

Rozwiązywanie równań nieliniowych

Zadanie 1. Dane jest równanie:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (1)$$

Każda z następujących funkcji definiuje równoważny schemat iteracyjny:

$$g_1(x) = (x^2 + 2)/3, \quad (2)$$

$$g_2(x) = \sqrt{3x - 2}, \quad (3)$$

$$g_3(x) = 3 - 2/x, \quad (4)$$

$$g_4(x) = (x^2 - 2)/(2x - 3). \quad (5)$$

- (a) Przeanalizuj zbieżność schematów iteracyjnych odpowiadających funkcjom $g_i(x)$ dla pierwiastka $x = 2$ badając wartość $|g'_i(2)|$.
- (b) Potwierdź analizę teoretyczną implementując powyższe schematy iteracyjne i weryfikując ich zbieżność (lub brak). Każdy schemat iteracyjny wykonaj przez 10 iteracji.

Wyznacz eksperymentalnie rząd zbieżności każdej metody iteracyjnej ze wzoru

$$p = \frac{\ln \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}}}{\ln \frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k}} \quad (6)$$

gdzie błąd bezwzględny ε_k definiujemy jako $\varepsilon_k = |x_k - x_*|$, x_k jest przybliżeniem pierwiastka w k -tej iteracji, a x_* dokładnym położeniem pierwiastka równania.

- (c) Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy błędu względnego każdej metody w zależności od numeru iteracji. Użyj skali logarytmicznej na osi y (pomocna będzie funkcja `semilogy`).

Stwórz drugi rysunek, przedstawiający wykresy błędu względnego tylko dla metod zbieżnych.

Zadanie 2. Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla każdego z następujących równań nieliniowych:

- (a) $x^3 - 2x - 5 = 0$;

(b) $e^{-x} = x$;

(c) $x \sin(x) = 1$.

Jeśli x_0 jest przybliżeniem pierwiastka z dokładnością 4 bitów, ile iteracji należy wykonać aby osiągnąć:

- 24-bitową dokładność
- 53-bitową dokładność?

Zadanie 3. Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla następującego układu równań nieliniowych.

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= 1, \\ x_1^2 - x_2 &= 0\end{aligned}$$