do situácie, kedy je od inicializačného vrchola vzdialený na medzivýsledku o tri hrany a zároveň sa ich polohy líšia v práve jednej dimenzii. Takže agent môže skonštruovať zvyšné dve hrany pre inicializačný vrchol. (TODO mohol by to urobiť aj neskôr, ale nejde to, lebo štvorrozmerná kocka má len 15 vrcholov a už by mu nevydalo vytvoriť tri portové hrany pomocou oprácií NH) Keď má agent z vrcholu vytvoriť portovú hranu a odchádza z neho opráciou NH, odíde po jednej dimenzii a portová hrana sa otvorí v druhej. Teda vytvorí hrany v dvoch dimenziách vrcholu. Po skonštruovaní prvej portovej hrany má vrchol v ktorom agent skončí ešte "voľné" dve

dimenzie. Z jednej má ísť portová hrana a z druhej kostrová. Teda po jednej agent odíde a v druhej sa po troch pohyboch bude líšiť. Rovnaká situácia nastane po vytvorení druhej portovej hrany. Tretia portová hrana musí mať rovnakú dimenziu ako prvá, aby sa agent po jej konštrukcii líšil s inicializačným vrcholom v práve jednej dimenzii. štvrtá portová hrana je teda tiež daná. Dimenzie sú navzájom zameniteľné, takže na ich výbere nezáleží. (TODO Začiatok konštrukcie štvorrozmernej kocky je deterministický - možno je celá konštrukcia ...)

Literatúra