算法分析与设计 II

2022-2023-2

数学与计算机学院
数据科学与大数据技术

Last Modified: 2023.1.16

8. 图算法

- 最小生成树(MST, Minimum spanning tree) 通常是在无向图问题中，给出端点和两点之间边的权值，然后进行求解
- 图的存储给出邻接矩阵，转化为用边的存储结构来表示
- 常用的两种算法都是基于贪心策略
  - Prim 算法，利用最小堆来实现，运行时间取决于最小堆的实现方式
  - Kruskal 算法，需要将边按权值排序依次进行比较，当边较多时，运行时间会增加

1258 – Agri-Net (poj.org)

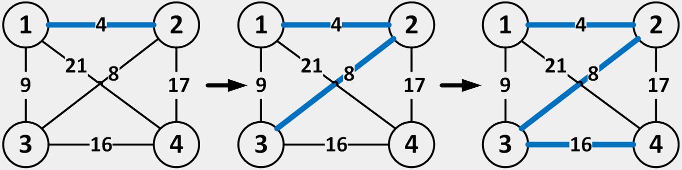
- 有 n 个农场，给出相互之间的距离，用光纤将所有农场连接在一起，问如何连接使光纤总长度最小，求出这个最小值。即在 n 个点，$\frac{n(n-1)}{2}$ 条边组成的连通加权无向图中求最小生成树，本题使用 Prim 算法

Prim 算法

使用的是贪心策略，从单一顶点开始，依次加入其他顶点，保证加入的边长度最小，直到包含所有顶点结束

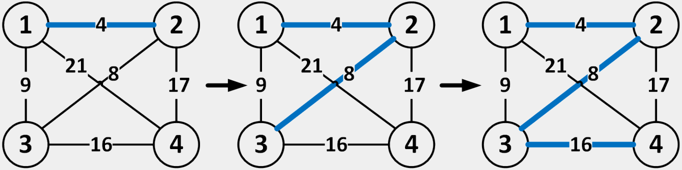
- 定义二维数组 D[i,j] 为 i 到 j 的距离，在图论中，这种图结构的表示方法叫做邻接矩阵(adjacency matrix)
- 用结构体 edge{v,to} 来表示图中的边 (v 为边权，to 为边的终点）
- 定义 vis[i] 记录 i 点是否已经加入生成树中
- 将边放入最小堆 Q 来实现存取

计算过程



(1) 将顶点 1 加入生成树，设 vis[1]=1，边 {4,2},{9,3},{21,4} 插入最小堆

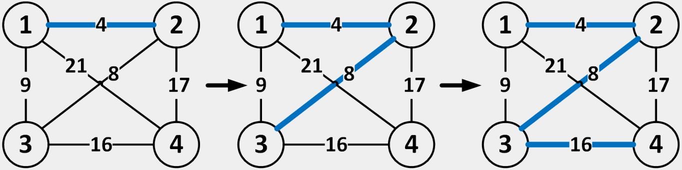
计算过程



(1) 将顶点 1 加入生成树，设 vis[1]=1，边 {4,2},{9,3},{21,4} 插入最小堆

(2) 取出边 {4,2}，因为 vis[2]=0，将 2 加入生成树，设 vis[2]=1，累计距离等于 4，边 {4,1},{8,3},{17,4} 插入最小堆

计算过程

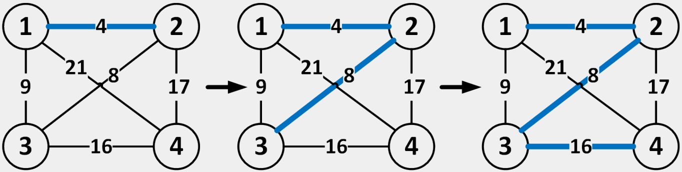


(1) 将顶点 1 加入生成树，设 vis[1]=1，边 {4,2},{9,3},{21,4} 插入最小堆

(2) 取出边 {4,2}，因为 vis[2]=0，将 2 加入生成树，设 vis[2]=1，累计距离等于 4，边 {4,1},{8,3},{17,4} 插入最小堆

(3) 取出边 {4,1}，因为 vis[1]=1，继续；再取 {8,3}，因为 vis[3]=0，将 3 加入生成树，设 vis[3]=1，累计距离等于 12，相应边插入最小堆

计算过程



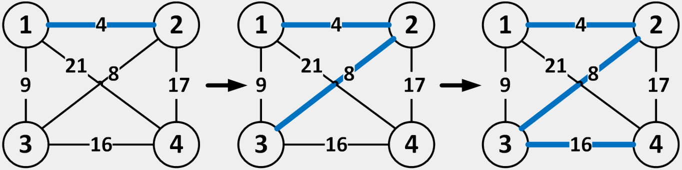
(1) 将顶点 1 加入生成树，设 vis[1]=1，边 {4,2},{9,3},{21,4} 插入最小堆

(2) 取出边 {4,2}，因为 vis[2]=0，将 2 加入生成树，设 vis[2]=1，累计距离等于 4，边 {4,1},{8,3},{17,4} 插入最小堆

(3) 取出边 {4,1}，因为 vis[1]=1，继续；再取 {8,3}，因为 vis[3]=0，将 3 加入生成树，设 vis[3]=1，累计距离等于 12，相应边插入最小堆

(4) 依次取出边 {8,2},{9,1},{16,4}，因为 vis[4]=0，将 4 加入生成树，设 vis[4]=1，累计距离等于 28，相应边插入最小堆

计算过程



(1) 将顶点 1 加入生成树，设 vis[1]=1，边 {4,2},{9,3},{21,4} 插入最小堆

(2) 取出边 {4,2}，因为 vis[2]=0，将 2 加入生成树，设 vis[2]=1，累计距离等于 4，边 {4,1},{8,3},{17,4} 插入最小堆

(3) 取出边 {4,1}，因为 vis[1]=1，继续；再取 {8,3}，因为 vis[3]=0，将 3 加入生成树，设 vis[3]=1，累计距离等于 12，相应边插入最小堆

(4) 依次取出边 {8,2},{9,1},{16,4}，因为 vis[4]=0，将 4 加入生成树，设 vis[4]=1，累计距离等于 28，相应边插入最小堆

(5) 继续从队列中取边，直到队列为空

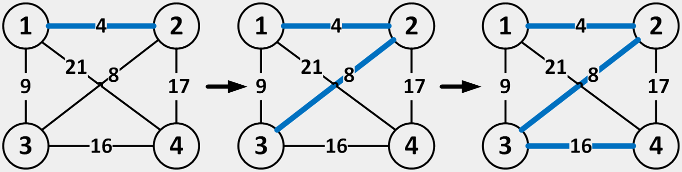
- 给出 n 个城镇相互之间的距离，用高速公路连接所有城镇，求需要修建总长度最短的高速公路的方案中最长的一段公路的长度，本题使用 Kruskal 算法

Kruskal 算法

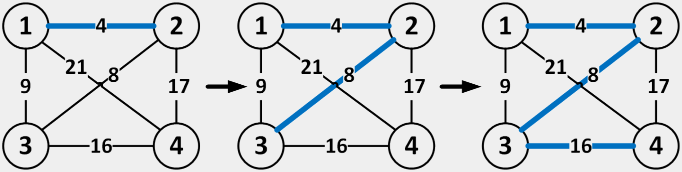
使用的是贪心策略，将所有的边按长度递增排序，每次取一条边，如果没有形成回路，就将这条边放入生成树中，直到检查完所有的边

- 用结构体 edge{u,v,w} 来表示图中的边 (u，v 为边的两个端点，w 为边的长度）
- 是否存在回路的判断，可以使用并查集来实现

计算过程



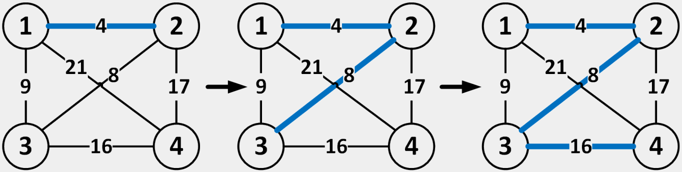
(1) 取 {1,2,4}，没有环路，将 {1,2,4} 放入生成树



(1) 取 {1,2,4}，没有环路，将 {1,2,4} 放入生成树

(2) 取 {2,3,8}，没有环路，将 {2,3,8} 放入生成树

计算过程

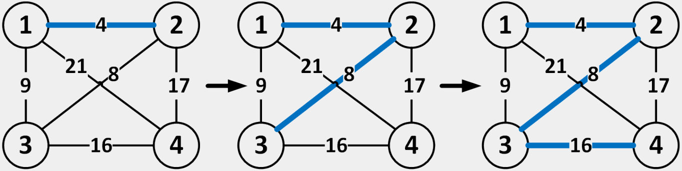


(1) 取 {1,2,4}，没有环路，将 {1,2,4} 放入生成树

(2) 取 {2,3,8}，没有环路，将 {2,3,8} 放入生成树

(3) 取 {1,3,9}，有环路，继续操作

计算过程



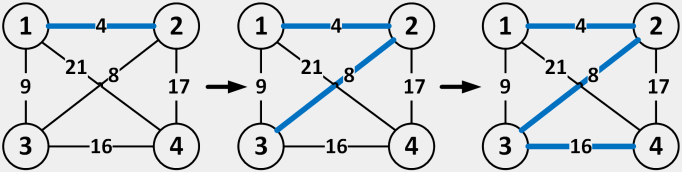
(1) 取 {1,2,4}，没有环路，将 {1,2,4} 放入生成树

(2) 取 {2,3,8}，没有环路，将 {2,3,8} 放入生成树

(3) 取 {1,3,9}，有环路，继续操作

(4) 取 {3,4,16}，没有环路，将 {3,4,16} 放入生成树

计算过程



(1) 取 {1,2,4}，没有环路，将 {1,2,4} 放入生成树

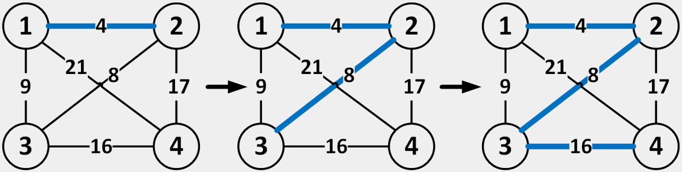
(2) 取 {2,3,8}，没有环路，将 {2,3,8} 放入生成树

(3) 取 {1,3,9}，有环路，继续操作

(4) 取 {3,4,16}，没有环路，将 {3,4,16} 放入生成树

(5) 取 {2,4,17},{1,4,21}，有环路，继续操作

计算过程



(1) 取 {1,2,4}，没有环路，将 {1,2,4} 放入生成树

(2) 取 {2,3,8}，没有环路，将 {2,3,8} 放入生成树

(3) 取 {1,3,9}，有环路，继续操作

(4) 取 {3,4,16}，没有环路，将 {3,4,16} 放入生成树

(5) 取 {2,4,17},{1,4,21}，有环路，继续操作

(6) 所有边取完，过程结束，最后取的边 {3,4,16} 的长度就是本题的解

- 在图中寻找两个节点之间的最短路径，称为最短路径问题(Shortest path problem)
- 求最短路有以下几种常见的算法:
  - 弗洛伊德 (Floyd-Warshall) 算法
  - 贝尔曼-福特 (Bellman-Ford) 算法
  - 最短路径快速算法 (SPFA)
  - 迪杰斯特拉 (Dijkstra) 算法

算法	**代码中采用的数据结构**	**时间复杂度 (*V*: 点数;*E*: 边数)**
Floyd	邻接矩阵	$O(V^3)$
Bellman-Ford	邻接表	$O(VE)$
SPFA	链式前向星	平均 $O(2E)$，最差 $O(VE)$
Dijkstra	邻接矩阵、链式前向星	$O(V^2)$，可进一步优化

分类总结

1. 按照是否确定起点
    - 单源最短路：Bellman-Ford、SPFA、Dijkstra
    - 全局最短路：Floyd
2. 路径是否有方向：无向图、有向图
3. 边的权值是否有负值
    - 有负权：Floyd、Bellman-Ford、SPFA
    - 无负权：Dijkstra
4. 边数量多少
    - 稀疏图：邻接表、链式前向星
    - 稠密图：邻接矩阵
5. 点与边的规模
    - 较小：Floyd
    - 中等：Bellman-Ford
    - 较大：SPFA、Dijkstra

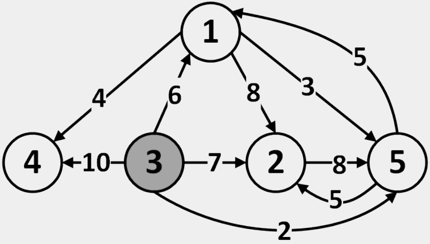
Floyd 算法

- Floyd(Floyd-Warshall, 弗洛伊德)算法采用动态规划思想，可以计算图中任意两点间的最短路径，可以处理有向图，允许出现负值的边，但是不能出现负值的回路
- 设 $D[i, j, k]$ 是从 i 到 j 的最短距离，而路径经过的点为 $1 \dots k$

$$D[i, j, k] = \begin{cases} D[i, k, k-1] + D[k, j, k-1], use\ k \\ D[i, j, k-1], not\ use\ k \end{cases}$$

$$= \min(D[i, k, k-1] + D[k, j, k-1], D[i, j, k-1])$$

- *n* 个股票经纪人，某些人之间有联系，构成一个网络，网络中相邻的节点传播谣言，用时间来衡量传播速度
- 计算根据已知信息选择其中一个经纪人作为起点，使谣言传给每个人，到最后一个人的时间最短
- 如图所示，选择 3，最后收到谣言的人为 4，时间是 10



计算过程

k=1		j				
		1	2	3	4	5
i	1	0	8	∞	4	3
	2	∞	0	∞	∞	8
	3	6	7	0	10	2
	4	∞	∞	∞	0	∞
	5	5	5	∞	∞	0

k=2		j				
		1	2	3	4	5
i	1	0	8	∞	4	3
	2	∞	0	∞	∞	8
	3	6	7	0	10	2
	4	∞	∞	∞	0	∞
	5	5	5	∞	9	0

···

k=5		j				
		1	2	3	4	5
i	1	0	8	∞	4	3
	2	13	0	∞	17	8
	3	6	7	0	10	2
	4	∞	∞	∞	0	∞
	5	5	5	∞	9	0

- 上图显示了 Floyd 算法计算过程中的数组情况
  - 其中 $k = 1$ 时是数组的初始情况
  - $k = 3, 4$ 时数组内容没有发生变化
- 最后在结果的邻接矩阵中，依次查找每个 i 到其他点 j 的距离的最大值，再从这些最大值中找到最小值，可以看到，最小的最大值为 10，此时 i 为 3

最短路径快速算法

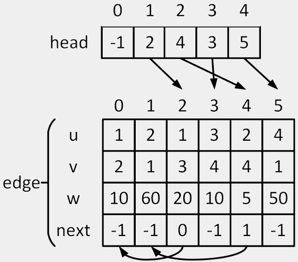
- 贝尔曼-福特 (Bellman–Ford)算法：通过不停修改路径长度值 D 来达到求最短路径的目标，这种操作被称为松弛操作。从 a 点到 b 点，不会超过 $n-1$ 条边，第 i 次松弛操作，保证对距离源点 i 距离值最小，进行 $n-1$ 次操作，就更新了到所有点的最短距离。该算法允许有负权边，并可以通过第 n 次操作检查 D 值变化情况来判断是否存在负权回路

- 最短路径快速算法(SPFA, Shortest Path Faster Algorithm) 是对 Bellman-Ford 算法的优化，因为 Bellman-Ford 算法的松弛操作执行在所有的节点上，有很多节点并没有必要进行更新，SPFA 算法通过队列维护备选节点，当节点被松弛后放入队列，直到没有终点被松弛。SPFA 也适用于带有负边权的图，然而在最坏情况的时间复杂度与 Bellman-Ford 算法相同

1511 – Invitation Cards (poj.org)

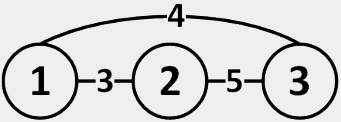
- p 个公交站点，q 条公交线路，从 u 站点到 v 站点，价格为 w。p 个志愿者从 1 号站点出发到每个站点，再返回到 1 号站点，求花费的总值最少是多少
- 处理一个点之后，将该点连接的路径放入队列，存储图信息的数据结构应该方便这个操作，可以使用邻接表(Adjacency list)来实现，这里采用数组来模拟链表实现的邻接表 (被称为链式前向星)[1]

p	q	
4	6	
u	v	w
1	2	10
2	1	60
1	3	20
3	4	10
2	4	5
4	1	50



[1] https://malash.me/200910/linked-forward-star/

- m 条街道有 n 个交点，交点编号从 1 到 n，每条街道有重量限制 w。从 1 号城市向 n 号城市运送起重机，选择一条路径，使得路径上的每条街道允许的重量 w 的最大值最大
- 如图，选择 1-2-3，由于 1-2 允许的最大载重量为 3，所以整条路线上允许的最大值是 3；选择 1-3，允许的最大值为 4。最终结果为 4



Dijkstra 算法

- 迪杰斯特拉 (Dijkstra)算法的特点是不断对两点间的最短距离 D 进行松弛操作
- S 为源点，初始时令 $D[S] = 0$, 其他 D 值设为无穷大，T 为终点，$D[T]$ 为所求的最短路径，如果 $D[T]$ 为无穷大，则不存在 S 到 T 的最短路径
- 具体操作过程是每次选择未访问的 D 值最小的一点 u，将 u 标记为访问，再将与 u 连接的所有点 v 的 $D[v]$ 的值更新为 $D[v]$ 和 $D[u] + a[u, v]$ 中的较小值
- Dijkstra 算法比较之前的算法效率要高，但是不支持负权的边
- 分阶段松弛操作的本质是动态规划
- Dijkstra 算法的松弛操作针对的是累计从源点到目标点的最短距离值 D，将 D 值的含义改为从源点到目标点的最大允许载重量，每次选择未访问的 D 值最大的一点 u，更新 $D[v]$ 为 $D[v]$ 和 $min(D[u], a[u, v])$ 的最大值，就是本题的解法

连通图

如果图中任意两点都是连通的，那么图被称作连通图

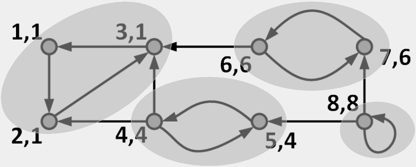
强连通分量 (Strongly connected component)

图的一个子图，里面的所有点构成一个强连通图，即每一个顶点都可以通过图中的边到达图中其他的顶点，且这个连通子图是极大的，也就是子图外不再包含符合该条件的点

- 在图的规模较小时，可以模仿 Floyd 算法对所有边进行枚举，但是深入理解Tarjan 算法，了解 low 和 dfn 的含义，能够更有效的解决图的连通性问题

Tarjan 算法

- 图中每个节点的两个数字分别是执行了 Tarjan 算法后的 dfn 值和 low 值，该图最终被划分出了 4 个强连通分量



(1) 从图中一点 *u* 出发，对图进行深度优先搜索，用 dfn[u] 记录节点 u 在深度优先搜索中访问的次序编号，low[u] 记录 *u* 或 *u* 的子树能够追溯到的最早的栈中节点的次序编号。将 *u* 放入堆栈，搜索 *u* 的相连点 *v*，如果 *v* 未被访问，则递归访问 *v*；如果 *v* 已经在堆栈中，则检查 dfn[v] 是否小于 low[u]，如果是，就更新 low[u] 的值为 dfn[v]

(2) 用 U[i] 表示 u 属于哪个强连通分量，按照深度优先搜索规则，同一强连通分量的节点会依次入栈，当发现 dfn[u] 等于 low[u]，说明搜索回到了强连通分量的最初搜索点，此时依次将这些 low 值相同的点出栈，将它们的 U 值设置成同一个编号

(3) 对图中所有点重复 1，2 操作，这样每个的强连通分量就缩成了对应的 U[i] 点

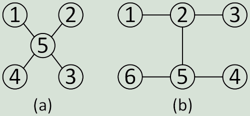
2186 – Popular Cows (poj.org)

- 有 n 头牛，m 对关系，关系 (a, b) 表示 a 认为 b 是受欢迎的，这种关系是可传递的，即 $(a, b)(b, c)$ 可以推出 (a, c)，现在找出被所有其他牛都认为受欢迎的牛的数量
- 将 a, b 看作图中的节点，关系 (a, b) 看成点 a 到点 b 的一条有向边，题目所求的相当于找到这样点，所有的点都可以找到一条路径通向该点
  - 把图进行简化，确定图中的强连通分量，我们发现，问题中强连通分量中的点对外具有相同的性质，可以将它们当成一个点来对待，如果其中一点符合题解，则强连通分量中所有点都符合题解
  - 通过 Tarjan 算法，找到的强连通分量都缩成一点 U[i]，接下来，在由 U 点组成的有向无环图中检查各个节点的出度。由于消除了环路，所以一定存在出度为 0 的点。如果存在唯一的出度为 0 的点，则这个点就是题目要求的点，该点所在的强连通分量里点的数量就是题解

1144 – Network (poj.org)

- 电话网络有 n 个连接点，编号从 1 到 n，每个连接点有一个交换机，两个交换机之间的路线双向的。如果交换机停机会造成某些点不能连通，则称这个交换机为关键节点，求所有关键节点的数量

例



(a) 图关键节点为 5，(b) 图关键节点为 2、5

- 在无向的连通图中，删除一点后使图不再连通，这点就被称为割点(vertex separator/vertex cut)
- 与割点类似，如果删除一条边使图不再连通，这条边被称为桥(Bridge)
- 求割点的数量，采用Tarjan 的找桥算法来实现

Tarjan 找桥算法

- 与有向图求强连通分量的算法类似，对连通图采用深度优先搜索，通过标记 dfn 和 low 的值来进行判断，不同之处有以下几点：
  (1) 不需要使用堆栈对节点进行分类
  (2) 无需对每个节点都进行一次深度优先搜索，选中一点作为起始节点即可
  (3) 因为无向图的边是双向的，在找 u 点的后序节点时，需要避免访问 u 的父亲节点
  (4) 对起始节点需要特殊判断，如果遍历过程中它的子节点超过 1 个，则它也是一个割点，如上图右图，1 位置为起始节点的话不是割点，而 2 位置为起始节点，它的子节点有 3 个，所以它是割点
- low[v]≥dfn[u] 时说明 v 点能够追溯到的最早节点编号是 u 点或者 u 点之后，所以 u 为割点；如果改成 low[v]>dfn[u]，说明 v 点能够追溯到的最早节点编号在 u 点之后，意味着去掉边 (u, v) 后图不再连通，(u, v) 就是一个桥

网络流

在图论中，网络流 (Network flow) 是指在一个每条边都有容量（Capacity）的有向图分配流，每条边的流量不会超过它的容量

- 通常在运筹学中，有向图称为网络。顶点称为节点（Node）而边称为弧（Arc）
- 一道流必须符合一个结点的进出的流量相同的限制，除非是：
  - 源点（Source）: 有较多向外的流
  - 或是汇点（Sink）: 有较多向内的流
- 一个网络可以用来模拟道路系统的交通量、管中的液体、电路中的电流或类似一些东西在一个结点的网络中游动的任何事物

二分图

一个图所有节点可以分为两个独立的集合 U, V，所有边分别连接两个集合中的一个点，这样就构成了一个二分图 (Bipartite graph)

- 二分图匹配是一类特殊形式的网络流问题，通过构图，利用二分图最大匹配算法，可以解决图算法中一些问题，例如：
  - 最小顶点覆盖(最小顶点覆盖数 = 二分图最大匹配的边数)
  - 最大独立集(最大独立集点数 = 总点数-二分图最大匹配边数)
  - DAG 图最小可相交路径覆盖(DAG 图最小可相交路径覆盖数 = 总点数-二分图最大匹配边数)

匈牙利算法

- 匈牙利算法，也称 KM(Kuhn-Munkres) 算法，是寻找最大匹配的经典算法，主要思想是:
  - 在已有匹配的情况下，U 中取未配对的一点 i，找它连向 V 的边 (i,j)，如果 j 没有和其他点配对，则将 j 分配给 i，匹配边数加 1
  - 如果 j 已经和 U 中 k 配对，就对 j 进行递归操作，将 k 换掉，将 j 分配给 i
  - 如果可以成功，匹配边数加 1，直到所有点都结束匹配

- 匹配过程就是网络流问题中找增广路径的过程，每次更新过程称为一次增广

2239 – Selecting Courses (poj.org)

- 大学有 n 门课，每门课重复 t 次，每次在每周的第 p 天的第 q 时间段上课，求在不冲突的情况下，每周最多可以选多少门课
- 分析：
  - 每周 7 天，每天 12 个时间段，共有 84 个时间段，对应 84 个节点，增加一个源点 s 连接每个节点，边容量为 1，增加一个汇点 t，每个节点到汇点的容量为 1，这样，从 s 到 t 的最大流就是最多可以上课的总数
  - 在不添加源点和汇点的情况下，n 门课对应 n 个节点，作为集合 U，84 个时间段作为另一个集合 V，从 U 集合中的节点到 V 集合中的节点，如果某门课在某个时间段上课，就存在一条边，这就构成了一个二分图
  - 一个图中，如果其子图中每两条边都没有公共端点，这个子图叫做一个匹配(Matching)，边数最多的匹配称为最大匹配(maximal matching)，这个题也可以看成求二分图中的最大匹配问题