

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

KONŠTRUKCIA GRAFOV POMOCOU MOBILNÝCH
AGENTOV

Diplomová práca

2014

Bc. Jakub Kováč

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

KONŠTRUKCIA GRAFOV POMOCOU MOBILNÝCH AGENTOV

Diplomová práca

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: 2508 Informatika
Školiace pracovisko: Katedra Informatiky
Školiteľ: prof. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.

Bratislava, 2014

Bc. Jakub Kováč

Obsah

1	Úvod	1
2	Grafy	3
2.1	Základné pojmy a definície	3
2.1.1	Graf	3
2.1.2	Značenia v grafe	3
2.2	Vybrané triedy grafov	4
2.2.1	Úplný graf	4
2.2.2	N-partitný graf	4
2.2.3	Hyperkocka	4
2.2.4	Mriežka	5
2.2.5	Kubický graf	5
2.3	Agent	5
3	Grafové gramatiky	6
3.1	Úvod	6
3.2	Definície	6
3.2.1	NLC gramatiky	6
3.2.2	NCE	7
3.3	Výsledky	8
4	Prehľadávanie grafu	9
4.1	Tu bude Úvod	9
4.2	Definície	11
4.3	Výsledky	11
5	Konštrukcia grafu pomocou mobilného agenta	12
5.1	Všeobecné pravidlá pre agenta	12
5.1.1	Obmedzenia agenta	12
5.1.2	Metriky	14

5.2	Definície	14
5.2.1	agent	14
5.2.2	Definície metrík	14
5.3	Algoritmy na vybraných triedach	15
5.4	15
Všeobecná konštrukcia		15
6	Všeobecná konštrukcia	16
6.1	Definícia	16
6.1.1	Jedna značka pre porty	19
6.1.2	Dve a viac značiek pre porty	20
6.2	Mriežka	21
6.2.1	Jedna značka pre porty	21
6.3	N-rozmerná kocka	28
6.3.1	2-rozmerná kocka	37
6.3.2	3-rozmerná kocka	37
6.3.3	4-rozmerná kocka	38
Literatúra		41

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Kapitola 1

Úvod

Graf je vhodnou reprezentáciou údajov potrebných na riešenie mnohých problémov. V tomto smere našiel široké uplatnenie aj v informatike a oblastiach matematiky, ktoré sú s ňou úzko späté. My sa budeme zaoberať pojmom graf tak, ako je chápaný v Teórii grafov. V našom ponímaní je graf abstraktnou štruktúrou obsahujúcou vrcholy a hrany. Pričom každá hrana má práve dva konce - vrcholy, ktoré spája. Ak rozlišujeme počiatočný a koncový vrchol pri hranách grafu, hovoríme, že hrany sú orientované. Ak sú počiatočný a koncový vrchol hrany totožné, hovoríme, že táto hrana je slučka. Hrana vedie medzi počiatočným a koncovým vrcholom. Ka medzi niektorou dvojicou vrcholov vedie viacero hrán, hovoríme, že tieto hrany sú násobné. V rámci Teórie grafov sa skúmajú grafy z rôznych pohľadov a riešia sa na nich najrôznejšie úlohy. My sa budeme zaoberať grafmi bez slučiek, orientovaných a násobných hrán. Grafy boli na základe vybraných vlastností roztriedené do viacerých tried. Roztriedenie grafov medzi jednotlivé triedy umožnilo pozrieť sa na konkrétne prípady mnohých problémov pre ktoré nebolo známe všeobecné riešenie a dosiahnuť aspoň čiastočné výsledky. Taktiež to umožnilo optimalizovať všeobecné algoritmy a dosiahnuť na špecifickejších vstupoch rádovo lepšiu časovú náročnosť výpočtu.

Medzi významné problémy týkajúce sa grafov patria problémy ich konštrukcie a prehľadávania. V súčasnosti sa problému konštrukcie grafov venuje takmer výlučne teória grafových gramatík. Tento prístup používa podobné prostriedky a postupy ako známejšia teória formálnych jazykov a automatov s tým rozdielom, že grafové gramatiky sa týkajú grafov a sú teda o dosť zložitejšie. Napríklad pojem bezkontextovej grafovej gramatiky má viacero rozdielnych prirodzených interpretácií. V tejto teórii sa vyvinulo viacero prístupov a skúmaných modelov. Ďalším spomínaným problémom týkajúcim sa grafov je problém ich prehľadávania. V rámci teórie prehľadávania grafov sa skúmajú viaceré modely. Väčšina z nich má však spoločný základ. Týmto základom je entita nazývaná agent prípadne robot, automat atď., ktorá sa pohybuje po vrchoch

daného grafu a jeho úlohou je tento graf prehľadať. Jednotlivé modely sa môžu líšiť vo viacerých vlastnostiach. Medzi najdôležitejšie z nich patrí vlastnosti agenta i spôsob jeho pohybu po grafe, vlastnosti grafu a definícia pojmu prehľadať. Prehľadanie grafu môže znamenať navštíviť každý vrchol grafu, ale tiež prejsť po každej hrane. Taktiež je dôležité, aké informácie získa agent o svojom okolí pri návšteve niektorého vrchola. Môže napríklad vidieť všetky vrcholy spojené hranou alebo len lokálne čísla portov. Naša práca skúma možnosti konštrukcie grafov pomocou mobilných agentov. Spája teda obe bližšie spomínané teórie. Teórie grafových gramatík sa týka v tom, že sa tiež zaoberá konštrukciou grafov. S prehľadávaním grafu pomocou agentov má spoločného viac. Ide totiž o akýsi duálny problém. Pri prehľadávaní ide často o získanie akejsi mapy neznámeho grafu a v našej práci sa naopak zaoberáme konštrukciou grafu pri znalosti mapy. V prvom prípade teda máme graf a chceme mapu, kdežto v druhom máme mapu a chceme graf. Keďže problém konštrukcie grafov pomocou mobilných agentov nebol dosiaľ skúmaný, zvolili sme si na skúmanie jednoduchý model. Na ňom sme skúmali možnosti konštrukcie grafov z jednotlivých tried. Zvlášť sme sa venovali skúmaniu konštrukcie hyperkocky a tried grafov $P_n \times P_m$ i $C_n \times C_m$. Výsledky na týchto triedach nájdete v hlavných kapitolách práce. Náš model sa skladá z agenta nachádzajúceho sa v počiatočnom vrchole grafu, ktorý ide konštruovať. Tento agent môže vždy vykonať jednu z troch možných operácií. Agent pozná lokálne značenie koncov hrán - portov vo vrchole, v ktorom sa nachádza. Toto značenie je dané poradím ich vzniku a agent nemá možnosť ho meniť. Operácie, ktoré môže agent vykonať, sú: otvorenie portu s danou značkou, prejdienie po hrane s lokálnou značkou portu k i vytvorenie novej hrany do dosiaľ neskonštruovaného vrchola; v ktorom sa agent vzápätí ocitne. K vlastnostiam modelu tiež patrí, že v momente, keď sú otvorené dva porty s rovnakou značkou, vznikne medzi nimi hrana. Krok agenta sme si definovali ako zmenu vrchola, v ktorom sa agent nachádza. Skúmali sme aký minimálny počet krokov agenta je potrebný na konštrukciu daného grafu pri rôzne veľkých množinách značiek, ktoré má agent k dispozícii.

Kapitola 2

Grafy

2.1 Základné pojmy a definície

2.1.1 Graf

Graf sa dá vo všeobecnosti charakterizovať ako diagram obsahujúci body - vrcholy a čiary, ktoré ich spájajú - hrany. Hrana je úsek spojitej krivky začínajúci a končiaci v bode. Pričom väčšinou vyžadujeme, aby medzi dvomi vrcholmi viedla najviac jedna hrana. O vrcholoch, medzi ktorými hrana vedie, hovoríme, že sú s ňou incidentné. Niektoré definície povoľujú aby hrana začínala a končila v tom istom vrchole; takúto hranu nazývame slučka. Pokiaľ vedie medzi dvoma vrcholmi viac hrán, hovoríme o násobných hranách. Striktné definície grafu nepovoľujú násobné hrany a slučky a ani my sa nimi nebudeme zaoberať.

Na reprezentáciu vrcholov sa používajú prvky množiny a hrana je v množine hrán reprezentovaná dvojicou vrcholov, ktoré spája. Teda na množine vrcholov predpokladáme ľubovoľné úplné usporiadanie. Toto zabezpečí, aby medzi dvomi vrcholmi viedla najviac jedna hrana.

Definícia 1. Graf G je usporiadaná dvojica (V, E) , kde

$$E \subseteq V \times V$$

Vrcholy označujeme malými písmenami prevažne z konca latinskej abecedy (okolo písmena v). Hrany označujeme malými písmenami zo začiatku latinskej abecedy (okolo písmena e) alebo ako dvojicu vrcholov, ktoré spája a platí $(u, v) \equiv (v, u)$.

2.1.2 Značenia v grafe

Ďalej si zavedieme rôzne značenia - zobrazenia do množín značiek. Značenia používajú najmä na reprezentáciu rôznych vlastností prvku reprezentovaného daným vrcholom

grafu alebo vzťahu reprezentovaného hranou. V našej práci budeme značiť najmä konce hrán.

Definícia 2. Značenie f (mapping) je zobrazenie z množiny objektov O (zobrazovaná množina) do množiny značiek Z .

$$f : O \rightarrow Z; \forall o \in O \exists z \in Z : f(o) = z$$

Definícia 3. Značenie konca hrán je značenie kde zobrazovanú množinu tvoria dvojice pozostávajúce z vrcholu a a s ním incidentnej hrany.

2.2 Vybrané triedy grafov

Následne si zadefinujeme triedy grafov, ktorými sa budeme bližšie zaoberať a ďalšie potrebné pojmy z teórie grafov použité v tejto práci.

2.2.1 Úplný graf

Definícia 4. Úplný graf $G = (V, E)$ je graf v ktorom pre každú dvojicu rôznych vrcholov existuje hrana s ktorou sú oba incidentné.

tj. $\forall u, v \in V \exists e \in E : e = (u, v)$, kde $u \neq v$

ozn. $G \equiv K_n$; $n = |V|$

2.2.2 N-partitný graf

Definícia 5. N -partitný graf $G = (V, E)$ je graf v ktorom sa dá množina vrcholov V rozdeliť na n neprázdnych disjunktných podmnožín - partícií, ktoré ju pokrývajú a zároveň pre každú z nich platí, že neobsahuje dvojicu vrcholov incidentných s rovnakou hranou, teda ľubovoľná hrana je incidentná najviac s jedným vrcholom tejto množiny.
ozn. Pre 2-partitný graf sa zaužívalo pomenovanie bipartitný.

Definícia 6. Úplný n -partitný graf $G = (V, E)$ je graf v ktorom pre každú dvojicu vrcholov, ktoré nie sú v rovnakej partícii existuje v E hrana s ktorou sú oba incidentné.
ozn. K_{a_1, \dots, a_n} , kde a_i je počet vrcholov v i -tej partícii

2.2.3 Hyperkocka

Hyperkocka, inak nazývaná aj n -rozmerná kocka je graf inšpirovaný geometrickým významom svojho názvu. Každému vrcholu v telese zodpovedá vrchol v grafe. Dva vrcholy v grafe sú incidentné s rovnakou hranou vtedy a len vtedy ak medzi vrcholmi v telese, ktoré reprezentujú, vedie hrana.

Definícia 7. *TODO formálne*

2.2.4 Mriežka

Mriežka je graf reprezentujúci diagram mriežku.

Definícia 8. *TODO*

2.2.5 Kubický graf

Definícia 9. *Kubický graf G je graf v ktorom majú všetky vrcholy stupeň tri.*

2.3 Agent

Ďalej si zadefinujeme agenta. Agent je pre nás objekt vykonávajúci určité inštrukcie, majúci určitú výpočtovú silu, určitú pamäť, možnosti akcie a nachádzajúci sa v konkrétnom vrchole grafu. Následne si zadefinujeme agenta s možnosťou meniť vrchol v ktorom sa nachádza a pravidlá pre takúto zmenu.

Definícia 10. *Agent je -ica ... TODO tu bude možno len všeobecný pokec v závislosti od toho, či bude vhodné zjednocovať definície agentov*

Definícia 11. *Mobilný agent je agent, ktorý má v množine pravidiel aj pravidlá na pohyb vo vrcholoch. TODO*

Kapitola 3

Grafové gramatiky

3.1 Úvod

Vzhľadom k tomu, že sa naša práca zaoberá vytváraním grafov a je nutné uviesť ju do širšieho kontextu známych poznatkov, nemohli sme obísť snáď najpoužívanější formalizmus vytvárania grafov - grafové gramatiky. Cieľom tejto kapitoly je uviesť čitateľa do problematiky grafových gramatík počnúc základnými definíciami až po výsledky, ktoré sú pre našu prácu najdôležitejšie. Pri vypracovávaní tejto časti nám boli vo veľkej miere nápomocné práce týkajúce sa grafových gramatík, ktoré boli na našej fakulte vypracované v predošlých rokoch. Predpokladáme, že čitateľ má základné vedomosti z teórie formálnych jazykov a automatov a v prípade nejasností ho dokazujeme na TODO.

3.2 Definície

Keďže je veľká núdza o "slušné" definície a každý si to definuje ako chce, budú tu zatiaľ všetky obstojné definície ktoré nájdem a potom si z nich vyberiem tie, čo budú aj vo finálnej verzii.

3.2.1 NLC gramatiky

NLC (Node Label Controlled) grafové gramatiky sú jedným z najjednoduchších mechanizmov prepisovania grafov. Pravidlá NLC gramatiky sú tvaru $X \rightarrow D$, kde X je značka (label) prepisovaného vrchola a D je dcérsky graf. Pre použitie pravidiel v NLC neexistujú žiadne obmedzenia, teda pravidlo sa môže použiť na ľubovoľný vrchol so značkou X . Spájanie je v NLC lokálne, tj. vrcholy grafu D môžu byť spojené len s tými vrcholmi, s ktorými bol spojený prepísaný vrchol X . O NLC gramatikách, kde odvodenie je nezávislé na poradí použitia pravidiel po hovoríme, že majú Church-Rosserovu

vlastnosť - sú konfluentné (confluent). Vo všeobecnosti NLC túto vlastnosť nemajú a pri použití rovnakej sady pravidiel môžu vzniknúť rôzne grafy.

Definícia 12. *NLC grafová gramatika je 5-tica $G = (\Sigma; \Delta; P; C; S)$ kde $\Sigma - \Delta$ je abeceda neterminálnych znaciiek uzlov a $\Delta (\Delta \subseteq \Sigma)$ je abeceda terminálnych znaciiek uzlov. P je konečná množina NLC pravidiel, C je binárna relácia spojení nad Σ a S je počiatočný graf.*

Definícia 13. *Grafový jazyk generovaný G je $L(G) = \{H \in GR_{\Delta} | S \Rightarrow^* H\}$, kde GR_{Δ} je množina neorientovaných grafov so značkami uzlov v Δ , \Rightarrow reprezentuje jeden prepisovací krok, a \Rightarrow^* reprezentuje odvodenie, t.j. postupnosť prepisovacích krokov.*

3.2.2 NCE

NCE (Neighborhood Controlled Embedding)/TODO skontrolovať význam skratky (alebo sa na vysvetlenie vykašľať ako to robí väčšina článkov grrr)/ grafové gramatiky sú rozšírením NLC grafových gramatík. V NCE mechanizme prepisovania je, na rozdiel od NLC, množina spájajúcich inštrukcií C definovaná pre každé pravidlo zvlášť a NCE gramatika môže k uzlom podgrafu D pristupovať priamo napr. ich očíslovaním. Existujú rôzne rozšírenia NCE gramatík /?TODO?/ edNCE gramatiky sú rozšírením NCE gramatík s dynamickým preznačovaním hrán pri prepisovaní. Písmenko e znamená, že sa budú značiť hrany a písmenko d indikuje použitie orientovaných grafov.

Definícia 14. *Definícia 2.2.1. edNCE grafová gramatika je definovaná ako 6-tica $G = (\Sigma; \Delta; \Gamma; \Omega; P; S)$. Kde Σ je abeceda značiek uzlov, $\Delta \subseteq \Sigma$ je abeceda terminálnych značiek uzlov, Γ je abeceda značiek hrán, $\Omega \subseteq \Sigma$ je abeceda terminálnych značiek hrán, P je konečná množina pravidiel a $S \in \Sigma - \Delta$ je počiatočný neterminál. Pravidlá sú tvaru $X \rightarrow (D, C)$, kde $X \in \Sigma - \Delta$ a $(D, C) \in GRE_{\Sigma, \Gamma}$. Relácia spojení je $C \subseteq \Sigma \times \Gamma \times \Gamma V_H \times in, out$.*

Vo všeobecnosti množinu grafov izomorfných s grafom H budeme značiť $[H]$. Niekedy sa hovorí o H ako „konkrétom“ grafe a o $[H]$ ako „abstraktnom“ grafe.

Definícia 15. *Množinu všetkých konkrétnych grafov nad Σ a Γ značíme $GR_{\Sigma, \Gamma}$ a množinu všetkých abstraktných grafov značíme $[GR_{\Sigma, \Gamma}]$. $GRE_{\Sigma, \Gamma}$ označuje množinu grafov s vnorením nad Σ, Γ . Obyčajný graf môžeme považovať za graf s prázdny vnorením, teda $GR_{\Sigma, \Gamma} \subseteq GRE_{\Sigma, \Gamma}$.*

Definícia 16. *Grafový jazyk generovaný G je $L(G) = \{[H] | H \in GR_{\Sigma, \Omega} \text{ a } sn(S, z) \Rightarrow^* H \text{ pre nejaké } z\}$ (t.j. všetky grafy v odvodení G , ktoré majú terminálne značky hrán aj uzlov).*

Definícia 17. *edNCE gramatika $G = (\Sigma; \Delta; \Gamma; \Omega; P; S)$ je konfluentná (confluent), alebo C-edNCE gramatika, ak pre všetky pravidlá $X_1 \rightarrow (D_1, C_1)$ a $X_2 \rightarrow (D_2, C_2)$ z P , všetky uzly $x_1 \in V_{D_1}$ a $x_2 \in V_{D_2}$, a všetky hrany so značkami $\alpha, \delta \in \Gamma$, platia nasledujúce ekvivalencie: $\exists \beta \in \Gamma : (X_2, \alpha/\beta, x_1, out) \in C_1 \wedge (\lambda_{D_1}(x_1), \beta/\delta, x_2, in) \in C_2 \Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma : (X_1, \alpha/\gamma, x_2, in) \in C_2 \wedge (\lambda_{D_2}(x_2), \gamma/\delta, x_1, out) \in C_1$.*

/TODO Existuje charakterizácia C-edNCE nezávislá na gramatikách pomocou Monadic Second Order (MSO) logiky. Vela výsledkov ju pre jednoduchosť využíva v dôkazoch.

TODO/

/? TODO regulárne grafové gramatiky TODO ?/

3.3 Výsledky

Zaujímajú nás predovšetkým výsledky týkajúce sa "náročnosti" generovania grafov, ktoré je možné porovnávať s výsledkami nášho prístupu.

Kapitola 4

Prehľadávanie grafu

Jednou zo skúmaných otázok o našom prístupe ku konštrukcii grafu je otázka či a v akej miere sa jedná o duálny problém k prehľadávaniu grafu. V tejto kapitole uvádzame čitateľa do problematiky prehľadávania grafu, príslušných definícií a pre nás zaujímavých výsledkov.

4.1 Tu bude Úvod

<TODO> Zatiaľ je tu všetok prehľad, potom to porozhadzujem.</TODO>

Ako uvádza /TODO cit. Online Graph Exploration ... Nicole Megow¹, Kurt Mehlhorn¹, and Pascal Schweitzer² .../ v problémoch prehľadávania má agent zostrojiť kompletnú mapu grafu (prostredia) bez akejkoľvek počiatočnej a priori informácii o topológii. Tento článok sa zaoberá problémom prehľadávania na neorientovaných spojitých grafoch s hranami ováňovanými nezápornými reálnymi číslami a označenými (labeled) vrcholmi (agent ich vie rozlíšiť). Efektivita online algoritmov sa zisťuje ich porovnávaním s príslúchajúcimi offline riešeniami. V tomto prípade je príslúchajúcim offline problémom TSP.

/TODO pozrieť zdroje článku/ Medzi súvisiacimi prácami spomína: prvý formálny model na prehľadávanie grafu [27]. Prvý raz bolo skúmané prehľadávanie celého grafu v [10] avšak uvažovali preskúmanie každej hrany v označenom orientovanom grafe. Teda, keď agent prišiel do vrcholu, dostal počet neobjavených hrán odchádzajúcich z vrcholu ale už nie kam vedú. Zodpovedajúcim offline problémom pre tento problém však nie je TSP ale polynomiálne riešiteľný Chinese postman problem. (/TODO/ Takéto zadanie má bližšie aj k nášmu prvotnému poňatiu problému konštrukcie grafu pomocou jedného mobilného agenta) (/TODO/ je spomínané intenzívne štúdium na orientovaných aj neorientovaných grafoch - pozrieť) /TODO/ Je aj iná trieda problémov, v literatúre označovaných ako online TSP, kde graf je známy dopredu a vrcholy, ktoré majú byť

navštívené sa objavujú postupne. Zodpovedajúci offline problém pre túto triedu problémov je TSP s dátumami uvedenia (release dates).

Ďalší článok /TODO citácia Graph exploration by a finite automaton ... Pierre Fraigniauda,¹ David Ilcinkasa .../ skúma prehľadávanie grafu konečným automatom (robotom). Graf je neoznačený s hranami lokálne označenými v každom uzle. (TODO čo sa ešte viac približuje duálnemu problému nášho poňatia konštrukcie grafu) Úlohou robota je prehľadať každú hranu v grafe bez akejkoľvek predošlej znalosti o veľkosti a topológii grafu. Medzi zaujímavé výsledky tohto článku patrí, že existujú planárne grafy, pre ktoré sa to nedá. V prípade unikátneho značenia hrán a vrcholov môže byť prehľadanie dosiahnuté ľahko. Existujú neznáme prostredia, v ktorých takéto značenie nemusí byť k dispozícii, alebo robot nemusí byť schopný rozlíšiť od seba dva podobné lable. Z tohto dôvodu sa skúma prehľadávanie anonymných grafov; tj. grafov bez unikátne označených hrán a vrcholov. Je len samozrejmé, že bez možnosti rozlíšiť lokálne porty by nebolo možné prehľadať dokonca ani hviezdu s tromi listami. Predpokladá sa teda v každom vrchole označenie portov $1 \dots d$, kde d je stupeň vrchola. Avšak nepožaduje sa žiadna konzistencia tohto značenia. Keďže v mnohých aplikáciách sa požaduje, aby bol robot malé lacné zariadenie, autori článku optimalizujú pamäť. Takže hľadajú robota schopného preskúmať graf danej neznámej veľkosti s tak malou pamäťou, ako je to len možné. Robot s k -bitovou konečnou pamäťou sa modeluje konečným automatom. Je dokázané /TODO/, že konečný automat s konečným počtom kamienkov nedokáže prehľadať každý graf.

Labyrint je šachovnica /TODO/ Z^2 so zakázanými políčkami. Labyrint je konečný. Prehľadávaním labyrintov sa vo veľkej miere zaoberal Budach /TODO/. Prehľadať konečný labyrint znamená, že robot je schopný odísť ľubovoľne ďaleko zo svojej štartovnej pozície pre každú štartovnú pozíciu. Hrany labyrintu sú konzistentne označené svetovými stranami (východ, juh, západ, sever). Rollik [TODO ref. 45] dokázal, že žiadna konečná množina konečných automatov nedokáže prehľadať všetky kubické planárne grafy.

Výsledkom článku /TODO ... Pierre Fraigniauda .../ je veľmi blízke ohraničenie trapu pre K -stavový automat. Trap je graf, ktorý nie je možné celý prehľadať uatomatom bez kamienkov (pebbles). Výsledok článku hovorí, že pre každý K -stavový automat a $d \geq 3$ existuje $K+1$ vrcholový graf s max. stupňom d , ktorý sa nedá prehľadať týmto automatom.

4.2 Definície

4.3 Výsledky

Kapitola 5

Konštrukcia grafu pomocou mobilného agenta

/TODO slušnejšie spracovanie/ Tu začína text samotnej práce

Agent predstavuje v drvivej väčšine prípadov subjekt vykonávajúci nejakú činnosť alebo skupinu činností. Túto činnosť vykonáva podľa určitých algoritmov, majú/ne-majú na neho vplyv vonkajšie podnety a príkazy. Nezriedka ide o skupinu agentov, ktorý môžu ale nemusia byť inštanciami rovnakej triedy. Príkladom použitia agentov sú simulácie ekonomických systémov, v ktorých agenti predstavujú jednotlivých účastníkov trhového mechanizmu. Vo všeobecnosti sa na základe svojich výpočtových obmedzení dajú zaradiť do chomského hierarchie výpočtových modelov z Teórie formálnych jazykov a automatov. V súvislosti s grafmi sa agenti najčastejšie používajú na prehľadávanie (vo význame objavovanie - exploration) a mapovanie grafu, hľadanie čiernych dier v ňom a podobne. Problematika prehľadávania grafu (graph exploration) je v súčasnosti už v značnej miere preskúmaná a preskúmané sú aj rôzne špeciálne prípady a modifikácie. Cieľom našej práce bude preskúmať možnosti využitia agentov na vytváranie grafu. Začneme s čo možno najjednoduchším modelom na najkrajších triedach grafov (kompletný, hyperkocka, mriežka, ...) a budeme si všímať horné a dolné odhady a ohraničenia zdrojov, ktoré agent pri generovaní grafov danej triedy potrebuje vzhľadom na triedu a jej konkrétnu inštanciu.

5.1 Všeobecné pravidlá pre agenta

5.1.1 Obmedzenia agenta

Ako sme už spomínali sila agenta sa bude líšiť podľa obmedzení v závislosti od triedy. Niktoré pravidlá však budú pre všetky triedy (alebo aspoň väčšinu) rovnaké. Sú to

tieto: - agent je v jednom konkrétnom vrchole - agent vidí hrany vychádzajúce z vrcholu (vo väčšine prípadov neorientované) - agent si môže zvoliť po ktorej hrane odíde (ak obmedzenia nehovoria inak) - z pohľadu agenta sa elementy jedného druhu v grafe (hrany, konce hrán, ...) navzájom líšia len značením definovaným buď spôsobom vzniku grafu alebo určeným agentom, teda nemajú žiadne ID - ak agent nevie rozlíšiť ktorú z možností si má vybrať, vyberie si nedeterministicky - agent vo všeobecnosti vie, po ktorej hrane do vrchola prišiel - agent môže značiť každý (zmysluplný) element grafu (najmä hrany, konce hrán, vrcholy) ak obmedzenia nehovoria inak - ak má medzi portmi vzniknúť hrana, vzniká hneď ako sú splnené podmienky - agent má pamäť - agent má algoritmus - ak nie je dané, čo má agent vykonať, nekoná nič

Agent môže vo všeobecnosti a vzhľadom na dané obmedzenia vykonať tieto akcie: - otvoriť port vo vrchole - prejsť po existujúcej hrane do iného vrcholu - vytvoriť hranu z vrcholu, v ktorom je a na jej konci nový vrchol incidentný len s touto hranou, po vykonaní tejto akcie sa agent automaticky nachádza v tomto novom vrchole (ak nie je povedané inak) - označiť, preznačiť, označiť podľa obmedzení hociže na čo vidí z miesta kde sa nachádza -nemôže označiť vrchol "niekde v paži podľa obmedzení môže upravovať značenie hrán buď v incidentnom vrchole alebo pri prechode hranou - ak nie je povedané inak, viditeľnosť agenta sa vzťahuje na daný vrchol, konce incidentných hrán a položmä aj na tieto hrany

Definícia 18. *Agent je -ica /TODO nech sme kompatibilný aspoň s niečím, najprv dáme šancu definíciám z graph exploration/ (chceme aby agent mal variabilnú počiatočnú informáciu určujúcu, aký graf má zostrojiť, napr. o dimenzii hyperkocky ...)*

Definícia 19. *Konfigurácia agenta je dvojica (v, w) kde v je vrchol v ktorom sa agent nachádza a w je konfigurácia výpočtového stroja agenta.*

Definícia 20. *Krok výpočtu agenta je binárna relácia na množine konfigurácií /TODO formálne značenie/ medzi konfiguráciami (v_1, w_1) a (v_2, w_2) ak $v_1 = v_2$ a w_2 patrí do δ - funkcie w_1 výpočtového stroja agenta.*

Definícia 21. *Konfigurácia systému agentov je -ica $(G, M_1, \dots, M_k, n, A_1, \dots, A_n, \dots)$, kde G je graf, M_1 až M_k sú značenia grafu (TODO spresniť asi zahrnúť do definície grafu alebo inak zapuzdriť), n je počet agentov, A_i je konfigurácia i -teho agenta, ...*

Definícia 22. *Dosiahnuteľná konfigurácia agenta ...*

Definícia 23. *Graf skonštruovaný agentom je graf*

TODO umiestnenie nasl. definície

Definícia 24. */TODO/ Kamienok (pebble) je značka, ktorú môže agent položiť do vrchola a zase ju zdvihnúť. (Agent ma k dispozícii multimnožinu značiek zväčša jedného druhu).*

5.1.2 Metriky

Základnou otázkou pri našich modeloch bude, aké grafy vôbec vedia skonštruovať. Ako ďalšia prirodzene vyvstáva otázka, ako sú v tejto konštrukcii dobré. Na to, aby sme to boli schopní určiť, si teraz stanovíme, podľa čoho budeme určovať, ako je ktorý model dobrý. (Aby sme sa mali s čím hrať a robiť trade-of, definujeme si takýchto metrík niekoľko, zo všetkého, čo sa čo i len trochu dá) Podrobne sa stanoveniu metrík venujeme v časti definície.

5.2 Definície

5.2.1 agent

5.2.2 Definície metrík

Prvá metrika, ktorú si zavedieme sa týka potrebného počtu prechodov z vrcholu do vrcholu potrebných na skonštruovanie grafov danej triedy a jeho závislosti od vstupu. Táto metrika meria samotný výpočet a je "známa" až po jeho skončení. Teda nie je to niečo, čo by sme nejakým spôsobom aktívne obmedzovali ani to nevyžaduje žiadne pamäťové alebo iné nároky na agenta (okrem maximálneho počtu dosiahnuteľných konfigurácií bez zacyklenia).

Definícia 25. *Počet prechodov agenta pri konštrukcii /TODO značenie/ je počet krokov výpočtu agenta, v ktorých zmení vrchol v ktorom sa nachádza, ktoré nastali počas konštrukcie grafu.*

Ďalšie metriky sa týkajú obmedzení agenta a sú "známe" pred výpočtom. Najdôležitejšia je výpočtová sila agenta. V tomto prípade si poslúžime rozpoznávacími modelmi z Chomského hierarchie (DKA, PDA, DTS, ...). Ako základným členením si poslúžime už spomínanou Chomského hierarchiou a na jemnejšie delenie môžeme použiť počítanie stavov (v gramatikách neterminálov) a ďalšími používanými metrikami. Obmedzenie na pamäť agenta zahrnieme do výpočtovej sily agenta a budeme ho definovať v rámci stroja.

Definícia 26. */TODO/ Výpočtová sila agenta je určená množinou jazykov, ktoré dokáže rozpoznať výpočtový stroj používaný agentom.*

Ďalšími metrikami budú značenia, ktoré agent môže používať. Teda, či sa porty číslujú za radom ako vznikali, inak deterministicky či nedeterministicky. Taktiež to či môže agent preznačovať porty a akú množinu značiek má k dispozícii, či sú čísla pevne dané od vzniku portu alebo sa menia (napr. podľa poradia kedy boli naposledy navštívené). Tiež obmedzenia na prípadné značenie vrcholov, množinu ich značiek a možnosť preznačovať ich.

Definícia 27. /TODO/ - *značenie je množina dvojíc (objekt, značka) kde objekt \in množina_objektov a značka \in množina značiek - súčasť konfigurácie systému*

Ako už bolo spomenuté vyššie, ak chce agent vytvoriť hranu medzi vrcholmi, ktoré už oba existujú musí v oboch otvoriť porty s rovnakou značkou. Aby boli spojené požadované vrcholy, musí otvoriť porty tak, aby od okamihu otvorenia prvého z nich vrátane nebol, až po otvorenie prislúchajúceho portu v druhom zo spájaných vrcholov, otvorený port v inom vrchole s rovnakou značkou (teda taký, že by medzi ním a týmto vrcholom vznikla hrana a tento port by sa uzavrel). Na množinu značiek s ktorými môže tieto porty otvárať sa vzťahuje ďalšia metrika. Keďže môže byť otvorený naraz len jeden port s danou značkou (v okamihu otvorenia druhého vznikne medzi nimi hrana), táto metrika sa vzťahuje na mohutnosť množiny značiek portov.

5.3 Algoritmy na vybraných triedach

5.4

Kapitola 6

Všeobecná konštrukcia

6.1 Definícia

Definícia 28. Model sa skladá z grafu a agenta. Graf má nemeniteľné lokálne číslovanie koncov hrán vo vrchole, podľa poradia vzniku. Koniec hrany, ktorý vznikol ako prvý, má číslo 1. Prvý koniec vznikne spolu s vrcholom, zvyšné otvorením portu. Počítačový graf obsahuje práve jeden izolovaný vrchol a nič viac. Akonáhle sú otvorené dva porty s rovnakými značkami, vznikne medzi nimi nová hrana a tieto porty tým zaniknú. Agent môže vo vrchole, v ktorom sa nachádza, vykonávať tieto operácie: pohnúť sa po hrane do susedného vrcholu, otvoriť port so značkou, vytvoriť hranu do nového vrcholu v ktorom sa následne ocitne. Agent rozlišuje hrany podľa lokálneho číslovania ich koncov vo vrchole, kde sa práve nachádza. Agent vie ktorý koniec patrí hrane po ktorej prišiel do vrcholu. Agent začína vo vrchole počiatočného grafu.

Agent pri vykonávaní algoritmu konštrukcie grafu nemá obmedzenú výpočtovú silu ani pamäť. Množina značiek portov je konečná a vopred daná. Efektivita algoritmu konštrukcie daného grafu sa pri tomto modeli meria počtom pohybov agenta (tj. sumou počtu návštev cez všetky vrcholy) pri danej množine značiek portov, tento počet sa snažíme minimalizovať.

Označenie 1. Označenie operácií agenta: - nová hrana = NH - otvoriť port (s číslom n) = $OP(n)$ - prejsť sa po hrane s lokálnym číslom konca k = Sk

Označenie 2. Agent začína v grafe, ktorý sme už nazvali počiatočný graf - v našom prípade obsahuje jeden izolovaný vrchol. Graf, ktorý má agent skonštruovať, budeme volať cieľový, konečný alebo konštrupovaný. Graf existujúci v danom kroku konštrukcie v modeli budeme volať aktuálny graf alebo len graf.

Poznámka 1. Pri práci s neorientovanými grafmi používame pojem "hrana vedie z vrchola v do vrchola u " len na rozlíšenie týchto dvoch vrcholov od seba.

Označenie 3. *Nad prvkami grafu, konštruovaného jedným agentom (sú to najmä vrcholy, hrany i porty), existuje prirodzené úplné usporiadanie podľa poradia ich vzniku, podľa ktorého môžeme o jednom prvku vyhlásiť, či je starší, mladší alebo rovnako starý ako iný prvok. Platí, že hrana je rovnako stará ako jej druhý port. Všeobecne prvky vzniknuté jednou operáciou sú rovnako staré.*

Označenie 4. *Krokom agenta budeme nazývať vykonanie operácie, pri ktorej sa zmení vrchol, v ktorom sa agent nachádza.*

Označenie 5. *Portová hrana je hrana, ktorá vznikla operáciou OP_k , kde k je značka portu, ktorého otvorením hrana vznikla.*

Označenie 6. *Kostrová hrana je hrana, ktorá vznikla operáciou NH .*

Poznámka 2. *Ako neskôr ukážeme - "kostrové hrany" tvoria kostru grafu.*

Označenie 7. *Medzi otvorením prvého a druhého portu portovej hrany h , prejde agent po slede vrcholov. Najmenší cyklus z tohto uzavretého sledu obsahujúci hranu h budeme označovať tvorivý cyklus hrany h . Hrany tohto cyklu bez hrany h tvoria konštrukčnú cestu hrany h .*

Označenie 8. *Postupnosť návštev vrcholov a hrán v poradí v akom ich agent vykonal počas konštrukcie cieľového grafu budeme volať tvorivý sled grafu.*

Lema 1. *Agent počas pohybu v grafe musí ísť po hranách grafu. Tieto po momente keď po nich prešiel, už v grafe trvale existujú.*

Dôkaz. Žiadna operácia agentovi nedovoľuje priamo prejsť medzi dvoma vrcholmi, ktoré nespája hrana. Môže však vytvoriť kostrové hrany a potom otvorením portu vznikne hrana, ktorá mu umožní dostať sa do vrcholov grafu, ktoré vytvoril predtým. Neexistuje spôsob ako v našom modeli odstrániť hranu z grafu. \square

Lema 2. *Ak agent odíde z vrcholu v ktorom je súčet počtov incidentných hrán a otvorených portov nižší, ako je počet hrán s ktorými má byť vrchol incidentný v cieľovom grafe, tak sa doň počas konštrukcie musí agent neskôr ešte vrátiť.*

Dôkaz. Neexistuje postupnosť operácií agenta, pomocou ktorej môže agent vytvoriť hranu do existujúceho vrchola bez jeho návštevy, ak v ňom nie je otvorený port pre túto hranu. Operácia NH vytvorí z vrchola v ktorom sa nachádza do nového vrcholu, ktorý predtým v grafe neexistoval a operáciou OP_k môže agent vytvoriť hranu z vrchola v ktorom sa nachádza do vrchola v ktorom je otvorený port so značkou k . Teda ak sa v danom vrchole agent nenachádza a nemá v ňom otvorený port pre hranu, ktorú ide skonštruovať, nemôže to urobiť bez návštevy tohto vrchola. \square

Lema 3. *Hrany vytvorené operáciou "nová hrana" tvoria kostru grafu.*

Dôkaz. Okrem inicializačného vrcholu, všetky vrcholy vzniknú operáciou "nová hrana" (NH). Každý vrchol okrem inicializačného je spojený hranou, s lokálnym číslom konca hrany 1, s nejakým starším vrcholom (vrchol, ktorý vznikol skôr). Po týchto hranách sa dá z každého vrchola grafu dostať do inicializačného, teda podgraf, tvorený hranami pochádzajúcimi z oprácií NH, je súvislý. Počet týchto hrán je zároveň o jeden menší ako počet vrcholov, teda ide o kostru. \square

Lema 4. *Hrany, ktoré agent prejde od otvorenia prvého portu hrany po otvorenie druhého, tvoria v grafe s novovzniknutou hranou uzavretý sled.*

Dôkaz. Je to dané operáciami, ktoré môže agent vykonať. Agent totiž prechádza len po hranách v grafe. Z vrchola ide do incidentnej hrany a z hrany do incidentného vrchola. Pričom žiadna hrana nemôže zaniknúť, teda medzi otvorením dvoch portov prejde agent po nejakom slede v grafe. Novovzniknutá hrana spája koncový a začiatkový bod tohto sledu; tvorí s ním teda uzavretý sled. \square

Poznámka 3. *Zo sledu z vety 4 vieme vybrať kružnicu.*

Lema 5. *Minimálny počet hrán, ktoré agent potrebuje prejsť pri konštrukcii hrany pomocou portov je rovný alebo väčší ako dĺžka najmenej kružnice, na ktorej sa táto hrana v konštruovanom grafe nachádza.*

Dôkaz. Nájdeme menší takýto sled ako je najkratšia kružnica. Tento tvorí s novovzniknutou hranou uzavretý sled. Z neho vieme vybrať kružnicu, čo je spor s minimálnosťou najkratšej kružnice. Keďže neexistuje v našom modeli možnosť, aby hrana zanikla, musí sa táto "nová" najkratšia kružnica nachádzať aj v konštruovanom grafe. \square

Lema 6. *Ak má agent k dispozícii dostatočný počet značiek portov, tak sa problém efektívnej konštrukcie grafu redukuje na hľadanie najkratšieho sledu v ktorom sú všetky vrcholy. Pri hamiltonovskom grafe ide o hamiltonovskú kružnicu.*

Dôkaz. Agent skonštruuje graf takto: prechádza vrcholmi, podľa najkratšieho sledu obsahujúceho všetky vrcholy, pričom mu sačí jedna návšteva každého vrcholu, v ktorom otvorí potrebný počet portov príslušných značiek. Ak má v slede prejsť do vrcholu, ktorý ešte neexistuje, použije operáciu NH. \square

Poznámka 4. *Aj v tomto prípade je možná ďalšia optimalizácia a to na počet použitých značiek pre porty. Celkovo to funguje takto: agent otvorí port so značkou k , vytvorí pár kostrových hrán a následne v nejakom vrchole otvorí druhý port s rovnakou značkou, čím sa mu táto uvoľní. V každom vrchole, ktorý medzitým vytvorí, musí otvoriť porty,*

pre všetky hrany v konštruovanom grafe, s ktorými je v ňom tento vrchol incidentný. Pri tom nemôže použiť značku k . Vo všeobecnosti teda platí, že čím kratšie sú porty otvorené, tým menší je celkový počet potrebných značiek.

Lema 7. *Vrchol v grafe musí agent navštíviť minimálne $\frac{\deg(v)}{|Z|*2}$ krát, kde Z je množina značiek pre porty, ktorú má agent k dispozícii.*

Dôkaz. Pri každej návšteve môže agent otvorením portov so všetkými značkami vytvoriť nové hrany do vrcholov, v ktorých sú otvorené príslušné porty a následne otvoriť toľko portov s navzájom rozdielnymi značkami, koľko má k dispozícii značiek (dvojica portov rovnakej značky v jednom vrchole by vytvorila slučku a v našom modeli uvažujeme hrany bez slučiek). \square

Poznámka 5. *Ako ukážeme neskôr, pri obmedzenom množstve značiek portov môže byť výhodnejšie neminúť všetky značky pre porty v jednom vrchole, aj za cenu opakovanej návštevy. Výhodnejšie v tomto prípade znamená, že agent pri danej konštrukcii vykoná menej krokov.*

6.1.1 Jedna značka pre porty

Lema 8. *Najmenej krokov agent na konštrukciu konkrétnej hrany medzi už existujúcimi vrcholmi použije, ak pôjde do najbližšieho z nich, otvorí v ňom port a následne najkratšou cestou po už existujúcich hranách prejde do druhého vrcholu a otvorí v ňom port.*

Dôkaz. Agent má k dispozícii len jednu značku pre porty. Teda počas konštrukcie hrany medzi už existujúcimi vrcholmi, žiadne nové hrany v grafe, ktoré by ležali na ceste medzi koncami tejto hrany nevzniknú. Jediné nové hrany môžu vzniknúť operáciou NH, ale tieto by viedli do "slepej uličky" (komponentu grafu obsahujúceho len nové vrcholy a spojeného mostom so zvyškom grafu), z ktorej by sa musel agent vracieť a je zrejmé, že ak ich konštrukciu vynechá, z pohľadu najmenšieho počtu ťahov na konštrukciu tejto portovej hrany nič nepokazí. V neorientovanom grafe pri jednej značke pre port je najkratšia cesta od otvorenia prvého po otvorenie druhého portu hrany rovnaká bez ohľadu na to, v ktorom vrchole agent otvorí prvý port hrany. Jediné, čo sa mení, je počet krokov po otvorení prvého z portov. Aby bol tento a teda aj celkový počet krokov čo najkratší, pôjde agent do najbližšieho z vrcholov konštruovanej portovej hrany. \square

Lema 9. *Agent, ktorý má k dispozícii len jednu značku pre porty, musí prejsť pri konštrukcii grafu aspoň k krokov, kde $k = \min_{i=1}^y \{ \sum_{e \in G(E); e \notin G(K_i)} j(e) - 1 \}$, kde K je kostra grafu G ; y je počet navzájom rôznych kostier grafu G ; $j(e)$ je najmenšia kružnica v grafe obsahujúca hranu e a K_i je i -ta kostra, pričom $K_i \equiv K_j \iff i \equiv j$*

Dôkaz. Podľa vety 5 musí agent prejsť pri konštrukcii hrany aspoň dĺžku minimálnej kružnice bez jednej - bez hrany ktorú tým konštruuje. Keďže má k dispozícii len jednu značku pre porty, ďalšiu hranu môže začať konštruovať až keď dokončil predošlú. Pri každej hrane prejde teda aspoň dĺžku najmenšej kružnice, v ktorej sa táto hrana nachádza mínus jedna. Dokopy prejde agent ich súčet. \square

Lema 10. *Po použití operácie NH, ktorou vznikne hrana h , sa agent už nedostane do už existujúceho vrchola bez následného použitia operácie OP, ktorá vytvorí hranu do vrcholov starších ako h , alebo bez opätovného prejdenia po hrane h .*

Dôkaz. Vrchol v , ktorý vznikne operáciou NH je so zvyškom grafu spojený len hranou h , ktorá tvorí most, do vzniku hrany operáciou OP, medzi komponentmi na oboch stranách tohto mostu. Teda jediný spôsob ako prejsť medzi týmito dvomi časťami grafu je po moste, ktorý ich spája - po hrane h . \square

Lema 11. *Existuje graf, pri ktorého konštrukcii na najmenej krokoch, agent skonštruuje kostrové hrany, ktoré s konštruovanou portovou hranou netvoria tvoriaci cyklus.*

Dôkaz. Napríklad cyklus, kde do každého vrchola pridáme hranu do vrchola stupňa jedna. Je zrejmé, že pri konštrukcii týchto vrcholov stupňa jedna, agent určí operácie NH a S1, lebo nemôže ostať vo vrchole ak ešte nedokončil graf a iná hrana z neho nevedie. Tiež je zrejmé, že takýto graf má práve jednu portovú hranu a to ľubovoľnú hranu cyklu. Pri jej konštrukcii prejde agent cez všetky vrcholy v cykle a ak by neskonštruoval príslušný vrchol stupňa jedna incidentný s vrcholom cyklu, pri jeho prvej návšteve, musel by sa doň vrátiť a teda vykonať viac krokov. Agent teda otvorí port a skonštruuje vrcholy cyklu, pričom v každom skonštruuje aj príslušný vrchol stupňa jedna s ktorým je tento incidentný. \square

6.1.2 Dve a viac značiek pre porty

Ušetriť (agent vykoná menej krokov) oproti situácii, keď agent môže použiť len jednu značku pre porty možno v prípade že má k dispozícii viacero značiek pre porty vtedy, ak konštruovaný graf obsahuje cykly, ktoré majú spoločné hrany. Vtedy, ak agent pri konštrukcii niektorej hrany, prechádza vrcholom s ktorým bude incidentná niektorá portová hrana, ktorú bude konštruovať po tejto, v ňom otvorí port. Následne sa do tohto vrchola už nemusí pri konštrukcii tejto nasledujúcej portovej hrany vracáť otvoriť port, ak existuje kratšia cesta do druhého koncového vrchola tejto hrany. V metrike vzdialeností, kde sa počíta počet hrán najkratšej cesty medzi dvomi vrcholmi ako ich vzdialenosť platí trojuholníková nerovnosť. Z tohto dôvodu agent nevykoná viac krokov pri najlacnejšej (na najmenej krokov) konštrukcii portovej hrany ak jeden port tejto

hrany otvorí skôr oproti konštrukcii kde ho otvorí neskôr, pričom sa kroky rátaajú až po dokončení predošlej portovej hrany. Krok, vykonaný agentom v čase, keď má tento otvorených viacero porto, sa do celkového súčtu počíta len raz. Ako neskôr ukážeme, nie vždy spôsobí snaha skonštruovať jednu hranu na čo najmenej krokov zlepšenie celkového počtu krokov agenta počas konštrukcie cieľového grafu.

TODO ... lemy o tvoriacom cykle grafu pri viacerých značkách pre porty ...

6.2 Mriežka

Definícia 29. *Mriežka veľkosti $n \times m$ je graf $P_n \times P_m$*

Definícia 30. *Cyklická mriežka veľkosti $n \times m$ je graf $C_n \times C_m$.*

V tejto kapitole sa budeme zaoberať mriežkou a cyklickou mriežkou. Na to, aby sme sa v týchto dvoch grafoch dokázali dobre orientovať, zavedieme pojem dimenzie a jej súradnice. Pričom využívame, že oba grafy sú produktmi kartézského súčinu.

Označenie 9. *Pojem dimenzie v produkte kartézského súčinu G , grafov U a V zavedieme prirodzene vzhľadom na označenie vrcholov produktu ako usporiadanej dvojice (u, v) , kde $u \in U$ a $v \in V$. i -tou dimenziou vrchola produktu tohto súčinu bude i -ty člen tejto dvojice. Súradnicou v dimenzii i je prvok na i -tej pozícii v usporiadanej dvojici. Pre zjednodušenie označíme vrcholy pôvodných grafov prirodzenými číslami od 1 po m rešpektíve od 1 po n . Vrcholy produktu kartézského súčinu týchto dvoch grafov budú pre dosť veľké m, n napríklad $(2, 4)$, $(5, 17)$, $(9, 1)$, atď.*

Poznámka 6. *Pri mriežke a cyklickej mriežke budeme číslovať vrcholy pôvodných grafov tak, aby sa označenia susedných vrcholov líšili o jedna, v prípade cyklickej mriežky budú v pôvodných grafoch - cykloch spojené aj vrcholy 1 a n , repektíve 1 a m .*

Lema 12. *Pri konštrukcii portovej hrany v mriežke aj v cyklickej mriežke, ktoré nemajú žiaden rozmer menší ako štyri, urobí agent medzi otvorením prvého a druhého portu najmenej tri kroky.*

Dôkaz. Najmenší cyklus v oboch grafoch má dĺžku štyri. Teda medzi otvorením dvoch portov hrany vykoná agent najmenej tri pohyby po hranách. Buď prejde po už existujúcich alebo vytvorí novú operáciou NH. □

6.2.1 Jedna značka pre porty

Lema 13. *Kostrové hrana je staršia, vznikla skôr, ako všetky portové hrany incidentné s jej mladším koncovým vrcholom.*

Dôkaz. Aby agent mohol otvoriť vo vrchole port, musel už tento vrchol existovať. Jediná operácia ktorou mohol vrchol vzniknúť je operácia NH. Mladší vrchol vznikol spolu s kostrovou hranou a preto doň predtým nemohli viesť žiadne hrany. \square

Lema 14. *Tvoriaci cyklus hrany h obsahuje len hrany staršie ako h .*

Dôkaz. Tvoriaci cyklus obsahuje hrany, po ktorých agent prešiel, keď konštruoval hranu h . Museli teda v čase po prechode agenta už existovať a sú preto staršie ako hrana h , ktorú agent vytvoril až potom, ako po týchto hranách prešiel. \square

Lema 15. *Každý tvoriaci cyklus je možné nahradiť tvoriacim cyklom, ktorý obsahuje len hrany kostry a príslušnú portovú hranu.*

Dôkaz. Majme tvoriaci cyklus hrany h . Každú portovú hranu, okrem h v ňom nahradíme jej tvoriacim cyklom, až kým nemáme uzavretý sled na kostrových hranách a hrane h . Z neho vieme vybrať tvoriaci cyklus hrany h . \square

Označenie 10. *Graf prislúchajúci dimenzii d grafu G je d -ty činiteľ kartézskeho súčinu, ktorého je G produktom.*

Označenie 11. *Hrana v mriežke a cyklickej mriežke vedie medzi dvomi vrcholmi, ktoré sa líšia v práve jednej dimenzii a v tejto majú súradnice vrcholov, ktoré spolu susedia v grafe, ktorý prislúcha danej dimenzii. Teda ak je to prvá dimenzia jedná sa o prvý člen kartézskeho súčinu a ak je to druhá dimenzia o druhý. Súradnica hrany budeme volať súradnicu k , ak k je najvyššia súradnica v danej dimenzii a hrana spája vrchol s najnižšou a najvyššou súradnicou dimenzie, alebo nižšia zo súradníc v ktorých sa líšia vrcholy spojené touto hranou.*

Hranu so súradnocou k budeme volať niekedy hrana v súradnici k . Rovnako budeme používať pojem dimenzia hrany a hrana dimenzie.

Označenie 12. *Prechodom po súradnici budeme volať prechod agenta po hrane danej súradnice.*

Označenie 13. *Susedná súradnica súradnice k v dimenzii d , je každá súradnica vrchola spojeného hranou v grafe prislúchajúcom dimenzii d s vrcholom so súradnicou k .*

Lema 16. *Portová hrana v súradnici k v cyklickej mriežke má v tvoriacom cykle odlišnú paritu počtu prechodov po súradnici k ako majú počty prechodov po ostatných súradniciach V ostatnej dimenzii majú všetky počty prechodov po každej súradnici rovnakú paritu.*

Dôkaz. Aby otvoril druhý port hrany, agent musí svoju pozíciu zmeniť tak, aby sa nachádzal na susednej súradnici v dimenzii v ktorej sa líši s vrcholom s otvoreným prvým portom v dimenzii kam má viesť konštruovaná hrana. Keď rozdelíme pohyby agenta medzi jednotlivé dimenzie, môžeme jeho pohyb premietnuť do grafov týchto dimenzií. Budeme teda sledovať len to ako sa mení tá, ktorá súradnica agenta pri jeho pohybe po tvoriacom cykle. Keďže vrcholy v ktorých otvára porty sa líšia iba v dimenzii konštruovanej hrany, v jednej dimenzii majú rovnakú súradnicu. Do grafu tejto dimenzie sa pohyb agenta premietne ako uzavretý sled, kde skončí vo vrchole, v ktorom začal. Poďme spočítať paritu prechodov po jednotlivých súradniciach v slede do ktorého sa v tomto grafe premietne prechod agenta. Vezmeme tie výskyty toho istého vrcholu, medzi ktorými sú výskyty len iných vrcholov a to každého najviac raz. Takže aké pohyby mohol urobiť agent medzi dvomi najbližšími návštevami nejakého vrcholu? Mohol sa vrátiť zo susedného vrchola - zo vzdialenejšieho už nie, lebo susedný, cez ktorý by išiel by sa vyskytol na tomto slede viackrát ako raz. Alebo mohol agent prejsť po ceste, kde cieľom aj východiskom je tento vrchol. Takáto cesta je buď prázdna alebo obsahuje všetky iné vrcholy a je to vlastne prejdenie cyklu dookola. V prvom prípade sa parita prechodov po súradniciach zachová, lebo agent prešiel tam a späť po rovnakej súradnici. V druhom prípade sa zmení parita prechodov pre všetky súradnice. V oboch prípadoch sa teda zachová rovnosť parít prechodov jednotlivých súradníc, ak platila aj predtým. Vieme teda, že medzi dvomi najbližšími výskytmi vrchola sa nič nepokazí. Na začiatku je počet prechodov pre každú súradnicu rovnaký - nulový a teda majú rovnakú paritu. Pri ďalšom počítaní môžeme teda tieto výskyty preskočiť - skontrať. Na takto upravenom slede postup opakujeme, až kým nemáme každý vrchol najviac raz okrem koncového a začiatočného, čo je ten istý. Preň platia rovnaké pravidlá a teda pre túto dimenziu je veta dokázaná.

V dimenzii konštruovanej hrany sa bude pri otváraní druhého portu nachádzať vo vrchole susednej súradnice k súradnici vrchola s prvým portom. Ak pridáme do sledu aj konštruovanú portovú hranu, dostaneme uzavretý sled, pre ktorý platí predošlý dôkaz. Z toho je jasné, že iba prechody po konštruovanej hrane majú odlišnú paritu počtu svojich výskytov. \square

Lema 17. *Pri ľubovoľnej konštrukcii cyklickej mriežky G rozmerov $n \times m$ s jednou značkou pre porty, existuje aspoň jedna hrana pri konštrukcii ktorej agent vykoná aspoň $n-1$ krokov v prvej dimenzii a súčasne aspoň jedna portová hrana, pri konštrukcii ktorej agent vykoná aspoň $m-1$ krokov v druhej dimenzii, môže ísť o tú istú hranu.*

Dôkaz. Ako sme už povedali kostrové hrany sú hrany, ktoré vznikli operáciou NH a tieto hrany tvoria kostru grafu; ako bolo spomenuté grafom nazývame každý medziprodukt konštrukcie počnúc počiatočným vrcholom až po konečný skonštruovaný graf. Každý

kinštrukcii grafu G zodpovedá nejaká kostra z kostrových hrán. Počet krokov, ktoré agent vykonal pri konštrukcii hrany h je súčet počtu krokov do vrchola v , v ktorom otvoril prvý port hrany a počet krokov z vrchola v do vrchola u , v ktorom otvoril druhý port hrany, tento sled z u do v tvoria s portovou hranou uzavretý sled. Tento sled obsahuje tvoriaci cyklus danej portovej hrany. Majme ľubovoľnú konštrukciu cyklickej mriežky G a k nej zodpovedajúcu kostru. Ukážeme, že pre ňu platí tvrdenie vety. Táto kostra určuje aj, ktoré hrany grafu sú portové - tie, ktoré nie sú v kostre. Pripomeňme si, že kostra zodpovedajúca konštrukcii je kostra tvorená práve všetkými hranami, ktoré vznikli operáciami NH . Ukážeme, že existuje aspoň jedna hrana, ktorej tvorivý cyklus bez tejto hrany obsahuje jej súradnicu párny počet krát - teda ostatné súradnice v tejto dimenzii nepárny počet krát. Rovnako to dokážeme pre obe dimenzie. Možné sú dva prípady, buď ide o dve rôzne hrany, alebo o jedinú hranu. Keďže agent musel prejsť do susednej súradnice vrchola s prvým portom hrany a nemohol tak urobiť v jej súradnici, musel prejsť po všetkých ostatných súradniciach a teda vykonať aspoň $n-1$ respektíve $m-1$ krokov v prípade, že platí alternatíva s dvomi rôznymi hranami. Alebo $n+m-1$ ak platí alternatíva s jedinou hranou. Nazveme ich pre lepšiu orientáciu dotknuté hrany. Pozrieme sa na ľubovoľnú kostru. V tejto kostre sa nachádzajú všetky vrcholy grafu. Aký je tvorivý cyklus jednotlivých portových hrán. V tvorivom cykle portovej hrany h je možné nahradiť niektorú portovú hranu jej tvorivou cestou. Takýmto nahrádzaním postupne vieme nahradiť všetky portové hrany. Keď z výsledného sledu vyberieme konštrukčnú cestu, tento už obsahuje iba kostrové hrany. Pozrime sa na paritu počtu prechodov jednotlivých súradníc v tejto ceste. Tvrdíme, že ak sme nenahrádzali hranu, ktorej tvorivá cesta obsahovala súradnicu tejto hrany párny počet krát, výsledná tvorivá cesta na kostrových hranách bude obsahovať nepárny počet prechodov po súradnici hrany h . Toto je zrejmé. Ak výskyt hrany nahradíme cestou, kde sa táto hrana nachádza nepárny počet krát, počet prechodov po súradnici hrany sa nezmení. Toto zároveň implikuje, že prechody po ostatných súradniciach sa na tejto ceste nachádzajú párny počet krát zvlášť pre každú súradnicu. Teda nezmení sa ani parita prechodov po ostatných súradniciach. Čo sa týka parít počtov prechodov v ostatnej dimenzii, tak tu platí to isté, ak nahrádzame hranu jej tvorivou cestou, kde je počet prechodov po súradnici tejto hrany párny, tak aj vo výslednom slede je počet prechodov párny pre každú súradnicu tejto dimenzie.

Keďže výsledný sled, ktorý vznikol nahradením tvorivej cesty portovej hrany h vedie len po kostrových hranách a na tých neexistuje cyklus, tvorivá cesta hrany h vybraná z tohto sledu zachováva paritu prechodov po jednotlivých súradniciach takú, aká je v tomto slede. Kostra je totiž strom a ak sa na slede vyskytne dvakrát ten istý vrchol, tak medzi dvomi jeho susednými výskytmi je párny výskyt prechodov po jednotlivých

súradniciach a teda ho môžeme zo sledu vybrať - skontraovať na jeden výskyt tohto vrchola. Jediná šanca ako pri pohybe po strome navštíviť opätovne niektorý vrchol je vrátiť sa doň.

Na kostre existuje pre každú portovú hranu jediná tvorivá cesta, inak by na nej bol cyklus, čo je spor. Vezmime si teraz dimenziu d a vrcholy, ktoré majú v ostatnej dimenzii rovnakú súradnicu, označme ju k . Indukovaný podgraf na týchto vrchoch je cyklus. Niektoré jeho hrany sú kostrové, ostatné sú portové. Pokiaľ má každá portová hrana tvorivú cestu na kostre s nepárny počtom prechodov po jej súradnici, existuje na kostre cyklus, čo je spor. Tento cyklus získame z uzavretého sledu vytvoreného z indukovaného grafu týchto vrcholov, kde portové hrany nahradíme ich tvorivými cestami na kostre. Vo výslednom slede sa každá hrana bude nachádzať nepárny počet krát a ako sme už ukázali, ak vyberieme niektorú portovú hranu f , vieme z tohto cyklu vybrať jej tvorivú cestu, ktorá zachová paritu prechodov po jednotlivých hranách. Keďže sa však v tomto slede nachádza prechod po súradnici hrany f párny počet krát, bude sa aj v ceste, čo je spor. Napríklad s tým, že táto hrana má tvorivú cestu na kostre s nepárny počtom výskytov jej súradnice, alebo že v kostre existuje medzi dvoma vrcholmi - koncovými vrcholmi hrany f , práve jedna cesta. Z toho vyplýva, že niektorá nahradzaná hrana mala tvorivú cestu s párnym počtom prechodov po jej súradnici. Teda pre každú dimenziu existuje hrana, ktorej tvorivá cesta obsahuje nepárne počty prechodov po súradniciach tejto dimenzie. A agent pri jej konštrukcii musí vykonať aspoň $n - 1$ krokov pre prvú dimenziu a iných $m - 1$ krokov pre druhú dimenziu. \square

Lema 18. *Mriežku $m \times n$ je možné s použitím jedinej značky pre port zostrojiť pomocou $3m(n - 1) + m$ pohybov, kde $m \leq n$.*

Dôkaz. Agent vykonáva: OP,NH,NH,NH,OP,($n-2$)krát (OP,S1,NH,NH,OP),S1,NH,HN,OP čím vytvorí prvý riadok mriežky. Následne vykoná ($m-1$)krát (NH,OP,S1,S2,NH,OP,($n-1$)krát (OP,S1,S2,NH,OP)) \square

Dôkaz. Pokrytie jednou dlaždicou stojí minimálne tri kroky plus cesta do vrchola prvého portu. Dĺžka tejto cesty závisí od polohy agenta v predošlej dlaždici, jeho polohy v novej dlaždici a od vzájomnej polohy týchto dlaždíc.

Vzhľadom na dimenziu môžeme určiť štyri smery pohybu v grafe. Podľa toho, či súradnica v danej dimenzii stúpa alebo klesá.

Pri konštrukcii na tri kroky agent príde do vrchola s druhým portom a otvorí ho v inej dimenzii ako je tá v ktorej prišiel. Agent sa pohol v smere portovej hrany. Ak agent konštruuje dlaždice tak, že dve po sebe skonštruované majú jednu hranu spoločnú - jedna z dvoch ktoré vedú do vrchola s druhým portom predošlej portovej hrany, tak si zachováva smer v oboch dimenziách - stojí 0 krokov, každá zmena smeru stojí 1 krok.

Chceme konštrukciu na čo najmenej krokov. Teda hľadáme takú postupnosť dlaždíc, ktorou vie agent pokryť mriežku, že stojí konštrukcia tejto postupnosti čo najmenej krokov. Čím sú od seba dlaždice ďalej, tým viac agent vykoná krokov pri ich konštrukcii, lebo medzi skonštruovaním týchto dlaždíc musí prejsť ich vzdialenosť. Ak agent vzápätí po konštrukcii dlaždice konštruuje ďalšiu, stojí ho pohyb medzi nimi 0 krokov. V tomto prípade sa tieto dlaždice dotýkajú rohmi. Ak niektorá dlaždica susedí s dvomi kockami spojenými rohom a konštruovanými hneď po sebe, je výhodnejšie vsunúť túto dlaždicu v konštrukcii medzi tieto dve. (Toto určite platí o dlaždiciach na okraji mriežky a odtiaľ sa to dá preniesť vyššie indukciou) Susedné kocky teda majú spoločný nielen roh ale aj hranu. Agent skončí na jednom z koncov portovej hrany. Portová hrana môže byť len na okraji pokrytej plochy. Po konštrukcii novej dlaždice sa agent ocitne v rovnakom rohu ako bol v predošlej dlaždici keď otváral prvý port portovej hrany novej dlaždice (keď z predošlej dlaždice odchádzal najkratšou cestou - pokiaľ portová hrana nesusedila s dlaždicou bude v susednom vrchole). TODO treba rozobrať všetky prípady najkratších ciest konštrukcie novej dlaždice ... Tam ukážeme susednosti ... tj. ktoré hrany sa opatí vyberať ako portové ... (treba použiť argument o najkratšej konštrukcii, ak by portová hrana nemala susediť s predošlou dlaždicou, musí urobiť kroky navyše, ak všetky vrcholy dlaždice sú incidentné so 4 hranami, buď som skončil alebo sa niečo pokazilo ... ak dokazujeme konštrukciu postupne, do takéhoto stavu sa snáď nedostaneme ...)

Okraje mriežky sú vrcholy, ktoré majú jednu súradnicu buď minimálnu alebo maximálnu. Rohy mriežky sú vrcholy, ktoré majú maximálne alebo minimálne obe svoje súradnice. Rohy mriežky majú stupeň dva a vrcholy na okraji, ktoré nie sú rohmi, majú stupeň tri. Keď prvý raz príde agent do vrchola, tak hrana po ktorej prišiel musí byť kostrová. Každé prerušenie ťahu tvoreného portovými hranami, znamená, že agent okrem krokov medzi otvorením prvého a druhého portu niektorej portovej hrany, musel vykonať aspoň jeden krok medzi otvorením druhého portu niektorej hrany a prvého portu nasledujúcej. Počet týchto krokov nazvime cena prerušenia. Čím je menšia suma cien všetkých prerušení, na tým menej krokov agent skonštruoval mriežku (za predpokladu, že počet krokov na hranu je konštantný - 3). Vrchol s nepárnym počtom incidentných portových hrán - prerušenie vnútorný vrchol ako list - prerušenie Z tohto vyplýva, že v rohu je buď prerušený ťah, alebo doň nevedie portová - hrana. Vrchol na kraji má tri možnosti: - vedie doň jedna portová hrana -> prerušenie - žiadna portová hrana -> všetky tri sú kostrové - dve portové hrany

V druhom prípade, ak sú vedľa seba dva takéto vrcholy, tak vnútorné vrcholy s nimi spojené už sú v kostre a teda medzi nimi vedie portová hrana. Tiež je jasné, že vnútorný vrchol môže susediť najviac s jedným takýmto krajným vrcholom.

Vrcholov podľa druhého prípadu nevytvárajúcich prerušenia je obmedzene veľa. Ak totiž podgraf kostry spojený na hranu idúcu do vnútra mriežky neobsahuje vrchol s nepárnym počtom portových hrán, musí mať všetky listy na okraji. Na každý takýto podgraf teda pripadá minimálne jeden list na okraji a teda prípad dva môže platiť pre najviac polovicu vrcholov na okraji. Ukážeme, že v optimálnej konštrukcii je to menej.

V treťom prípade platí, že ak agent konštruuje portové hrany a príde do vrchola na okraji otvoriť port, tak na tri kroky otvorí port opäť len na okraji (ak je to možné). Teda až do prerušenia vedie ťah z portových hrán už len po okraji.

Je zrejmé, že spolu môžu susediť len rovnaké prípady alebo prvý prípad s ľubovoľným iným a druhý prípad s tretím ak to bude "prechod ťahu na okraj".

Tiež vidno, že ak by v treťom prípade boli vnútorné vrcholy navštívené prvýkrát, išli by z nich tri kostrové hrany. Potom by v nich bolo buď prerušenie alebo by z nich musela vychádzať štvrtá kostrová hrana.

Ak má agent skonštruovať hranu na tri kroky, musí hrana v rovnakej súradnici o jedna ďalej buď existovať alebo byť kostrová. (Agent nemá k dispozícii značku pre portovú hranu). Ak je kostrová, musí viesť do ešte nevytvoreného vrchola.

Hľadáme teda spôsob pokrytia pri ktorom agent vykoná čo najmenej krokov, keďže počet krokov na dlaždicu je tri a je konštantný, zanedbáme ho. Najmenej agent potrebuje krokov pokiaľ portová hrana novej dlaždice začína vo vrchole, kde končí portová hrana predošlej. Keďže mriežka je osovo symetrická, bez ujma na všeobecnosti, nech skončil v pravom hornom rohu. Odtiaľ môže na 0 krokov skonštruovať tri rôzne kocky, vpravo hore a šikmo hore. Toto je možné len vtedy, ak sú potrebné vrcholy buď ešte nevytvorené, alebo vhodne spojené s predošlou dlaždicou. Pozrime sa na šikmý pohyb. Pri šikmom pohybe sa mení smer agenta. Ak šikmým pohybom obíde roh mriežky, bude drahé sa doň vracieť. Je výhodnejšie vsunúť ho a vybrať z iného miesta v postupnosti. Vsunutie stojí 1 krok. Zmena smeru pri dotyku hranami stojí 1 krok. Ak agent skončí v rohu mriežky, bude stáť aspoň 1 krok ísť z neho konštruovať novú dlaždicu. Ak nikde doľava dole sa neoplatí šikmý pohyb, neoplatí sa šikmý pohyb ani tu, argumentácia podobná ako s rohom mriežky - vrchol šikmo doprava hore od ľavého dolného rohu má rovnaké postavenie ako ľavý dolný roh... totiž tú kocku, ktorú obíde šikmým pohybom stojí viac zapojiť do postupnosti ... všetko čo je drahšie ako 1 krok je drahé. Vľavo dole pod ňou už nie sú šikmé pohyby Teda šikmý pohyb sa neoplatí. Zmena smeru agenta stojí teda 1 krok. Na začiatku si agent "môže vybrať" v každej dimenzii ľubovoľný smer, môže totiž začínať v ľub. rohu prvej dlaždice. Ak agent konštruuje dlaždicu, ktorá má v niektorej dimenzii z oboch strán voľné miesta, znamená to, že bude musieť pokryť niektorú stranu a aby sa dostal do tej druhej, bude musieť meniť smer. Preto je najlepšie ak agent konštruuje dlaždice tak, aby z dvoch strán mal všetky štvorce pokryté.

Teda začína v rohu, ide po niektorom kraji a konštruuje po pásoch. Na konci vždy musí zmeniť smer, čo stojí 1 krok. Čím menej je teda pásov, tým menej musí agent meniť smer a menej pásov je po väčšej súradnici kocky. Spôsob konštrukcie mriežky $n \times m$ z vety TODO je optimálny.

Mriežka má štyri rohy. Pri akejkolvek postupnosti plnenia dlaždicami, môže na začiatok a koniec minúť len dva z nich, cez zvyšné dva musí teda prechádzať postupnosť vyplňania. Bez ujmy na všeobecnosti nech prechádza cez ľavý dolný roh a príde zľava.

□

Lema 19. *Pri konštrukcii mriežky je najvýhodnejšie konštruovať portové hrany tvorivou cestou dĺžky 3.*

Dôkaz. Ukážeme, že pre každú kostru existuje taká postupnosť konštrukcie portových hrán, že ich tvorivá cesta má dĺžku 3. Tvorivá cesta po kostre je pre každú portovú hranu len jedna. Dajú sa úseky každej takejto tvorivej cesty postupne nahrádzať portovými hranami, ktorým sú tvorivými cestami tak, aby na konci mala tvorivá cesta dĺžku tri? Nie nutne. Nahradíme všetky vzory iki portovou hranou k . Tvorivá cesta obkolesuje vrcholy. Tieto tiež sú v kostre a teda kostrové hrany do nich vedúce sa musia napájať na túto tvorivú cestu.

–TODO treba ukázať, že aj keď sa vezmú do úvahy presuny, tak sú trojkrokové cesty výhodnejšie ...

□

Lema 20. *Na zostrojenie mriežky $m \times n$, kde $m \leq n$ potrebuje agent s jednou značkou pre porty vykonať aspoň $3m(n - 1) + m$ krokov.*

Dôkaz. Premietnime si mriežku do roviny (mriežka je planárny graf), potom každý minimálny cyklus ohraničuje časť roviny. Ak minimalizujeme dĺžky tvorivých cyklov hrán, nič nepokazíme./TODO - možno to vyplynie samo/ Medzi otvorením prvého a druhého portu hrany agent

□

6.3 N-rozmerná kocka

Vrcholy spojené hranou sa líšia práve v jednej súradnici. Každéj hrane z vrcholu možno priradiť súradnicu v ktorej sa jej druhý vrchol od tohto odlišuje. Toto priradenie je injekcia. Susedia vrchola sa navzájom líšia v práve dvoch súradniciach. Pri pohybe po hrane mením jednu súradnicu svojej pozície. Z tohto vyplývajú obmedzenia pre úsporu pohybov pridávaním značiek pre porty. Napríklad pri použití dvoch značiek pre porty potrebuje agent na vytvorenie dvoch nových portových hrán aspoň 5 ťahov. Úspora

nastáva, keď port pre druhú hranu otvorím už počas cesty za otvorením portu prvej hrany.

Lema 21. *Dva vrcholy, ktoré sa navzájom líšia v práve dvoch súradniciach majú práve dvoch spoločných susedov.*

Dôkaz. Susedné vrcholy sa líšia práve v jednej súradnici. Spločný sused dvoch vrcholov sa líši v práve jednej súradnici od každého z nich. Teda má všetky súradnice rovnaké ako jeden z nich a líši sa v jedej z tých dvoch. Teda ju má rovnakú ako druhý vrchol. Druhý z týchto súradníc má potom odlišnú od druhého vrchola. Čiže sa od každého z nich líši v práve jednej súradnici. Toto dáva práve dva rôzne vrcholy, ktoré susedia z oboma. Vrchol, ktorý sa od jedného z vrcholov líšiacich sa v dvoch súradniciach líši v nejakej inej, sa od druhého líši v troch súradniciach a teda s ním nesusedí. \square

Otázkou ostáva, koľko hrán vie agent vytvoriť počas jednej návštevy vrcholu otváraním portov?

Lema 22. *Pri jednej návšteve vrcholu môže agent vytvoriť najviac $(\frac{n}{2} - 12) > \#dimenzii$ hrán otvorením portu.*

Poznámka 7. *Rátajú sa hrany, ktoré vzniknú hneď tj. pri ktorých agent otvorením portov vytvorí druhý (posledný) koniec.*

Dôkaz. Je zrejmé: že vo všetkých vrchoch, kam majú tieto hrany viesť, už agent bol; medzi dvomi vrcholmi vedie najviac jedna hrana. Z tohto a predošlej vety vyplýva, že po návšteve n vrcholov môže agent otvorením portu vytvoriť z vrcholu, kde sa nachádza, najviac $(\frac{n}{2} - 12) > \#dimenzii$ hrán. Z týchto $(\frac{n}{2} - 12)$ vrcholov sa od neho každý líši v inej súradnici, lebo ak by sa dva líšili v rovnakej, museli by to byť totožné vrcholy. \square

Lema 23. *Existuje taká postupnosť n vrcholov, že pri návšteve posledného agent vytvorí $(\frac{n}{2} - 12) >> \#dimenzii$ hrán.*

Dôkaz. Ak vezmeme takúto postupnosť odzadu, vyzerala by až na substitúciu dimenzií takto: 1, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, ... \square

Poznámka 8. *Avšak ľahko vidieť, že žiadne iné portové hrany by medzi vrcholmi v tejto postupnosti vzniknúť nemohli.*

Skúsme teda nájsť postupnosť (cestu v hyperkocke) s najväčším možným počtom portových hrán medzi jej vrcholmi.

Označenie 14. *O hrane povieme, že vedie v dimenzii k , ak sa vrcholy, ktoré spája, líšia v práve tejto dimenzii.*

Je jasné, že v akomkoľvek súvislom slede vrcholov povedie hrana medzi dvojicami nasledujúcich vrcholov, ide o hrany po ktorých agent prejde z vrcholu do vrcholu. Portová hrana môže vzniknúť medzi vrcholmi, ktoré sa líšia v práve jednej súradnici, lebo iné hrany v hyperkocke nie sú.

Označenie 15. *Poloha agenta je vyjadrená súradnicami v jednotlivých dimenziách kocky. v každej dimenzii môže nadobúdať jednu z dvoch súradníc. Označme ich 0 a 1. Pri prechode po hrane agent preklopí jednu z týchto súradníc v práve jednej dimenzii na druhú.*

Lema 24. *V ľubovoľnej postupnosti hrán medzi vrcholmi hyperkocky spojenými hranou, sa nachádza párny počet hrán v každej dimenzii okrem dimenzie v ktorej sa tieto vrcholy líšia a teda v nej vedie hrana medzi nimi.*

Dôkaz. Takéto dva vrcholy sa líšia v práve jednej dimenzii. Ak agent zmenil pri pohybe svoju polohu v nejakej dimenzii nepárny počet krát, tak je v tejto dimenzii v inej polohe ako bol na začiatku. Ak to nie je dimenzia v ktorej sa líši koncový vrchol od začiatočného - agent sa nenachádza v koncovom vrchole, lebo polohy agenta a tohto vrcholu nie sú rovnaké. \square

Označenie 16. *Ak viem súradnice vrchola, môžem postupnosť ťahov agenta zapísať ako postupnosť zmien jeho súradníc v jednotlivých dimenziách.*

Ak sa nachádza v takejto postupnosti medzi vrcholmi, medzi ktorými vzniká portová hrana dvakrát hneď za sebou číslo nejakej dimenzie, znamená to, že agent šiel tam a späť a tieto dva prvky môžeme z postupnosti vylúčiť, lebo je to z pohľadu tejto dvojice vrcholov zbytočný pohyb. Ak takto zredukujeme niektorú postupnosť, získame inú, v ktorej ide agent po podmnožine hrán z pôvodnej a na rovný alebo menší počet pohybov.

Poznámka 9. *Pripomeniem, že hľadáme taký sled, že počet portových hrán medzi jeho vrcholmi je na daný počet značiek pre porty a počet portových hrán, ktoré vzniknú medzi jeho vrcholmi, najkratší možný.*

Ak má agent dostatok značiek pre porty, nezaujímá nás poradie v akom vrchole postupnosti navštívil. Úlohu teda môžeme zredukovať na hľadanie takej množiny vrcholov veľkosti m , ktorá tvorí zo všetkých takto veľkých množín najmenší rez od zvyšku grafu. Pri konštantnom stupni vrcholov to znamená, že v takej vedie najviac hrán medzi vrcholmi v tejto množine. Keď sa pozrieme na vrcholy a pravidlá ich spájania hranami, zistíme, že tieto vedú len v nejakej kocke a čím viac rozmerov kocka má, tým viac hrán vedie medzi jej vrcholmi. Teda aj v n -rozmernej kocke povedie najviac hrán medzi vrcholmi takej množiny, ktorej indukovaný graf je izomorfný kocke. Vrchol k -rozmernej

kocky sa nachádzajú v k $(k-1)$ -rozmerných kockách, ktoré sú jej podgrafmi. Teda budeme hľadať množinu m bodov, ktoré sa dajú pokryť kockami čím vyššieho rozmeru a nemusíme si všímať kocky ktoré sú podgrafmi týchto kociek. tieto kocky sa však môžu prekryvať.

Lema 25. *S každou hyperkockou v ktorej vrchol neleží ho spája najviac jedna hrana. Ktorá vedie v inej dimenzii ako sú dimenzie tejto hyperkocky.*

Dôkaz. Každý vrchol hyperkocky má hrany vo všetkých jej dimenziách. Vo zvyšných dimenziách sú vrcholy hyperkocky totožné, lebo sa dva susedné líšia práve v jednej. Vrchol mimo hyperkocky spojený s vrcholom v nej sa od neho líši v inej dimenzii a v tejto sa líši teda aj od všetkých ostatných. Zároveň je vo všetkých dimenziách hyperkocky totožný s vrcholom z nej a teda sa líši v aspoň jednej dimenzii hyperkocky od jej ostatných vrcholov a má teda s nimi aspoň dve rodieľne dimenzie. Nemôže ho preto s nimi spájať hrana. \square

Lema 26. *Bijektívna substitúcia dimenzií na všetkých vrchoch podgrafu hyperkocky zachováva hrany medzi vrcholmi. Rovnako aj preklopenie súradníc v niektorej dimenzii.*

Dôkaz. Ak sa dva vrcholy líšia práve v jednej dimenzii, budú sa v práve jednej dimenzii líšiť aj po tejto substitúcii, lebo dimenzie v ktorých boli rovnaké sa zobrazia na rovnaké a tá v ktorej sa kĺšili sa u oboch zobrazí na rovnakú a budú sa v nej líšiť aj naďalej; teda medzi nimi povedie hrana. Pri preklopení súradníc sa medzi vrcholmi zachovávajú rovnosti a rozdiely v danej dimenzii, teda aj hrany. \square

Lema 27. *Vrcholy súvislého podgrafu hyperkocky s počtom vrcholov m sa navzájom líšia v najviac $m-1$ súradniciach.*

Dôkaz. Vezmime kostru tohto podgrafu. Táto má $m-1$ hrán. Každá vedie v niektorej dimenzii. Cesta v tejto kostre udáva v ktorých dimenziách sa daná dvojica jej koncových vrcholov líši. Všetky cesty v tejto kostre idú cez najviac $m-1$ rôznych dimenzií, čo je jej počet hrán. V ostatných dimenziách sa dané vrcholy nelíšia, majú v nich teda navzájom rovnaké súradnice. \square

Lema 28. *Podmnožina m bodov hyperkocky, ktoré indukujú graf s najvyšším počtom hrán je súvislá.*

Dôkaz. Nech existujú dva komponenty. Na jednom z nich urobíme postupné poprekĺpávanie súradníc tak, aby susedil niektorý jeho bod s bodom v druhom komponente a teda medzi nimi viedla hrana. Čiže vyberieme jednu dimenziu v ktorej sa líšia a vo všetkých ostatných dimenziách, kde majú rozdielne súradnice preklápame postupne

súradnice jedného z vrcholov. V prípade, že počas tohto postupu vznikne hrana spájajúca vyhrané dva komponenty, skončíme skôr. Pôvodné hrany sa zachovávajú a jedna nová pribudne, čo je spor s najvyšším počtom hrán. Tieto kroky môžeme urobiť bez toho, aby sa dva vrcholy zobrazili na seba. Ak budeme robiť preklápanie súradníc po jednotlivých dimenziách, v tom prípade, ak by sa nejaký vrchol transformovaného komponentu podgrafu zobrazil na niektorý vrchol druhého komponentu, musela by medzi nimi viesť predtým hrana, teda stav v ktorom by boli komponenty prepojené a preklápanie by teda už nepokračovalo. \square

Potrebuje vybrať m vrcholový indukovaný podgraf hyperkocky tak, aby počet hrán v ňom bol maximálny možný.

Lema 29. *Vrcholy podgrafu hyperkocky sa dajú rozdeliť na dve množiny A, B podľa súradnice vo vybranej dimenzii. Počet hrán vedúcich z vrcholov v jednej množine do vrcholov v druhej množine je rovný alebo menší ako mohutnosť menšej z nich. Čiže $|\{e | e = (a, b); a \in A; b \in B\}| \leq \min\{|A|, |B|\}$*

Dôkaz. Každý vrchol má v jednej dimenzii najviac jednu hranu a hrana vedie v danej dimenzii medzi dvoma vrcholmi vtedy ak je to jediná dimenzia v ktorej majú rozdielne súradnice. V inej dimenzii medzi A a B hrana viesť nemôže, lebo by musela viesť medzi vrcholmi líšiacimi sa v najmenej dvoch dimenziách - v dimenzii hrany a v dimenzii podľa súradníc ktorej sú A a B vytvorené. Teda hrany medzi A a B môžu viesť len v jednej dimenzii a do menšej z A, B môže viesť najviac toľko hrán v jednej dimenzii, koľko má vrcholov. \square

Lema 30. *Keď vezmeme z podgrafu hyperkocky len vrcholy, ktoré majú hranu v jednej vybranej dimenzii a označíme nimi indukovaný podgraf G . Vieme vrcholy G rozdeliť na dva izomorfné indukované podgrafy hyperkocky G_1 a G_2 podľa súradnice vrchola v tejto dimenzii.*

Dôkaz. Vrcholy, medzi ktorými vedie hrana sa líšia v práve jednej dimenzii, v ostatných dimenziách sú rovnaké. Keď teda vezmeme hrany vedúce medzi G_1 a G_2 a vytvoríme podľa nich bijektívne zobrazenie medzi týmito podgrafmi tak, aby sa dva vrcholy medzi ktorými vedie hrana vo vybranej dimenzii zobrazili na seba, dostaneme izomorfizmus. Ak totiž viedla medzi dvoma vrcholmi hrana, bude hrana viesť aj medzi ich obrazmi, lebo tieto majú rovnaké súradnice ako ich vzory vo všetkých dimenziách okrem jednej, kde sa oba obrazy od svojich vzorov líšia a teda majú súradnicu v tejto dimenzii rovnakú; obaja sú v komponente, kde majú túto súradnicu rovnakú všetky vrcholy. Ak sa teda líšili v jednej súradnici vzory, budú sa aj obrazy a ak sa líšili vzory vo viacerých súradniciach, budú sa v rovnakých súradniciach líšiť aj obrazy. Zobrazenie je teda izomorfizmus. \square

Lema 31. *Existuje indukovaný podgraf G hyperkocky na m vrchoch, ktorý je možné postupne rozdeliť podľa dimenzií až po jednovrcholové indukované podgrafy tak, že v každom kroku rozdelíme vrcholy každého podgrafu s počtom vrcholov aspoň dva do dvoch podmnožín A a B . Takých, že $|A| - |B| \leq 1$.*

Dôkaz. Dôkaz bude konštrukčný. Budeme postupne deliť m vrcholovú množinu i ďalšie z nej vzniknuté množiny na menšie, až kým nedostaneme m jednoprvkových množín vrcholov. Pritom budeme postupne určovať súradnice jednotlivých vrcholov.

Budeme postupovať postupne po dimenziách, až kým budú všetky množiny jednoprvkové. Vezmeme množinu M , rozdelíme ju na dve časti M_1, M_0 také že $|M_1| - |M_0| \leq 1$. Vrcholy v M_1 budú mať v tejto dimenzii súradnicu 1 a vrcholy v M_0 budú mať v tejto dimenzii súradnicu 0. Ak je množina jednoprvková a delenie niektorých iných ešte pokračuje, dostane v každej ďalšej dimenzii súradnicu 1. Ak má kocka viac dimenzií ako je potrebných, aby obsiahla všetkých m vrcholov podgrafu, tak môžu dostať tieto vrcholy v týchto zvyšných dimenziách ľubovoľné súradnice, ale pre všetky vrcholy musí byť súradnica v každej z týchto dimenzií rovnaká. Tým sme zistili súradnice vrcholov vo všetkých dimenziách, podľa ktorých podgraf delíme. Pre účely tejto vety na súradniciach ostatných dimenzií nezáleží a môžu byť ľubovoľné. \square

Lema 32. *Pri delení z vety 31 vedie medzi množinami vrcholov M_1 a M_0 , ktoré vznikli rozdelením jednej množiny M podľa tohto delenia, práve toľko hrán, ako je mohutnosť menšej z týchto množín. Pričom, ak má kocka viac dimenzií ako je potrebných, aby obsiahla všetkých m vrcholov podgrafu, tak môžu dostať tieto vrcholy v týchto zvyšných dimenziách ľubovoľné súradnice, ale pre všetky vrcholy musí byť, na rozdiel od predošlej vety, súradnica v každej z týchto dimenzií rovnaká.*

Dôkaz. Stačí ukázať, že menší z indukovaných podgrafov má vo väčšom izomorfný obraz podľa vety 30. Vtedy vedie z každého vrchola v menšom podgrafe hrana do nejakého vrchola vo väčšom podgrafe a týchto hrán je presne toľko, koľko je vrcholov menšieho podgrafu. Teda potrebujeme dokázať, že vo väčšom podgrafe existuje skupina vrcholov, ktorej budú súradnice v dimenziách pridelené rovnako ako vrcholom v menšom podgrafe. Pridelovanie súradníc je deterministické, teda rovnako veľkým množinám vrcholov v rovnakej fáze budú popridelované súradnice vo zvyšných dimenziách rovnako. Na menší a väčší podgraf sa rozdelia grafy s nepárnym počtom vrcholov. Použijeme úplnú indukciu. Báza indukcie bude množina veľkosti tri. Menšie podgrafy sú už len veľkosti dva a jedna. Jednovrcholový sa už ďalej nedelí a dvojvrcholový sa rozdelí na dva jednovrcholové. Predpokladáme, že pre delenie množín s mohutnosťou menšou ako n platí veta. Dokážeme, že potom musí platiť aj pre množinu M mohutnosti n : Ak je n párne, dá sa množina rozdeliť na dve množiny rovnakej mohutnosti, ktorých vrcholom

sa zvyšné dimenzie popridelujú rovnako. Teda každý vrchol v jednej bude mať iný vrchol v druhej množine s ktorým sa bude líšiť v práve jednej dimenzii a to v tej podľa ktorej sme M rozdelili. Ak n je nepárne, vzniknú dve množiny M_1, M_2 . Obe z nich už podľa IP spĺňajú tvrdenie vety. Rozdeľia sa každá na dve množiny, pričom z množiny s párnou mohutnosťou vzniknú dve rovnako veľké množiny M_{11}, M_{12} a množina M_{21} tejto veľkosti vznikne aj z množiny s nepárnou mohutnosťou. Druhá množina M_{22} z tejto množiny bude mať o prvok viac alebo menej. Prvé tri množiny sa už budú deliť rovnako, teda viem povýberať trojice vrcholov, každý z inej množiny, ktoré budú mať vo zvyšných dimenziách rovnaké súradnice. Medzi dvomi vrcholmi z M_{11}, M_{12} , označme ich m_{11}, m_{12} , povedie hrana, lebo sa líšia práve v jednej dimenzii. Tretí vrchol, označme ho m_{21} bude spojený hranou s niektorým z tých dvoch, pretože pri druhom delení jeden z nich dostal rovnakú súradnicu ako on v dimenzii druhého delenia a teda sa líšia iba v dimenzii prvého delenia množiny M . Ak je prvok m_{21} spojený s prvkom z M_{22} , označme ho m_{22} , potom je m_{22} spojený aj s tým prvkom z dvojice m_{11}, m_{12} , s ktorým nie je spojený m_{21} . Prvok m_{22} neexistuje iba vtedy, ak $|M_{22}| < |M_{21}|$. Ak $|M_{22}| > |M_{21}|$ potom v M_{22} majú všetky vrcholy z M_{21} izomorfný obraz a teda aj príslušná časť z párnej množiny. Z horeuvedeného vyplýva, že menšia množina z prvého delenia má obraz, izomorfný a spĺňajúci podmienky vety 30, vo väčšej množine vzniknutej z tohto delenia a keďže medzi vzorom a obrazom vedie hrana, veta platí. \square

Lema 33. *Maximálny počet hrán, ktoré môžu viesť v podgrafe hyperkocky indukovanom m bodmi je daný postupnosťou a_m , kde $a_1 = 0; a_2 = 1$; a pre $\forall i < 2; a_i = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + a_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} + a_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}$*

Dôkaz. V dôkaze použijeme úplnú indukciu. Báza indukcie je očividná: hyperkocka nemá slučky a teda v jej jenovrcholovom indukovanom grafe nevedie hrana a hyperkocka nemá násobné hrany, teda v jej indukovanom dvojvrcholovom podgrafe môže viesť najviac jedna hrana. Predpokladáme, že pre všetky členy s indexom menším ako m platí, že udávajú najväčší možný počet hrán v indukovanom podgrafe hyperkocky zo všetkých množín jej bodov, ktorých mohutnosť je rovná indexu daného člena postupnosti. ďalej predpokladáme, že pre každého člena postupnosti s menším indexom platí tvrdenie vety. Ukážeme, že existuje indukovaný podgraf hyperkocky s m bodmi s najvyšším možným počtom hrán G taký, ktorý niektorá dimenzia delí na polovice G_1 a G_2 , teda na množiny vrcholov, ktorých mohutnosti sa líšia najviac o jedna. To vyplýva z toho, že neexistuje taký podgraf hyperkocky, ktorý by delila inak a mal by zároveň vyšší počet hrán. Nech taký podgraf G' existuje. Potom ho vybraná dimenzia delí na podgrafy s počtom bodov a_i, a_j . Keďže sú obe neprázdne, sú menšie ako m a teda pre ne platí indukčný predpoklad. $a_i = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + a_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} + a_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}$ a $a_j = \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + a_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} + a_{\lceil \frac{j}{2} \rceil}$ Bez ujmy na všeobecnosti, nech $i < j$. Aby sme zjednodušili indexovanie označme $a_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} = a_{i1}; a_{\lceil \frac{i}{2} \rceil} = a_{i2}; a_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} = a_{j1}$ a $a_{\lceil \frac{j}{2} \rceil} = a_{j2}$. Je zrejmé, že $a_{i2} - a_{i1} \leq 1$ a

$a_{j2} - a_{j1} \leq 1$. Ak teda rozdelíme G podľa dimenzie, ktorá ho delí na G_1 a G_2 , ich mohutnosti budú bez ujmy na všeobecnosti $a_{i2} + a_{j1}$; $a_{j2} + a_{i1}$. Z IP zároveň platí, že G_1 a G_2 majú aspoň tak dobré rozdelenie ako na množiny veľkostí a_{i2}, a_{j1} respektíve a_{j2}, a_{i1} . Počet hrán, ktoré vedú vo podgrafe G' je teda $a_{m'} = i + \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + a_{i1} + a_{i2} + a_{j1} + a_{j2}$. Je zrejmé, že menšia z množín na ktoré sa rozdelí G bude mať veľkosť $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ a v týchto podmnožinách vedie aspoň $a_{i1} + a_{j2} + \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ respektíve $a_{j1} + a_{i2} + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ hrán. Čiže $a_m \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + a_{i1} + a_{j2} + \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + a_{j1} + a_{i2} + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$. Z toho si ľahko ukážeme, že $a_m \geq a_{m'}$. $a_m - a_{m'} \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lfloor \frac{i}{2} \rfloor - i - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ a keďže $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor \geq \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ potom platí, že $a_m - a_{m'} \geq 0$. Tým sme dokázali, že neexistuje lepšie rozdelenie podgrafu hyperkocky indukovaného m vrcholmi ako rozdelenie na polovice. Z predošlých viet vyplýva, že takéto rozdelenie je možné. \square

Dôkaz. Zoberme jednu takúto dimenziu a rozdelíme body na dve množiny, podľa toho, či v nej majú 1 alebo 0. Platia dve veci: medzi týmito dvomi množinami vedie najviac toľko hrán, koľko má menšia z nich vrcholov; v iných dimenziách už medzi týmito vrcholmi hrany nevedú. Prvá vec vyplýva z toho, že každý vrchol má v jednej dimenzii najviac jednu hranu (pri nekompletnej hyperkocke, pri kompletnej práve jednu). Druhá vyplýva z toho, že hrana spája vrcholy, ktoré sa líšia práve v jednej súradnici a vedie v dimenzii tejto súradnice. Ak by mala viesť medzi týmito dvomi množinami hrana v nejakej inej súradnici, musela by spájať vrcholy, ktoré sa líšia v najmenej dvoch súradniciach (v tej ktorá rozdeľuje vrcholy na dve množiny a v tej v ktorej vedie táto hrana), čo nemôže.

Na tieto dve množiny sa teda môžeme pozrieť na každú zvlášť a znova ich deliť podľa ďalších súradníc až kým sa nerozpadnú na jednovrcholové množiny. Najväčší možný počet hrán vedúcich v tejto množine vrcholov je ohraničený zhora sumou veľkosti menších množín cez všetky takéto delenia.

Toto ohraničenie získame spätne. Na konci máme m izolovaných vrcholov. Ako mohli byť pospájané tak, aby medzi nimi viedol najväčší možný počet hrán? Začnime s m izolovanými vrcholmi. V každom momente je jasné, že nech sa najmenšia množina odrezala od ľubovoľnej inej, rátal sa ako maximálny počet hrán mohutnosť tejto množiny. Počet delení množín je konštantný, na čo sa dá ľahko použiť klasický príklad s lámaním čokolády na m kúskov. Horné ohraničenie počtu hrán vedúcich v množine bodov získame ako súčet miním cez všetky delenia. Pozrime sa na dve najmenšie množiny v ľubovoľnej fáze delenia a pozrime sa na ne odspodu, tj. pri spätnej konštrukcii delenia z konečných jednovrcholových množín - teda na ich postupné spájanie. Tvrdíme, že ľubovoľné spájanie nie je lepšie ako spojenie dvoch najmenších množín. Sporom, nech existuje také najlepšie spájanie, ktoré nespája dve najmenšie množiny a súčet jeho miním je ostro väčší ako takého, ktoré ich spája.

- TODO lema

Lema 34. *Majme množinu množín vrcholov, označme ju M . Nech existuje taká postupnosť spájania týchto množín, ktorého súčet bude najvyšší možný. Nech sa v ňom nenachádza spojenie najmenšej množiny s inou v prvom kroku, ukážeme že existuje poradie, kde sa nachádza o krok skôr, ktoré je aspoň také dobré alebo pôvodné nie je najlepšie.*

Dôkaz. Ak sa najmenší prvok spája s množinou, ktorá bola v M , vieme spojenie minima s ňou presunúť do úplne prvého kroku spájania. Ak sa spája s množinou, ktorá vznikla spojením dvoch množín, premiestnime krok pripojenia minima hneď za krok pri ktorom táto množina vznikla. Označme množiny z ktorých táto množina vznikla A, B a mohutnosť minima označme C , $|A| = a$; $|B| = b$; $|C| = c$. Bez ujmy na všeobecnosti $a \leq b$. Spájanie nebolo optimálne, lebo v jeho súčte sa nachádza $c+a$, keby sa však spojila najprv množina A s C tak by bol celkový súčet väčší, lebo by obsahoval buď $c+b$ alebo $c+(a+c)$.

□

Každý vrchol je 0-rozmernou kockou sám o sebe. Všetky hrany, ktoré medzi nimi môžu viesť v prvej dimenzii, v druhej, tretej atď. ... TODO výde z toho hyperkocka a elegantnejšie ako predtým :) – stále sa mi to mezda dokázané, že iný výber vrcholov nedá viac hrán ...

Treba maximalizovať počet dvojíc líšiacich sa v práve jednej dimenzii ... V každej dimenzii má vrchol max jednu hranu

To že medzi vrcholmi vedie hrana znamená, že sú spolu v nejakej hyperkocke. V čím väčšej sú, tým viac hrán z nich ide.

Ukážeme že maximalizácia n -rozmerných kociek maximalizuje počet $n-1$ rozmerných. Vezmeme najväčšiu maximálnu disjunktnú množinu $n-1$ rozmerných kociek. Aké je poprepájanie týchto kociek hranami pri ktorom je najviac $n-1$ rozmerných kociek?

Ak vedie hrana medzi vrcholmi a tieto sú spojené každý hranami rovnakej dimenzie s inými dvomi vrcholmi, vedie hrana aj medzi týmito dvomi vrcholmi. Je to dané tým, že ak odstránime dimenziu v ktorej vedie hrana, tieto vrcholy sa zobrazia na seba.

Kocka vyššej dimenzie vznikne, ak spojíme dve $n-1$ rozmerné kocky hranami podľa nejakého izomorfného zobrazenia dostaneme n -rozmernú kocku, ktorá má n kociek – 1 $n-1$ rozmerných kociek.

□

Izolované vrcholy \rightarrow jednorozmerné kocky \rightarrow dvojrozmerné kocky \rightarrow ... vždy dve spojíme na jednu s vyšším rozmerom ...

Čiže trade-off medzi počtom značiek a pohybom ... stačí jedna návšteva vrcholu ... otvorí pri nej všetky porty ... počet značiek = počet mimokostrových (portových) hrán ...

Čím vyššia dimenzia kocky, tým je menej kostrových hrán oproti portovým -> stačí menej pohybom na použitie daného množstva značiek.

Ak vrcholov nie je presne toľko, ako v nejakej n -rozmernej kocke tj. 2^n tak ich vyberáme z vrcholov najmenšej kocky s väčším počtom vrcholov tak, že vezmeme vrcholy nejakej $(n-1)$ rozmernej kocky, ktorá je jej podgrafom, v ďalšom kroku zvyšok vrcholov vyberieme z ešte nepoužitých tak, aby tvorili kocku čo najväčšej dimenzie a tak ďalej, kým nevyberieme všetky vrcholy. Každá n -rozmerná kocka sa dá rozdeliť na dve disjunktné $(n-1)$ -rozmerné kocky. Každý vrchol takejto kocky je spojený s práve jedným vrcholom z druhej kocky. Agent teda vždy nájde kocku ktorá je najmenšia taká, že má viac vrcholov. Jednu z týchto kociek pokryje a zvyšné vrcholy umiestni do druhej kocky rekurzívnym spôsobom.

Týmto sme vyriešili hľadanie postupnosti k vrcholom s najväčším počtom hrán medzi nimi. Teraz treba zistiť, ako veľká musí byť množina značiek potrebná na konštrukciu týchto hrán. Ak má agent minúť čo najmenej značiek pri tvorbe portových hrán, treba aby ostali porty otvorené čo najkratšie - čas meriame pohybmi agenta.

Počet značiek, ktoré agent potrebuje pre konštrukciu n -rozmernej kocky je suma dva na i minus jedna pre i od jedna po n . (po konštrukcii jednej kocky ostávajú otvorené porty do druhej a agent potrebuje rovnaký počet značiek ako na predošlú ... - lenže postupne sa uvoľňujú) pozn. bude to teda asi \sum portov pre štvrtinovú kocku + dva na i minus jedna

6.3.1 2-rozmerná kocka

Elementárny prípad. Stačí jedna portová značka a tri pohyby - operácie NH.

6.3.2 3-rozmerná kocka

1 značka Pri použití jednej značky na porty vie agent trojrozmernú kocku zostrojiť na 15 pohybom: OP, NH, NH, NH, OP, OP, S1, NH, NH, OP, OP, S2, S2, NH, OP, OP, S1, S1, NH, OP, OP, S1, S2, S3, OP. Na menej sa to nedá. Agent potrebuje skonštruovať 5 mimokostrových hrán a na každú potrebuje aspoň 3 pohyby.

2 značky Trojrozmernú kocku pri použití dvoch značiek na porty dokáže agent zostrojiť na 11 pohybom a menej sa nedá. Operácie agenta: OP1, NH, NH, OP2, NH, OP1, NH, OP1, NH, OP2, NH, OP2, NH, OP1, OP1, S1, S1, S2, OP1, S1, OP2 Na

menej sa nedá, pretože porty treba otvoriť medzi dvojicou vrcholov líšiacich sa v práve jednej súradnici. Teda medzi otvorením portov jednej hrany potrebuje agent aspoň dve preklopenia na rovnakej súradnici a jedno na inej. Vie využiť najviac jedno preklopenie, ktoré nastalo pri konštrukcii predošlej hrany, čiže na konštrukciu hrany potrebuje najmenej dva ďalšie pohyby. Na konštrukciu prvej hrany potrebuje tri pohyby.

$$3 + 2 * 8 = 11$$

3 značky Trojrozmernú kocku agent za použitia troch portových značiek zostrojí na 9 pohybov. Na menej sa nedá. Operácie agenta: OP1, OP3, NH, NH, OP2, NH, OP1, NH, OP1, NH, OP2, NH, OP2, NH, OP1, OP3, S3(?), S1, OP2 S použitím menšieho množstva pohybov to agent urobiť nemôže. Kým vznikne prvá portová hrana - značka sa uvoľní na ďalšie použitie, vytvorí agent tri nové vrcholy. Teda je vo štvrtom vrchole. Súčet stupňov predošlých troch je deväť, z čoho päť zaberú nové hrany. To znamená, že do jedného z týchto vrcholov sa agent bude musieť vrátiť otvoriť port alebo z neho vytvoriť novú hranu. Keby tento vrchol bol tretí podľa vzniku, tak sa doň agent môže vrátiť na jeden ťah. Tu môžu nastať dve možnosti: pôjde tam otvoriť port alebo vytvoriť novú hranu. Ak otvorí port, bude mu chýbať značka na štvrtom vrchole podľa vzniku a bude sa musieť vrátiť aj do neho. Ak otvorí port s novouvoľnenou značkou na štvrtom vrchole a z tretieho urobí NH. Ocitne sa vo vrchole v ktorom nemôže otvoriť port, lebo sa nelíši v práve jednej súradnici od žiadneho z vrcholov v ktorých sú porty pootvárané. Teda v oboch prípadoch potrebujem ďalšie dva pohyby, ktoré nie sú operáciou NH. Ak sa agent nevráti hneď do vrchola, v ktorom neotvoril port, bude musieť prejsť do niektorého z jeho dvoch susedov (lebo z nich už odišiel a z iného vrchola sa tam nedostane). To sú dva pohyby okrem operácií NH. Počet operácií NH je konštantný pre daný graf a rovná sa počtu hrán kostry. V tomto prípade je to sedem. Teda agent vybavený tromi rôznymi značkami na porty potrebuje aspoň deväť krokov na konštrukciu trojrozmernej kocky.

4 značky 4 rôzne značky portov agentovi na konštrukciu trojrozmernej kocky stačia: OP1, OP2, NH, OP3, NH, OP4, NH, OP1, NH, OP1, NH, OP4, NH, OP3, NH, OP2, OP1 Agent vzkoná sedeme pohybov, čo je nevyhnutné minimum na konštrukciu trojrozmernej kocky. Pridanie ďalších značiek už teda nič nevylepší.

6.3.3 4-rozmerná kocka

1 značka Ak chcem skonštruovať portové hrany použitím troch pohybov na hranu a žiadne ďalšie pohyby, tak musím vo vrchole, kam otvorením portu vznikne nová portová hrana, otvoriť port znovu. Portové hrany teda budú tvoriť súvislý ťah.

Všetkých hrán v štvorrozmernej kocke je 32, pričom kostrových je 15. Portových hrán je teda 17. Sled portových hrán sa nemôže pretínať, pretože nemôže existovať vrchol do ktorého nevedie kostrová hrana a každý vrchol má stupeň 4. Keďže stupeň vrcholov je párny, kostru treba zostrojiť tak, aby dva z nich mali nepárny stupeň a zvyšné párny. Čo je nutná podmienka zostrojenia jediného ťahu zo všetkých zvyšných hrán. Kostra má apod. dva listy a stupeň listov je nepárny. Ak teda kostra nemá mať väčší počet listov, musia mať zvyšné vrcholy stupeň dva. Kostra je teda cesta. Ukážeme, že nie je možné zostrojiť štvorrozmernú kocku na $3 * 17 = 51$ pohybov. Vrcholy v ktorých kostra-cesta začína majú tri portové hrany. Aby sme použili len tri pohyby na jednu portovú hranu, potrebujeme začať portové hrany konštruovať v jednom z týchto vrcholov. v týchto vrcholoch začína aj cesta-kostra. Keďže kostra vzniká tak, že na už existujúcom vrchole vykoná agent operáciu NH, v každom momente je práve jeden vrchol v ktorom môže byť agent, ak má skonštruovať graf na 51 pohybov. Tým však, že agent odišiel z prvého vrchola a tomu chýbajú ešte dve hrany, sa doň bude musieť vrátiť a otvoriť v ňom port. V konštruovanom grafe (medzivýsledku) sa však agent od prvého vrchola vzdaluje každou portovou hranou. Pri skonštruovaní posledného vrchola bude teda od prvého v medzivýsledku konštrukcie ďalej ako tri a teda nie je schopný skonštruovať graf týmto spôsobom. Vrchol do ktorého ide agent konštruovať portovú hranu musí byť v medzivýsledku vzdialený práve tri od druhého vrchola s otvoreným portom a súčasne sa musí líšiť v práve jednej dimenzii. Pri tomto postupe žiadny takýto vrchol k poslednému skonštruovanému vrcholu v momente otvorenia portu nie je a jediný, ktorý sa tak dá vytvoriť je pomocou prechodu po novej portovej hrane a dvoch opráciách NH, alebo po troch operáciách NH. Ak použije prvý spôsob, kým sa dá, dostane sa do bodu z ktorého sa už tento nedá uplatniť a už nebude schopný skonštruovať ďalšiu hranu na tri pohyby. Pri použití druhého spôsobu z inicializačného vrchola trikrát sa dostane agent do situácie, kedy je od inicializačného vrchola vzdialený na medzivýsledku o tri hrany a zároveň sa ich polohy líšia v práve jednej dimenzii. Takže agent môže skonštruovať zvyšné dve hrany pre inicializačný vrchol. (TODO mohol by to urobiť aj neskôr, ale nejde to, lebo štvorrozmerná kocka má len 15 vrcholov a už by mu nevydalo vytvoriť tri portové hrany pomocou operácií NH) Keď má agent z vrcholu vytvoriť portovú hranu a odchádza z neho operáciou NH, odíde po jednej dimenzii a portová hrana sa otvorí v druhej. Teda vytvorí hrany v dvoch dimenziách vrcholu. Po skonštruovaní prvej portovej hrany má vrchol v ktorom agent skončí ešte "voľné" dve dimenzie. Z jednej má ísť portová hrana a z druhej kostrová. Teda po jednej agent odíde a v druhej sa po troch pohyboch bude líšiť. Rovnaká situácia nastane po vytvorení druhej portovej hrany. Tretia portová hrana musí mať rovnakú dimenziu ako prvá, aby sa agent po jej konštrukcii líšil s inicializačným vrcholom v práve jednej dimenzii.

štvrtá portová hrana je teda tiež daná. Dimenzie sú navzájom zameniteľné, takže na ich výbere nezáleží. (TODO Začiatok konštrukcie štvorrozmernej kocky je deterministický - možno je celá konštrukcia ...)

Literatúra