算法分析与设计 II

2022-2023-2

数学与计算机学院
数据科学与大数据技术

Last Modified: 2023.1.16

2. 基础算法

枚举法

也叫穷举法, 是一种暴力搜索的方法, 特点是将给定条件的所有情况都进行计算, 直到找到符合要求的解, 随着参与计算的参数的增加, 算法复杂度可能成指数级增加, 所以只有当所有情况的总数在一个较小的范围时才能进行

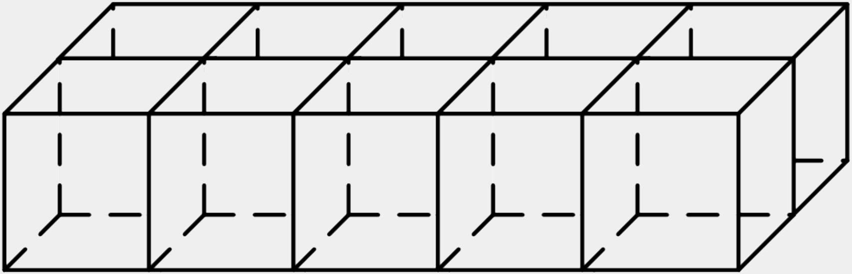
- 枚举法的优点就是建模简单, 几乎不用考虑任何算法。在计算过程中, 排除一些不可能的情况, 能够适当减少一定的计算量
- 程序设计中一些排序算法(选择排序、冒泡排序、插入排序)、查找算法(顺序查找、二叉树的遍历等) 都是枚举法的具体应用

2363 – Blocks (poj.org)

- Description
  - ...Each block is a cube, 1 inch by 1 inch by 1 inch. Donald wants to stack the blocks together into a rectangular solid and wrap them all up in brown paper for shipping. How much brown paper does Donald need?
- Input
  - The first line of input contains C, the number of test cases. For each case there is an additional line containing N, the number of blocks to be shipped. N does not exceed 1000.
- Output
  - Your program should produce one line of output per case, giving the minimal area of paper (in square inches) needed to wrap the blocks when they are stacked together.

Sample

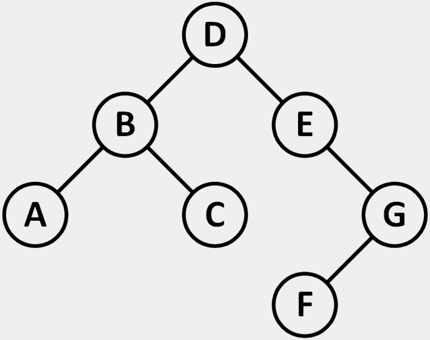
- Sample Input: 10
- Sample Output: 34



- 递归法思路:
  1. 原问题分解为一个或多个规模更小、但具有类似于原问题特性的子问题
  2. 确定无须分解、可直接求解的最小子问题（递归的终止条件）
- 递归的两个基本要素是:
  1. 递归关系式：确定递归的方式，即原问题是如何分解为子问题的
  2. 递归出口：确定递归到何时终止，即递归的终止（结束、边界）条件
- 但是，递归方法并不能降低程序的时间复杂度，而且，递归时函数的嵌套调用使用系统堆栈，控制不好会导致堆栈溢出(stack overflow)

2255 – Tree Recovery (poj.org)

- 已知二叉树
  - 先序遍历为 DBACEGF
  - 中序遍历为 ABCDEFG
- 求后序遍历
  - ACBFGED



- 给出字母序列，将这个序列中字母组成的所有可能排列/置换按字典序输出

Sample

- Sample Input: bbjd
- Sample Output: bbdj bbjd bdbj bdjb bjbd bjdb dbbj dbjb djbb jbbd jbdb jdbb

- 实现：
  1. 递归（手写）
  2. C++ STL 中的 next_permutation[1]函数

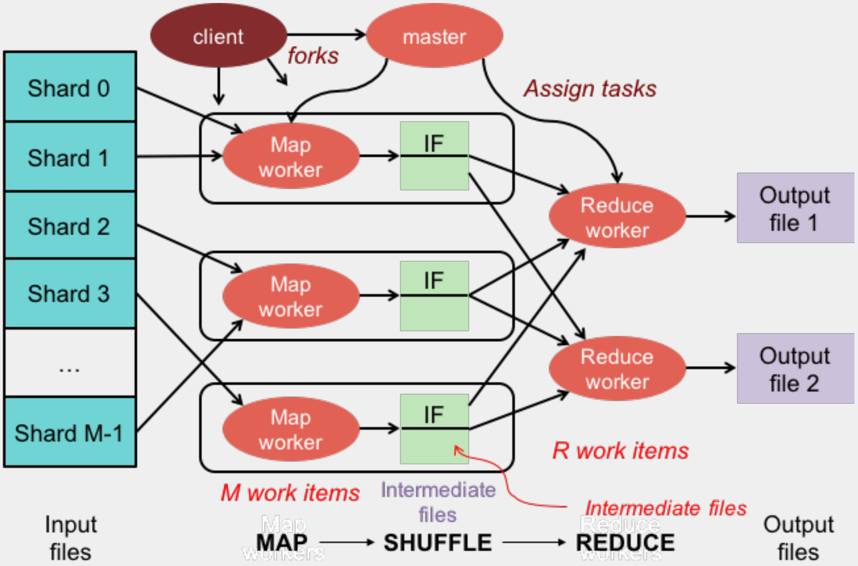
[1]https://cplusplus.com/reference/algorithm/next_permutation/

分治法

将原问题分解成规模较小但是与原问题类似的子问题，通过递归来求解这些子问题，再将子问题的解合并来求出原问题的解的方法

- 分治在递归的过程中有三步：
  1. 分解：将原问题分解成规模较小但是与问题类似的子问题
  2. 求解：递归求解子问题，子问题规模足够小时直接求解
  3. 合并：将子问题的解合并，求出原问题的解

MapReduce


client
master
forks
Assign tasks
Shard 0
Shard 1
Shard 2
Shard 3
...
Shard M-1
Map worker
Map worker
Map worker
IF
IF
IF
Reduce worker
Reduce worker
Output file 1
Output file 2
R work items
M work items
Intermediate files
Intermediate files
Input files
MAP
SHUFFLE
REDUCE
Output files

2388 – Who's in the Middle (poj.org)

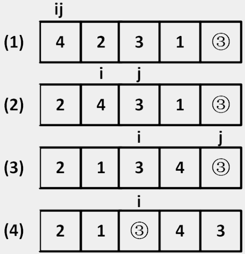
- 求 n 个数的中位数，n 为奇数

- 分析
  1. 如果 n 个数是有序的，那么第 $\frac{n+1}{2}$ 个数就是所求的中位数
  2. 在 C 语言提供了排序函数 qsort[2]，C++ 语言提供了 sort[3]，它们的实现都是基于快速排序
  3. 快速排序(Quicksort)，又称划分交换排序(partition-exchange sort)，简称快排

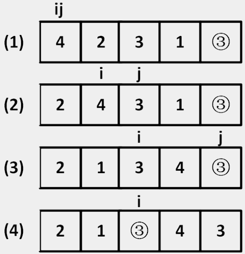
[2] https://cplusplus.com/reference/cstdlib/qsort/
[3] https://cplusplus.com/reference/algorithm/sort/

快速排序

(1) 选取数组 a 最右边元素作为基准值 x，两个指针 i 和 j 最初都在序列最左边



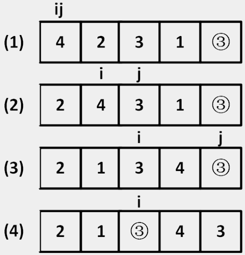
快速排序



(1) 选取数组 a 最右边元素作为基准值 x，两个指针 i 和 j 最初都在序列最左边

(2) 用 a[j] 和 x 的值进行比较，如果 a[j] 小于 x，则交换 a[i] 和 a[j]，同时将 i 和 j 向右移动；如果 a[j] 大于等于 x，则 j 右移，i 不动

快速排序

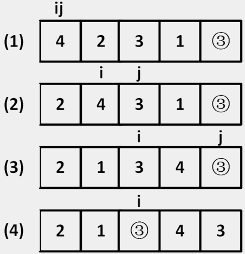


(1) 选取数组 a 最右边元素作为基准值 x，两个指针 i 和 j 最初都在序列最左边

(2) 用 a[j] 和 x 的值进行比较，如果 a[j] 小于 x，则交换 a[i] 和 a[j]，同时将 i 和 j 向右移动；如果 a[j] 大于等于 x，则 j 右移，i 不动

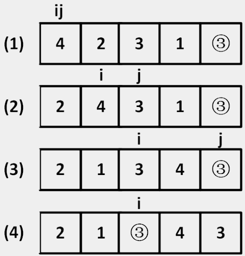
(3) 当 j 移动到最右边时，i 的左侧元素都小于 x，右侧都大于等于 x

快速排序



(1) 选取数组 a 最右边元素作为基准值 x，两个指针 i 和 j 最初都在序列最左边
(2) 用 a[j] 和 x 的值进行比较，如果 a[j] 小于 x，则交换 a[i] 和 a[j]，同时将 i 和 j 向右移动；如果 a[j] 大于等于 x，则 j 右移，i 不动
(3) 当 j 移动到最右边时，i 的左侧元素都小于 x，右侧都大于等于 x
(4) 最后将 x 和 a[i] 值交换。序列就被 i 分成了左右两部分

快速排序



(1) 选取数组 a 最右边元素作为基准值 x，两个指针 i 和 j 最初都在序列最左边

(2) 用 a[j] 和 x 的值进行比较，如果 a[j] 小于 x，则交换 a[i] 和 a[j]，同时将 i 和 j 向右移动；如果 a[j] 大于等于 x，则 j 右移，i 不动

(3) 当 j 移动到最右边时，i 的左侧元素都小于 x，右侧都大于等于 x

(4) 最后将 x 和 a[i] 值交换。序列就被 i 分成了左右两部分

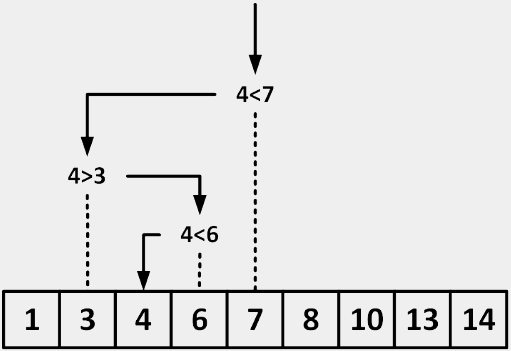
- 交换过程结束后，两个 3 改变了之前的顺序，这种情况称为排序的不稳定性，所以这种快速排序算法是不稳定的排序算法

2299 – Ultra-QuickSort (poj.org)

- 通过交换相邻元素进行排序，对于一个给定的无序序列 a[1⋯n]，计算最终完成升序排列需要交换的次数

- 分析
  1. 冒泡排序，所求的交换次数也就是计算无序序列的逆序对数目，冒泡排序的时间复杂度是 $O(n^2)$
  2. 求逆序对数目效率更高的方法是利用归并排序，可以做到 $O(nlogn)$ 的时间复杂度
  3. 归并的具体方法是将排好序的两个数组的元素依次比较，将其中较小的依次放入一个辅助数组 b 中，因为两个数组已经排序，比较的过程直接从左边到最右边即可。最后用 b 替换原来的 a，进行上一层的合并操作

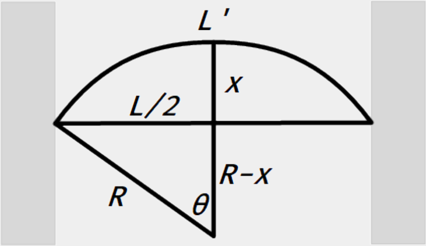
二分查找



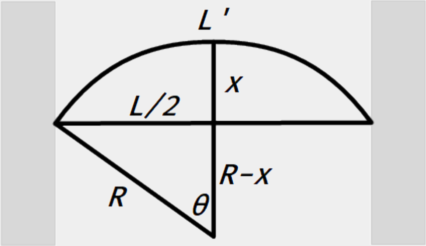
- 细棒长度 L，两端固定，加热后膨胀为一段圆弧，长度变为

$$L' = (1 + n \cdot C) \cdot L$$

n 为变化的温度，C 为膨胀系数，求细棒中心移动的距离



1905 – Expanding Rods (poj.org)

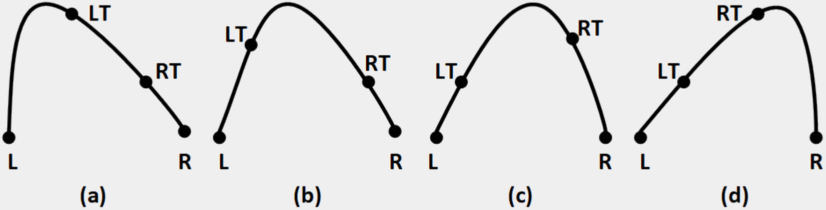


$$R^2 = (R - x)^2 + (L/2)^2 \Rightarrow R = \frac{x^2 + (L/2)^2}{2x}$$

$$\sin\theta = \frac{L/2}{R} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}(\frac{L/2}{R})$$

代入 $L' = 2R\theta$ 可得 x 和 L' 的关系

分查找



- 由 (a)(b) 可以看出，f(LT) 大于 f(RT) 时，可以将右侧区间删掉
- 由 (c)(d) 可以看出，f(LT) 小于 f(RT) 时，可以将左侧区间删掉

2420 – A Star not a Tree? (poj.org)

- 给出平面上 n 个点的坐标，找到一点，到这些点的距离和最小

- 分析
  1. 所求的就是几何学中的费马点，显然几何方法不适用于计算机，在空间范围内搜索该点，可以采用分治策略进行，不断缩小求解空间，直到找到符合精度要求的解
  2. 本题的坐标空间 x 和 y 都在 0 到 10000 之间，随着 x 和 y 的增加，解并不是单调变化，无法用二分搜索来实现。问题区间不满足单调性，但是符合凸函数，的性质，求区间最值可以采用三分的方法