

# Laboration 3 Numerisk Analys

Josefine Klintberg, Louise Abrahamsson Kwetzer

3 oktober 2018

## Innehåll

<b>1</b>	<b>Hamiltonska system</b>	<b>3</b>
1.1	Jämförelse mellan metoder . . . . .	4
1.2	Energien som funktion av tiden . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Jämförelse av energi</b>	<b>6</b>
2.1	Framåt Euler . . . . .	6
2.2	Bakåt Euler . . . . .	6
2.3	Mittpunktsmetoden . . . . .	6
2.4	Exakt lösning . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Vågekvationen</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>d'Alemberts lösningsformel</b>	<b>9</b>
4.1	Film som illustrerar lösningen av ekvation (7) och (12) . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Schrödingerekvationen</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Keplerproblemet löst med ode45</b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>Verlets metod</b>	<b>13</b>
<b>8</b>	<b>Appendix med Matlab-kod</b>	<b>15</b>
8.1	Framåt Euler . . . . .	15
8.1.1	Funktion create system . . . . .	15
8.2	Bakåt Euler . . . . .	15
8.3	Mittpunktsmetoden . . . . .	16
8.4	Symplektisk Euler . . . . .	17
8.5	Energien för de olika metoderna . . . . .	17
8.6	Keplerproblemet med hjälp av <code>Matlabs</code> ode45 . . . . .	18

# 1 Hamiltonska system

Vi ska studera Keplerproblemet

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1(t) &= -\frac{q_1(t)}{(q_1(t)^2 + q_2(t)^2)^{3/2}} \\ \ddot{q}_2(t) &= -\frac{q_2(t)}{(q_1(t)^2 + q_2(t)^2)^{3/2}}\end{aligned}\tag{1}$$

och jämföra olika numeriska metoders approximation över långa tider.  
För ett Hamiltonskt system gäller

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= \nabla_p H(p(t), q(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\nabla_q H(p(t), q(t))\end{aligned}\tag{2}$$

Vi vill visa att ekvation (1) är ett Hamiltonskt system med Hamiltonianen  $H(p, q) = \frac{1}{2}|p| - \frac{1}{|q|}$ . Där  $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ .

Beräkning av ekvation (2) med den givna Hamiltonianen ger:

$$\dot{q} = \nabla_p H(p, q) = (p_1, p_2)\tag{3}$$

$$\dot{p} = -\nabla_q H(p, q) = -\left(\frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}, \frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}\right)\tag{4}$$

Det givna systemet (1) innehåller en andra ordningens tidsderivata i q-variabeln varför vi måste tidsderivata ekvation (3) en gång. Detta ger att  $\ddot{q} = (\dot{p}_1, \dot{p}_2)$ , där  $(\dot{p}_1, \dot{p}_2)$  är exakt det vi har i ekvation (4). Vi har alltså att:

$$\ddot{q} = (\dot{p}_1, \dot{p}_2) = -\left(\frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}, \frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}\right)$$

Denna ekvation är precis samma som ekvation (1), vilket medför att ekvation (1) är ett Hamiltonskt system.

Vi vill nu visa att energin  $H(p(t), q(t))$  är konstant för den exakta lösningen (1). För att det ska vara en konstant lösning måste tidsderivatan  $\dot{H}$  vara lika med noll. Kedjeregeln ger att:

$$\dot{H}(p, q) = \nabla_p H(p, q)\dot{p} + \nabla_q H(p, q)\dot{q}$$

. Insättning av ekvationerna (2) ger vidare:

$$\dot{H}(p, q) = \nabla_p H(p, q) \cdot (-\nabla_q H(p, q)) + \nabla_q H(p, q) \cdot \nabla_p H(p, q) = 0$$

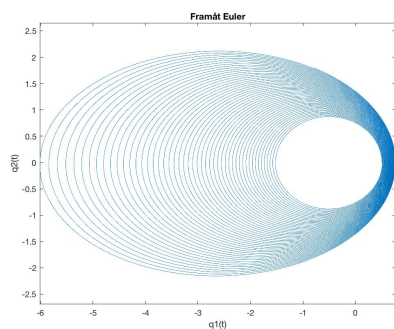
Detta visar att energin  $H(p, q)$  är konstant.

## 1.1 Jämförelse mellan metoder

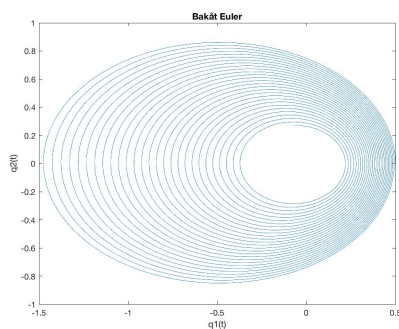
Vi plottar banorna  $(q_1(t), q_2(t))$  i koordinatsystem i planet, för begynnelsedatan  $q_1(0) = 1 - a$ ,  $q_2(0) = 0$ ,  $p_1(0) = 0$ ,  $p_2(0) = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$ . Där  $a$  är excentriciteten,  $0 \leq a < 1$ , vilket är ett tal som karakteriserar ett kägelsnitt och kan beräknas som kvoten av avståndet mellan brännpunkterna och storaxeln. Talet  $a$  kan då ses som ett mått på ellipsens utdragenhet. Vi väljer  $a = 0,5$ .

Ekvation (1) beskriver det så kallade två-kroppars problemet där två kroppar attraherar varandra med Newtons kraft och koordinaterna väljs så att den ena kroppen är i origo. Newton visade matematiskt att banan blir en ellips med excentriciteten  $a$ .

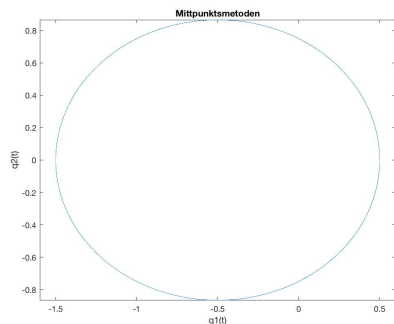
Vi börjar med framåt Euler-metoden. Vi gjorde funktionen *createsystem* för att skapa Keplerproblemet (1). I vår kod använder vi sedan begynnelsevärdena och för varje steg så skapar vi nya värden på  $p_1, p_2, q_1, q_2$ . I övriga tre metoder använder vi oss av fixpunktsiteration för att hitta våra planetbanor.



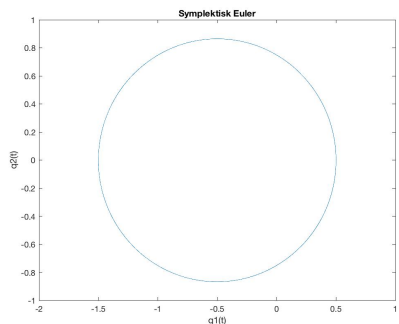
(a) Framåt Euler



(b) Bakåt Euler



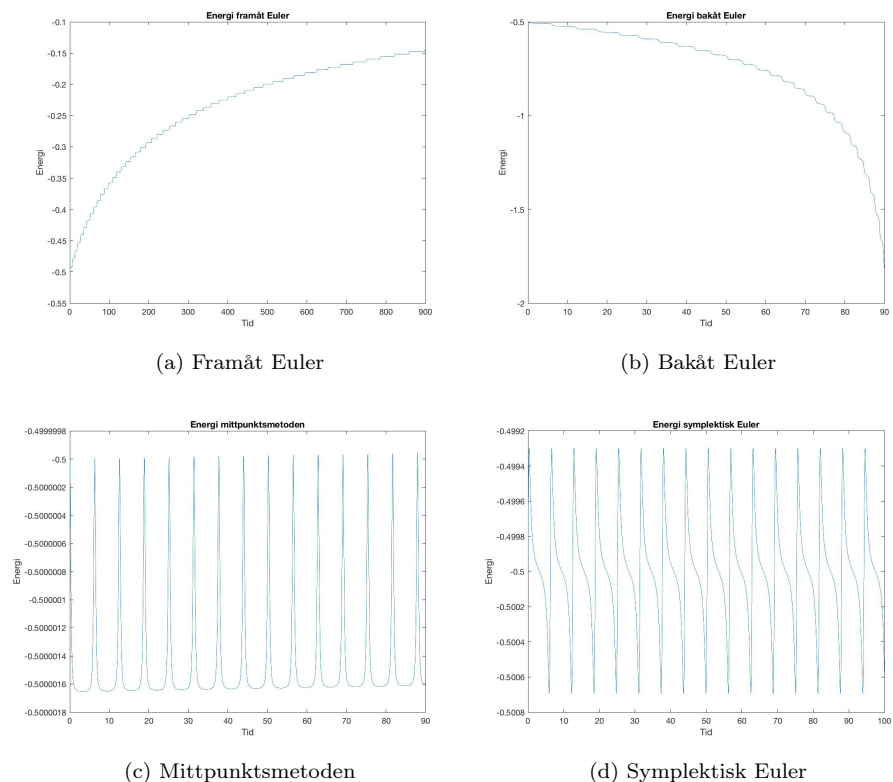
(c) Mittpunktsmetoden



(d) Symplektisk Euler

Figur 1: Planetbanornas utseende för de olika metoderna.

## 1.2 Energin som funktion av tiden



Figur 2: Energin som funktion av tiden för de olika metoderna.

Som vi ser i figurerna ovan har de olika metoderna olika energibevarande. I metoden framåt-Euler så ökar energin med tiden, detta kan vi även se i figuren för planetbanan då planeten rör sig utåt. För bakåt-Euler blir det tvärtom, i denna metod minskar energin för varje iteration vilket också kan utläsas från både energiplotten och planetbanans rörelse. I detta fall rör sig planeten inåt mot mitten.

För de två sista metoderna, mittpunktsmetoden och symplektiska Euler hålls energin i princip konstant och detta kan vi även se i planetbanorna för dessa metoder då de hela tiden rör sig i samma bana. Vi kan därmed dra slutsatsen att de bästa metoderna för att ta fram en planets rörelsebana är någon av de sistnämnda då vi vet att en planet rör sig i konstanta banor.

## 2 Jämförelse av energi

Det enklaste hamiltonska systemet ges av:

$$y' = iy \quad (5)$$

där  $i$  är den imaginära enheten och  $y(t) \in \mathbb{C}$ . Vi vet att Hamiltonianen är  $H(y(t)) = \frac{|y|^2}{2}$ . Vi vill nu jämföra de numeriska metoderna, framåt- och bakåt Euler, mittpunktsmetoden samt den exakta lösningen och se vad som händer med energin med tiden.

### 2.1 Framåt Euler

Framåt Eulerapproximationen ger:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = iy_n \implies y_{n+1} = y_n(1 + ih)$$

Insättning i Hamiltonianen ger:

$$H_{n+1} = \frac{|y_{n+1}|^2}{2} = \frac{|y_n(1 + ih)|^2}{2} = \frac{|y_n|^2}{2} |1 + ih|^2 = \frac{|y_n|^2}{2} \underbrace{\sqrt{1 + h^2}}_{>1} > \frac{|y_n|^2}{2} = H_n$$

Då  $H_{n+1} > H_n$  ser vi att energin växer med tiden för metoden framåt Euler.

### 2.2 Bakåt Euler

Bakåt Eulerapproximationen ger:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = iy_{n+1} \implies y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - ih}$$

Insättning i Hamiltonianen ger:

$$H_{n+1} = \frac{|y_{n+1}|^2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{|y_n|}{|1 - ih|} \right)^2 = \frac{|y_n|^2}{2} \frac{1}{|1 - ih|^2} = \frac{|y_n|^2}{2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + h^2}}}_{<1} < \frac{|y_n|^2}{2} = H_n$$

Då  $H_{n+1} < H_n$  ser vi att energin minskar med tiden för metoden bakåt Euler.

### 2.3 Mittpunktsmetoden

Mittpunktsmetoden ger:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{i}{2}(y_n + y_{n+1}) \implies y_{n+1} = y_n \frac{1 + \frac{ih}{2}}{1 - \frac{ih}{2}}$$

Insättning i Hamiltonianen ger:

$$H_{n+1} = \frac{|y_{n+1}|^2}{2} = \frac{|y_n|^2}{2} \left| \frac{1 + \frac{ih}{2}}{1 - \frac{ih}{2}} \right|^2 = \frac{|y_n|^2}{2} \frac{\sqrt{1 + (\frac{h}{2})^2}}{\sqrt{1 + (\frac{h}{2})^2}} = \frac{|y_n|^2}{2} = H_n$$

Då  $H_{n+1} = H_n$  ser vi att energin är konstant för mittpunktsmetoden.

## 2.4 Exakt lösning

Vi ser att differentialekvationen är separabel. Vi får:

$$\frac{1}{y} dy = i dt \quad \text{integration ger} \quad \ln y = it + c_1 \implies y = c_2 e^{it}$$

Insättning i Hamiltonianen ger:

$$H = \frac{|y|^2}{2} = \frac{|c_2 e^{it}|^2}{2} = \frac{c_2^2}{2}$$

Då  $c_2$  är en konstant ser vi att energin är konstant för den exakta lösningen.

## 3 Vågekvationen

Vågekvationen beskriver vågors utbredning. Det kan handla om ljudvågor, elektromagnetiska vågor eller vibrationer i en sträng. Vågekvationen definieras som:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad t > 0, x \in (0, 1), \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

där  $c$  är konstant (ljud/ljus hastighet). Om vi approximerar vågekvationen genom att först approximera vektorn  $\bar{u} \in \mathbb{R}^{N+1}$ , där  $\bar{u} \simeq u(j/N, t)$  för  $j = 0, 1, 2, \dots, N$  och låt  $N^2(\bar{u}_{j+1}(t) - 2\bar{u}_j(t) + \bar{u}_{j-1}(t)) \simeq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(j/N, t)$  vara den vanliga approximationen av andraderivatan, då får vi följande system av differentialekvationer:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_j(t)}{\partial t^2} = c^2 N^2(\bar{u}_{j+1}(t) - 2\bar{u}_j(t) + \bar{u}_{j-1}(t)), j = 1, \dots, N-1 \quad (7)$$

så att  $d^2 \hat{u}(t)/dt^2 = c^2 A \hat{u}(t)$

Energien ges av  $H = |d\hat{u}(t)/dt|^2/2 - c^2 \hat{u}(t) * A \hat{u}(t)/2$ :

Först vill vi visa att energin är konstant för alla tider. Så vi deriverar energin med avseende på tiden.

$$H' = \frac{du}{dt} \cdot \underbrace{\frac{d^2u}{dt^2}}_{=c^2 Au} - (c^2 \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{Au}{2} + c^2 u \cdot \frac{A}{2} \frac{du}{dt}) = \frac{du}{dt} c^2 Au - \frac{du}{dt} c^2 Au = 0$$

Detta visar att energin är konstant för alla tider.

Nu vill vi visa att vågekvationen är ett hamiltonskt system, vi väljer att kalla  $u = q$  och  $\dot{u} = p$ . Vi använder så ekvation (2), eftersom vi vet att detta ska uppfyllas för ett hamiltonskt system.

Vi beräknar följande:

$$\dot{\bar{q}}(t) = \nabla_p H = \nabla_p \left( \frac{|\bar{p}|^2}{2} - \frac{c^2 \bar{q} \cdot A \bar{q}}{2} \right) = \bar{p} \quad (8)$$

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\nabla_q H = -\nabla_q \left( \frac{|\bar{p}|^2}{2} - \frac{c^2 \bar{q} \cdot A \bar{q}}{2} \right) = c^2 A \bar{q} \quad (9)$$

Vi får då från ekvationerna att:

$$\ddot{\bar{q}} = \dot{\bar{p}} = c^2 A \bar{q} \quad (10)$$

Eftersom  $A$  är definierad som:

$$A = N^2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Betyder detta att vi kan skriva ekvation (10) som:

$$\ddot{\bar{q}} = c^2 A \bar{q} = c^2 N^2 (\bar{q}_{j+1} - 2\bar{q}_j + \bar{q}_{j-1}) \quad (11)$$

Om vi återinför våra första variabler, det vill säga att  $u = q$  och  $\dot{u} = p$  så ser vi att ekvation (11) är lika med ekvation (7) och därmed har vi visat att vågekvationen är ett hamiltonskt system.

Eftersom vågekvationen är ett hamiltonskt system så är det lämpligt att använda symplektiska Euler som numerisk metod. Detta eftersom symplektiska Euler är energibevarande och det är precis det som är viktigt för hamiltonska system.



## 4 d'Alemberts lösningsformel

d'Alemberts lösningsformel beskriver lösningen till vågekvationen i ett oändligt område och ges av:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u(x + ct, 0) + u(x - ct, 0)) \quad (12)$$

Det vill säga, vågekvationen given på detta sätt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

Med

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|_{t=0} = 0$$

Detta kan visas på följande sätt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}(cu'(x + ct, 0) - cu'(x - ct, 0))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2}c^2((u''(x + ct, 0) + u''(x - ct, 0))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(u''(x + ct, 0) + u''(x - ct, 0))$$

Alltså följer att:

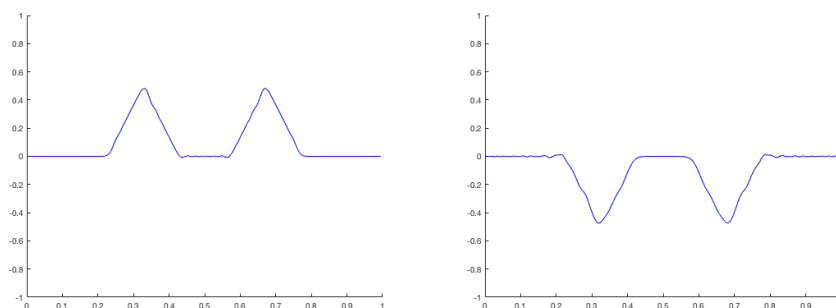
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Och begynnelsevärdet fås från:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|_{t=0} = \frac{1}{2}(cu'(x, 0) - cu'(x, 0)) = 0$$

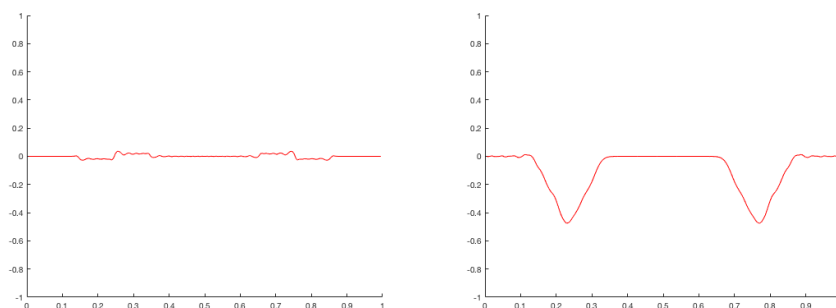
## 4.1 Film som illustrerar lösningen av ekvation (7) och (12)

Vi använde oss av koden som vi fick given i instruktionerna. När vi körde koden i Matlab så fick vi två stycken filmer.



Figur 3: Lösning av (7) och (12)

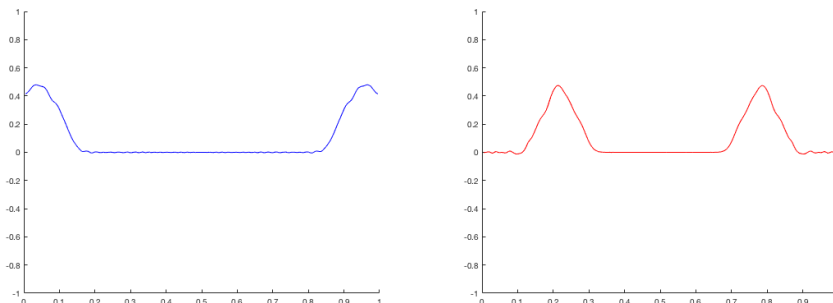
Först får vi upp en film som visar den blåa grafen ovan. Det börjar som en topp som går nedåt och delar upp sig i två separata toppar som rör sig utåt sidorna. När vi kör för en längre tid så vänder vågorna och blir upp och ned.



Figur 4: Skillnaden mellan lösningarna

Den andra filmen vi får upp är den röda och den visar skillnaden mellan lösningarna till (7) och (12).

När vi ändrar på randvillkoren så får vi filmer som till en början ser likadana ut som innan men när vi kommer till kanterna så vänder vågorna tillbaka och rör sig mot mitten igen och sedan ut, denna gången fortsätter de åt samma håll, dvs vänds ej.



Figur 5: Beetende med Neumannvillkor

Vi ser likheter med beteendet som borde uppkomma då vi studerar vågekvationen för en sträng. Där motsvarar våra första randvillkor en sträng som är fastspänd i ändarna, när vi ändrar randvillkoren så motsvarar detta istället fria ändar. Denna teorin stämmer bra med hur våra filmer ser ut.

Vi ser i filmen att skillnaderna på vågorna från början är väldigt lite fram tills vi kommer till randen. Detta beror på att den numeriska lösningen vänder tillbaka medan den riktiga lösningen fortsätter i all oändlighet. Därmed får vi en skillnad på exakt en våg.

## 5 Schrödingerekvationen

Schrödingerekvationen är en partiell differentialekvation som har en central betydelse inom kvantmekaniken, den beskriver hur vågekvationen beter sig över tiden och ser ut på följande sätt:

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -iA\psi(t) \quad (13)$$

Där  $A$  är en konstant symmetrisk reell  $n \times n$  matris (rumsdiskretiseringen redan gjord). Vi ska nu undersöka huruvida Schrödingerekvationen är ett hamiltonskt system. Om den är det så betyder det att vi måste ha en Hamiltonian som uppfyller ekvationerna (2). Vi ser att Schrödingerekvationen liknar det enklaste hamiltonska systemet som vi studerade i avsnitt 2. Där fick vi givet att Hamiltonianen är  $H(y(t)) = \frac{|y|^2}{2}$ . Vi utgår ifrån att den sökta Hamiltonianen för Schrödingerekvationen borde se ut på ungefär samma sätt. Dock har vi nu även en matris  $A$  att ta hänsyn till (övriga tillägg är enbart konstanter och ska inte påverka).

Vi får givet att den totala sannolikheten bevaras och ges av  $|\psi(t)|^2 = \sum_{i=1}^n \psi_i(t)\overline{\psi_i(t)}$ . Vi ansätter att  $\psi_i = p_i + iq_i$  där  $p$  är realdel och  $q$  imaginärdel till  $\psi$ .

Vi ansätter en Hamiltonian som ser ut på detta sätt:

$$H(\psi(t)) = -A \frac{|\psi|^2}{2}$$

För att bevisa att Schrödingerekvationen är ett hamiltonskt system så måste vi visa att ekvation (2) verkligen uppfyller ekvation (13). Om vi utgår från att  $\psi$  är ett godtyckligt komplext tal med realdel och imaginärdel som definierat ovan, då blir Schrödingerekvationen (14) på följande sätt:

$$\dot{\psi}_i = -iA\psi_i(t) \Leftrightarrow \dot{p}_i + i\dot{q}_i = -iA(p_i + iq_i) \Leftrightarrow \dot{p}_i + i\dot{q}_i = A(q_i - ip_i) \quad (14)$$

Med hjälp av räkneregler för komplexa tal så vet vi nu att det vi vill visa är att med vår Hamiltonian i ekvation (2) så ska  $\dot{p}_i = Aq_i$  och  $\dot{q}_i = -Ap_i$ .

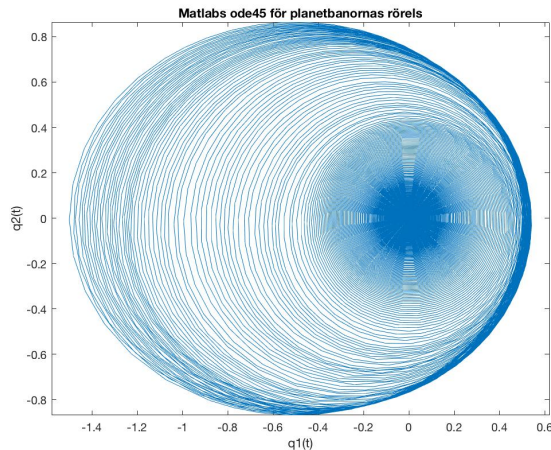
$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t) &= \nabla_{p_i} H(p_i(t), q_i(t)) = \nabla_{p_i} \left( -A \frac{|\psi_i|^2}{2} \right) = \nabla_{p_i} \left( \frac{-Ap_i \cdot p_i - Aq_i \cdot q_i}{2} \right) = -Ap_i \\ \dot{p}_i(t) &= -\nabla_{q_i} H(p_i(t), q_i(t)) = -\nabla_{q_i} \left( -A \frac{|\psi_i|^2}{2} \right) = -\nabla_{q_i} \left( \frac{-Ap_i \cdot p_i - Aq_i \cdot q_i}{2} \right) = Aq_i \end{aligned} \quad (15)$$

Vi har därmed visat att Schrödingerekvationen är ett hamiltonskt system.

Precis som för vågekvationen så är det lämpligt att använda symplektisk euler som numerisk metod. Detta eftersom den är energibevarende och vi fick givet att den totala sannolikheten bevaras och uttrycket för denna används i Hamiltonianen.

## 6 Keplerproblemet löst med ode45

Genom att implementera `Matlabs ode45` får vi en planetbana som ser ut enligt figuren nedan. Vi ser att denna metod inte ger ett jättebra resultat då planetbanan snabbt faller in mot centrum.



Figur 6: Planetbanan beräknad med hjälp av ode45.

Noggrannhetsordningen för ode45 är 4, för mittpunktsmetoden 2 och för symplektiska Euler 1. Även om ode45 har högre noggrannhetsordning så kan vi se att för lång tid så kommer mittpunktsmetoden och symplektisk euler att bevara energin bättre än ode45.

## 7 Verlets metod

Den dominerande metoden för standard molekylodynamik,  $\ddot{q} = -f(q)$ , med konstant antal partiklar, volym och energi, är Verlets metod som leder till:

$$\frac{q^{n+1} - 2q^n + q^{n-1}}{h^2} = -f(q^n)$$

Vi vill visa att detta även gäller för den symplektiska Eulermetoden. Vi börjar med att skriva om  $\ddot{q} = -f(q)$  som ett system av första ordningens differentialekvationer och får då:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -f(q) \end{cases} \quad (16)$$

Om detta ska vara ett Hamiltonskt system vet vi att  $\dot{q} = \nabla_p H(p, q)$  och  $\dot{p} = -\nabla_q H(p, q)$ . Detta ger att:

$$\begin{cases} \dot{q} = p = \nabla_p H(p, q) \\ \dot{p} = -f(q) = -\nabla_q H(p, q) \end{cases} \quad (17)$$

För Symplektiska Euler fås då:

$$q^{n+1} = q^n + h \nabla_p H(p^{n+1}, q^n) \quad (18)$$

$$p^{n+1} = p^n - h \underbrace{\nabla_q H(p^{n+1}, q^n)}_{=f(q^n)} \quad (19)$$

Detta ger att ekvation (19) kan skrivas enligt:

$$p^{n+1} = p^n - hf(q^n) \quad (20)$$

Vi har enligt ekvation (17):

$$\nabla_p H(p^{n+1}, q^n) = p^{n+1}$$

Ekvation (18) ger då:

$$\begin{aligned} q^{n+1} &= q^n + h \nabla_p H(p^{n+1}, q^n) = q^n + hp^{n+1} \\ \implies p^{n+1} &= \frac{q^{n+1} - q^n}{h} \implies p^n = \frac{q^n - q^{n-1}}{h} \end{aligned} \quad (21)$$

$p^{n+1}$  och  $p^n$  insatt i ekvation (20) ger:

$$\begin{aligned} \frac{q^{n+1} - q^n}{h} &= \frac{q^n - q^{n-1}}{h} - hf(q^n) \\ \implies \frac{q^{n+1} - 2q^n + q^{n-1}}{h^2} &= -f(q^n) \end{aligned}$$

Detta visar att symplektiska Euler kan skrivas på samma form som ovan.

## 8 Appendix med Matlab-kod

### 8.1 Framåt Euler

```
clear all, close all

len = 0.001; % steglängd
s = 1000000; % antal steg

q1 = zeros(1,s);
q2 = zeros(1,s);
p1 = zeros(1,s);
p2 = zeros(1,s);

% Begynnelsevärden
a=0.5;
q1(1) = 1-a;
q2(1) = 0;
p1(1) = 0;
p2(1) = sqrt((1+a)/(1-a));

for i=2:s
    [w1,w2] = create_system(q1(i-1),q2(i-1));
    p1(i) = p1(i-1) + w1*len;
    p2(i) = p2(i-1) + w2*len;
    q1(i) = q1(i-1) + p1(i-1)*len;
    q2(i) = q2(i-1) + p2(i-1)*len;
end

plot(q1,q2)
axis equal

Energi(u,h,s)
```

#### 8.1.1 Funktion create system

```
function [a,b] = create_system(c,d)
% Keplerproblemet
% Där [a,b] = [q1'',q2''], [c,d] = [q1,q2]
a = -c/(((c^2)+(d^2))^(3/2)); % Definition av q1''
b = -d/(((c^2)+(d^2))^(3/2)); % Definition av q2''
end
```

### 8.2 Bakåt Euler

```
close all
h = 0.05; % steglängd
s = 50000; % antal steg
```

```

tol = 1e-10;

u = zeros(4,s);

% Begynnelsevärden
a=0.5;
u(:,1)=[1-a; 0; 0; sqrt((1+a)/(1-a))];
f = @(q1,q2,p1,p2) [h*p1;
                    h*p2;
                    h*(-q1/(q1^2+q2^2)^(3/2));
                    h*(-q2/(q1^2+q2^2)^(3/2))];

for i=2:s
    w = u(:,i-1);
    while max(abs(u(:,i-1) + f(w(1),w(2),w(3),w(4))-w))> tol
        w = u(:,i-1) + f(w(1),w(2),w(3),w(4));
    end
    u(:,i)=w;
end

q1=u(1,:);
q2=u(2,:);

plot(q1,q2)

Energi(u,h,s)

```

### 8.3 Mittpunktsmetoden

```

close all

h = 0.001; % steglängd s = 90000; tol = 1e-10;

u = zeros(4,s);

% Begynnelsevärden
a=0.5;
u(:,1)=[1-a; 0; 0; sqrt((1+a)/(1-a))];
f = @(q1,q2,p1,p2,q3,q4,p3,p4) [1/2*(h*p1+h*p3);
                                1/2*(h*p2+h*p4);
                                h*(-1/2*(q1+q3)/((1/2*(q1+q3))^2
                                +(1/2*(q2+q4))^2)^(3/2));
                                h*(-1/2*(q2+q4)/((1/2*(q1+q3))^2
                                +(1/2*(q2+q4))^2)^(3/2))];

for i=2:s
    w = u(:,i-1);

    while max(abs(u(:,i-1) +

```



```

        f(w(1),w(2),w(3),w(4),u(1,i-1),u(2,i-1),u(3,i-1),
          u(4,i-1))-w))> tol
    w = u(:,i-1) +
        f(w(1),w(2),w(3),w(4),u(1,i-1),u(2,i-1),u(3,i-1),u(4,i-1));
    end
    u(:,i)=w;
end

q1=u(1,:);
q2=u(2,:);
plot(q1,q2)
axis equal

Energi(u,h,s)

```

## 8.4 Symplektisk Euler

```

    %Symplektisk
    h = 0.001;
    s = 100000;
    tol = 1e-10;

    % Begynnelsevärden
    a=0.5;
    u=zeros(4,s);
    u(:,1)=[1-a; 0; 0; sqrt((1+a)/(1-a))];

    f=@(p1,p2,q1,q2) [p1; p2; -q1/(q1^2+q2^2)^(3/2); -q2/(q1^2+q2^2)^(3/2)];

    for i=2:s
        w = u(:,i-1);

        while max(abs(u(:,i-1) + h* f(w(3),w(4),u(1,i-1),u(2,i-1))-w))> tol
            w = u(:,i-1) + h* f(w(3),w(4),u(1,i-1),u(2,i-1));
        end
        u(:,i)=w;
    end

    q1=u(1,:);
    q2=u(2,:);
    plot(q1,q2)
    title('Symplektisk Euler')
    xlabel('q1(t)')
    ylabel('q2(t)')

    Energi(u,h,s)

```

## 8.5 Energin för de olika metoderna

```

function Energi(u,h,s)
figure
f=@(p1,p2,q1,q2) 1/2*(p1.^2+p2.^2)-1./sqrt(q1.^2+q2.^2);

t= h:h:s*h;

plot(t,f(u(3,:),u(4,:),u(1,:),u(2,:)))
title('Energi')
xlabel('Tid')
ylabel('Energi')
end

```

## 8.6 Keplerproblemet med hjälp av Matlabs ode45

```

%[tout,yout]=ode45(odefun,tspan,y0)
tspan=[0 100000];
a=0.5;

u=[0; sqrt((1+a)/(1-a)); 1-a; 0];

f = @(t,u) [(-u(3)/(u(3)^2+u(4)^2)^(3/2));
            (-u(4)/(u(3)^2+u(4)^2)^(3/2));
            u(1);
            u(2)];

[tout,yout]=ode45(f,[t0 tend],u);
plot(yout(:,3),yout(:,4))
axis equal

```