

Interpolacja

Zadanie 1. Interpolacja funkcji $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ na przedziale $[-1, 1]$ i efekt Rungego.

- (a) Używając biblioteki **sympy** oblicz pochodne $f^{(5)}(x)$, $f^{(10)}(x)$, $f^{(15)}(x)$, a następnie narysuj na osobnych wykresach funkcje $f(x)$, $f^{(5)}(x)$, $f^{(10)}(x)$, $f^{(15)}(x)$.

- (b) Zinterpoluj funkcję

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \quad (1)$$

wielomianami Newtona 5-go i 10-go stopnia na przedziale $[-1, 1]$ z równo odległymi węzłami.

- (c) Powtórz obliczenia używając węzłów Czebyszewa:

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi\right), \quad 0 \leq j \leq n \quad (2)$$

- (d) Wykonaj interpolację funkcji $f(x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi kubicznymi (ang. *clamped cubic spline*) z 11 równoodległymi węzłami
- (e) Narysuj wykresy funkcji interpolowanej $f(x)$, funkcji interpolujących oraz wykresy funkcji błędów.
- (f) Przedstaw wyniki interpolacji i jej błędy w postaci poniższej tabeli dla losowo próbkowanych punktów z przedziału $[x_0, x_n]$

x	$f(x)$	Newton $P_{10}^N(x)$	Czebyszew $P_{10}^C(x)$	spline $s(x)$	Błąd $ f(x) - P_{10}^N(x) $	Błąd $ f(x) - P_{10}^C(x) $	Błąd $ f(x) - s(x) $

gdzie:

$P_{10}^N(x)$ to wielomian interpolacyjny Newtona 10-go stopnia,

$P_{10}^C(x)$ to wielomian interpolacyjny Newtona 10-go stopnia wyznaczony dla węzłów Czebyszewa,

$s(x)$ to kubiczna funkcja sklejana.

- (g) Porównaj otrzymane błędy interpolacji (maksymalny moduł różnic) z oszacowaniem błędu interpolacji w interpolacji wielomianami Newtona

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq t \leq x_n} |f^{(n+1)}(t)| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (3)$$

wielomianami Newtona z węzłami Czebyszewa

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{2}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq t \leq x_n} |f^{(n+1)}(t)| \left(\frac{x_n - x_0}{4} \right)^4. \quad (4)$$

oraz funkcjami sklejanymi

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{5}{384} \max_{x_0 \leq t \leq x_n} |f^{(4)}(t)| \cdot \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)^4 \quad (5)$$

Zadanie 2. Udowodnij, że w przypadku węzłów równoodległych

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

jeśli $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ dla $x \in [x_0, x_n]$, to błąd interpolacji (3) jest ograniczony w następujący sposób:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{4(n+1)} h^{n+1} \quad (6)$$

Zadanie 3. Wykonaj interpolację funkcji $f(x) = |\sin(x)|$ w przedziale $[-4, 4]$ przy użyciu wielomianów Lagrange’a 2-go, 5-go oraz 10-go stopnia, dla równoodległych węzłów interpolacji. Narysuj wykres i zinterpretuj go. Jakie wiele węzłów interpolacji byłoby wymaganych aby maksymalny błąd interpolacji nie przekraczał 10^{-10} ?

Wskazówka. Wykorzystaj oszacowanie (6) z zadania 2.

Zadanie 4.

- Oblicz wielomian interpolacyjny dla danych $(0.5, 5.5)$, $(1, 14.5)$, $(1.5, 32.5)$, $(2, 62.5)$ przy pomocy jednomianów.
- Oblicz wielomian interpolacyjny Lagrange’a dla tych samych danych i pokaż, że wielomian będzie ten sam co w (a).
- Oblicz wielomian interpolacyjny Newtona dla tych samych danych korzystając z metody trójkąta różnic dzielonych.
Pokaż, że każda reprezentacja dają ten sam wielomian.

Zadanie 5.

Wyraż następujący wielomian metodą Hornera: $p(t) = 3t^3 - 7t^2 + 5t - 4$.

Zadanie 6. Ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu $p(t)$ stopnia $n - 1$ w danym punkcie t jeżeli wybieramy jako reprezentację:

- (a) jednomiany
- (b) wielomiany Lagrange'a
- (c) wielomiany Newton'a