Analiza błędów

Joanna Klimek

Informatyka, WIET

10.03.2021r.

Zadanie 1. Znajdź *maszynowe epsilon*, czyli najmniejsza liczbę a, taką że fl(1 + a) > 1

Schemat algorytmu:

Początkowo przyjmuję epsilon równy 1. Zmniejszam go dwukrotnie tak długo, dopóki po dodaniu do niego jedynki komputer twierdzi, że wynik jest większy od 1. Otrzymana wartość epsilon to obliczone maszynowe epsilon.

Wykorzystany kod w języku Python:

```
import numpy as np

a = float(1)
b = np.float16(1)
c = np.float32(1)
d = np.float64(1)

values = [a, b, c, d]

for x in values:
    print('\nEpsilon maszynowy dla', type(x), ':')
    print(x)

    while (x + 1.0 > 1.0):
        x /= 2.0

    print(x * 2.0)
```

Wyniki:

```
Epsilon maszynowy dla <class 'float'> :
1.0
2.220446049250313e-16

Epsilon maszynowy dla <class 'numpy.float16'> :
1.0
2.220446049250313e-16

Epsilon maszynowy dla <class 'numpy.float32'> :
1.0
2.220446049250313e-16

Epsilon maszynowy dla <class 'numpy.float64'> :
1.0
2.220446049250313e-16
```

Wnioski:

Wyniki wyszły takie same dla każdego typu. Nie wydaje mi się to poprawne, najwyraźniej napisany program zawiódł, ale nie mogę znaleźć czym jest to spowodowane. Testowane były również numpy.single, numpy.double, numpy.longdouble ale wyniki dalej się powtarzały.

Zadanie 2. Rozważamy problem ewaluacji funkcji sin(x), m.in. propagacje błędu danych wejściowych, tj. błąd wartości funkcji ze względu na zakłócenie h w argumencie x:

- Oceń błąd bezwzględny przy ewaluacji sin(x).
- Oceń błąd względny przy ewaluacji sin(x).
- Oceń uwarunkowanie dla tego problemu.
- Dla jakich wartości argumentu x problem jest bardzo czuły?

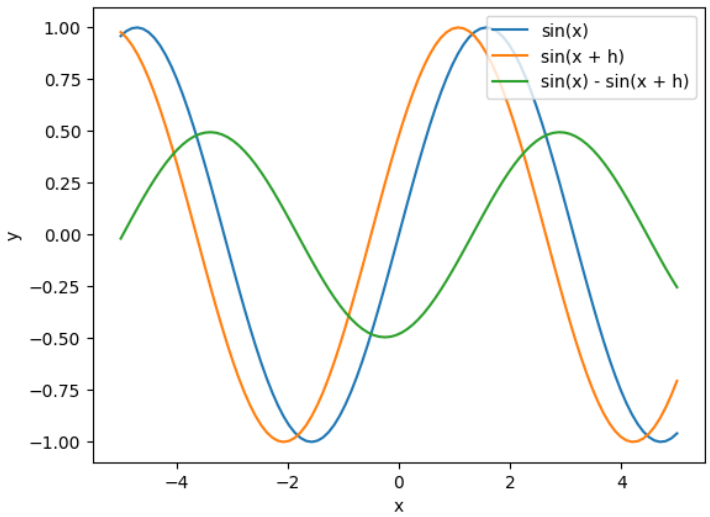
Nasza funkcja:

$$\hat{f}(x) = \sin(x) = \hat{y}$$

Błąd bezwzględny:

$$\Delta y = \hat{y} - y$$

$$\Delta y = |\sin(x + h) - \sin(x)|$$

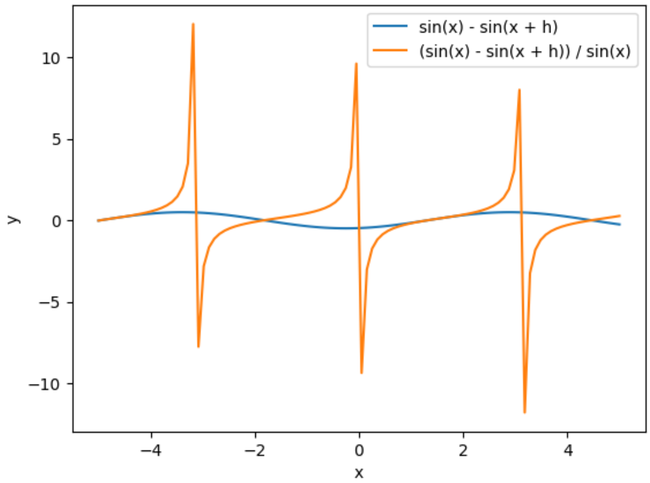


Patrząc na przykładowe wykresy widać, że błąd bezwzględny jest mniejszy w pobliżu punktów, w których sinus osiąga skrajne wartości, a największy tam gdzie sinus się zeruje.

Błąd względny:

$$\Delta y = \left|\frac{\hat{y} - y}{y}\right|$$

$$\Delta y = \left|\frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{\sin(x)}\right|$$



Patrząc na przykładowe wykresy widać, że miejsca gdzie błąd względny jest większy lub mniejszy są analogiczne do tych co przy błędzie bezwzględnym.

Wskaźnik uwarunkowania:

$$cond = \left|\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}\right|$$

$$cond = \left|\frac{\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{sinx}}{\frac{(x+h) - \mathrm{x}}{x}}\right| = \left|\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \cdot \frac{x}{sinx}\right| = \left|sin'(x) \cdot \frac{x}{sinx}\right|$$
$$= \left|\frac{xcos(x)}{sinx}\right| = |xctg(x)|$$

Czułość problemu:
Patrząc na wskaźnik uwarunkowania zadania, widać że problem jest najlepiej uwarunkowany (najmniej czuły) w miejscach gdzie:

$$x = 0 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \ \text{gdzie n – liczba całkowita}$$

W pierwszym przypadku x przed cotangensem jest równy zeru, a w drugim sam cotangens. A co za tym idzie – wskaźnik uwarunkowania jest równy zeru.
Problem staje się natomiast bardzo czuły w otoczeniu punktów:

$$x = n\pi, \ \text{gdzie n – liczba całkowita (poza zerem)}$$

Zadanie 3. Rozwiniecie funkcji sinus w szereg Taylora jest równe

$$sin(x) = \ x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \cdots$$

Jakie są błędy progresywny (ang. *forward error*) i wsteczny (ang. *backward error*) jeśli przybliżamy funkcje sinus biorąc tylko pierwszy człon rozwinięcia, tj. $sin(x) \approx x$, dla x = 0.1, 0.5 i 1.0 ?
Jakie są błędy progresywny i wsteczny jeśli przybliżamy funkcje sinus biorąc pierwsze dwa człony rozwinięcia, tj. $sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$, dla x = 0.1, 0.5 i 1.0 ?

1) $\boldsymbol{sin(x) \approx x}$

Wartość dokładna: $y = \sin(\mathrm{x})$
Wartość przybliżona: $\hat{y} = x$
Argument dla którego wartość przybliżona jest wartością dokładną:

$$\hat{x} = \arcsin(\hat{y}) = \arcsin(x)$$

Dla x = 0.1

Błąd progresywny:

$$\Delta y = \hat{y} - y = x - \sin(x) = 0.1 - \sin(0.1) \approx 0.00016658335317185 08$$

Błąd wsteczny:

$$\Delta x = \hat{x} - x = \arcsin(x) - x = \arcsin(0.1) - 0.1 \approx 0.00016742116155979425$$

Dla x = 0.5

Błąd progresywny:

$$\Delta y = \hat{y} - y = x - \sin(x) = 0.5 - \sin(0.5) \approx \ 0.020574461395796995$$

Błąd wsteczny:

$$\Delta x = \hat{x} - x = \arcsin(x) - x = \arcsin(0.5) - 0.5 \approx 0.023598775598298927$$

Dla x = 1.0

Błąd progresywny:

$$\Delta y = \hat{y} - y = x - \sin(x) = 1.0 - \sin(1.0) \approx 0.1585290151921035$$

Błąd wsteczny:

$$\Delta x = \hat{x} - x = \arcsin(x) - x = \arcsin(1.0) - 0.1 \approx 0.5707963267948966$$

Tabela podsumowująca przybliżone wyniki:

x	Błąd progresywny	Błąd wsteczny
0.1	0.00016658335317185008	0.00016742116155979425
0.5	0.020574461395796995	0.023598775598298927
1.0	0.1585290151921035	0.5707963267948966

Pomocniczy kod do wyliczania wartości w Pythonie:

```
from math import sin, asin

values = [0.1, 0.5, 1.0]

print("Przyblizanie pierwszym czlonem rozwiniecia\n")

for x in values:
    print("Wartosc x: ", x)
    print("Wartosc sin(x): ", sin(x))
    print("Wartosc arcsin(x): ", asin(x))
    print("Blad progresywny: ", x - sin(x))
    print("Blad wsteczny: ", asin(x) - x, "\n")
```

2) $\boldsymbol{sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}}$

Wartość dokładna: $y = \sin(x)$

Wartość przybliżona: $\hat{y} = x - \frac{x^3}{6}$

Argument dla którego wartość przybliżona jest wartością dokładną:

$$\hat{x} = \arcsin(\hat{y}) = \arcsin\left(x - \frac{x^3}{6}\right)$$

Dla x = 0.1

Błąd progresywny:

$$\Delta y = \hat{y} - y = x - \frac{x^3}{6} - \sin(x) = 0.1 - \frac{0.1^3}{6} - \sin(0.1) \approx -0.000000083313494$$

Błąd wsteczny:

$$\Delta x = \hat{x} - x = \arcsin\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - x = \arcsin\left(0.1 - \frac{0.1^3}{6}\right) - 0.1 \approx -0.000000083731804$$

Dla x = 0.5

Błąd progresywny:

$$\Delta y = \hat{y} - y = x - \frac{x^3}{6} - \sin(x) = 0.5 - \frac{0.5^3}{6} - \sin(0.5) \approx -0.00025887193753632002$$

Błąd wsteczny:

$$\Delta x = \hat{x} - x = \arcsin\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - x = \arcsin\left(0.5 - \frac{0.5^3}{6}\right) - 0.5$$
$$\approx -0.0002949592406357171$$

Dla x = 1.0

Błąd progresywny:

$$\Delta y = \hat{y} - y = x - \frac{x^3}{6} - \sin(x) = 1.0 - \frac{1.0^3}{6} - \sin(1.0) \approx -0.008137651474563135$$

Błąd wsteczny:

$$\Delta x = \hat{x} - x = \arcsin\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - x = \arcsin\left(1.0 - \frac{1.0^3}{6}\right) - 0.1$$
$$\approx -0.01488921666225429$$

Tabela podsumowująca przybliżone wyniki:

x	Błąd progresywny	Błąd wsteczny
0.1	-0.000000083313494	-0.000000083731804
0.5	-0.0002588719375363202	-0.0002949592406357171
1.0	-0.008137651474563135	-0.01488921666225429

Pomocniczy kod do wyliczania wartości w Pythonie:

```
from math import sin, asin

values = [0.1, 0.5, 1.0]

print("Przyblizanie dwoma pierwszymi czlonami rozwiniecia\n")

for x in values:
    print("Wartosc x: ", x)
    print("Wartosc x-(x^3)/6: ", x - pow(x, 3)/6)
    print("Wartosc sin(x): ", sin(x))
    print("Wartosc arcsin(x-(x^3)/6): ", asin(x - pow(x, 3)/6))
    print("Blad progresywny: ", x - pow(x, 3)/6 - sin(x))
    print("Blad wsteczny: ", asin(x - pow(x, 3)/6) - x, "\n")
```

Podsumowanie

	$sin(x) \approx x$		$sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$	
x	**Błąd progresywny**	**Błąd wsteczny**	**Błąd progresywny**	**Błąd wsteczny**
0.1	0.00016658335317718508	0.00016742116155979425	-0.000000083313494	-0.000000083731804
0.5	0.020574461395796995	0.023598775598298927	-0.00025887193753632 02	-0.0002949592406357171
1.0	0.1585290151921035	0.5707963267948966	-0.008137651474563135	-0.01488921666225429

Przy porównaniu drugie przybliżenie wypada zdecydowanie lepiej niż pierwsze. Dla niewielkich x błąd jest praktycznie zaniedbywalny, a i przy większych wypada całkiem dobrze. Natomiast przyrównanie $sin(x) \approx x$ sprawdza się ale tylko dla niewielkich x.