离散数学课后习题答案 (左孝凌版)

1-1，1-2 解：

a) 是命题，真值为 T。

b) 不是命题。

c) 是命题，真值要根据具体情况确定。

d) 不是命题。

e) 是命题，真值为 T。

f) 是命题，真值为 T。

g) 是命题，真值为 F。

h) 不是命题。

i) 不是命题。

（2）解：

原子命题：我爱北京天安门。

复合命题：如果不是练健美操，我就出外旅游拉。

（3）解：

a) $(\neg P \wedge R) \to Q$

b) $Q \to R$

c) $\neg P$

d) $P \to \neg Q$

（4）解：

a) 设 Q:我将去参加舞会。 R:我有时间。 P:天下雨。

$Q \leftrightarrow (R \wedge \neg P)$: 我将去参加舞会当且仅当我有时间和天不下雨。

b) 设 R:我在看电视。 Q:我在吃苹果。

R∧Q:我在看电视边吃苹果。

c) 设 Q:一个数是奇数。 R:一个数不能被 2 除。

（Q→R）∧(R→Q): 一个数是奇数，则它不能被 2 整除并且一个数不能被 2 整除，则它是奇数。

(5) 解：

a) 设 P：王强身体很好。 Q：王强成绩很好。 P∧Q

b) 设 P：小李看书。 Q：小李听音乐。 P∧Q

c) 设 P：气候很好。 Q：气候很热。 P∨Q

d) 设 P： a 和 b 是偶数。 Q：a+b 是偶数。 P→Q

e) 设 P：四边形 ABCD是平行四边形。 Q ：四边形 ABCD的对边平行。 R↔ Q

f) 设 P：语法错误。 Q：程序错误。 R：停机。（P∨ Q）→ R

(6) 解：

a) P:天气炎热。 Q:正在下雨。 P ∧Q

b) P:天气炎热。 R:湿度较低。 P ∧R

c) R:天正在下雨。 S:湿度很高。 R∨S

d) A:刘英上山。 B:李进上山。 A ∧B

e) M:老王是革新者。 N:小李是革新者。 M ∨N

f) L: 你看电影。 M:我看电影。 ┐L→┐M

g) P:我不看电视。 Q:我不外出。 R: 我在睡觉。 P ∧Q∧R

h) P:控制台打字机作输入设备。 Q:控制台打字机作输出设备。 P∧Q

1-3

（1）解：

a) 不是合式公式，没有规定运算符次序（若规定运算符次序后亦可作为合式公式）

b) 是合式公式

c) 不是合式公式（括弧不配对）

d) 不是合式公式（ R和 S之间缺少联结词）

e) 是合式公式。

（2）解：

a) A是合式公式， (A∨B)是合式公式， (A→(A∨B)) 是合式公式。 这个过程可以简记为：

A；(A∨B)；(A→(A∨B))

同理可记

b）A；¬ A ；(¬ A∧B) ；((¬ A∧B)∧A)

c）A；¬ A ；B；(¬ A→B) ；(B→A) ；((¬ A→B)→(B→A))

d）A；B；(A→B) ；(B→A) ；((A →B)∨(B→A))

（3）解：

a）((((A →C)→((B ∧C)→A)) →((B ∧C)→A)) →(A→C))

b）((B →A)∨(A→B)) 。

（4）解：

a) 是由 c) 式进行代换得到，在 c) 中用 Q代换 P, (P →P)代换 Q.

d) 是由 a) 式进行代换得到，在 a) 中用 P→(Q→P)代换 Q.

e) 是由 b) 式进行代换得到，用 R代换 P, S 代换 Q, Q 代换 R, P 代换 S.

（5）解：

a) P: 你没有给我写信。 R: 信在途中丢失了。 P ▽ Q

b) P: 张三不去。 Q: 李四不去。 R: 他就去。 (P∧Q)→R

c) P: 我们能划船。 Q: 我们能跑步。 $\neg(P\wedge Q)$

d) P: 你来了。 Q: 他唱歌。 R: 你伴奏。 $P\to(Q\leftrightarrow R)$

（6）解：

P:它占据空间。 Q: 它有质量。 R: 它不断变化。 S: 它是物质。

这个人起初主张： $(P\wedge Q\wedge R)\leftrightarrow S$

后来主张： $(P\wedge Q\leftrightarrow S)\wedge(S\to R)$

这个人开头主张与后来主张的不同点在于： 后来认为有 $P\wedge Q$ 必同时有 R，开头时没有这样的主张。

（7）解：

a) P: 上午下雨。 Q: 我去看电影。 R: 我在家里读书。 S: 我在家里看报。

$(\neg P\to Q)\wedge(P\to(R\vee S))$

b) P: 我今天进城。 Q:天下雨。 $\neg Q\to P$

c) P: 你走了。 Q: 我留下。 $Q\to P$

1-4

（4）解：a)

P Q R	$Q\wedge R$	$P\wedge(Q\wedge R)$	$P\wedge Q$	$(P\wedge Q)\wedge R$
T T T	T	T	T	T
T T F	F	F	T	F
T F T	F	F	F	F
T F F	F	F	F	F
F T T	T	F	F	F
F T F	F	F	F	F

F F T	F	F	F	F
F F F	F	F	F	F

所以， $P\wedge(Q\wedge R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\wedge R$

b)

P Q R	$Q\vee R$	$P\vee(Q\vee R)$	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\vee R$
T T T	T	T	T	T
T T F	T	T	T	T
T F T	T	T	T	T
T F F	F	T	T	T
F T T	T	T	T	T
F T F	T	T	T	T
F F T	T	T	F	T
F F F	F	F	F	F

所以， $P\vee(Q\vee R) \Leftrightarrow (P\vee Q)\vee R$

c）

P Q R	$Q\vee R$	$P\wedge(Q\vee R)$	$P\wedge Q$	$P\wedge R$	$(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$

T T					
T					
T T					
F					
T F	T	T	T	T	T
T	T	T	T	F	T
T F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F
F T	T	F	F	F	F
T	T	F	F	F	F
F T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F
F F					
T					
F F					
F					

所以， P∧(Q∨R) ⇔ (P∧Q)∨(P∧R)

d）

P Q	¬ P	¬ Q	¬ P∨¬ Q	¬ (P∧Q)	¬ P∧¬ Q	¬ (P∨Q)
T T	F	F	F	F	F	F
T F	F	T	T	T	F	F
F T	T	F	T	T	F	F
F F	T	T	T	T	T	T

所以，$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$，$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$

（5）解：如表，对问好所填的地方，可得公式 $F_1\sim F_6$，可表达为

P	Q	R	F1	F2	F3	F4	F5	F6
T	T	T	T	F	T	T	F	F
T	T	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	T	F	F	T	T	F
T	F	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	T	F	T	T	T

F1:$(Q\rightarrow P)\rightarrow R$

F2:$(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

F3:$(P\longleftrightarrow Q)\wedge(Q\vee R)$

F4:$(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$

F5:$(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)$

F6:$\neg(P\vee Q\vee R)$

(6)

	Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T
	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
	F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T

	T	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T

解：由上表可得有关公式为

1.F 2. $\neg(P \vee Q)$ 3. $\neg(Q \rightarrow P)$ 4. $\neg P$

5. $\neg(P \rightarrow Q)$ 6. $\neg Q$ 7. $\neg(P \leftrightarrow Q)$ 8. $\neg(P \wedge Q)$

9. $P \wedge Q$ 10. $P \leftrightarrow Q$ 11. Q 12. $P \rightarrow Q$

13. P 14. $Q \rightarrow P$ 15. $P \vee Q$ 16. T

(7) 证明：

a) $A \rightarrow (B \rightarrow A) \Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee A)$

$\Leftrightarrow A \vee (\neg A \vee \neg B)$

$\Leftrightarrow A \vee (A \rightarrow \neg B)$

$\Leftrightarrow \neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

b) $\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$

$\Leftrightarrow \neg((A \wedge B) \vee \neg(A \vee B))$

$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$

或 $\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B)) \vee (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$

c) $\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

d) $\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A))$

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

e) $(((A \wedge B \wedge C) \to D) \wedge (C \to (A \vee B \vee D)))$

$\Leftrightarrow (\neg (A \wedge B \wedge C) \vee D) \wedge (\neg C \vee (A \vee B \vee D))$

$\Leftrightarrow (\neg (A \wedge B \wedge C) \vee D) \wedge (\neg (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee D)$

$\Leftrightarrow (\neg (A \wedge B \wedge C) \wedge \neg (\neg A \wedge \neg B \wedge C)) \vee D$

$\Leftrightarrow ((A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)) \to D$

$\Leftrightarrow (((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \wedge C) \to D$

$\Leftrightarrow ((C \wedge (A \leftrightarrow B)) \to D)$

f) $A \to (B \vee C) \Leftrightarrow \neg A \vee (B \vee C)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \vee C$

$\Leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B) \vee C$

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \to C$

g) $(A \to D) \wedge (B \to D) \Leftrightarrow (\neg A \vee D) \wedge (\neg B \vee D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee D$

$\Leftrightarrow \neg (A \vee B) \vee D$

$\Leftrightarrow (A \vee B) \to D$

h) $((A \wedge B) \to C) \wedge (B \to (D \vee C))$

$\Leftrightarrow (\neg (A \wedge B) \vee C) \wedge (\neg B \vee (D \vee C))$

$\Leftrightarrow (\neg (A \wedge B) \wedge (\neg B \vee D)) \vee C$

$\Leftrightarrow (\neg (A \wedge B) \wedge \neg (\neg D \wedge B)) \vee C$

$\Leftrightarrow \neg ((A \wedge B) \vee (\neg D \wedge B)) \vee C$

$\Leftrightarrow ((A \vee \neg D) \wedge B) \to C$

$\Leftrightarrow (B \wedge (D \to A)) \to C$

（8）解：

a) $((A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg B\rightarrow\neg A))\wedge C$

$\Leftrightarrow ((\neg A\vee B)\leftrightarrow(B\vee\neg A))\wedge C$

$\Leftrightarrow ((\neg A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\vee B))\wedge C$

$\Leftrightarrow T\wedge C\Leftrightarrow C$

b) $A\vee(\neg A\vee(B\wedge\neg B))\Leftrightarrow(A\vee\neg A)\vee(B\wedge\neg B)\Leftrightarrow T\vee F\Leftrightarrow T$

c) $(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)$

$\Leftrightarrow (A\vee\neg A)\wedge(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow T\wedge(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow B\wedge C$

（9）解：1）设 C为 T，A为 T，B为 F，则满足 $A\vee C\Leftrightarrow B\vee C$，但 $A\Leftrightarrow B$不成立。

2）设 C为 F，A为 T，B为 F，则满足 $A\wedge C\Leftrightarrow B\wedge C$，但 $A\Leftrightarrow B$不成立。

3）由题意知$\neg A$和$\neg B$的真值相同，所以 A和 B的真值也相同。

习题 1-5

（1）证明：

a) $(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow (P\wedge(\neg P\vee Q))\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q)\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow \neg(P\wedge Q)\vee Q$

$\Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q\vee Q$

$\Leftrightarrow \neg P\vee T$

$\Leftrightarrow$ T

b) $\neg P\to(P\to Q)$

$\Leftrightarrow P\vee(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee\neg P)\vee Q$

$\Leftrightarrow T\vee Q$

$\Leftrightarrow$ T

c) $((P\to Q)\wedge(Q\to R))\to(P\to R)$

因为$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow(P\to R)$

所以$(P\to Q)\wedge(Q\to R)$为重言式。

d) $((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a))\leftrightarrow(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$

因为$((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a))$

$\Leftrightarrow ((a\vee c)\wedge b)\vee(c\wedge a)$

$\Leftrightarrow ((a\vee c)\vee(c\wedge a))\wedge(b\vee(c\wedge a))$

$\Leftrightarrow (a\vee c)\wedge(b\vee c)\wedge(b\vee a)$

所以$((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a))\leftrightarrow(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$ 为重言式。

（2）证明：

a)$(P\to Q)\Rightarrow P\to(P\wedge Q)$

解法 1：

设 $P\to Q$为 T

（1）若 P为 T，则 Q为 T，所以 $P\wedge Q$为 T，故 $P\to(P\wedge Q)$为 T

（2）若 P为 F，则 Q为 F，所以 $P\wedge Q$为 F，$P\to(P\wedge Q)$为 T

命题得证

解法 2：

设 $P\to(P\wedge Q)$为 F，则 P 为 T，$(P\wedge Q)$为 F，故必有 P 为 T，Q为 F，所以 $P\to Q$为 F。

解法 3：

$(P\to Q)\to(P\to(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P\vee Q)\vee((\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q))$

$\Leftrightarrow T$

所以$(P\to Q)\Rightarrow P\to(P\wedge Q)$

b)$(P\to Q)\to Q\Rightarrow P\vee Q$

设 $P\vee Q$为 F，则 P为 F，且 Q为 F，

故 $P\to Q$为 T，$(P\to Q)\to Q$为 F，

所以$(P\to Q)\to Q\Rightarrow P\vee Q$。

c)$(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))\Rightarrow R\to Q$

设 $R\to Q$为 F，则 R为 T，且 Q为 F，又 $P\wedge\neg P$为 F

所以 $Q\to(P\wedge\neg P)$为 T，$R\to(P\wedge\neg P)$为 F

所以 $R\to(R\to(P\wedge\neg P))$为 F，所以$(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))$为 F

即$(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))\Rightarrow R\to Q$成立。

（3）解：

a) $P\to Q$表示命题“如果 8 是偶数，那么糖果是甜的”。

b) a)的逆换式 $Q\to P$表示命题“如果糖果是甜的，那么 8 是偶数”。

c) a)的反换式$\neg P\to\neg Q$表示命题“如果 8 不是偶数，那么糖果不是甜的”。

d) a)的逆反式$\neg Q\to\neg P$表示命题“如果糖果不是甜的，那么 8 不是偶数”。

（4）解：

a) 如果天下雨，我不去。

设 P：天下雨。 Q：我不去。 $P \rightarrow Q$

逆换式 $Q \rightarrow P$ 表示命题：如果我不去，则天下雨。

逆反式 $\neg Q \rightarrow \neg P$ 表示命题：如果我去，则天不下雨

b) 仅当你走我将留下。

设 S：你走了。 R：我将留下。 $R \rightarrow S$

逆换式 $S \rightarrow R$ 表示命题：如果你走了则我将留下。

逆反式 $\neg S \rightarrow \neg R$ 表示命题：如果你不走，则我不留下。

c) 如果我不能获得更多帮助，我不能完成个任务。

设 E：我不能获得更多帮助。 H：我不能完成这个任务。 $E \rightarrow H$

逆换式 $H \rightarrow E$ 表示命题：我不能完成这个任务，则我不能获得更多帮助。

逆反式 $\neg H \rightarrow \neg E$ 表示命题：我完成这个任务，则我能获得更多帮助

（5）试证明 $P \leftrightarrow Q$，Q 逻辑蕴含 P。

证明：解法 1：

本题要求证明 $(P \leftrightarrow Q) \wedge Q \Rightarrow P$，

设 $(P \leftrightarrow Q) \wedge Q$ 为 T，则 $(P \leftrightarrow Q)$ 为 T，Q 为 T，故由 $\leftrightarrow$ 的定义，必有 P 为 T。

所以 $(P \leftrightarrow Q) \wedge Q \Rightarrow P$

解法 2：

由体题可知，即证 $((P \leftrightarrow Q) \wedge Q) \rightarrow P$ 是永真式。

$((P \leftrightarrow Q) \wedge Q) \rightarrow P$

$\Leftrightarrow (((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \wedge Q) \rightarrow P$

$\Leftrightarrow (\neg ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \vee \neg Q) \vee P$

$\Leftrightarrow (((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)) \vee \neg Q) \vee P$

$\Leftrightarrow ((\neg Q \vee \neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee P \vee Q)) \vee P$

$\Leftrightarrow ((\neg Q \vee \neg P) \wedge T) \vee P$

$\Leftrightarrow \neg Q \vee \neg P \vee P$

$\Leftrightarrow \neg Q \vee T$

$\Leftrightarrow T$

（6）解：

P：我学习　Q ：我数学不及格　R ：我热衷于玩扑克。

如果我学习，那么我数学不会不及格：　$P \rightarrow \neg Q$

如果我不热衷于玩扑克，那么我将学习　：$\neg R \rightarrow P$

但我数学不及格：Q

因此我热衷于玩扑克。　R

即本题符号化为：$(P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg R \rightarrow P) \wedge Q \Rightarrow R$

证：

证法 1：$((P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg R \rightarrow P) \wedge Q) \rightarrow R$

$\Leftrightarrow \neg ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (R \vee P) \wedge Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee R$

$\Leftrightarrow ((\neg Q \vee P) \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee ((R \vee \neg R) \wedge (R \vee \neg P))$

$\Leftrightarrow \neg Q \vee P \vee R \vee \neg P$

$\Leftrightarrow T$

所以，论证有效。

证法 2：设$(P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg R \rightarrow P) \wedge Q$为 T,

则因 Q为 T，$(P \rightarrow \neg Q)$ 为 T，可得 P为 F,

由$(\neg R \rightarrow P)$为 T，得到 R为 T。

故本题论证有效。

（7）解：

P：6 是偶数 Q ：7 被 2 除尽 R ：5 是素数

如果 6 是偶数，则 7 被 2 除不尽 $P\rightarrow\neg Q$

或 5 不是素数，或 7 被 2 除尽 $\neg R\vee Q$

5 是素数 R

所以 6 是奇数 $\neg P$

即本题符号化为：$(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R\Rightarrow\neg P$

证：

证法 1：$((P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R)\rightarrow\neg P$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R)\vee\neg P$

$\Leftrightarrow ((P\wedge Q)\vee(R\wedge\neg Q)\vee\neg R)\vee\neg P$

$\Leftrightarrow ((\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q))\vee((\neg R\vee R)\wedge(\neg R\vee\neg Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\vee(\neg R\vee\neg Q)$

$\Leftrightarrow T$

所以，论证有效，但实际上他不符合实际意义。

证法 2：$(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R$ 为 T,

则有 R 为 T，且 $\neg R\vee Q$ 为 T，故 Q 为 T,

再由 $P\rightarrow\neg Q$ 为 T，得到 $\neg P$ 为 T。

（8）证明：

a) $P\Rightarrow(\neg P\rightarrow Q)$

设 P 为 T，则 $\neg P$ 为 F，故 $\neg P\rightarrow Q$ 为 T

b) $\neg A\wedge B\wedge C\Rightarrow C$

假定 $\neg A\wedge B\wedge C$ 为 T，则 C 为 T。

c) $C \Rightarrow A \vee B \vee \neg B$

因为 $A \vee B \vee \neg B$ 为永真，所以 $C \Rightarrow A \vee B \vee \neg B$ 成立。

d) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$

设 $\neg(A \wedge B)$ 为 T，则 $A \wedge B$ 为 F。

若 A 为 T，B 为 F，则 $\neg A$ 为 F，$\neg B$ 为 T，故 $\neg A \vee \neg B$ 为 T。

若 A 为 F，B 为 T，则 $\neg A$ 为 T，$\neg B$ 为 F，故 $\neg A \vee \neg B$ 为 T。

若 A 为 F，B 为 F，则 $\neg A$ 为 T，$\neg B$ 为 T，故 $\neg A \vee \neg B$ 为 T。

命题得证。

e) $\neg A \rightarrow (B \vee C)$，$D \vee E$，$(D \vee E) \rightarrow \neg A \Rightarrow B \vee C$

设 $\neg A \rightarrow (B \vee C)$，$D \vee E$，$(D \vee E) \rightarrow \neg A$ 为 T，

则 $D \vee E$ 为 T，$(D \vee E) \rightarrow \neg A$ 为 T，所以 $\neg A$ 为 T

又 $\neg A \rightarrow (B \vee C)$ 为 T，所以 $B \vee C$ 为 T。命题得证。

f) $(A \wedge B) \rightarrow C$，$\neg D$，$\neg C \vee D \Rightarrow \neg A \vee \neg B$

设 $(A \wedge B) \rightarrow C$，$\neg D$，$\neg C \vee D$ 为 T，则 $\neg D$ 为 T，$\neg C \vee D$ 为 T，所以 C 为 F

又 $(A \wedge B) \rightarrow C$ 为 T，所以 $A \wedge B$ 为 F，所以 $\neg A \vee \neg B$ 为 T。命题得证。

（9）解：

a) 如果他有勇气，他将得胜。

P：他有勇气 Q：他将得胜

原命题：$P \rightarrow Q$ 逆反式：$\neg Q \rightarrow \neg P$ 表示：如果他失败了，说明他没勇气。

b) 仅当他不累他将得胜。

P：他不累 Q：他得胜

原命题：$Q \rightarrow P$ 逆反式：$\neg P \rightarrow \neg Q$ 表示：如果他累，他将失败。

习题 1-6

(1) 解：

a) $(P\wedge Q)\wedge\neg P \Leftrightarrow (P\wedge\neg P)\wedge Q \Leftrightarrow \neg(T\vee Q)$

b) $(P\rightarrow(Q\vee\neg R))\wedge\neg P\wedge Q$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee(Q\vee\neg R))\wedge\neg P\wedge Q$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg P\wedge Q)\vee(Q\wedge\neg P\wedge Q)\vee(\neg R\wedge\neg P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg R\wedge Q)$

$\Leftrightarrow \neg P\wedge Q$

$\Leftrightarrow \neg(P\vee\neg Q)$

c) $\neg P\wedge\neg Q\wedge(\neg R\rightarrow P)$

$\Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q\wedge(R\vee P)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge P)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee F$

$\Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q\wedge R$

$\Leftrightarrow \neg(P\vee Q\vee\neg R)$

(2) 解：

a) $\neg P \Leftrightarrow P\downarrow P$

b) $P\vee Q \Leftrightarrow \neg(P\downarrow Q) \Leftrightarrow (P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q)$

c) $P\wedge Q \Leftrightarrow \neg P\downarrow\neg Q \Leftrightarrow (P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q)$

(3) 解：

$P\rightarrow(\neg P\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow \neg P\vee(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow T$

$\Leftrightarrow \neg P \vee P$

$\Leftrightarrow (\neg P \uparrow \neg P) \uparrow (P \uparrow P)$

$\Leftrightarrow P \uparrow (P \uparrow P)$

$P \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow T$

$\Leftrightarrow \neg P \vee P$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \downarrow P)$

$\Leftrightarrow \neg ((P \downarrow P) \downarrow P)$

$\Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow P) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow P)$

(4) 解：

$P \uparrow Q$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \downarrow \neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q))$

$\Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q))$

(5) 证明：

$\neg (B \uparrow C)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg B \vee \neg C)$

$\Leftrightarrow \neg B \downarrow \neg C$

$\neg (B \downarrow C)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg B \wedge \neg C)$

$\Leftrightarrow \neg B \uparrow \neg C$

(6) 解：联结词“ $\uparrow$ ”和“ $\downarrow$ ”不满足结合律。举例如下：

a) 给出一组指派： P为 T, Q为 F, R为 F, 则 $(P\uparrow Q)\uparrow R$ 为 T, $P\uparrow(Q\uparrow R)$ 为 F

故 $(P\uparrow Q)\uparrow R \quad P\uparrow(Q\uparrow R)$.

b) 给出一组指派： P为 T, Q为 F, R为 F, 则 $(P\downarrow Q)\downarrow R$ 为 T, $P\downarrow(Q\downarrow R)$ 为 F

故 $(P\downarrow Q)\downarrow R \quad P\downarrow(Q\downarrow R)$.

(7) 证明：

设变元 P, Q 用连结词 $\leftrightarrow$, $\neg$ 作用于 P, Q得到：P, Q, $\neg P$, $\neg Q$, $P\leftrightarrow Q$, $P\leftrightarrow P$, $Q\leftrightarrow Q$, $Q\leftrightarrow P$。

但 $P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q\leftrightarrow P$, $P\leftrightarrow P \Leftrightarrow Q\leftrightarrow Q$ 故实际有：

P, Q, $\neg P$, $\neg Q$, $P\leftrightarrow Q$, $P\leftrightarrow P$（T） （A）

用 $\neg$ 作用于（A）类，得到扩大的公式类（包括原公式类）：

P, Q, $\neg P$, $\neg Q$, $\neg(P\leftrightarrow Q)$, T, F, $P\leftrightarrow Q$ （B）

用 $\leftrightarrow$ 作用于（A）类，得到：

$P\leftrightarrow Q$, $P\leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow F$, $P\leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q)$, $P\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow Q$, $P\leftrightarrow(P\leftrightarrow P)\Leftrightarrow P$,

$Q\leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q)$, $Q\leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow F$, $Q\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P$, $Q\leftrightarrow T \Leftrightarrow Q$,

$\neg P\leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$, $\neg P\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow \neg Q$, $\neg P\leftrightarrow T \Leftrightarrow \neg P$,

$\neg Q\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow \neg P$, $\neg Q\leftrightarrow T \Leftrightarrow \neg Q$,

$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$.

因此，（A）类使用运算后，仍在（B）类中。

对（B）类使用 $\neg$ 运算得：

$\neg P$, $\neg Q$, P, Q, $P\leftrightarrow Q$, F, T,

$\neg(P\leftrightarrow Q)$,

仍在（B）类中。

对（B）类使用 $\leftrightarrow$ 运算得：

$P\leftrightarrow Q$，$P\leftrightarrow\neg P\Leftrightarrow F$，$P\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$，$P\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg Q$，$P\leftrightarrow T\Leftrightarrow P$，$P\leftrightarrow F\Leftrightarrow\neg P$，$P\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow Q$

$Q\leftrightarrow\neg P\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$，$Q\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow F$，$Q\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg P$，$Q\leftrightarrow T\Leftrightarrow Q$，$Q\leftrightarrow F\Leftrightarrow\neg Q$，$Q\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P$，

$\neg P\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$，$\neg P\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow Q$，$\neg P\leftrightarrow T\Leftrightarrow\neg P$，$\neg P\leftrightarrow F\Leftrightarrow P$，$\neg P\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg Q$

$\neg Q\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P$，$\neg Q\leftrightarrow T\Leftrightarrow\neg Q$，$\neg Q\leftrightarrow T\Leftrightarrow\neg Q$，$\neg Q\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg P$，

$\neg(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow T\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$，$\neg(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow F\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$，$\neg(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow F$

$T\leftrightarrow F\Leftrightarrow F$，$T\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$

$F\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$

$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$.

故由（B）类使用 $\leftrightarrow$ 运算后，结果仍在（B）中。

由上证明：用 $\leftrightarrow,\neg$ 两个连结词，反复作用在两个变元的公式中，结果只能产生（B）类中的公式，总共仅八个不同的公式，故 $\{\leftrightarrow,\neg\}$ 不是功能完备的，更不能是最小联结词组。

已证 $\{\leftrightarrow,\neg\}$ 不是最小联结词组，又因为 $P\,\bar{\vee}\,Q\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$，故任何命题公式中的联结词，如仅用 $\{\bar{\vee},\neg\}$ 表达，则必可用 $\{\leftrightarrow,\neg\}$ 表达，其逆亦真。故 $\{\bar{\vee},\neg\}$ 也必不是最小联结词组。

(8) 证明 $\{\vee\}$，$\{\wedge\}$ 和 $\{\rightarrow\}$ 不是最小联结词组。

证明：若 $\{\vee\}$，$\{\wedge\}$ 和 $\{\rightarrow\}$ 是最小联结词，则

$\neg P\Leftrightarrow(P\vee P\vee\cdots\cdots)$

$\neg P\Leftrightarrow(P\wedge P\wedge\cdots\cdots)$

$\neg P \Leftrightarrow P \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow \cdots\cdots))$

对所有命题变元指派 T，则等价式左边为 F，右边为 T，与等价表达式矛盾。

所以{∨}，{∧}和{→}不是最小联结词。

(9) 证明{¬, →}和{¬, $\overset{c}{\rightarrow}$} 是最小联结词组。

证明：因为 {¬, ∨}为最小联结词组，且 $P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \rightarrow Q$

所以{¬, →}是功能完备的联结词组，又 {¬},{→}都不是功能完备的联结词组。

所以{¬, →}是最小联结词组。

又因为 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg (P \overset{c}{\rightarrow} Q)$，所以{¬, $\overset{c}{\rightarrow}$} 是功能完备的联结词组，又{¬},{$\overset{c}{\rightarrow}$} 不是功能完备的联结词组，

所以{¬, $\overset{c}{\rightarrow}$} 是最小联结词组。

习题 1-7

(1) 解：

$P \wedge (P \rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)$

$P \wedge (P \rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee (\neg Q \wedge Q)) \wedge (\neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

(2)解：

a) $(\neg P \wedge Q) \rightarrow R$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \wedge Q) \vee R$

$\Leftrightarrow P \vee \neg Q \vee R$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg Q\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)\vee(R\wedge P)\vee(R\wedge\neg P)$

b) $P\rightarrow((Q\wedge R)\rightarrow S)$

$\Leftrightarrow \neg P\vee(\neg(Q\wedge R)\vee S)$

$\Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q\vee\neg R\vee S$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg Q\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg R\wedge S)\vee(\neg R\wedge\neg S)\vee(S\wedge P)\vee(S\wedge\neg P)$

c) $\neg(P\vee\neg Q)\wedge(S\rightarrow T)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge Q)\wedge(\neg S\vee T)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge Q\wedge\neg S)\vee(\neg P\wedge Q\wedge T)$

d) $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P\vee Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$

e) $\neg(P\wedge Q)\wedge(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge P)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg Q\wedge P)\vee(\neg Q\wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge Q)\vee(\neg Q\wedge P)$

(3) 解：

a) $P\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow (P\vee\neg P)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

$\Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

b) $\neg(P\rightarrow Q)\vee(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P\vee Q)\vee(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P \vee Q)$

c) $\neg (P \to Q)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$

d) $(P \to Q) \to R$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \vee Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

e) $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee P)$

(4) 解：

a) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \vee \neg Q) \vee (P \leftrightarrow \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow \Sigma_{1,2,3}$

$\Leftrightarrow P \vee Q = \Pi_0$

b) $Q \wedge (P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (Q \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge Q = \Sigma_3$

$\Leftrightarrow \Pi_{0,1,2}$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

c) $P \vee (\neg P \to (Q \vee (\neg Q \to R))$

$\Leftrightarrow P \vee (P \vee (Q \vee (Q \vee R))$

$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R = \Pi_{0}$

$\Leftrightarrow \Sigma_{1,\ 2,\ 3,4,5,6,7}$

$=(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$\vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

d) $(P \to (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (P \vee (\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge (Q \wedge R)) \vee ((\neg Q \wedge \neg R) \wedge \neg P) \vee ((\neg Q \wedge \neg R) \wedge (Q \wedge R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) = \Sigma_{0,7}$

$\Leftrightarrow \Pi_{1,\ 2,\ 3,4,5,6}$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

$\wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

e) $P \to (P \wedge (Q \to P)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \wedge (\neg Q \vee P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee P)$

$\Leftrightarrow T \vee (T \wedge \neg Q) \Leftrightarrow T$

$\Leftrightarrow \Sigma_{0,1,2,3} = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

f) $(Q \to P) \wedge (\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \wedge \neg P \wedge Q$

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \wedge \neg (P \vee \neg Q) \Leftrightarrow F$

$\Leftrightarrow \Pi_{0,1,\ 2,\ 3} = (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

(5) 证明：

a)

$(A\to B)\wedge(A\to C)$

$\Leftrightarrow (\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)$

$A\to(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow \neg A\vee(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow (\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)$

b)

$(A\to B)\to(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg A\vee B)\vee(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow (A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow A\wedge(B\vee\neg B)$

$\Leftrightarrow A\wedge T$

$\Leftrightarrow A$

$(\neg A\to B)\wedge(B\to A)$

$\Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)$

$\Leftrightarrow A\vee(B\wedge\neg B)$

$\Leftrightarrow A\vee F$

$\Leftrightarrow A$

c)

$A\wedge B\wedge(\neg A\vee\neg B)$

$\Leftrightarrow ((A\wedge\neg A)\vee(A\wedge\neg B))\wedge B$

$\Leftrightarrow A\wedge B\wedge\neg B$

$\Leftrightarrow$ F

$\neg A \wedge \neg B \wedge (A \vee B)$

$\Leftrightarrow ((\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge B)) \wedge \neg B$

$\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \wedge B$

$\Leftrightarrow$ F

d)

$A \vee (A \rightarrow (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow A \vee \neg A \vee (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow$ T

$\neg A \vee \neg B \vee (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow \neg (A \wedge B) \vee (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow$ T

(6) 解：$A \Leftrightarrow R \uparrow (Q \wedge \neg (R \downarrow P))$，则 $A^* \Leftrightarrow R \downarrow (Q \vee \neg (R \uparrow P))$

$A \Leftrightarrow R \uparrow (Q \wedge \neg (R \downarrow P))$

$\Leftrightarrow \neg (R \wedge (Q \wedge (R \vee P)))$

$\Leftrightarrow \neg R \vee \neg Q \vee \neg (R \vee P)$

$\Leftrightarrow \neg (R \wedge Q) \vee \neg (R \vee P)$

$A^* \Leftrightarrow R \downarrow (Q \vee \neg (R \uparrow P))$

$\Leftrightarrow \neg (R \vee (Q \vee (R \wedge P))$

$\Leftrightarrow \neg R \wedge \neg Q \wedge \neg (R \wedge P)$

$\Leftrightarrow \neg (R \vee Q) \wedge \neg (R \wedge P)$

(7) 解：设 A：A去出差。B：B去出差。 C：C去出差。 D：D去出差。

若 A去则 C和 D中要去一个。 $A \rightarrow (C \overline{\vee} D)$

B和 C不能都去。 $\neg(B\wedge C)$

C去则 D要留下。 $C\to\neg D$

按题意应有： $A\to(C\bar{\vee}D)$，$\neg(B\wedge C)$，$C\to\neg D$必须同时成立。

因为 $C\bar{\vee}D\Leftrightarrow(C\wedge\neg D)\vee(D\wedge\neg C)$

故 $(A\to(C\bar{\vee}D))\wedge\neg(B\wedge C)\wedge(C\to\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee(C\wedge\neg D)\vee(D\wedge\neg C))\wedge\neg(B\wedge C)\wedge(\neg C\vee\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee(C\wedge\neg D)\vee(D\wedge\neg C))\wedge(\neg B\vee\neg C)\wedge(\neg C\vee\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee(C\wedge\neg D)\vee(D\wedge\neg C))\wedge((\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge\neg D)\vee\neg C)$

$\Leftrightarrow\underline{(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)}\vee\underline{(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg D)}\vee\underline{(\neg A\wedge\neg C\wedge\neg D)}\vee(\neg A\wedge\neg C)$

$\vee(\neg B\wedge\neg C\wedge D)\vee\underline{(\neg C\wedge D\wedge\neg B\wedge\neg D)}\vee\underline{(\neg C\wedge D\wedge\neg C\wedge\neg D)}$

$\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg C)\vee\underline{(\neg D\wedge C\wedge\neg B\wedge\neg C)}\vee(\neg D\wedge C\wedge\neg B\wedge\neg D)$

$\vee\underline{(\neg D\wedge C\wedge\neg C\wedge\neg D)}\vee\underline{(\neg D\wedge C\wedge\neg C)}$

在上述的析取范式中，有些（画线的）不符合题意，舍弃，得

$(\neg A\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge\neg C\wedge D)\vee(\neg C\wedge D)\vee(\neg D\wedge C\wedge\neg B)$

故分派的方法为： $B\wedge D$,或 $D\wedge A$,或 $C\wedge A$。

(8)解：设 P：A是第一。 Q：B是第二。 R：C是第二。 S：D是第四。 E：A是第二。

由题意得 $(P\bar{\vee}Q)\wedge(R\bar{\vee}S)\wedge(E\bar{\vee}S)$

$\Leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q))\wedge((R\wedge\neg S)\vee(\neg R\wedge S))\wedge((E\wedge\neg S)\vee(\neg E\wedge S))$

$\Leftrightarrow((P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg S)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R\wedge S)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R\wedge\neg S)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S))\wedge((E\wedge\neg S)\vee(\neg E\wedge S))$

因为 $(P\wedge\neg Q\wedge\neg R\wedge S)$与$(\neg P\wedge Q\wedge R\wedge\neg S)$不合题意，所以原式可化为

$((P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg S)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S))\wedge((E\wedge\neg S)\vee(\neg E\wedge S))$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg S\wedge E\wedge\neg S)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg S\wedge\neg E\wedge S)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S\wedge E\wedge\neg S)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S\wedge\neg E\wedge S)$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg S\wedge E)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S\wedge\neg E)$

因 R 与 E 矛盾，故 $\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S\wedge\neg E$ 为真，

即 A 不是第一， B 是第二， C 不是第二， D 为第四， A 不是第二。

于是得： A 是第三 B 是第二 C 是第一 D 是第四。

习题 1-8

(1) 证明：

a) $\neg(P\wedge\neg Q)$，$\neg Q\vee R$，$\neg R\Rightarrow\neg P$

(1) $\neg R$ P

(2) $\neg Q\vee R$ P

(3) $\neg Q$ (1)(2)T,I

(4) $\neg(P\wedge\neg Q)$ P

(5) $\neg P\vee Q$ (4)T,E

(6) $\neg P$ (3)(5)T,I

b) $J\rightarrow(M\vee N)$，$(H\vee G)\rightarrow J$，$H\vee G\Rightarrow M\vee N$

(1) $(H\vee G)\rightarrow J$ P

(2) $(H\vee G)$ P

(3) J (1)(2)T,I

(4) $J\rightarrow(M\vee N)$ P

(5) $M\vee N$ (3)(4)T,I

c) $B\wedge C$，$(B\leftrightarrow C)\rightarrow(H\vee G)\Rightarrow G\vee H$

(1) $B\wedge C$ P

(2) B (1)T,I

(3) C (1)T,I

(4) $B \vee \neg C$ (2)T,I

(5) $C \vee \neg B$ (3)T,I

(6) $C \rightarrow B$ (4)T,E

(7) $B \rightarrow C$ (5)T,E

(8) $B \leftrightarrow C$ (6)(7)T,E

(9) $(B \leftrightarrow C) \rightarrow (H \vee G)$ P

(10) $H \vee G$ (8)(9)T,I

d) $P \rightarrow Q$, $(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$, $\neg(\neg P \wedge S) \Rightarrow \neg S$

(1) $(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$

(2) $\neg Q \vee R$ (1)T,I

(3) $\neg R$ (1)T,I

(4) $\neg Q$ (2)(3)T,I

(5) $P \rightarrow Q$ P

(6) $\neg P$ (4)(5)T,I

(7) $\neg(\neg P \wedge \neg S)$ P

(8) $P \vee \neg S$ (7)T,E

(9) $\neg S$ (6)(8)T,I

(2) 证明：

a) $\neg A \vee B$, $C \rightarrow \neg B \Rightarrow A \rightarrow \neg C$

(1) $\neg(A \rightarrow \neg C)$ P

(2) A (1)T,I

(3) C (1)T,I

(4) $\neg A \vee B$ P

(5) B (2)(4)T,I

(6) $C \rightarrow \neg B$ P

(7) $\neg B$ (3)(6)T,I

(8) $B \wedge \neg B$ 矛盾。(5),(7)

b)$A\rightarrow(B\rightarrow C)$，$(C\wedge D)\rightarrow E$，$\neg F\rightarrow(D\wedge\neg E)$ $\Rightarrow A\rightarrow(B\rightarrow F)$

(1) $\neg(A\rightarrow(B\rightarrow F))$ P

(2) A (1)T,I

(3) $\neg(B\rightarrow F)$ (1)T,I

(4) B (3)T,I

(5) $\neg F$ (3)T,

(6) $A \rightarrow(B\rightarrow C)$ P

(7) $B \rightarrow C$ (2)(6)T,I

(8) C (4)(7)T,I

(9) $\neg F\rightarrow(D\wedge\neg E)$ P

(10) $D \wedge\neg E$ (5)(9)T,I

(11) D (10)T,I

(12) $C \wedge D$ (8)(11)T,I

(13) $(C \wedge D) \rightarrow E$ P

(14) E (12)(13)T,I

(15) $\neg E$ (10)T,I

(16) $E \wedge\neg E$ 矛盾。(14),(15)

c)$A\vee B\to C\wedge D$, $D\vee E\to F\Rightarrow A\to F$

(1) $\neg(A\to F)$ P

(2) A (1)T,I

(3) $\neg F$ (1)T,I

(4) $A\vee B$ (2)T,I

(5) $(A\vee B)\to C\wedge D$ P

(6) $C\wedge D$ (4)(5)T,I

(7) C (6)T,I

(8) D (6)T,I

(9) $D\vee E$ (8)T,I

(10) $D\vee E\to F$ P

(11) F(9)(10)T,I

(12) $F\wedge\neg F$ 矛盾。 (3),(11)

d)$A\to(B\wedge C)$，$\neg B\vee D$, $(E\to\neg F)\to\neg D$, $B\to(A\wedge\neg E)\Rightarrow B\to E$

(1) $\neg(B\to E)$ P

(2) B (1)T,I

(3) $\neg E$ (1)T,I

(4) $\neg B\vee D$ P

(5) D (2)(4)T,I

(6) $(E\to\neg F)\to\neg D$ P

(7) $\neg(E\to\neg F)$ (5)(6)T,I

(8) E (7)T,I

(9) $E\wedge\neg E$ 矛盾

e) $(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)$， $(B\rightarrow E)\wedge(D\rightarrow F)$， $\neg(E\wedge F)$， $A\rightarrow C\Rightarrow\neg A$

(1) $(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)$ P

(2) $A\rightarrow B$ (1)T,I

(3) $(B\rightarrow E)\wedge(D\rightarrow F)$ P

(4) $B\rightarrow E$ (3)T,I

(5) $A\rightarrow E$ (2)(4)T,I

(6) $\neg(E\wedge F)$ P

(7) $\neg E\vee\neg F$ (6)T,E

(8) $E\rightarrow\neg F$ (7)T,E

(9) $A\rightarrow\neg F$ (5)(8)T,I

(10) $C\rightarrow D$ (1)T,I

(11) $D\rightarrow F$ (3)T,I

(12) $C\rightarrow F$ (10)(10)T,I

(13) $A\rightarrow C$ P

(14) $A\rightarrow F$ (13)(12)T,I

(15) $\neg F\rightarrow\neg A$ (14)T,E

(16) $A\rightarrow\neg A$ (9)(15)T,I

(17) $\neg A\vee\neg A$ (16)T,E

(18) $\neg A$ (17) T,E

(3) 证明：

a) $\neg A\vee B$， $C\rightarrow\neg B\Rightarrow A\rightarrow\neg C$

(1) A P

(2) $\neg A\vee B$ P

(3) B (1)(2)T,I

(4) $C \rightarrow \neg B$ P

(5) $\neg C$ (3)(4)T,I

(6) $A \rightarrow \neg C$ CP

b) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $(C \wedge D) \rightarrow E$, $\neg F \rightarrow (D \wedge \neg E) \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow F)$

(1) A P

(2) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ P

(3) $B \rightarrow C$ (1)(2)T,I

(4) B P

(5) C (3)(4)T,I

(6) $(C \wedge D) \rightarrow E$ P

(7) $C \rightarrow (D \rightarrow E)$ (6)T,E

(8) $D \rightarrow E$ (5)(7)T,I

(9) $\neg D \vee E$ (8)T,E

(10) $\neg (D \wedge \neg E)$ (9)T,E

(11) $\neg F \rightarrow (D \wedge \neg E)$ P

(12) F (10)(11)T,I

(13) $B \rightarrow F$ CP

(14) $A \rightarrow (B \rightarrow F)$ CP

c) $A \vee B \rightarrow C \wedge D$, $D \vee E \rightarrow F \Rightarrow A \rightarrow F$

(1) A P

(2) $A \vee B$ (1)T,I

(3) $A \vee B \rightarrow C \vee D$ P

(4) $C \wedge D$ (2)(3)T,I

(5) D (4)T,I

(6) $D \vee E$ (5)T,I

(7) $D \vee E \to F$ P

(8) F (6)(7)T,I

(9) $A \to F$ CP

d) $A \to (B \wedge C)$, $\neg B \vee D$, $(E \to \neg F) \to \neg D$, $B \to (A \wedge \neg E) \Rightarrow B \to E$

(1) B P(附加前提)

(2) $\neg B \vee D$ P

(3) D (1)(2)T,I

(4) $(E \to \neg F) \to \neg D$ P

(5) $\neg (E \to \neg F)$ (3)(4)T,I

(6) E (5)T,I

(7) $B \to E$ CP

(4) 证明：

a) $R \to \neg Q$, $R \vee S$, $S \to \neg Q$, $P \to Q \Rightarrow \neg P$

(1) $R \to \neg Q$ P

(2) $R \vee S$ P

(3) $S \to \neg Q$ P

(4) $\neg Q$ (1)(2)(3)T,I

(5) $P \to Q$ P

(6) $\neg P$ (4)(5)T,I

b) $S \to \neg Q$, $S \vee R$, $\neg R$, $\neg P \leftrightarrow Q \Rightarrow P$

证法一：

(1) $S \vee R$ P

(2) $\neg R$ P

(3) S (1)(2)T,I

(4) $S \rightarrow \neg Q$ P

(5) $\neg Q$ (3)(4)T,I

(6) $\neg P \leftrightarrow Q$ P

(7) $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg P)$ (6)T,E

(8) $\neg P \rightarrow Q$ (7)T,I

(9) P (5)(8)T,I

证法二：（反证法）

(1) $\neg P$ P （附加前提）

(2) $\neg P \leftrightarrow Q$ P

(3) $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg P)$ (2)T，E

(4) $\neg P \rightarrow Q$ (3)T,I

(5) Q (1)(4)T,I

(6) $S \rightarrow \neg Q$ P

(7) $\neg S$ (5)(6)T,I

(8) $S \vee R$ P

(9) R (7)(8)T,I

(10) $\neg R$ P

(11) $\neg R \wedge R$ 矛盾（9）（10）T，I

c) $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)$，$((Q \rightarrow P) \vee \neg R)$，$R \Rightarrow P \leftrightarrow Q$

(1) R P

(2) $(Q \to P) \vee \neg R$ P

(3) $Q \to P$ (1)(2)T,I

(4) $\neg (P \to Q) \to \neg (R \vee S)$ P

(5) $(R \vee S) \to (P \to Q)$(4)T,E

(6) $R \vee S$ (1)T,I

(7) $P \to Q$(5)(6)

(8) $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$(3)(7)T,I

(9) $P \leftrightarrow Q$ (8)T,E

(5) 解：

a) 设 P：我跑步。 Q：我很疲劳。

前提为： $P \to Q$ $\neg Q$

(1) $P \to Q$ P

(2) $\neg Q$ P

(3) $\neg P$ (1)(2)T,I

结论为：$\neg P$，我没有跑步。

b) 设 S：他犯了错误。 R：他神色慌张。

前提为： $S \to R$， R

因为（$S \to R$）$\wedge R \Leftrightarrow$ （$\neg S \vee R$）$\wedge R \Leftrightarrow R$。故本题没有确定的结论。

实际上，若 $S \to R$ 为真， R为真，则 S可为真， S也可为假，故无有效结论。

c) 设 P：我的程序通过。 Q：我很快乐。

R：阳光很好。 S：天很暖和。（把晚上十一点理解为阳光不好）

前提为： $P \to Q$， $Q \to R$， $\neg R \wedge S$

(1) P $\rightarrow$Q P

(2) Q $\rightarrow$R P

(3) P $\rightarrow$R (1)(2)T,I

(4) $\neg$ R$\vee$S P

(5) $\neg$ R (4)T,I

(6) $\neg$ P (3)(5)T,I

结论为： $\neg$ P，我的程序没有通过

习题 2-1,2-2

（1）解：

a) 设 W（x）：x 是工人。 c：小张。

则有 ？W（c）

b) 设 S（x）：x 是田径运动员。 B（x）：x 是球类运动员。 h：他

则有 S（h）$\vee$B（h）

c) 设 C（x）：x 是聪明的。 B（x）：x 是美丽的。 l：小莉。

则有 C（l）$\wedge$ B（l）

d）设 O（x）：x 是奇数。

则有 O（m）$\rightarrow$ ？ O（2m）。

e) 设 R（x）：x 是实数。 Q（x）：x 是有理数。

则有 （$\forall$x）（Q（x）$\rightarrow$ R（x））

f) 设 R（x）：x 是实数。Q（x）：x 是有理数。

则有 （$\exists$x）（R（x）$\wedge$Q（x））

g) 设 R（x）：x 是实数。Q（x）：x 是有理数。

则有 ？（∀x）（R（x）→ Q（x））

h) 设 P（x，y）：直线 x 平行于直线 y

G（x，y）：直线 x 相交于直线 y。

则有 P （A，B） ？G（A，B）

（2）解：

a) 设 J(x) ：x 是教练员。 L(x) ：x 是运动员。

则有 （∀x）（J（x）→ L（x））

b) 设 S(x) ：x 是大学生。 L(x) ：x 是运动员。

则有 （∃x）（L（x）∧S（x））

c) 设 J(x) ：x 是教练员。 O(x) ：x 是年老的。 V（x）：x 是健壮的。

则有 （∃x）（J（x）∧O（x）∧V（x））

d) 设 O(x) ：x 是年老的。 V（x）：x 是健壮的。 j ：金教练

则有 ？ O（j ）∧?V（j ）

e) 设 L(x) ：x 是运动员。 J(x) ：x 是教练员。

则 ？（∀x）（L（x）→ J（x））

本题亦可理解为：某些运动员不是教练。

故 （∃x）（L（x）∧?J（x））

f) 设 S（x）：x 是大学生。 L（x）：x 是运动员。 C（x）：x 是国家选手。

则有 （∃x）（S（x）∧L（x）∧C（x））

g) 设 C（x）：x 是国家选手。 V（x）：x 是健壮的。

则有 （∀x）（C（x）→ V（x））或？（∃x）（C（x）∧?V（x））

h) 设 C（x）：x 是国家选手。 O（x）：x 是老的。 L（x）：x 是运动员。

则有 （∀x）（O（x）∧C（x）→ L（x））

i) 设 W(x)：x 是女同志。H(x)：x 是家庭妇女。C(x)：x 是国家选手。

则有 ?（$\exists$x）（W(x) $\wedge$C(x) $\wedge$H(x)）

j） W(x)：x 是女同志。J(x)：x 是教练。C(x)：x 是国家选手。

则有（$\exists$x）（W(x) $\wedge$J(x) $\wedge$C(x)）

k） L(x)：x 是运动员。J(y)：y 是教练。A(x,y)：x 钦佩 y。

则有 （$\forall$x）（L(x) → （$\exists$y）（J(y) $\wedge$A(x，y)））

l） 设 S(x)：x 是大学生。L(x)：x 是运动员。A(x,y)：x 钦佩 y。

则（$\exists$x）（S(x) $\wedge$（$\forall$y）（L(y) → ? A(x,y) ））

习题 2-3

（1）解：

a）5 是质数。

b）2 是偶数且 2 是质数。

c）对所有的 x，若 x 能被 2 除尽，则 x 是偶数。

d）存在 x，x 是偶数，且 x 能除尽 6。(即某些偶数能除尽 6）

e）对所有的 x，若 x 不是偶数，则 x 不能被 2 除尽。

f）对所有的 x，若 x 是偶数，则对所有的 y，若 x 能除尽 y，则 y 也是偶数。

g）对所有的 x，若 x 是质数，则存在 y，y 是偶数且 x 能除尽 y（即所有质数能除尽某些偶数）。

h）对所有的 x，若 x 是奇数，则对所有 y，y 是质数，则 x 不能除尽 y（即任何奇数不能除尽任何质数）。

（2）解：（$\forall$x）($\forall$y)((P(x)$\wedge$P(y)$\wedge\neg$ E(x,y)→($\exists$!z)(L(z)$\wedge$R(x,y,z)))

或 （$\forall$x）($\forall$y)((P(x)$\wedge$P(y)$\wedge\neg$ E(x,y)→($\exists$z)(L(z)$\wedge$R(x,y,z) $\wedge\neg$ ($\exists$u)($\neg$ E(z,u) $\wedge$ L(u)

∧R(x,y,u))))

（3）解：

a) 设 N(x):x 是有限个数的乘积。 z(y):y 为 0。

P(x):x 的乘积为零。 F(y):y 是乘积中的一个因子。

则有 (∀x)((N(x) ∧P(x)→(∃y)(F(y) ∧z(y)))

b) 设 R(x):x 是实数。 Q(x,y):y 大于 x。 故 (∀x)(R(x)→(∃y)(Q(x,y) ∧R(y)))

c) R(x):x 是实数。 G(x,y):x 大于 y。 则

(∃x)(∃y)(∃z)(R(x)∧R(y)∧R(z)∧G(x+y,x z))

（4）解：设 G(x,y):x 大于 y。则有 (∀x)(∀y)(∀z)(G(y,x) ∧G(0,z)→G(x z,y z))

（5）解：设 N(x):x 是一个数。 S(x,y):y 是 x 的后继数。 E(x,y)：x=y.则

a) (∀x)(N(x)→(∃!y)(N(y)∧S(x,y)))

或(∀x)(N(x)→(∃y)(N(y)∧S(x,y) ∧¬(∃z)(¬E(y,z) ∧N(z)∧S(x,z))))

b)¬(∃x)(N(x)∧S(x,1))

c) (∀x)(N(x) ∧¬S(x,2)→(∃!y)(N(y) ∧S(y,x)))

或(∀x)(N(x) ∧¬S(x,2)→(∃y)(N(y) ∧S(y,x) ∧¬(∃z)(¬E(y,z) ∧N(z)∧S(z,x))))

（6）解：设 S(x):x 是大学生。 E(x):x 是戴眼睛的。

F(x):x 是用功的。 R(x,y):x 在看 y。

G(y):y 是大的。 K(y):y 是厚的。 J(y):y 是巨著。 a:这本。 b:那位。

则有 E(b)∧F(b)∧S(b)∧R(b,a)∧G(a)∧K(a)∧J(a)

（7）解：设 P(x,y):x 在 y 连续。 Q(x,y):x>y 。则

P(f,a) ((∀ε)(∃δ)(∀x)(Q(ε,0)→(Q(δ,0)∧Q(δ,|x-a|)→Q(ε,|f(x)-f(a)|))))

习题 2-4

(1) 解：a) x 是约束变元， y 是自由变元。

b) x 是约束变元， $P(x)\wedge Q(x)$ 中的 x 受全称量词 $\forall$ 的约束， $S(x)$ 中的 x 受存在量词 $\exists$ 的约束。

c) x，y 都是约束变元，$P(x)$ 中的 x 受 $\exists$ 的约束， $R(x)$ 中的 x 受 $\forall$ 的约束。

d) x，y 是约束变元， z 是自由变元。

(2) 解：a) $P(a)\wedge P(b)\wedge P(c)$

b) $R(a)\wedge R(b)\wedge R(c)\wedge S(a)\wedge S(b)\wedge S(c)$

c) $(P(a)\rightarrow Q(a))\wedge(P(b)\rightarrow Q(b))\wedge(P(c)\rightarrow Q(c))$

d) $(\neg P(a)\wedge\neg P(b)\wedge\neg P(c))\vee(P(z)\wedge P(b)\wedge P(c))$

e) $(R(a)\wedge R(b)\wedge R(c))\wedge(S(a)\vee S(b)\vee S(c))$

(3) 解：

a) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(P(1)\vee Q(1))\wedge(P(2)\vee Q(2))$，

但 P(1)为 T，Q(1)为 F，P(2)为 F，Q(2)为 T,所以

$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(T\vee F)\wedge(F\vee T)\Leftrightarrow T$。

b) $(\forall x)(P\rightarrow Q(x))\vee R(a)\Leftrightarrow((P\rightarrow Q(-2))\wedge(P\rightarrow Q(3))\wedge(P\rightarrow Q(6)))\vee R(a)$

因为 P 为 T，Q(−2)为 T，Q(3)为 T，Q(6)为 F，R(5)为 F，所以

$(\forall x)(P\rightarrow Q(x))\vee R(a)\Leftrightarrow((T\rightarrow T)\wedge(T\rightarrow T)\wedge(T\rightarrow F))\vee F\Leftrightarrow F$

(4) 解：a) $(\forall u)(\exists v)(P(u,z)\rightarrow Q(v))\ \ S(x,y)$

b) $(\forall u)(P(u)\rightarrow(R(u)\vee Q(u))\wedge(\exists v)R(v))\rightarrow(\exists z)S(x,z)$

(5) 解：a) $((\exists y)A(u,y)\rightarrow(\forall x)B(x,v))\wedge(\exists x)(\forall z)C(x,t,z)$

b) $((\forall y)P(u,y)\wedge(\exists z)Q(u,z))\vee(\forall x)R(x,t)$

习题 2-5

（1）解： a) $P(a,f(a))\wedge P(b,f(b)) \Leftrightarrow P(1,f(1))\wedge P(2,f(2)) \Leftrightarrow P(1,2)\wedge P(2,1) \Leftrightarrow T\wedge F \Leftrightarrow F$

b) $(\forall x)(\exists y)P(y,x) \Leftrightarrow (\forall x)(P(1,x)\vee P(2,x)) \Leftrightarrow (P(1,1)\vee P(2,1))\wedge(P(1,2)\vee P(2,2))$

$\Leftrightarrow (T\vee F)\wedge(T\vee F) \Leftrightarrow T$

c) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\rightarrow P(f(x),f(y)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)((P(x,1)\rightarrow P(f(x),f(1)))\wedge(P(x,2)\rightarrow P(f(x)f(2))))$

$\Leftrightarrow (P(1,1)\rightarrow P(f(1),f(1)))\wedge(P(1,2)\rightarrow P(f(1),f(2)))$

$\wedge(P(2,1)\rightarrow P(f(2),f(1)))\wedge(P(2,2)\rightarrow P(f(2),f(2)))$

$\Leftrightarrow (P(1,1)\rightarrow P(2,2))\wedge(P(1,2)\rightarrow P(2,1))\wedge(P(2,1)\rightarrow P(1,2))\wedge(P(2,2)\rightarrow P(1,1))$

$\Leftrightarrow (T\rightarrow F)\wedge(T\rightarrow F)\wedge(F\rightarrow T)\wedge(F\rightarrow T) \Leftrightarrow F\wedge F\wedge T\wedge T \Leftrightarrow F$

（2）解： a) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(f(x),a))$

$\Leftrightarrow (P(1)\rightarrow Q(f(1),1))\wedge(P(2)\rightarrow Q(f(2),1))$

$\Leftrightarrow (F\rightarrow Q(2,1))\wedge(T\rightarrow Q(1,1))$

$\Leftrightarrow (F\rightarrow F)\wedge(T\rightarrow T) \Leftrightarrow T$

b) $(\exists x)(P(f(x))\wedge Q(x,f(a))$

$\Leftrightarrow (P(f(1))\wedge Q(1,f(1)))\vee(P(f(2))\wedge Q(2,f(1)) \Leftrightarrow (T\wedge T)\vee(F\wedge F) \Leftrightarrow T$

c) $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x,a))$

$\Leftrightarrow (P(1)\wedge Q(1,a))\vee(P(2)\wedge Q(2,a))$

$\Leftrightarrow (P(1)\wedge Q(1,1))\vee(P(2)\wedge Q(2,1))$

$\Leftrightarrow (F\wedge T)\vee(T\wedge F) \Leftrightarrow F$

d) $(\forall x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(P(x)\wedge(\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(P(x)\wedge(Q(x,1)\vee Q(x,2)))$

$\Leftrightarrow (P(1)\wedge(Q(1,1)\vee Q(1,2)))\wedge(P(2)\wedge(Q(2,1)\vee Q(2,2)))$

$\Leftrightarrow\ (F\wedge(T\vee T))\wedge(T\wedge(F\vee F))\ \Leftrightarrow F$

(3) 举例说明下列各蕴含式。

a) $\neg((\exists x)(P(x)\wedge Q(a))\Rightarrow (\exists x)P(x)\rightarrow\neg Q(a)$

b) $(\forall x)(\neg P(x)\rightarrow Q(x)), (\forall x)\neg Q(x)\Rightarrow P(a)$

c) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)), (\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))\Rightarrow (\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$

d) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x)), (\forall x)\neg P(x)\Rightarrow (\exists x)Q(x)$

e) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x)), (\forall x)\neg P(x)\Rightarrow (\forall x)Q(x)$

解：a）因为 $\neg((\exists x)(P(x)\wedge Q(a))\Leftrightarrow\neg(\exists x)P(x)\vee\neg Q(a)$

故原式为 $\neg(\exists x)P(x)\vee\neg Q(a)\Rightarrow(\exists x)P(x)\rightarrow\neg Q(a)$

设 P（x）：x 是大学生。 Q（x）：x 是运动员

前提　或者不存在 x，x 是大学生，或者 a 是运动员

结论　如果存在 x 是大学生，则必有 a 是运动员。

b)设 P（x）：x 是研究生。 Q（x）：x 是大学生。 a：论域中的某人。

前提：对论域中所有 x，如果 x 不是研究生则 x 是大学生。

对论域中所有 x，x 不是大学生。

结论：对论域中所有 x 都是研究生。

故，对论域中某个 a，必有结论 a 是研究生，即 P（a）成立。

c）设 P（x）：x 是研究生。 Q（x）：x 曾读过大学。 R（x）：x 曾读过中学。

前提　对所有 x，如果 x 是研究生，则 x 曾读过大学。

对所有 x，如果 x 曾读过大学，则 x 曾读过中学。

结论：对所有 x，如果 x 是研究生，则 x 曾读过中学。

d）设 P（x）：x 是研究生。 Q（x）：x 是运动员。

前提　对所有 x，或者 x 是研究生，或者 x 是运动员。

对所有 x，x 不是研究生

结论　必存在 x，x 是运动员。

e）设 P（x）：x 是研究生。 Q（x）：x 是运动员。

前提　对所有 x，或者 x 是研究生，或者 x 是运动员。

对所有 x，x 不是研究生

结论　对所有 x，x 是运动员。

（4）证明：$(\exists x)(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow(\exists x)(\neg A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow(\exists x)\neg A(x)\vee(\exists x)B(x)$

$\Leftrightarrow\neg(\forall x)A(x)\vee(\exists x)B(x)\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\rightarrow(\exists x)B(x)$

（5）设论域 D={a，b，c}，求证 $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$

证明：因为论域 D={a，b，c}，所以

$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Leftrightarrow(A(a)\wedge A(b)\wedge A(c))\vee(B(a)\wedge B(b)\wedge B(c))$

$\Leftrightarrow(A(a)\vee B(a))\wedge(A(a)\vee B(b))\wedge(A(a)\vee B(c))\wedge(A(b)\vee B(a))\wedge(A(b)\vee B(b))$

$\wedge(A(b)\vee B(c))\wedge(A(c)\vee B(a))\wedge(A(c)\vee B(b))\wedge(A(c)\vee B(c))$

$\Rightarrow(A(a)\vee B(a))\wedge(A(b)\vee B(b))\wedge(A(c)\vee B(c))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$

所以 $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$

（6）解：推证不正确，因为

$\neg(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))\Leftrightarrow\neg((\exists x)A(x)\wedge(\exists x)\neg B(x))$

（7）求证 $(\forall x)(\forall y)(P(x)\rightarrow Q(y))\Leftrightarrow(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall y)Q(y)$

证明：$(\forall x)(\forall y)(P(x)\rightarrow Q(y))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee Q(y))$

$\Leftrightarrow(\forall x)\neg P(x)\vee(\forall y)Q(y)$

$\Leftrightarrow\neg(\exists x)P(x)\vee(\forall y)Q(y)$

$\Leftrightarrow (\exists x)P(x)\rightarrow(\forall y)Q(y)$

习题 2-6

（1）解：a)$(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee Q(x,y))$

b) $(\exists x)(\neg((\exists y)P(x,y))\rightarrow((\exists z)Q(z)\rightarrow R(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)((\exists y)P(x,y)\vee((\exists z)Q(z)\rightarrow R(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)((\exists y)P(x,y) \vee(\neg(\exists z)Q(z) \vee R(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)((\exists y)P(x,y) \vee((\forall z)\neg Q(z) \vee R(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \vee\neg Q(z) \vee R(x))$

c)$(\forall x)(\forall y)(((\exists zP(x,y,z)\wedge(\exists u)Q(x,u))\rightarrow(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg((\exists z)P(x,y,z)\wedge(\exists u)Q(x,u))\vee(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((\forall z)\neg P(x,y,z) \vee(\forall u)\neg Q(x,u)\vee(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((\forall z)\neg P(x,y,z) \vee(\forall u)\neg Q(x,u)\vee(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x,y,z) \vee\neg Q(x,u)\vee Q(y,v))$

（2）解：a)$((\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x))\rightarrow(\exists x)(P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \neg((\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)) \vee(\exists x)(P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\exists x)(P(x)\vee Q(x)) \vee(\exists x)(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow T$

b) $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\forall y)((\forall z)Q(x,y)\rightarrow\neg(\forall z)R(y,x)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee(\forall y)(Q(x,y)\rightarrow\neg R(y,x)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg P(x) \vee\neg Q(x,y) \vee\neg R(y,x))$

前束合取范式

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((P(x) \wedge Q(x,y) \wedge R(y,x))$

$\vee (P(x) \wedge Q(x,y) \wedge \neg R(y,x))$

$\vee (P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge R(y,x))$

$\vee (\neg P(x) \wedge Q(x,y) \wedge R(y,x))$

$\vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge R(y,x))$

$\vee ((P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge \neg R(y,x))$

$\vee (\neg P(x) \wedge Q(x,y) \wedge \neg R(y,x)))$

前束析取范式

c) $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \neg (\forall x)P(x) \vee (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall z)R(x,y,z))$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)((\forall z)Q(x,z) \vee (\forall u)R(x,y,u))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x) \vee (\forall z)Q(x,z) \vee (\forall u)R(x,y,u))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall z)(\forall u)(\neg P(x) \vee Q(x,z) \vee R(x,y,u))$

前束合取范式

$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall z)(\forall u)((P(x) \wedge Q(x,z) \wedge R(x,y,u))$

$\vee (P(x) \wedge Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u))$

$\vee (P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge R(x,y,u))$

$\vee (P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u))$

$\vee (\neg P(x) \wedge Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u))$

$\vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge R(x,y,u))$

$\vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x,z) \wedge \neg R(x,y,u)))$

前束析取范式

d) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x,y)) \rightarrow ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow \neg (\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x,y)) \vee ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee ((\exists u)P(u) \wedge (\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee (P(u) \wedge Q(y,z)))$

前束析取范式

$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \vee P(u)) \wedge (P(x) \vee Q(y,z)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee P(u)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee Q(y,z)))$

前束合取范式

习题 **2-7**

(1) 证明：

(2) a)① $(\forall x)(\neg A(x) \to B(x))$ P

② $\neg A(u) \to B(u)$ US①

③ $(\forall x)\neg B(x)$ P

④ $\neg B(u)$ US③

⑤ $A(u) \vee B(u)$ T②E

⑥ $A(u)$ T④⑤I

⑦ $(\exists x)A(x)$ EG⑥

b)① $\neg (\forall x)(A(x) \to B(x))$ P（附加前提）

② $(\exists x)\neg (A(x) \to B(x))$ T①E

③ $\neg (A(c) \to B(c))$ ES②

④ $A(c)$ T③I

⑤ $\neg B(c)$ T③I

⑥ $(\exists x)A(x)$ EG④

⑦ $(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x)$ P

⑧$(\forall x)B(x)$ T⑥⑦I

⑨$B(c)$ US⑧

⑩$B(c) \land \neg B(c)$ T⑤⑨矛盾

c）①$(\forall x)(A(x) \to B(x))$ P

②$A(u) \to B(u)$ US①

③$(\forall x)(C(x) \to \neg B(x))$ P

④$C(u) \to \neg B(u)$ US③

⑤$\neg B(u) \to \neg A(u)$ T②E

⑥$C(u) \to \neg A(u)$ T④⑤I

⑦$(\forall x)(C(x) \to \neg A(x))$ UG⑥

d)$(\forall x)(A(x) \lor B(x)), (\forall x)(B(x) \to \neg C(x)), (\forall x)C(x) \Rightarrow (\forall x)A(x)$

①$(\forall x)(B(x) \to \neg C(x))$ P

②$B(u) \to \neg C(u)$ US①

③$(\forall x)C(x)$ P

④$C(u)$ US③

⑤$\neg B(u)$ T②④I

⑥$(\forall x)(A(x) \lor B(x))$ P

⑦$A(u) \lor B(u)$ US

⑧$A(u)$ T⑤⑦I

⑨$(\forall x)A(x)$ UG⑧

(2)证明：

a) ①$(\forall x)P(x)$ P（附加前提）

②$P(u)$　US①

③$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$　P

④$P(u)\rightarrow Q(u)$　US③

⑤$Q(u)$　T②④I

⑥$(\forall x)Q(x)$　UG⑤

⑦$(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$　CP

b)因为$(\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)\Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)$

故本题就是推证 $(\forall x)(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow \neg(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)$

①$\neg(\forall x)P(x)$　P（附加前提）

②$(\exists x)\neg P(x)$　T①E

③$\neg P(c)$　ES②

④$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$　P

⑤$P(c)\vee Q(c)$　ES④

⑥$Q(c)$　T③⑤I

⑦$(\exists x) Q(x)$　EG⑥

⑧$\neg(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)$　CP

(3)

解：a)设 R（x）：x 是实数。 Q（x）：x 是有理数。 I（x）：x 是整数。

本题符号化为：

$$(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))\wedge(\exists x)(Q(x)\wedge I(x)) \Rightarrow (\exists x)(R(x)\wedge I(x))$$

①$(\exists x)(Q(x)\wedge I(x))$　P

②$Q(c)\wedge I(c)$　ES①

③$(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$　P

④ $Q(c) \to R(c)$ US③

⑤ $Q(c)$ T②I

⑥ $R(c)$ T④⑤ I

⑦ $I(c)$ T②I

⑧ $R(c) \land I(c)$ T⑥⑦ I

⑨ $(\exists x)(R(x) \land I(x))$ EG⑧

b)设 P（x）：x 喜欢步行。 Q（x）：x 喜欢乘汽车。 R（x）：x 喜欢骑自行车

本题符号化为：

$(\forall x)(P(x) \to \neg Q(x)), (\forall x)(Q(x) \lor R(x)), (\exists x) \neg R(x) \Rightarrow (\exists x) \neg P(x)$

① $(\exists x) \neg R(x)$ P

② $\neg R(c)$ ES①

③ $(\forall x)(Q(x) \lor R(x))$ P

④ $Q(c) \lor R(c)$ US③

⑤ $Q(c)$ T②④ I

⑥ $(\forall x)(P(x) \to \neg Q(x))$ P

⑦ $P(c) \to \neg Q(c)$ US⑥

⑧ $\neg P(c)$ T⑤⑦ I

⑨ $(\exists x) \neg P(x)$ EG⑧

c)每个大学生不是文科学生就是理工科学生， 有的大学生是优等生， 小张不是理工科学生，但他是优等生，因而如果小张是大学生，他就是文科学生。

设 G（x）：x 是大学生。 L（x）：x 是文科学生。 P（x）：x 是理工科学生。

S（x）：x 是优秀生。 c：小张。

本题符号化为：

$(\forall x)(G(x) \rightarrow L(x) \vee P(x)), (\exists x)(G(x) \wedge S(x)), \neg P(c), S(c) \Rightarrow G(c) \rightarrow L(c)$

①$G(c)$	P（附加前提）
②$(\forall x)(G(x) \rightarrow L(x) \vee P(x))$	P
③$G(c) \rightarrow L(c) \vee P(c)$	US②
④$L(c) \vee P(c)$	T①③ I
⑤$\neg P(c)$	P
⑥$L(c)$	T④⑤ I
⑦$G(c) \rightarrow L(c)$	CP

注意：本题推证过程中未用到前提 $(\exists x)(G(x) \wedge S(x))$以及 $S(c)$。主要是 S（x）：x 是优秀生，这个条件与其他前提的联系对证明结论没有影响，因 S（x）与其他前提不矛盾，故本题的推证仍是有效的。

3-5.1 列出所有从 X={a,b,c} 到 Y={s} 的关系。

解： Z_1={<a,s>}
Z_2={<b,s>}
Z_3={<c,s>}
Z_4={<a,s>,<b,s>}
Z_5={<a,s>,<c,s>}
Z_6={<b,s>,<c,s>}
Z_7={<a,s>,<b,s>,<c,s>}

3-5.2 在一个有 n 个元素的集合上，可以有多少种不同的关系。

解 因为在 X 中的任何二元关系都是 X × X 的子集，而 X × X=X^2 中共有 n^2 个元素，取 0 个到 n^2 个元素，共可组成 2^{n^2} 个子集，即 $|\wp(X\times X)|=2^{n^2}$。

3-5.3 设 A = {6 ：00，6：30,7 ：30，…，9：30,10 ：30} 表示在晚上每隔半小时的九个时刻的集合，设 B={3,12,15,17} 表示本地四个电视频道的集合，设 R_1 和 R_2 是从 A 到 B 的两个二元关系，对于二无关系 R_1，R_2，$R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$，$R_1\oplus R_2$ 和 R_1-R_2 可分别得出怎样的解释。

解： A × B 表示在晚上九个时刻和四个电视频道所组成的电视节目表。

R_1 和 R_2 分别是 A × B 的两个子集，例如 R_1 表示音乐节目播出的时间表，R_2 是戏曲节日的播出时间表，则 $R_1\cup R_2$ 表示音乐或戏曲节目的播出时间表，$R_1\cap R_2$ 表示音乐和戏曲一起播出的时间表，$R_1\oplus R_2$ 表示音乐节目表以及戏曲节目表，但不是音乐和戏曲一起的节日表，R_1-R_2 表示不是戏曲时间的音乐节目时间麦。

3-5.4 设 L 表示关系 “小于或等于”，D 表示‘整除”关系，L 和 D 刀均定义于 {1,2,3,6}，分别写出 L 和 D 的所有元素并求出 L ∩ D.

解： L={<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,3>,<2,6>,<3,6>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<6,6>}
D={<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,6>,<3,6>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<6,6>}
L ∩ D=
{<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,6>,<3,6>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<6,6>}

3-5.5 对下列每一式，给出 A 上的二元关系，试给出关系图：

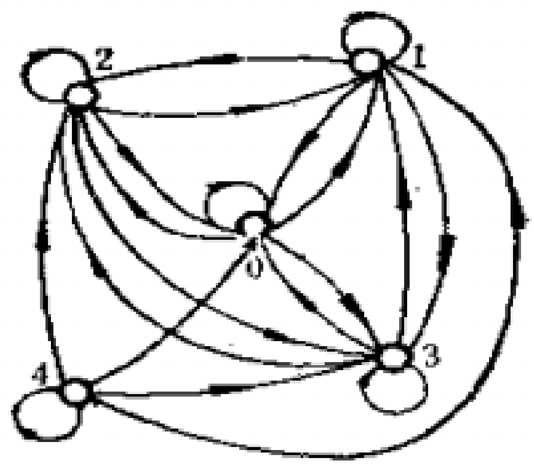
a){<x,y>|0 ≤ x∧ y≤ 3}，这里 A={1,2,3,4}；

b){<x,y>|2 ≤ x,y ≤ 7 且 x 除尽 y, 这里 A ＝ {n|n ∈ N ∧ n≤ 10}

c) {<x,y>|0 ≤ x- y<3}，这里 A={0,1,2,3,4}；

d){<x,y>|x,y 是互质的 }，这里 A={2,3,4,5,6}

解：
a) R={<0,0>,<0,1>,<0,2>,<0,3>,
<1,0>,<1,1>,<1,2>,<1,3>,
<2,0>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,
<3,0>,<3,1>,<3,2>,<3,3>,}
其关系图



(a)

b) R={<2,0>,<2,2>,<2,4>,<2,6>,
<3,0>,<3,3>,<3,6>,
<4,0>,<4,4>,
<5,0>,<5,5>,
<6,0>,<6,6>,
<7,0>,<7,7>}

3-6.1 分析集合 A={1，2，3} 上的下述五个关系：

（1）R={＜1，1＞，＜1，2＞，＜1，3＞，＜3，3＞}；

（2）S={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞}；

（3）T={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，2＞，＜2，3＞}；

（4）?=空关系；

（5）A× A=全域关系。

判断 A中的上述关系是否为 a）自反的，b）对称的，c）可传递的，d）反对称的。

解（1）R 是可传递和反对称的。

（2）S 是自反，对称和可传递的。

（3）T 是反对称的。

（4）空关系是对称，可传递和反对称的。

（5）全域关系是自反，对称和可传递的。

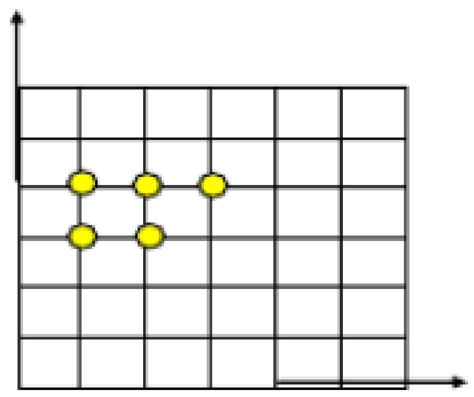
3-6.2 给定 A={1，2，3,4}，考虑 a 上的关系 R，若 R={＜1，3＞，＜1，4＞，＜2，3＞，＜2，4＞，＜3，4＞}

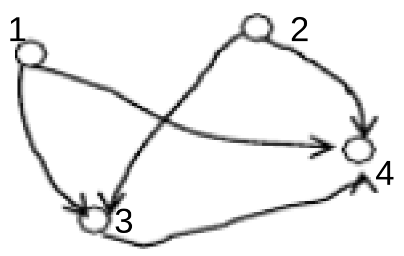
a) 在 A×A 的坐标图上标出 R，并绘出它的关系图；

b) R 是 i）自反的 ii）对称的 iii）可传递的，iv）反对称的吗？

解

a）





R 是可传递的的和反对称的；但不是自反的和对称的。

3-6.3 举出 A={1，2，3} 上关系 R 的例子，使其具有下述性质：

a）既是对称的，又是反对称的；

b）R 既不是对称的，又不是反对称的；

c）R 是可传递的。

解

a）R={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞}

b）R={＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，3＞}

c) R={＜1，2＞，＜2，1＞，＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞}

3-6.4 如果关系 R 和 S 是自反的，对称的和可传递的，证明 R∩S 也是自反，对称和可传递的。

证明 设 R 和 S 是 X 上的自反的，对称的和可传递的关系。

1）对任意 x∈X，有＜x，x＞∈R 和＜x，x＞∈S，所以＜x，x＞∈R∩S，即 R∩S 在 X 上是自反的。

2）对任意的＜x，y＞∈R∩S，有＜x，y＞∈R∧＜x，y＞∈S，因为 R 和 S 是对称的，故必有＜y，x＞∈R∧＜y，x＞∈S。即＜y，x＞∈R∩S，所以 R∩S 在 X 上是对称的。

3）对任意的＜x，y＞∈R∩S∧＜y，z＞∈R∩S，则有
＜x，y＞∈R∧＜x，y＞∈S∧＜y，z＞∈R∧＜y，z＞∈S

因为 R 和 S 是传递的，故得＜x，z＞∈R∧＜x，z＞∈S，即＜x，z＞∈R∩S，所以 R∩S 在 X 上是传递的。

3-6.5 给定 S={1，2，3，4} 和 S 上关系：R={＜1，2＞，＜4，3＞，＜2，2＞，＜2，1＞，＜3，1＞}

说明 R 是不可传递的，找出关系 $R_1 \supseteq R$，使得 R_1 是可传递的，还能找出另一个

3-7.1　设 R_1 和 R_2 是 A 上的任意关系，说明以下命题的真假并予以证明。

a）若 R_1 和 R_2 是自反的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是自反的；

b）若 R_1 和 R_2 是反自反的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是反自反的；

c）若 R_1 和 R_2 是对称的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是对称的；

d）若 R_1 和 R_2 是传递的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是传递的。

证明 a）对任意 $a \in A$，设 R_1 和 R_2 是自反的，则 $\langle a, a\rangle \in R_1$，$\langle a, a\rangle \in R_2$ 所以，$\langle a, a\rangle \in R_1 \circ R_2$，即 $R_1 \circ R_2$ 也是自反的。

b）假。例如：设 $A=\{a, b\}$，有 $R_1=\{\langle a, b\rangle\}$ 与 $R_2=\{\langle b, a\rangle\}$

R_1 和 R_2 是反自反的。但 $R_1 \circ R_2=\{\langle a, a\rangle\}$，所以 $R_1 \circ R_2$ 在 A 上不是反自反的。

c) 假。例如：设 $A=\{a, b, c\}$，有 $R_1=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$，$R_2=\{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$

R_1 和 R_2 是对称的，但 $R_1 \circ R_2=\{\langle a, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$

所以，$R_1 \circ R_2$ 不是对称的。

d）假。例如：设 $A=\{a, b, c\}$，有 $R_1=\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$，$R_2=\{\langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, a\rangle\}$

则 R_1，R_2 都是传递的。但 $R_1 \circ R_2=\{\langle a, c\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle\}$

所以，$R_1 \circ R_2$ 不是传递的。

3-7.2　证明 若 S 为集合 X 上的二元关系：

a） S 是传递的，当且仅当（$S \circ S$）$\subseteq S$；

b） S 是自反的，当且仅当 $I_x \subseteq S$；

c）证明定理 3-7.3（b）（即 S 是反对称的，当且仅当 $S \cap S^c \subseteq I_x$）。

证明 a）设 S 为传递的，若 $\langle x, z\rangle \in S \circ S$，则存在某个 $y \in X$，使得 $\langle x, y\rangle \in S$，且 $\langle y, z\rangle \in S$。

若 S 是传递的，$\langle x, z\rangle \in S$，所以（$S \circ S$）$\subseteq S$。

反之，设（$S \circ S$）$\subseteq S$，假定 $\langle x, y\rangle \in S$ 且 $\langle y, z\rangle \in S$，则 $\langle x, z\rangle \in S \circ S$。因为（$S \circ S$）$\subseteq S$，故 $\langle x, z\rangle \in S$，得到 S 是传递的。

b）设 S 是自反的，令 $\langle x, y\rangle \in I_x$，则 $x=y$。但 $\langle x, x\rangle \in S$，因此 $\langle x, y\rangle = \langle x, x\rangle \in S$，得 $I_x \subseteq S$。

反之，令 $I_x \subseteq S$，设任意 $x \in X$，$\langle x, x\rangle \in I_x$，故 $\langle x, x\rangle \in S$，因此 S 是自反的。

c）设 S 是反对称的。假定 $\langle x, y\rangle \in S \cap S^c$，则

$\langle x, y\rangle \in S \wedge \langle x, y\rangle \in S^c \Rightarrow \langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, x\rangle \in S$

因为 S 是反对称的，故 $x = y$，

所以 $\langle x, y\rangle = \langle x, x\rangle \in I_x$，即 $S \cap S^c \subseteq I_x$。

反之，若 $S \cap S^c \subseteq I_x$，设 $\langle x, y\rangle \in S$ 且 $\langle y, x\rangle \in S$，则

$\langle x, y\rangle \in S \wedge \langle x, y\rangle \in S^c$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in S \cap S^c$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in I_x$

故 $x = y$，即 S 是反对称的。

3-7.3　设 S 为 X 上的关系，证明若 S 是自反和传递的，则 $S \circ S=S$，其逆为真吗？

证明　若 S 是 X 上传递关系，由习题 3-7.2a）可知（$S \circ S$）$\subseteq S$，

令 $\langle x, y\rangle \in S$，根据自反性，必有 $\langle x, x\rangle \in S$，因此有 $\langle x, y\rangle \in S \circ S$，即 $S \subseteq S \circ S$。得到 $S=S \circ S$.

这个定理的逆不真。 例如 $X=\{1, 2, 3\}$，$S=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$，

3-8.1　根据图 3-8.1 中的有向图，写出邻接矩阵和关系 R，并求出 R 的自反闭包和对称闭包。

解

$$M_R=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}$$

图 3-8.1

R={ <a, a>, <a, b>, <b, c>, <c, b>=

r（R）=R ∪ I_X ={ <a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <b, c>, <c, b>=

s（R）=R ∪ R^C={ <a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, b>}

3-8.2　设集合 A={a，b，c，d}A 上的关系

R={ <a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>}

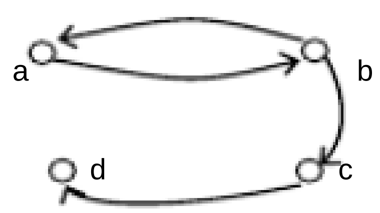
a）用矩阵运算和作图方法求出 R 的自反、对称、传递闭包；

b）用 Warshall 算法，求出 R 的传递闭包。

解 a）

$$M_R=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}$$

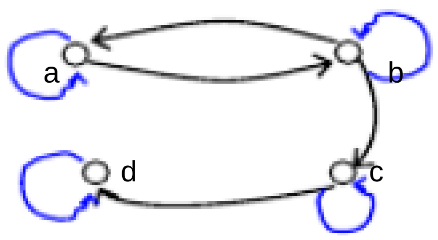
R 的关系图如图所示。



$$M_R+M_A=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$

r（R）=R ∪ I_A

={<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <b, c>, <c, c>, <c, d>, <d, d>}（图（a））



图（a）

$$M_R+M_{R^c}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}$$

3-9.1 4 个元素的集合共有多少不同的划分。

解 整数 4 可划分为：4，1+3，1+1+2，2+2，1+1+1+1。

$$1+C_4^1+C_4^2+\frac{1}{2}C_4^2+1=15（种）$$

3-9.2 设$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$是集合 A 的一个划分，我们定义 A 上的一个二元关系 R，使$<a,b>\in R$当且仅当 a 和 b 在这个划分的同一块中。证明 R 是自反的，对称的，和传递的。

证明 设对任意 $a\in A$，则必存在 A_i，使 $a\in A_i$，因 a 与 a 必可看作在同一块中，故有$<a,a>\in R$。即 R 是自反的。

设 $a,b\in A$，若有$<a,b>\in R$，则 a 与 b 必在同一块，故 b 与 a 亦在同一块，$<b,a>\in R$，即 R 是对称的。

对任意 $a,b,c\in A$，

$<a,b>\in R\wedge<b,c>\in R$

$\Rightarrow(\exists i)(a\in A_i\wedge b\in A_i)\wedge(\exists j)(b\in A_j\wedge c\in A_j)$

$\Rightarrow(\exists i)(\exists j)(a\in A_i\wedge c\in A_j\wedge b\in A_i\cap A_j)$

$\Rightarrow(\exists i)(\exists j)(a\in A_i\wedge c\in A_j\wedge A_i\cap A_j\neq ?)$

$\Rightarrow(\exists i)(\exists j)(a\in A_i\wedge c\in A_j\wedge i=j)(\because i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=?)$

$\Rightarrow$a,c 在同一块

$\Rightarrow<a,c>\in R$

∴R传递

3-10.1 设 R 和 R′是集合 A 上的等价关系，用例子说明：R∪R′不一定是等价关系。

证明 设 A={1，2，3}，S=R∪R′

R={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜3，1＞，＜1，3＞}

R′={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜3，2＞，＜2，3＞}

则 R∪R′={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜3，1＞，＜1，3＞，＜3，2＞，＜2，3＞}

因为如＜2，3＞∈S∧＜3，1＞∈S，但＜2，1＞∉S，故 R∪R′不是传递的，即 R∪R′不是 A 上的等价关系。

3-10.2 试问由 4 个元素组成的有限集上所有等价关系的个数为多少？

解 因为集合 X 上的等价关系与 X 的划分是一一对应的，所以 4 个元素的有限集上等价关系的数目，与 4 个元素集合进行划分的数目是相同的，由习题 3-9.1 可知共有 15 个不同的等价关系。

3-10.3 给定集合 S={1，2，3，4，5}，找出 S 上的等价关系 R，此关系 R 能产生划分 {{1，2}，{3}，{4，5}}，并画出关系图。

解 我们可用如下方法产生一个等价关系：

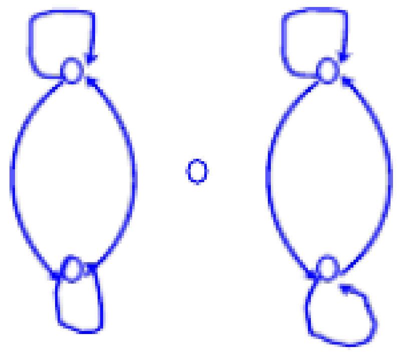
R_1={1，2}×{1，2}={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，2＞}

R_2={3}×{3}={＜3，3＞}

R_3={4，5}×{4，5}={＜4，4＞，＜4，5＞，＜5，4＞，＜5，5＞}

R= R_1∪R_2∪R_3={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜4，4＞，＜4，5＞，＜5，4＞，＜5，5＞}

关系图如图。



3-10.4 设 R 是一个二元关系，S={＜a，b＞| 对于某一 c，有＜a，c＞∈R∧＜c，b＞∈R}，证明若 R 是一个等价关系，则 S 也是一个等价关系。

证明 设 R 是 A 上的等价关系：

（1） 对任一 x∈A，因为 R 在 A 上自反，所以＜x，x＞∈R。由 S 定义，＜x，x＞∈S，所以 S 是自反的。

（2） 对任意 x,y∈A，若＜x，y＞∈S，则存在某个 c，使得＜x，c＞∈R∧＜c，y＞∈R，因为 R 是对称，故有：＜y，c＞∈R∧＜c，x＞∈R，由 S 的定义，可知＜y，x＞∈S，所以 S 是对称的。

（3） 对任意 x,y,z∈A，若＜x，y＞∈S，及＜y，z＞∈S，则必存在某个 c_1，使＜x，c_1＞∈R，＜c_1，y＞∈R。由 R 的传递性，可知＜x，y＞∈R，同理存在 c_2，使＜y，c_2＞∈R∧＜c_2，z＞∈R，由 R 传递，可知＜y，z＞∈R。再由 S 定义，得＜x，z＞∈S。故 S 是传递的。

3-10.5 设正整数的序偶集合 A，在 A 上定义二元关系 R 如下：＜＜x,y＞，＜u,v＞＞∈R，当且仅当 xv=yu，证明 R 是一个等价关系。

证明 设 A 上定义的二元关系 R 为：

$$<<x,y>,<u,v>>\in R \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{u}{v}$$

① 对任意＜x,y＞∈A，因为 $\frac{x}{y}=\frac{x}{y}$，所以

＜＜x,y＞，＜x,y＞＞∈R

即 R 是自反的。

② 设＜x,y＞∈A，＜u,v＞∈A，若

$<<x,y>,<u,v>>\in R \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{u}{v} \Rightarrow \frac{u}{v}=\frac{x}{y} \Rightarrow <<u,v>,<x,y>>\in R$

即 R是对称的。

③ 设任意$<x,y>\in A$，$<u,v>\in A$，$<w,s>\in A$，对

$<<x,y>,<u,v>>\in R \wedge <<u,v>,<w,s>>\in R$

$\Rightarrow (\frac{x}{y}=\frac{u}{v}) \wedge (\frac{u}{v}=\frac{w}{s}) \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{w}{s}$

$\Rightarrow <<x,y>,<w,s>>\in R$

故 R是传递的，于是 R是 A上的等价关系。

3-10.6 设 R是集合 A 上的对称和传递关系，证明如果对于 A中的每一个元素 a, 在 A 中同时也存在 b，使<a,b>在 R之中，则 R是一个等价关系。

证明 对任意 $a\in A$，必存在一个 $b\in A$，使得$<a,b>\in R$.

因为 R是传递的和对称的，故有：

$<a,b>\in R \wedge <b,c>\in R \Rightarrow <a,c>\in R \Rightarrow <c,a>\in R$

由$<a,c>\in R \wedge <c,a>\in R \Rightarrow <a,a>\in R$

所以 R在 A上是自反的，即 R是 A上的等价关系。

3-10.7 设 R_1和 R_2是非空集合 A上的等价关系，试确定下述各式，哪些是 A上的等价关系，对不是的式子，提供反例证明。

a)（A×A）$-R_1$；

b）R_1-R_2；

c）R_1^2；

d) r（R_1-R_2）（即 R_1-R_2的自反闭包）。

解 a ）$(A\times A)-R_1$不是 A 上等价关系。例如：

$A=\{a,b\}$ ， $R_1=\{<a,a>, <b,b>\}$

$A\times A=\{<a,a>, <a,b>, <b,a>, <b,b>\}$

$(A\times A)-R_1=\{<a,b>, <b,a>\}$

所以$(A\times A)-R_1$不是 A 上等价关系。

b ）设 $A=\{a,b,c\}$

$R_1=\{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,b>, <a,c>, <c,a>, <a,a>, <b,b>, <c,c>\}$

$R_2=\{<a,a>, <b,b>, <c,c>, <b,c>, <c,b>\}$

$R_1-R_2=\{<a,b>, <b,a>, <a,c>, <c,a>\}$

所以 R_1 和 R_2 是 A 上等价关系，但 R_1-R_2 不是 A 上等价关系。

c ）若 R_1 是 A 上等价关系，则

$<a,a>\in R_1 \Rightarrow <a,a>\in R_1\circ R_1$

所以 R_1^2 是 A 上自反的。

若$<a,b>\in R_1^2$则存在 c，使得$<a,c>\in R_1\wedge<c,b>\in R_1$。因 R_1对称，故有

$<b,c>\in R_1\wedge<c,a>\in R_1 \Rightarrow <b,a>\in R_1^2$

即 R_1^2是对称的。

若$<a,b>\in R_1^2\wedge<b,c>\in R_1^2$，则有

$<a,b>\in R_1\circ R_1\wedge<b,c>\in R_1\circ R_1$

$\Rightarrow (\exists e_1)(<a,e_1>\in R_1\wedge<e_1,b>\in R_1) \wedge (\exists e_2)(<b,e_2>\in R_1\wedge<e_2,c>\in R_1)$

$\Rightarrow <a,b>\in R_1\wedge<b,c>\in R_1$（$\because R_1$传递）

$\Rightarrow \langle a,c \rangle \in R_1^2$

即 R_1^2 是传递的。

故 R_1^2 是 A 上的等价关系。

d ）如 b）所设，R_1 和 R_2 是 A 上的等价关系，但

$r(R_1-R_2) = (R_1-R_2) \cup I_A$

$=\{\langle a,b \rangle, \langle b,a \rangle, \langle a,c \rangle, \langle c,a \rangle, \langle a,a \rangle, \langle b,b \rangle, \langle c,c \rangle\}$

不是 A 上的等价关系。

3-10.8 设 C^* 是实数部分非零的全体复数组成的集合，C^* 上的关系 R 定义为：$(a+bi)R(c+di) \Leftrightarrow ac>0$，证明 R 是等价关系，并给出关系 R 的等价类的几何说明。

证明：(1) 对任意非零实数 a，有 $a^2>0 \Leftrightarrow (a+bi)R(a+bi)$

故 R 在 C^* 上是自反的。

(2) 对任意 $(a+bi)R(c+di) \Leftrightarrow ac>0$，

因 $ca=ac>0 \Leftrightarrow (c+di)R(a+bi)$，

所以 R 在 C^* 上是对称的。

(3) 设 $(a+bi)R(c+di)$，$(c+di)R(u+vi)$，则有 $ac>0 \wedge cu>0$

若 $c>0$，则 $a>0 \wedge u>0 \Rightarrow au>0$

若 $c<0$，则 $a<0 \wedge u<0 \Rightarrow au>0$

所以 $(a+bi)R(u+vi)$，即 R 在 C^* 上是传递的。

关系 R 的等价类，就是复数平面上第一、四象限上的点，或第二、三象限上的点，因为在这两种情况下，任意两个点 (a,b)，(c,d)，其横坐标乘积 $ac>0$。

3-10.9 设Π和Π′是非空集合 A 上的划分，并设 R 和 R′分别为由 Π和Π′诱导的等价关系，那么 Π′细分Π的充要条件是 $R'\subseteq R$。

证明：若Π′细分Π。由假设 $aR'b$，则在Π′中有某个块 S'，使得 $a,b\in S'$，因Π′细分Π，故在Π中，必有某个块 S，使 $S'\subseteq S$，即 $a,b\in S$，于是有 aRb,即 $R'\subseteq R$。

反之，若 $R'\subseteq R$，令 S'为 H'的一个分块，且 $a\in S'$，则 $S'=[a]_{R'}=\{x|xR'a\}$

但对每一个 x，若 $xR'a$，因 $R'\subseteq R$，故 xRa，因此$\{x|xR'a\}\subseteq\{x|xRa\}$ 即$[a]_{R'}\subseteq[a]_R$

设 $S=[a]_R$,则 $S'\subseteq S$

这就证明了Π′细分Π。

3-10.10 设 R_j是表示 I 上的模 j 等价关系，R_k是表示 I 上的模 k 等价关系，证明 I/R_k细分 I/R_j当且仅当 k 是 j 的整数倍。

证明：由题设 $R_j=\{<x,y>|x\equiv y(\mathrm{mod}\,j)\}$

$R_k=\{<x,y>|x\equiv y(\mathrm{mod}\,k)\}$

故$<x,y>\in R_j\Leftrightarrow x-y=c\cdot j$ (对某个 $c\in I$)

$<x,y>\in R_k\Leftrightarrow x-y=d\cdot k$ (对某个 $d\in I$)

a) 假设 I/R_k细分 I/R_j，则 $R_k\subseteq R_j$

因此$<k,0>\in R_k\Rightarrow <k,0>\in R_j$

故 $k-0=1\cdot k=c\,j$ (对某个 $c\in I$)

于是 k 是 j 的整数倍。

b) 若对于某个 $r\in I$，有 $k=rj$ 则：

$<x,y>\in R_k\Leftrightarrow x-y=ck$ (对某个 $c\in I$)

$\Rightarrow x-y=crj$ (对某个 $c,r\in I$)

$\Rightarrow \langle x,y \rangle \in R_j$

因此，$R_k \subseteq R_j$，于是 I/R_k 细分 I/R_j