Univerzita Komenského, Bratislava
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

Konštrukcia grafov pomocou mobilných agentov

Diplomová práca

2014

Bc. Jakub Kováč

Univerzita Komenského, Bratislava
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

Konštrukcia grafov pomocou mobilných agentov

Diplomová práca

Študijný program:	Informatika
Študijný odbor:	2508 Informatika
Školiace pracovisko:	Katedra Informatiky
Školiteľ:	prof. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.

Bratislava, 2014

Bc. Jakub Kováč

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Kapitola 1

Všeobecná konštrukcia

1.1 Definícia

Definícia 1. *Model sa skladá z grafu a agenta. Graf má nemeniteľné lokálne číslovanie koncov hrán vo vrchole, podľa poradia vzniku. Koniec hrany, ktorý vznikol ako prvý, má číslo 1. Prvý koniec vznikne spolu s vrcholom, zvyšné otvorením portu. Počiatočný graf obsahuje práve jeden izolovaný vrchol a nič viac. Akonáhle sú otvorené dva porty s rovnakými značkami, vznikne medzi nimi nová hrana a tieto porty tým zaniknú.*
Agent môže vo vrchole, v ktorom sa nachádza, vykonávať tieto operácie: pohnúť sa po hrane do susedného vrcholu, otvoriť port so značkou, vytvoriť hranu do nového vrchola v ktorom sa následne ocitne. Agent rozlišuje hrany podľa lokálneho číslovania ich koncov vo vrchole, kde sa práve nachádza. Agent vie ktorý koniec patrí hrane po ktorej prišiel do vrcholu. Agent začína vo vrchole počiatočného grafu.
Agent pri vykonávaní algoritmu konštrukcie grafu nemá obmedzenú výpočtovú silu ani pamäť. Množina značiek portov je konečná a vopred daná. Efektivita algoritmu konštrukcie daného grafu sa pri tomto modely meria počtom pohybov agenta (tj. sumou počtu návštev cez všetky vrcholy) pri danej množine značiek portov, tento počet sa snažíme minimalizovať.

Označenie 1. *Označenie operácií agenta: - nová hrana = NH - otvoriť port (s číslom n) = OP(n) - prejsť sa po hrane s lokálnym číslom konca k = Sk*

Lema 1. *Agent na ceste do vrchola v grafe musí ísť po už existujúcich hranách.*

Dôkaz. Žiadna operácia agentovi nedovoľuje priamo prejsť medzi dvoma vrcholmi, ktoré nespája hrana. □

Lema 2. *Ak agent odíde z vrcholu v ktorom je počet súčet incidentných hrán a otvorených portov nižší, ako je počet hrán s ktorými má byť vrchol incidentný v konštruovanom grafe, tak sa agent doň musí neskôr vrátiť.*

Dôkaz. Neexistuje postupnosť operácií pomocou ktorej sa dá vytvoriť hrana do existujúceho vrcholubez jeho návštevy, ak v ňom nie je otvorený port pre túto hranu. □

Lema 3. *Hrany vytvorené operáciou "nová hrana"tovria kostru grafu.*

Dôkaz. Okrem inicializačného vrcholu, všetky vrcholy vzniknú operáciou "nová hrana"(NH). Každý vrchol okrem inicializačného je spojený hranou s lokálnym číslom 1 so starším vrcholom (vrchol, ktorý vznikol skôr). Po týchto hranách sa dá z každého vrchola dostať do inicializačného, teda podgraf tvorený hranami pochádzajúcimi z oprácií NH je súvislý. Ich počet je zároveň o jeden menší ako počet vrcholov, teda ide o kostru. □

Lema 4. *Hrany, ktoré prejdem od otvorenia prvého portu hrany po otvorenie druhého, tvoria v grafe s novovzniknutou hranou uzavretý sled.*

Dôkaz. Je to dané operáciami, ktoré môže agent vykonať. □

Poznámka 1. *Z tohto sledu viem vybrať kružnicu.*

Lema 5. *Minimálny počet hrán, ktoré potrebujem prejsť pri konštrukcii hrany pomocou portov je rovný alebo väčší ako dĺžka najmenšej kružnice, na ktorej sa táto hrana nachádza.*

Dôkaz. Nájdem menší takýto sled ako je najkratšia kružnica. Z neho viem vybrať kružnicu, čo je spor s minimálnosťou najkratšej kružnice. □

Lema 6. *Ak mám k dispozícii dostatočný počet portov, problém efektívnej konštrukcie grafu sa redukuje na hľadanie najkratšieho sledu v ktorom sú všetky vrcholy. Pri hamiltonovskom grafe ide o hamiltonovskú kružnicu.*

Dôkaz. Agent prechádza vrcholmi, pričom mu sačí jedna návšteva každého vrcholu v ktorom otvorí potrebný počet portov príslušných značiek. □

Lema 7. *Vrchol v musím navštíviť minimálne* $\frac{deg(v)}{\#značka*2}$ *krát.*

Dôkaz. Pri každej návšteve viem otovrením portov so všetkými značkami vytvoriť nové hrany do vrcholov, kde sú otovrené príslušné porty a následne otvoriť toľko portov koľko je značiek, každý s inou značkou. □

1.1.1 Jedna značka pre porty

Lema 8. *Dolný odhad počtu krokov je minimum zo súčtov minimálnych kružníc pre všetky nekostrové hrany cez všetky kostry.*

Dôkaz. Menej ako najkratšia kružnica to agent urobiť nevie. Port pre ďalšiu hranu môže otvoriť port, až keď už vznikla predošlá. Od tohto momentu môže otvoriť port pre ďalšiu hranu a prejsť minimálne najkratšiu kružnocu na ktorej táto hrana leží a na konci otvoriť druhý port tejto hrany. □

Lema 9. *TODO zovšeobecniť prečo sa pri cyklickej mriežke tak našlapem a pri kocke nie ... a dokázať :)*

Dôkaz. □

Lema 10. *Po použití operácie NH, ktorou vznikne hrana h, sa nedostanem do už existujúceho vrchola bez použitia operácie OP, pri ktorej vznikne hrana alebo vracania sa po hrane h.*

Dôkaz. Vrchol v, ktorý vznikne operáciou NH je so zvyškom grafu spojený len hranou h, ktorá tvorí most do vzniku hrany operáciou OP medzi komponentmi na oboch stranách tohto mostu. □

Lema 11. *Najmenej krokov agent na konštrukciu konkrétnej hrany medzi už existujúcimi vrcholmi použije, ak pôjde do najbližšieho z nich, otvorí v ňom port a následne najkratšou cestou po už existujúcich hranách prejde do druhého vrcholu a otvorí port v ňom.*

Dôkaz. □

1.1.2 Dve a viac značiek pre porty

Ušetriť oproti situácii, keď agent môže použiť len jednu značku pre porty možno vtedy, ak konštruovaný graf obsahuje cykly, kotré majú spoločné hrany. Vtedy, ak agent prechádza vrcholom s ktorým bude incidentná nasledujúca hrana, v ňom otvorí port a následne sa doň už nemusí vracať ak existuje kratšia cesta.

1.2 Mriežka

Najmenší cyklus má dĺžku štyri. Teda medzi otvorením dvoch portov pre danú hranu vykoná agent najmenej tri pohyby po hranách.

1.2.1 Jedna značka pre porty

Lema 12. *Mriežku $m \times n$ je možné s použitím jedinej značky pre port zostrojiť pomocou $3mn + m$ pohybov. Kde m je menší z rozmerov.*

Dôkaz. Agent vykonáva: OP,NH,NH,NH,OP,(n-2)krát (OP,S1,NH,NH,OP),S1,NH,HN,OP čím vytvorí prvý riadok mriežky. Následne vykoná (m-1)krát (NH,OP,S1,S2,NH,OP,(n-1)krát (OP,S1,S2,NH,OP)) □

Lema 13. *TODO ... na menej to nejde ...*

Dôkaz. TODO □

Lema 14. *Pri rotačnej mriežke treba "odšľapať" oba "rotačné cykly" ... TODO*

Dôkaz. TODO ... □

1.3 N-rozmerná kocka

Vrcholy spojené hranou sa líšia práve v jednej súradnici. Každej hrane z vrcholu možno priradiť súradnicu v ktorej sa jej druhý vrchol od tohto odlišuje. Toto priradenie je injekcia. Susedia vrchola sa navzájom líšia v práve dvoch súradniciach. Pri pohybe po hrane mením jednu súradnicu svojej pozície. Z tohto vyplývajú obmedzenia pre úsporu pohybov pridávaním značiek pre porty. Napríklad pri použití dvoch značiek pre porty potrebuje agent na vytvorenie dvoch nových portových hrán aspoň 5 ťahov. Úspora nastáva, keď port pre druhú hranu otvorím už počas cesty za otvorením portu prvej hrany.

Lema 15. *Dva vrcholy, ktoré sa navzájom líšia v práve dvoch súradniciach majú práve dvoch spoločných susedov.*

Dôkaz. Susedné vrcholy sa líšia práve v jednej súradnici. Spločný sused dvoch vrcholov sa líši v práve jednej súradnici od každého z nich. Teda má všeky súradnice rovnaké ako jeden z nich a líši sa v jedej z tých dvoch. Teda ju má rovnakú ako druhý vrchol. Druhú z týchto súradníc má potom odlišnú od druhého vrchola. Čiže sa od každého z nich líši v práve jednej súradnici. Toto dáva práve dva rôzne vrcholy, ktoré susedia z oboma. Vrchol, ktorý sa od jedného z vrcholov líšiacich sa v dvoch súradniciach líši v nejakej inej, sa od druhého líši v troch súradniciah a teda s ním nesusedí. □

Otázkou ostáva, koľko hrán vie agent vytvoriť počas jednej návštevy vrcholu otváraním portov?

Lema 16. *Pri jednej návšteve vrcholu môže agent vytvoriť najviac* $(fracn - 12) >$ *#dimenzii hrán otvorením portu.*

Poznámka 2. *Rátajú sa hrany, ktoré vzniknú hneď tj. pri ktorých agent otvorením portov vytvorí druhý (posledný) koniec.*

Dôkaz. Je zrejmé: že vo všetkých vrcholoch, kam majú tieto hrany viesť, už agent bol; medzi dvomi vrcholmi vedie najviac jedna hrana. Z tohto a predošlej vety vyplýva, že po návšteve n vrcholov môže agent otvorením portu vytvoriť z vrcholu, kde sa nachádza, najviac $(fracn - 12) > \#dimenzii$ hrán. Z týchto $(fracn - 12)$ vrcholov sa od neho každý líši v inej súradnici, lebo ak by sa dva líšili v rovnakej, museli by to byť totožné vrcholy. □

Lema 17. *Existuje taká postupnosť n vrcholov, že pri návšteve posledného agent vytvorí* $(fracn - 12) >> \#dimenzii$ *hrán.*

Dôkaz. Ak vezmeme takúto postupnosť odzadu, vyzerala by až na substitúciu dimenzií takto: 1, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, ... □

Poznámka 3. *Avšak ľahko vidieť, že žiadne iné portové hrany by medzi vrcholmi v tejto postupnosti vzniknúť nemohli.*

Skúsme teda nájsť postupnosť (cestu v hyperkocke) s najväčším možný počtom portových hrán medzi jej vrcholmi.

Označenie 2. *O hrane povieme, že vedie v dimenzii k, ak sa vrcholy, ktoré spája, líšia v práve tejto dimenzii.*

Je jasné, že v akomkoľvek súvislom slede vrcholov povedie hrana medzi dvojicami nasledujúcich vrcholov, ide o hrany po ktorých agent prejde z vrcholu do vrcholu. Portová hrana môže vzniknúť medzi vrcholmi, ktoré sa líšia v práve jednej súradnici, lebo iné hrany v hyperkocke nie sú.

Označenie 3. *Poloha agenta sa skladá z jeho polôh v jednotlivých dimenziách kocky. v každej dimenzii môže nadobúdať jednu z dvoch hodnôt. Označme ich* 0 *a* 1*. Pri prechode po hrane agent preklopý jednu z týchto hodnôt v práve jednej dimenzii na druhú.*

Lema 18. *V ľubovoľnej postupnosti hrán medzi vrcholmi hyperkocky spojenými hranou, sa nachádza párny počet hrán v každej dimenzii okrem dimenzie v ktorej sa tieto vrcholy líšia a teda v nej vedie hrana medzi nimi.*

Dôkaz. Takéto dva vrcholy sa líšia v práve jednej dimenzii. Ak agent zmenil pri pohybe svoju polohu v nejakej dimenzii nepárny počet krát, tak je v tejto dimenzii v inej polohe ako bol na začiatku. Ak to nie je dimenzia v ktorej sa líši koncový vrchol od začiatočného - agent sa nenachádza v koncovom vrchole, lebo polohy agenta a tohto vrcholu nie sú rovnaké. □

Označenie 4. *Ak viem súradnice vrchola, môžem postupnosť ťahov agenta zapísať ako postupnosť zmien jeho súradníc v jednotlivých dimenziách.*

Ak sa nachádza v takejto postupnosti medzi vrcholmi, medzi ktorými vzniká portová hrana dvakrát hneď za sebou číslo nejakej dimenzie, znamená to, že agent šiel tam a späť a tieto dva prvky môžeme z postupnosti vylúčiť, lebo je to z pohľadu tejto dvojice vrcholov zbytočný pohyb. Ak takto zredukujeme niektorú postupnosť, získame inú, v ktorej ide agent po podmnožine hrán z pôvodnej a na rovný alebo menší počet pohybov.

Poznámka 4. *Pripomeniem, že hľadáme taký sled, že počet portových hrán medzi jeho vrcholmi je na daný počet značiek pre porty a počet portových hrán, ktoré vzniknú medzi jeho vrcholmi, najkratší možný.*

Ak má agent dostatok značiek pre porty, nezaujíma nás poradie v akom vrcholy postupnosti navštívil. Úlohu teda môžeme zredukovať na hľadanie takej množiny vrcholov veľkosti m, ktorá tvorí zo všetkých takto veľkých množín najmenší rez od zvyšku grafu. Pri konštantnom stupni vrcholov to znamená, že v takej vedie najviac hrán medzi vrcholmi v tejto množine. Keď sa pozrieme na vrcholy a pravidlá ich spájania hranami, zistíme, že tieto vedú len v nejakej kocke a čím viac rozmerov kocka má, tým viac hrán vedie medzi jej vrcholmi. Teda aj v n-rozmernej kocke povedie najviac hrán medzi vrcholmi takej množiny, ktorej indukovaný graf je izomorfný kocke. Vrchol k-rozmernej kocky sa nachádza v k (k-1)-rozmerných kockách, ktoré sú jej podgrafmi. Teda budeme hľadať množinu m bodov, ktoré sa dajú pokryť kockami čím vyššieho rozmeru a nemusíme si všímať kocky ktoré sú podgrafmi týchto kociek. tieto kocky sa však môžu prekrývať.

Lema 19. *S každou hyperkockou v ktorej vrchol neleží ho spája najviac jedna hrana. Ktorá vedie v inej dimenzii ako sú dimenzie tejto hyperkocky.*

Dôkaz. Každý vrchol hyperkocky má hrany vo všetkých jej dimenziách. Vo zvyšných dimenziách sú vrcholy hyperkocky totožné, lebo sa dva susedné líšia práve v jednej. Vrchol mimo hyperkocky spojený s vrcholom v nej sa od neho líši v inej dimenzii a v tejto sa líši teda aj od všetkých ostatných. Zároveň je vo všetkých dimenziách hyperkocky totožný s vrcholom z nej a teda sa líši v aspoň jednej dimenzii hyperkocky od jej ostatných vrcholov a má teda s nimi aspoň dve rodielne dimenzie. Nemôže ho preto s nimi spájať hrana. □

Lema 20. *Bijektívna substitúcia dimenzií na všetkých vrcholoch podgrafu hyperkocky zachováva hrany medzi vrcholmi. Rovnako aj preklopenie súradníc v niektorej dimenzii.*

Dôkaz. Ak sa dva vrcholy líšia práve v jednej dimenzii, budú sa v práve jednej dimenzii líšiť aj po tejto substitúcii, lebo dimenzie v ktorých boli rovnaké sa zobrazia na rovnaké a tá v ktorej sa kíšili sa u oboch zobrazí na rovnakú a budú sa v nej líšiť aj naďalej;

teda medzi nimi povedie hrana. Pri preklopení súradníc sa medzi vrcholmi zachovajú rovnosti a rozdiely v danej dimenzii, teda aj hrany. □

Lema 21. *Vrcholy súvislého podgrafu hyperkocky s počtom vrcholov m sa navzájom líšia v najviac m-1 súradniciach.*

Dôkaz. Vezmime kostru tohto podgrafu. Táto má m-1 hrán. Každá vedie v niektorej dimenzii. Cesta v tejto kostre udáva v ktorých dimenziách sa daná dvojica jej koncových vrcholov líši. Všetky cesty v tejto kostre idú cez najviac m-1 rôznych dimenzií, čo je jej počet hrán. V ostatných dimenziách sa dané vrcholy nelíšia, majú v nich teda navzájom rovnaké súradnice. □

Lema 22. *Podmnožina m bodov hyperkocky, ktoré indukujú graf s najvyšším počtom hrán je súvislá.*

Dôkaz. Nech existujú dva komponenty. Na jednom z nich urobíme postupné popreklápanie súradníc tak, aby susedil niektorý jeho bod s bodom v druhom komponente a teda medzi nimi viedla hrana. Čiže vyberieme jednu dimenziu v ktorej sa líšia a vo všetkých ostatných dimenziách, kde majp rozdielne súradnice preklápame postupne súradnice jedného z vrcholov. V prípade, že počas tohot postupu vznikne hrana spájajúca vyhrané dva komponenty, skončíme skôr. Pôvodné hrany sa zachovajú a jedna nová pribudne, čo je spor s najvyšším počtom hrán. Tieto kroky môžeme urobiť bez toho, aby sa dva vrcholy zobrazili na seba. Ak budeme robiť preklápanie súradníc po jednotlivých dimenziách, v tom prípade, ak by sa nejaký vrchol transformovaného komponentu podgrafu zobrazil na niektorý vrchol druhého komponentu, musela by medzi nimi viesť predtým hrana, teda stav v ktorom by boli komponenty prepojené a preklápanie by teda už nepokračovalo. □

Potrebujeme vybrať m vrcholový indukovaný podgraf hyperkocky tak, aby počet hrán v ňom bol maximálny možný.

Lema 23. *Vrcholy podgrafu hyperkocky sa dajú rozdeliť na dve množiny A,B podľa súradnice vo vybranej dimenzii. Počet hrán vedúcich z vrcholov v jednej množine do vrcholov v druhej množine je rovný alebo menší ako mohutnosť menšej z nich. Čiže* $|\{e|e = (a, b); a \in A; b \in B\}| <= min\{|A|, |B|\}$

Dôkaz. Každý vrchol má v jednej dimenzii najviac jednu hranu a hrana vedie v danej dimenzii medzi dvomi vrcholmi vtedy ak je to jediná dimenzia v ktorej majú rozdielne súradnice. V inej dimenzii medzi A a B hrana viesť nemôže, lebo by musela viesť medzi vrcholmi líšiacimi sa v najmenej dvoch dimenziách - v dimenzii hrany a v dimenzii podľa súradníc ktorej sú A a B vytvorené. Teda hrany medzi A a B môžu viesť len v jednej dimenzii a do menšej z A,B môže viesť najviac toľko hrán v jednej dimenzii, koľko má vrcholov. □

Lema 24. *Keď vezmeme z podgrafu hyperkocky len vrcholy, ktoré majú hranu v jednej vybranej dimenzii a označíme nimi indukovaný podgraf G. Vieme vrcholy G rozdeliť na dva izomorfné indukované podgrafy hyperkocky G_1 a G_2 podľa súradnice vrchola v tejto dimenzii.*

Dôkaz. Vrcholy, medzi ktoými vedie hrana sa líšia v práve jednej dimenzii, v ostatných dimenziách sú rovnaké. Keď teda vezmeme hrany vedúce medzi G_1 a G_2 a vytvoríme podľa nich bijektívne zobrazenie medzi týmito podgrafmi tak, aby sa dva vrcholy medzi ktorými vedie hrana vo vybranej dimenzii zobrazili na seba, dostaneme izomorfizmus. Ak totiž viedla medzi dvomi vrcholmi hrana, bude hrana viesť aj medzi ich obrazmi, lebo tieto majú rovnaké súradnice ako ich vzory vo všetkých dimenziách okrem jednej, kde sa oba obrazy od svojich vzorov líšia a teda majú súradnicu v tejto dimenzii rovnakú; obaja sú v komponente, kde majú túto súradnicu rovnakú všetky vrcholy. Ak sa teda líšili v jednej súradnici vzory, budú sa aj obrazy a ak sa líšili vzory vo viacerých súradniciach, budú sa v rovnakých súradniciach líšiť aj obrazy. Zobrazenie je teda izomorfizmus. □

Lema 25. *Existuje indukovaný podgraf G hyperkocky na m vrcholoch, ktorý je možné postupne rozdeliť podľa dimenzií až po jednovrcholové indukované podgrafy tak, že v každom kroku rozdelíme vrcholy každého podgrafu s počtom vrcholov aspoň dva do dvoch podmnožín A a B. Takých, že $|A| - |B| <= 1$.*

Dôkaz. Dôkaz bude konštrukčný. Budeme postupne deliť m vrcholovú množinu i ďalšie z nej vzniknuté množiny na menšie, až kým nedostaneme m jednoprvkových množín vrcholov. Pritom budeme postupne určovať súradnice jednotlivých vrcholov.

Budeme postupovať postupne po dimenziách, až kým budúd všetky množiny jednoprvkové. Vezmeme množinu M, rozdelíme ju na dve časti M_1, M_0 také že $|M_1|-|M_0| <= 1$. Vrcholy v M_1 budú mať v tejto dimenzii súradnicu 1 a vrcholy v M_0 budú mať v tejto dimenzii súradnicu 0. Ak je množina jednoprvková a delenie niektorých iných ešte pokračuje, dostane v každej ďalšej dimenzii súradnicu 1. Ak má kocka viac dimenzií ako je potrebných, aby obsiahla všetkých m vrcholov podgrafu, tak môžu dostať tieto vrcholy v týchto zvyšných dimenziách ľubovoľné súradnice, ale pre všetky vrcholy musí byť súradnica v každej z týchto dimenzií rovnaká. Tým sme zistili súradnice vrcholov vo všetkých dimenziách, podľa ktorých podgraf delíme. Pre účely tejto vety na súradniciach ostatných dimenzií nezáleží a môžu byť ľubovoľné. □

Lema 26. *Pri delení z vety 25 vedie medzi množinami vrcholov M_1 a M_0, ktoré vznikli rozdelením jednej množiny M podľa tohto delenia, práve toľko hrán, ako je mohutnosť* *menšej z týchto množín. Pričom, ak má kocka viac dimenzií ako je potrebných, aby obsiahla všetkých m vrcholov podgrafu, tak môžu dostať tieto vrcholy v týchto zvyšných dimenziách ľubovoľné súradnice, ale pre všetky vrcholy musí byť, na rozdiel od predošlej vety, súradnica v každej z týchto dimenzií rovnaká.*

Dôkaz. Stačí ukázať, že menší z indukovaných podgrafov má vo väčšom izomorfný obraz podľa vety 24. Vtedy vedie z každého vrchola v menšom podgrafe hrana do nejakého vrchola vo väčšom podgrafe a týchto hrán je presne toľko, koľko je vrcholov menšieho podgrafu. Teda potrebujeme dokázať, že vo väčšom podgrafe existuje skupina vrcholov, ktorej budú súradnice v dimenziách pridelené rovnako ako vrcholom v menšom podgrafe. Prideľovanie súradníc je deterministické, teda rovnako veľkým množinám vrcholov v rovnakej fáze budú poprideľované súradnice vo zvyšných dimenziách rovnako. Na menší a väčší podgraf sa rozdelia grafy s nepárnym počtom vrcholov. Použijeme úplnú indukciu. Báza indukcie bude množina veľkosti tri. Menšie podgrafy sú už len veľkosti dva a jedna. Jednovrcholový sa už ďalej nedelí a dvojvrcholový sa rozdelí na dva jednovrcholové. Predpokladáme, že pre delenie množín s mohutnosťou menšou ako n platí veta. Dokážeme, že potom musí platiť aj pre množinu M mohutnosti n: Ak je n párne, dá sa množina rozdeliť na dve množiny rovnakej mohutnosti, ktorých vrcholom sa zvyšné dimenzie poprideľujú rovnako. Teda každý vrchol v jednej bude mať iný vrchol v druhej množine s ktorým sa bude líšiť v práve jednej dimenzii a to v tej podľa ktorej sme M rozdelili. Ak n je nepárne, vzniknú dve množiny M_1, M_2. Obe z nich už podľa IP spĺňajú tvrdenie vety. Rozdelia sa každá na dve množiny, pričom z množiny s párnou mohutnosťou vzniknú dve rovnako veľké množiny M_{11},M_{12} a množina M_{21} tejto veľkosti vznikne aj z množiny s nepárnou mohutnosťou. Druhá množina M_{22} z tejto množiny bude mať o prvok viac alebo menej. Prvé tri množiny sa už budú deliť rovnako, teda viem povyberať trojice vrcholov, každý z inej množiny, ktoré budú mať vo zvyšných dimenziách rovnaké súradnice. Medzi dvomi vrcholmi z M_{11},M_{12}, označme ich m_{11},m_{12}, povedie hrana, lebo sa líšia práve v jednej dimenzii. Tretí vrchol, označme ho m_{21} bude spojený hranou s niektorý z tých dvoch, pretože pri druhom delení jeden z nich dostal rovnakú súradnicu ako on v dimenzii druhého delenia a teda sa líšia iba v dimenzii prvého delenia množiny M. Ak je prvok m_{21} spojený s prvkom z M_{22}, označme ho m_{22}, potom je m_{22} spojený aj s tým prvkom z dvojice m_{11},m_{12}, s ktorým nie je spojený m_{21}. Prvok m_{22} neexistuje iba vtedy, ak $|M_{22}| < |M_{21}|$. Ak $|M_{22}| > |M_{21}|$ potom v M_{22} majú všetky vrcholy z M_{21} izomorfný obraz a teda aj príslušná časť z párnej množiny. Z horeuvedeného vyplýva, že menšia množina z prvého delenia má obraz, izomorfný a spĺňajúci podmienky vety 24, vo väčšej množine vzniknutej z tohto delenia a keďže medzi vzorom a obrazom vedie hrana, veta platí. □

Lema 27. *Maximálny počet hrán, ktoré môžu viesť v podgrafe hyperkocky indukovanom* *m bodmi je daný postupnosťou* a_m*, kde* $a_1 = 0; a_2 = 1;$ *a pre* $\forall i < 2; a_i = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + a_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} + a_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}$

Dôkaz. V dôkaze použijeme úplnú indukciu. Báza indukcie je očividná: hyperkocka nemá slučky a teda v jej jenovrcholovom indukovanom grafe nevedie hrana a hyperkocka nemá násobné hrany, teda v jej indukovanom dvojvrcholovom podgrafe môže viesť najviac jedna hrana. Predpokladáme, že pre všetky členy s indexom menším ako m platí, že udávajú najväčší možný počet hrán v indukovanom podgrafe hyperkocky zo všetkých množín jej bodov, ktorých mohutnosť je rovná indexu daného člena postupnosti. ďalej predpokladáme, že pre každého člena postupnosti s menším indexom platí tvrdenie vety. Ukážeme, že existuje indukovaný podgraf hyperkocky s m bodmi s najvyšším možným počtom hrán G taký, ktorý niektorá dimenzia delí na polovice G_1 a G_2, teda na množiny vrcholov, ktorých mohutnosti sa líšia najviac o jedna. To vyplýva z toho, že neexistuje taký podgraf hyperkocky, ktorý by delila inak a mal by zároveň vyšší počet hrán. Nech taký podgraf G' existuje. Potom ho vybraná dimenzia delí na podgrafy s počtom bodov a_i, a_j. Keďže sú obe neprázdne, sú menšie ako m a teda pre ne platí indukčný predpoklad. $a_i = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + a_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} + a_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}$ a $a_j = \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + a_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} + a_{\lceil \frac{j}{2} \rceil}$ Bez ujmy na všeobecnosti, nech i < j. Aby sme zjednodušili indexovanie označme $a_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} = a_{i1}; a_{\lceil \frac{i}{2} \rceil} = a_{i2}; a_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} = a_{j1}$ a $a_{\lceil \frac{j}{2} \rceil} = a_{j2}$. Je zrejmé, že $a_{i2} - a_{i1} <= 1$ a $a_{j2} - a_{j1} <= 1$. Ak teda rozdelíme G podľa dimenzie, ktorá ho delí na G_1 a G_2, ich mohutnosti budú bez ujmy na všeobecnosti $a_{i2} + a_{j1}; a_{j2} + a_{i1}$. Z IP zároveň platí, že G_1 a G_2 majú aspoň tak dobré rozdelenie ako na množiny veľkostí a_{i2}, a_{j1} respektíve a_{j2}, a_{i1}. Počet hrán, ktoré vedú vo podgrafe G' je teda $a_{m'} = i + \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + a_{i1} + a_{i2} + a_{j1} + a_{j2}$. Je zrejmé, že menšia z množín na ktoré sa rozdelí G bude mať veľkosť $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ a v týchto podmnožinách vedie aspoň $a_{i1} + a_{j2} + \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ respektíve $a_{j1} + a_{i2} + \lceil \frac{i}{2} \rceil$ hrán. Čiže $a_m >= \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + a_{i1} + a_{j2} + \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + a_{j1} + a_{i2} + \lceil \frac{i}{2} \rceil$ Z toho si ľahko ukážeme, že $a_m >= a_{m'}$. $a_m - a_{m'} >= \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lceil \frac{i}{2} \rceil - i - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ a keďže $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor >= \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ potom platí, že $a_m - a_{m'} >= 0$. Tým sme dokázali, že neexistuje lepšie rozdelenie podgrafu hyperkocky indukovaného m vrcholmi ako rozdelenie na polovice. Z predošlých viet vyplýva, že takéto rozdelenie je možné. □

Dôkaz. Zoberme jednu takúto dimenziu a rozdeľme body na dve množiny, podľa toho, či v nej majú 1 alebo 0. Platia dve veci: medzi týmito dvomi množinami vedie najviac toľko hrán, koľko má menšia z nich vrcholov; v iných dimenziách už medzi týmito vrcholmi hrany nevedú. Prvá vec vyplýva z toho, že každý vrchol má v jednej dimenzii najviac jednu hranu (pri nekompletnej hyperkocke, pri kompletnej práve jednu). Druhá vyplýva z toho, že hrana spája vrcholy, ktoré sa líšia práve v jednej súradnici a vedie v dimenzii tejto súradnice. Ak by mala viesť medzi týmito dvomi množinami hrana v nejakej inej súradnici, musela by spájať vrcholy, ktoré sa líšia v najmenej dvoch súradniciach (v tej ktorá rozdeľuje vrcholy na dve množiny a v tej v ktorej vedie táto hrana), čo nemôže.

Na tieto dve množiny sa teda môžeme pozrieť na každú zvlášť a znova ich deliť podľa ďalších súradníc až kým sa nerozpadnú na jednovrcholové množiny. Najväčší možný počet hrán vedúcich v tejto množine vrcholov je ohraničený zhora sumov veľkosti menších množín cez všetky takéto delenia.

Toto ohraničenie získame spätne. Na konci máme m izolovaných vrcholov. Ako mohli byť pospájané tak, aby medzi nimi viedol najväčší možný počet hrán? Začnime s m izolovanými vrcholmi. V každom momente je jasné, že nech sa najmenšia množina ödrezalaöd ľubovoľnej inej, rátal sa ako maximálny počet hrán mohutnosť tejto množiny. Počet delení množín je konštantný, na čo sa dá ľahko použiť klasický príklad s lámaním čokolády na m kúskov. Horné ohraničenie počtu hrán vedúcich v množine bodov získame ako súčet miním cez všetky delenia. Pozrime sa na dve najmenšie množiny v ľubovoľnej fáze delenia a pozrime sa na ne odspodu, tj. pri spätnej konštrukcii delenia z konečných jednovrcholových množín - teda na ich postupné spájanie. Tvrdíme, že ľubovoľné spájanie nie je lepšie ako spojenie dvoch najmenších množín. Sporom, nech existuje také najlepšie spájanie, ktoré nespája dve najmenšie množiny a súčet jeho miním je ostro väčší ako takého, ktoré ich spája.

- TODO lema

Lema 28. *Majme množinu množín vrcholov, označme ju M. Nech existuje taká postupnosť spájania týchto množín, ktorého súčet bude najvyšší možný. Nech sa v ňom nenachádza spojenie najmenšej množiny s inou v prvom kroku, ukážeme že existuje poradie, kde sa nachádza o krok skôr, ktoré je aspoň také dobré alebo pôvodné nie je najlepšie.*

Dôkaz. Ak sa najmenší prvok spája s množinou, ktorá bola v M, vieme spojenie minima s ňou presunúť do úplne prvého kroku spájania. Ak sa spája s množinou, ktorá vznikla spojením dvoch množín, premiestnime krok pripojenia minima hneď za krok pri ktorom táto množina vznikla. Označme množiny z ktorých táto množina vznikla A,B a mohutnosť minima označme C, |A| = a; |B| = b; |C| = c. Bez ujmy na všeobecnosti a =< b. Spájanie nebolo optimálne, lebo v jeho súčte sa nachádza c+a, keby sa však spojila najprv množina A s C tak by bol celkový súčet väčší, lebo by obsahoval buď c+b alebo c+(a+c).

□

Každý vrchol je 0-rozmernou kockou sám o sebe. Všetky hrany, ktoré medzi nimi môžu viesť v prvej dimenzii, v druhej, tretej atď. ... TODO výde z toho hyperkocka a elegantnejšie ako predtým :) – stále sa mi to mezdá dokázané, že iný výber vrcholov nedá viac hrán ...

Treba maximalizovať počet dvojíc líšiacich sa v práve jednej dimenzii ... V každej dimenzii má vrchol max jednu hranu

To že medzi vrcholmi vedie hrana znamená, že sú spolu v nejakej hyperkocke. V čím väčšej sú, tým viac hrán z nich ide.

Ukážeme že maximalizácia n-rozmerných kociek maximalizuje počet n-1 rozmerných. Vezmeme najväčšiu maximálnu disjunktnú množinu n-1 rozmerných kociek. Aké je poprepájanie týchto kociek hranami pri ktorom je najviac n-1 rozmerných kociek?

Ak vedie hrana medzi vrcholmi a tieto sú spojené každý hranami rovnakej dimenzie s inými dvomi vrcholmi, vedie hrana aj medzi týmito dvomi vrcholmi. Je to dané tým, že ak odstránime dimenziu v ktorej vedie hrana, tieto vrcholy sa zobrazia na seba.

Kocka vyššej dimenzie vznikne, ak spojíme dve n-1 rozmerné kocky hranami podľa nejakého izomorfného zobrazenia dostaneme n-rozmernú kocku, ktorá má $nchoosen - 1$ n-1 rozmerných kociek.

□

Izolované vrcholy -> jednorozmerné kocky -> dvojrozmerné kocky -> ... vždy dve spojíme na jednu s vyšším rozmerom ...

Čiže trade-off medzi počtom značiek a pohybov ... stačí jedna návšteva vrcholu ... otvorí pri nej všetky porty ... počet značiek = počet mimokostrových (portových) hrán ...

Čím vyššia dimenzia kocky, tým je menej kostrových hrán oproti portovým -> stačí menej pohybov na požitie daného množstva značiek.

Ak vrcholov nie je presne toľko, ako v nejakej n-rozmernej kocke tj. 2^n tak ich vyberáme z vrcholov najmenšej kocky s väčším počtom vrcholov tak, že vezmeme vrcholy nejakej (n-1) rozmernej kocky, ktorá je jej podgrafom, v ďalšom kroku zvyšok vrcholov vyberieme z ešte nepoužitých tak, aby tvorili kocku čo najväčšej dimenzie a tak ďalej, kým nevyberieme všetky vrcholy. Každá n-rozmerná kocka sa dá rozdeliť na dve disjunktné (n-1)-rozmerné kocky. Každý vrchol takejto kocky je spojený s práve jedným vrcholom z druhej kocky. Agent teda vždy nájde kocku ktorá je najmenšia taká, že má viac vrcholov. Jednu z týchto kociek pokryje a zvyšné vrcholy umiestni do druhej kocky rekurzívnym spôsobom.

Týmto sme vyriešili hľadanie postupnosti k vrcholov s nyjväčším počtom hrán medzi nimi. Teraz treba zistiť, ako veľká musí byť množina značiek potrebná na konštrukciu týchto hrán. Ak má agent minúť čo najmenej značiek pri tvorbe portových hrán, treba aby ostali porty otvorené čo najkratšie - čas meriame pohybmi agenta.

Počet značiek, ktroé agent potrebuje pre konštrukciu n-rozmernej kocky je suma dva na i minus jedna pre i od jedna po n. (po konštrukcii jednej kocky ostávajú otorené porty do druhej a agent potrebuje rovnaký počet značiek ako na predošlú ... - lenže postupne sa uvoľnujú) pozn. bude to teda asi # portov pre štvrtinovú kocku + dva na i munus jedna

1.3.1 2-rozmerná kocka

Elementárny prípad. Stačí jedna portová značka a tri pohyby - operácue NH.

1.3.2 3-rozmerná kocka

1 značka Pri použití jednej zančky na porty vie agent trojrozmernú kocku zostrojiť na 15 pohybov: OP, NH, NH, NH, OP, OP, S1, NH, NH, OP, OP, S2, S2, NH, OP, OP, S1, S1, NH, OP, OP, S1, S2, S3, OP. Na menej sa to nedá. Agent potrebuje skonštruovať 5 mimokostrových hrán a na každú potrebuje aspoň 3 pohyby.

2 značky Trojrozmernú kocku pri použití dvoch značiek na porty dokáže agent zostrojiť na 11 pohybov a menej sa nedá. Operácie agenta: OP1, NH, NH, OP2, NH, OP1, NH, OP1, NH, OP2, NH, OP2, NH, OP1, OP1, S1, S1, S2, OP1, S1, OP2 Na menej sa nedá, pretože porty treba otvoriť medzi dvojicou vrcholov líšiacich sa v práve jednej súradnici. Teda medzi otovrením portov jednej hrany potrebuje agent aspoň dve preklopenia na rovnakej súradnici a jedno na inej. Vie využiť najviac jedno preklopenie, ktoré nastalo pri konštrukcii predošlej hrany, čiže na konštrukciu hrany potrebuje najmenej dva ďalšie pohyby. Na konštrukciu prvej hrany potrebuje tri pohyby. $3 + 2 * 8 = 11$

3 značky Trojrozmernú kocku agent za použitia troch portových značiek zostrojí na 9 pohybov. Na menej sa nedá. Operácie agenta: OP1, OP3, NH, NH, OP2, NH, OP1, NH, OP1, NH, OP2, NH, OP2, NH, OP1, OP3, S3(?), S1, OP2 S použitím menšieho množstva pohybov to agent urobiť nemôže. Kým vznikne prvá portová hrana - značka sa uvoľní na ďalšie použitie,vytvorí agent tri nové vrcholy. Teda je vo štvrtom vrchole. Súčet stupňov predošlých troch je deväť, z čoho päť zaberú nové hrany. To znamená, že do jedného z týchto vrcholov sa agent bude musieť vrátiť otvoriť port alebo z neho vytvoriť novú hranu. Keby tento vrchol bol tretí podľa vzniku, tak sa doň agent môže vrátiť na jeden ťah. Tu môžu nastať dve možnosti: pôjde tam otvoriť port alebo vytvoriť novú hranu. Ak otvoriť port, bude mu chýbať značka na štvrtom vrchole podľa vzniku a bude sa musieť vrátiť aj do neho. Ak otvorí port s novouvoľnenou značkou na štvrtom vrchole a z tretieho urobí NH. Ocitne sa vo vrchole v ktorom nemôže otvoriť port, lebo sa nelíši v práve jednej súradnici od žiadneho z vrcholov v ktorých sú porty pootvárané. Teda v oboch prípadoch potrebujem ďalšie dva pohyby, ktoré nie sú operáciou NH. Ak sa agent nevráti hneď do vrchola, v ktorom neotvoril port, bude musieť prejsť do niektorého z jeho dvoch susedov (lebo z nich už odišiel a z iného vrchola sa tam nedostane). To sú dva pohyby okrem operácií NH. Počet operácií NH je konštantný pre daný graf a rovná sa počtu hrán kostry. V tomto prípade je to sedem. Teda agent vybavený tromi rôznymi značkami na porty potrebuje aspoň deväť krokov na konštrukciu trojrozmernej kocky.

4 značky 4 rôzne značky portov agentovi na konštrukciu trojrozmernej kocky stačia: OP1, OP2, NH, OP3, NH, OP4, NH, OP1, NH, OP1, NH, OP4, NH, OP3, NH, OP2, OP1 Agent vzkoná sedeme pohybov, čo je nevyhnutné minimum na konštrukciu trojrozmernej kocky. Pridanie ďalších značiek už teda nič nevylepší.

1.3.3 4-rozmerná kocka

1 značka Ak chcem skonštruovať portové hrany použitím troch pohybov na hranu a žiadne ďalšie pohyby, tak musím vo vrchole, kam otvorením portu vznikne nová portová hrana, otvoriť port znovu. Portové hrany teda budú tvoriť súvislý ťah.

Všetkých hrán v štvorrozmernej kocke je 32, pričom kostrových je 15. Portových hrán je teda 17. Sled portových hrán sa nemôže pretínať, pretože nemôže existovať vrchol do ktorého nevedie kostrová hrana a každý vrchol má stupeň 4. Keďže stupeň vrcholov je párny, kostru treba zostrojiť tak, aby dva z nich mali nepárny stupeň a zvyšné párny. Čo je nutná podmienka zostrojenia jediného ťahu zo všetkých zvyšných hrán. Kostra má aposň dva listy a stupeň listov je nepárny. Ak teda kostra nemá mať väčší počet listov, musia mať zvyšné vrcholy stupeň dva. Kostra je teda cesta. Ukážeme, že nie je možné zostrojiť štvorrozmernú kocku na $3 * 17 = 51$ pohybov. Vrcholy v kotorých kostra-cesta začína majú tri portové hrany. Aby sme použili len tri pohyby na jednu portovú hranu, potrebujeme začať portové hrany konštruovať v jednom z týchto vrcholov. v týchto vrcholoch začína aj cesta-kostra. Keďže kostra vzniká tak, že na už existujúcom vrchole vykoná agent operáciu NH, v každom momente je práve jeden vrchol v ktorom môže byť agent, ak má skonštruovať graf na 51 pohybov. Tým však, že agent odišiel z prvého vrchola a tomu chýbajú ešte dve hrany, sa doň bude musieť vrátiť a otvoriť v ňom port. V konštruovanom grafe (medzivýsledku) sa však agent od prvého vrchola vzďaľuje každou portovou hranou. Pri skonštruovaní posledného vrchola bude teda od prvého v medzivýsledku konštrukcie ďalej ako tri a teda nie je schopný skonštruovať graf týmto spôsobom. Vrchol do ktorého ide agent konštruovať portovú hranu musí byť v medzivýsledku vzdialený práve tri od druhého vrchola s otvoreným portom a súčsne sa musí líšiť v práve jednej dimenzii. Pri tomto postupe žiadny takýto vrchol k poslednému skonštruovanému vrcholu v momente otvorenia portu nie je a jediný, ktorý sa tak dá vytvoriť je pomocou prechodu po novej portovej hrane a dvoch opráciách NH, alebo po troch operáciách NH. Ak použije prvý spôsob, kým sa dá, dostane sa do bodu z ktorého sa už tento nedá uplatniť a už nebude schopný skonštruovať ďalšiu hranu na tri pohyby. Pri použití druhého spôsobu z inicializačného vrchola trikrát sa dostane agent do situácie, kefy je od inicializačného vrchola vzdialený na medzivýsledku o tri hrany a zároveň sa ich polohy líšia v práve jednej dimenzii. Takže agent môže skonštruovať zvyšné dve hrany pre inicializačný vrchol. (TODO mohol by to urobiť aj neskôr, ale nejde to, lebo štvorrozmerná kocka má len 15 vrcholov a už by mu nevydalo vytvoriť tri portové hrany pomocou operácií NH) Keď má agent z vrcholu vytvoriť portovú hranu a odchádza z neho operáciou NH, odíde po jednej dimenzii a portová hrana sa otvorí v druhej. Teda vytvorí hrany v dvoch dimenziách vrcholu. Po skonštruovaní prvej portovej hrany má vrchol v ktorom agent skončí ešte "voľné"dve dimenzie. Z jednej má ísť portová hrana a z druhej kostrová. Teda po jednej agent odíde a v druhej sa po troch pohyboch bude líšiť. Rovnakáá situácia nastane po vytvorení druhej portovej hrany. Tretia portová hrana musí mať rovnakú dimenziu ako prvá, aby sa agent po jej konštrukcii líšil s inicializačným vrcholom v práve jednej dimenzii. štvrtá portová hrana je teda tiež daná. Dimenzie sú navzájom zameniteľné, takže na ich výbere nezáleží. (TODO Začiatok konštrukcie štvorrozmernej kocky je deterministický - možno je celá konštrukcia ...)

Literatúra