Równania różniczkowe zwyczajne

Joanna Klimek

Informatyka, WIET

25.05.2021r.

Zadanie 1.

Przedstaw każde z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu (ang. first-order system of ODEs):

(a) równanie Van der Pol'a:

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

Określam nowe zmienne:

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y'$$

Powstały układ równań:

$$\begin{cases} y'_1 = y' = y_2 \\ y'_2 = y'' = y'(1 - y^2) - y = y_2(1 - y_1{}^2) - y_1 \end{cases}$$

Ostatecznie:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_2(1 - y_1{}^2) - y_1 \end{cases}$$

(b) równanie Blasiusa:

$$y''' = -yy''$$

Określam nowe zmienne:

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y', \qquad y_3 = y''$$

Powstały układ równań:

$$\begin{cases} y'_1 = y' = y_2 \\ y'_2 = y'' = y_3 \\ y'_3 = y''' = -yy'' = -y_1 y_3 \end{cases}$$

Ostatecznie:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ y'_3 = -y_1 y_3 \end{cases}$$

(c) II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y_1'' = -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}$$

$$y_2'' = -GMy_2/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}$$

Określam nowe zmienne:

$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_2, \qquad x_3 = y_1', \qquad x_4 = y_2',$$

Powstały układ równań:

$$\begin{cases} x_1' = y_1' = x_3 \\ x_2' = y_2' = x_4 \\ x_3' = y_1'' = -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2} = -GMx_1/(x_1^2 + x_2^2)^{3/2} \\ x_4' = y_2'' = -GMy_2/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2} = -GMx_2/(x_1^2 + x_2^2)^{3/2} \end{cases}$$

Ostatecznie:

$$\begin{cases} x_1' = x_3 \\ x_2' = x_4 \\ x_3' = -GMx_1/(x_1^2 + x_2^2)^{3/2} \\ x_4' = -GMx_2/(x_1^2 + x_2^2)^{3/2} \end{cases}$$

Zadanie 2.

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = -5y$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0.5$.

(a) Wyjaśnij, czy rozwiązania powyższego równania są stabilne?

Nasze równanie jest postaci:

$$y' = \lambda y$$

A więc posiada ono rozwiązania postaci:

$$y(t) = y_0\, e^{\lambda t}$$

Przy czym $t_0 = 0,\ y(0) = y_0$ – początkowe wartości.

W naszym przypadku $\lambda = -5 < 0$, czyli nasze niezerowe rozwiązania maleją wykładniczo.

Stąd wiemy rozwiązania są stabilne.

(b) Wyjaśnij, czy metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

W przypadku równania postaci $y' = \lambda y$ rozwiązanie metodą Eulera sprowadza się do:

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k = (1 + h\lambda)y_k$$

$$y_k = (1 + h\lambda)^k y_0$$

Warunkiem aby metoda była stabilna dla rzeczywistego λ jest:

$$h \leq -\frac{2}{\lambda}$$

W naszym przypadku:

$$0.5 \leq \frac{2}{5}$$

Nie jest to prawdą, a więc nie jest ona stabilna dla wybranego h.

(c) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ metodą Euler'a.

Zaczynamy od $t_0 = 0$. Obliczamy t_1 ze wzoru:

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 0.5 = 0.5$$

Nasz warunek początkowy wynosi $y_0 = y(0) = 1$. Obliczamy y_1 ze wzoru:

$$y_1 = y_0 + h \cdot y_0' = y_0 + h\lambda \cdot y_0 = y_0 + 0.5 \cdot (-5y_0) = 1 - 5 \cdot 0.5 = -1.5$$

Natomiast poprawna wartość wynosi:

$$y_1 = y(0.5) = y_0\, e^{\lambda \cdot 0.5} = 1 \cdot e^{-5 \cdot 0.5} = e^{-2.5} = 0.0820850 \ldots$$

(d) Wyjaśnij, czy niejawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

W przypadku równania postaci $y' = \lambda y$ rozwiązanie metodą Eulera sprowadza się do:

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_{k+1}$$

$$(1 - h\lambda) y_{k+1} = y_k$$

$$y_k = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^k y_0$$

Warunek stabilności:

$$\left|\frac{1}{1 - h\lambda}\right| \leq 1$$

Jest on spełniony dla dowolnego $h > 0$ dla rzeczywistej λ pod warunkiem, że należy do przedziału $(-\infty, 0)$. A więc w tym przedziale metoda jest stabilna.

(e) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ niejawną metodą Euler'a.

Zaczynamy od $t_0 = 0$. Obliczamy t_1 ze wzoru:

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 0.5 = 0.5$$

Nasz warunek początkowy wynosi $y_0 = y(0) = 1$. Obliczamy y_1 ze wzoru:

$$y_1 = y_0 + y'_1 = y_0 + h\lambda y_1 = 1 + 0.5 \cdot (-5) \cdot y_1 = 1 - 2.5y_1$$

$$3.5y_1 = 1$$

$$y_1 = \frac{10}{7} = 1{,}42857142857\ldots$$

Pozostałych zadań nie udało mi się wykonać.