Układy równań liniowych

Zadanie 1. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$.

(a) Udowodnij, że macierz A jest osobliwa.

(b) Jaki jest zbiór rozwiązań układu równań $Ax = b$ jeśli $b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$.

(c) W którym momencie eliminacja Gaussa z częściowym przesuwaniem elementu wiodącego (ang. *partial pivoting*) nie powiedzie się, jeśli rozwiązujemy ten układ równań w dokładnej arytmetyce?

(d) Ponieważ niektóre elementy macierzy A nie są dokładnie reprezentowalne w pamięci komputera, macierz ta zapisana w pamięci komputera przestanie być dokładnie osobliwą a eliminacja Gaussa może się powieść. Rozwiąż układ równań metodą `numpy.linalg.solve`.

Porównaj otrzymany wynik z dokładnym rozwiązaniem z punktu (b).

(e) Oblicz metodą `numpy.linalg.cond` współczynnik uwarunkowania macierzy $\mathrm{cond}(A)$. Do ilu cyfr powinno być dokładne rozwiązanie otrzymane metodą `numpy.linalg.solve`?

Zadanie 2. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Ile wynosi wyznacznik A?

(b) Dla jakiego zakresu wartości ϵ obliczony wyznacznik będzie równy zero w arytmetyce zmiennoprzecinkowej?

(c) Ile wynoszą macierze L i U będące wynikiem rozkładu LU macierzy A?

(d) Dla jakiego zakresu wartości ϵ obliczona macierz U będzie osobliwa w arytmetyce zmiennoprzecinkowej?

Zadanie 3. Pomnożenie obu stron układu równań liniowych $Ax = b$ przez nieosobliwą macierz diagonalną D daje nowy układ $DAx = Db$. Przeskalowanie wierszy układu w teorii nie zmienia rozwiązania układu.

Takie przeskalowanie ma jednak wpływ na współczynnik uwarunkowania macierzy oraz wybór elementów wiodących, a w konsekwencji może wpłynąć na dokładność rozwiązania w artymetyce o skończonej prezycji (skalowanie może także wprowadzić błędy zaokrągleń, chyba, że elementy macierzy D są potęgami 2, ogólnie: potęgami podstawy systemu używanego w artymetyce zmiennoprzecinkowej).

Wybierz losową macierz A i wektor b dla których znane jest dokładne rozwiązanie x. Następnie wykonaj eksperymenty z z różnymi macierzami D i zaobserwuj ich wpływ na współczynnik uwarunkowania macierzy DA i rozwiązania układu $DAx = Db$ otrzymane metodą `numpy.linalg.solve`.

Zbadaj macierze D, w których wartości bezwględne elementów na przekątnej znacznie się różnią (chodzi o zasymulowanie układu z błędnie dobranymi jednostkami fizycznymi).

Porównaj residuum względne oraz błąd względny rozwiązania dla różnych skalowań. Jakie skalowanie daje małą dokładność? Czy residuum pozstaje małe w tym przypadku?