Optymalizacja

Joanna Klimek

Informatyka, WIET

09.06.2021r.

Zadanie 1.

Wyznacz punkty krytyczne każdej z poniższych funkcji. Scharakteryzuj każdy znaleziony punkt jako minimum, maksimum lub punkt siodłowy. Dla każdej funkcji zbadaj, czy posiada minimum globalne lub maksimum globalne na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

a) $f_1(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$
b) $f_2(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$
c) $f_3(x,y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x - y - 1)$
d) $f_4(x,y) = (x-y)^4 + x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1$

Punkt krytyczny (stacjonarny) to punkt, w którym funkcja jest <u>różniczkowalna</u> i jej <u>pochodna jest równa 0</u>.

Schemat działania:

Wszystkie funkcje są funkcjami wielomianowymi 2 zmiennych, czyli są różniczkowalne w $\mathbb{R}^2$. Potrzebujemy więc sprawdzić tylko drugi warunek, który w przypadku funkcji dwóch zmiennych sprowadza się do sprawdzenia, czy obie pochodne cząstkowe są równe 0.

Aby określić czy funkcja posiada ekstremum w danym punkcie krytycznym, wyliczymy pochodne cząstkowe drugiego rzędu i na ich podstawie tworzymy macierz:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dxdy} \\ \frac{d^2f}{dydx} & \frac{d^2f}{dy^2} \end{bmatrix}$$

Dla danego punktu krytycznego P:

- $H(P)$ jest dodatnio określona – P jest minimum
- $H(P)$ jest ujemnie określona – P jest maksimum
- $H(P)$ jest nieokreślona – P jest punktem siodłowym

Zgodnie z kryterium Sylvestera:

- Macierz A o wymiarach $n \times n$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej wiodące minory główne są dodatnie, tj. $M_i > 0, i = 1,2, \dots n$
- Macierz A o wymiarach $n \times n$ jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej wiodące minory główne są na przemian dodatnie lub ujemne, tj. $(-1)^i M_i > 0, i = 1,2, \dots n$

Natomiast minory główne wyznaczamy jako:

$$M_1 = a_{11}, \quad M_i = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix}$$

a) $f_1(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$

Pochodne cząstkowe:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 4xy + y^2) = 2x - 4y$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}(x^2 - 4xy + y^2) = 2y - 4x$$

Warunek na punkt krytyczny:

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = 0 \\ \frac{df}{dy} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 2y - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ 2y - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Wyznaczone punkty krytyczne: $(0, 0)$

Obliczam pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2x - 4y) = 2$$

$$\frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d}{dy}(2x - 4y) = -4$$

$$\frac{d^2f}{dydx} = \frac{d}{dx}(2y - 4x) = -4$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = \frac{d}{dy}(2y - 4x) = 2$$

Tworzę macierz:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Obliczam minory główne:

$$M_1 = 2 > 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-4) = -12 < 0$$

Macierz jest nieokreślona, czyli w punkcie $(0, 0)$ funkcja posiada punkt siodłowy.

Funkcja nie posiada żadnych ekstremów lokalnych, a co za tym idzie globalnych.

b) $f_2(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$

Pochodne cząstkowe:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 4xy + y^4) = 4x^3 - 4y$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}(x^4 - 4xy + y^4) = 4y^3 - 4x$$

Warunek na punkt krytyczny:

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = 0 \\ \frac{df}{dy} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ x(x^8 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ x = 0 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} y = x^3 \\ x^8 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Wyznaczone punkty krytyczne: $(0,0), (1,1), (-1,-1)$

Obliczam pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}(4x^3 - 4y) = 12x^2$$

$$\frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d}{dy}(4x^3 - 4y) = -4$$

$$\frac{d^2f}{dydx} = \frac{d}{dx}(4y^3 - 4x) = -4$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = \frac{d}{dy}(4y^3 - 4x) = 12y^2$$

Tworzę macierz:

$$H = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

Obliczam minory główne:

$$M_1 = 12x^2$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 12x^2 \cdot 12y^2 - (-4) \cdot (-4) = 144x^2y^2 - 16$$

Punkt	$\boldsymbol{M_1}$	**Wartość**	$\boldsymbol{M_2}$	**Wartość**
$(0,0)$	$12 \cdot 0^2 = 0$	$= 0$	$144 \cdot 0^2 \cdot 0^2 - 16 = -16$	< 0
$(1,1)$	$12 \cdot 1^2 = 12$	> 0	$144 \cdot 1^2 \cdot 1^2 - 16 = 128$	> 0
$(-1,-1)$	$12 \cdot (-1)^2 = 12$	> 0	$144 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^2 - 16 = 128$	> 0

Czyli funkcja posiada w punktach odpowiednio:

- $(0,0)$ – punkt siodłowy (macierz niekreślona)
- $(1,1)$ – minimum (macierz dodatnio określona)
- $(-1,-1)$ - minimum (macierz dodatnio określona)

Obliczymy wartości minimów:

$$f(1,1) = 1^4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 + 1^4 = 1 - 4 + 1 = -2$$

$$f(-1,-1) = (-1)^4 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1)^4 = 1 - 4 + 1 = -2$$

Spróbujmy przekształcić trochę wzór badanej funkcji:

$$f_2(x,y) = x^4 - 4xy + y^4 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 2x^2y^2 - 4xy + 2 - 2$$
$$= (x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 1)^2 - 2$$

Dwa pierwsze wyrazy sumy są nieujemne. Możemy wnioskować, że funkcja przyjmuje tylko wartości większe lub równe -2, więc ostatecznie wyznaczone minima lokalne są także globalne.

c) $f_3(x, y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x - y - 1) =$
$$2x^3 - 3x^2 - 6x^2y + 6xy^2 + 6xy$$

Pochodne cząstkowe:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(\,2x^3 - 3x^2 - 6x^2y + 6xy^2 + 6xy) = \; 6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}(\,2x^3 - 3x^2 - 6x^2y + 6xy^2 + 6xy) = \; -6x^2 + 12xy + 6x$$

Warunek na punkt krytyczny:

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = 0 \\ \dfrac{df}{dy} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y = 0 \\ -6x^2 + 12xy + 6x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y = 0 \\ 6x(-x + 2y + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} 6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y = 0 \\ -x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y^2 + 6y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} 6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y(y + 1) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} 6(2y + 1)^2 - 6(2y + 1) - 12(2y + 1)y + 6y^2 + 6y = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} 24y^2 + 24y + 6 - 12y - 6 - 24y^2 - 12y + 6y^2 + 6y = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} y^2 + y = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} y(y+1) = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Wyznaczone punkty krytyczne: $(0,0), (0,-1), (1,0), (-1,-1)$

Obliczam pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}(6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y) = 12x - 6 - 12y$$

$$\frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d}{dy}(6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y) = -12x + 12y + 6$$

$$\frac{d^2f}{dydx} = \frac{d}{dx}(-6x^2 + 12xy + 6x) = -12x + 12y + 6$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = \frac{d}{dy}(-6x^2 + 12xy + 6x) = 12x$$

Tworzę macierz:

$$H = \begin{bmatrix} 12x - 6 - 12y & -12x + 12y + 6 \\ -12x + 12y + 6 & 12x \end{bmatrix}$$

Obliczam minory główne:

$$M_1 = 12x - 6 - 12y$$

$$\begin{aligned} M_2 = \begin{vmatrix} 12x - 6 - 12y & -12x + 12y + 6 \\ -12x + 12y + 6 & 12x \end{vmatrix} \\ &= 12x\,(12x - 6 - 12y) - (-12x + 12y + 6)(-12x + 12y + 6) \\ &= 144x^2 - 72x - 144xy \\ &- (144x^2 - 144xy - 72x - 144xy + 144y^2 + 72y - 72x + 72y + 36) \\ &= 144x^2 - 72x - 144xy \\ &- (144x^2 - 288xy - 144x + 144y^2 + 144y + 36) \\ &= 144x^2 - 72x - 144xy - 144x^2 + 288xy + 144x - 144y^2 - 144y - 36 \\ &= 144xy + 72x - 144y^2 - 144y - 36 \end{aligned}$$

Punkt	M_1	Wartość
$(0,0)$	$12 \cdot 0 - 6 - 12 \cdot 0 = -6$	< 0
$(0,-1)$	$12 \cdot 0 - 6 - 12 \cdot (-1) = -18$	< 0
$(1,0)$	$12 \cdot 1 - 6 - 12 \cdot 0 = 6$	> 0
$(-1,-1)$	$12 \cdot (-1) - 6 - 12 \cdot (-1) = -6$	< 0

Punkt	M_2	Wartość
$(0,0)$	$144 \cdot 0 \cdot 0 + 72 \cdot 0 - 144 \cdot 0^2 - 144 \cdot 0 - 36 = -36$	< 0
$(0,-1)$	$144 \cdot 0 \cdot (-1) + 72 \cdot 0 - 144 \cdot (-1)^2 - 144 \cdot (-1) - 36 = -144 + 144 - 36 = -36$	< 0
$(1,0)$	$144 \cdot 1 \cdot 0 + 72 \cdot 1 - 144 \cdot 0^2 - 144 \cdot 0 - 36 = 72 - 36 = 36$	> 0
$(-1,-1)$	$144 \cdot (-1) \cdot (-1) + 72 \cdot (-1) - 144 \cdot (-1)^2 - 144 \cdot (-1) - 36 = 144 - 72 - 144 + 144 - 36 = 36$	> 0

Czyli funkcja posiada w punktach odpowiednio:

- $(0,0)$ – punkt siodłowy (macierz niekreślona)
- $(0,-1)$ – punkt siodłowy (macierz niekreślona)
- $(1,0)$ - minimum (macierz dodatnio określona)
- $(-1,-1)$ - maksimum (macierz ujemnie określona)

Obliczmy wartości w wyznaczonych minimum i maksimum:

$$f_3(1,0) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1^2 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 0^2 + 6 \cdot 1 \cdot 0 = 2 - 3 - 0 - 0 - 0 = -1$$

$$f_3(-1,-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1)^2 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1) \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) \cdot (-1) = -2 - 3 + 6 - 6 + 6 = 1$$

Jeśli punkt $(-1,-1)$ jest maksimum lokalnym, to funkcja nie przyjmuje wartości większych od 1. Jest to sprzeczność na podstawie poniższego kontrprzykładu:

$$f_3(1,-1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1^2 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 1 \cdot (-1) = 2 - 3 + 6 + 6 - 6 = 5 > 1$$

Jeśli punkt $(1,0)$ jest minimum lokalnym, to funkcja nie przyjmuje wartości mniejszych od -1. Jest to sprzeczność na podstawie poniższego kontrprzykładu:

$$
\begin{aligned}
f_3(-1,0) = {} & 2\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1)^2\cdot 0 + 6\cdot(-1)\cdot 0^2 + 6\cdot(-1)\cdot 0 \\
& = -2 - 3 - 6 - 0 - 0 = -11 < -1
\end{aligned}
$$

Ekstrema globalne funkcji muszą być także ekstremami lokalnymi. Udowodniliśmy, że żadne z wyznaczonych ekstremów nie jest globalnym, czyli funkcja nie posiada ekstremów globalnych.

d) $f_4(x,y) = (x-y)^4 + x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1 =$
$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 + x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1$

Pochodne cząstkowe:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 + x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1)$$
$$= 4x^3 - 12x^2y + 12xy^2 - 4y^3 + 2x - 2$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}(x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 + x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1)$$
$$= -4x^3 + 12x^2y - 12xy^2 + 4y^3 - 2y + 2$$

Warunek na punkt krytyczny:

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = 0 \\ \frac{df}{dy} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 12x^2y + 12xy^2 - 4y^3 + 2x - 2 = 0 \\ -4x^3 + 12x^2y - 12xy^2 + 4y^3 - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

Po dodaniu równań stronami:

$$2x - 2y = 0$$

$$x = y$$

Podstawiam do pierwszego z równań:

$$4x^3 - 12x^3 + 12x^3 - 4x^3 + 2x - 2 = 0$$

$$2x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

$$y = 1$$

Wyznaczone punkty krytyczne: $(1,1)$

Obliczam pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}(4x^3 - 12x^2y + 12xy^2 - 4y^3 + 2x - 2) = 12x^2 - 24xy + 12y^2 + 2$$

$$\frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d}{dy}(4x^3 - 12x^2y + 12xy^2 - 4y^3 + 2x - 2) = -12x^2 + 24xy - 12y^2$$

$$\frac{d^2f}{dydx} = \frac{d}{dx}(-4x^3 + 12x^2y - 12xy^2 + 4y^3 - 2y + 2) = -12x^2 + 24xy - 12y^2$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = \frac{d}{dy}(-4x^3 + 12x^2y - 12xy^2 + 4y^3 - 2y + 2) = 12x^2 - 24xy + 12y^2 - 2$$

Tworzę macierz:

$$H = \begin{bmatrix} 12x^2 - 24xy + 12y^2 + 2 & -12x^2 + 24xy - 12y^2 \\ -12x^2 + 24xy - 12y^2 & 12x^2 - 24xy + 12y^2 - 2 \end{bmatrix}$$

Obliczam minory główne:

$$M_1 = 12x^2 - 24xy + 12y^2 + 2$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 12x^2 - 24xy + 12y^2 + 2 & -12x^2 + 24xy - 12y^2 \\ -12x^2 + 24xy - 12y^2 & 12x^2 - 24xy + 12y^2 - 2 \end{vmatrix}$$
$$= (12x^2 - 24xy + 12y^2 + 2)(12x^2 - 24xy + 12y^2 - 2)$$
$$- (-12x^2 + 24xy - 12y^2)(-12x^2 + 24xy - 12y^2) = -1152x^2y^2 - 4$$

Punkt	$\boldsymbol{M_1}$	**Wartość**
$(1, 1)$	$12 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 \cdot 1 + 12 \cdot 1^2 + 2 = 12 - 24 + 12 + 2 = 2$	> 0

Punkt	$\boldsymbol{M_2}$	**Wartość**
$(1, 1)$	$-1152 \cdot 1^2 \cdot 1^2 - 4 = -1152 - 4 = -1156$	< 0

Macierz jest nieokreślona, czyli w punkcie $(1, 1)$ funkcja posiada punkt siodłowy.

Funkcja nie posiada żadnych ekstremów lokalnych, a co za tym idzie globalnych.

Zadania drugiego nie udało mi się wykonać.