《离散数学》题库与答案

一、选择或填空

（数理逻辑部分）

1、下列哪些公式为永真蕴含式？ (A)

(1) $\neg Q \Rightarrow Q \to P$ (2) $\neg Q \Rightarrow P \to Q$ (3)$P \Rightarrow P \to Q$ (4) $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow \neg P$

答：在第三章里面有公式（ 1）是附加律，（4）可以由第二章的蕴含等值式求出（注意与吸收律区别）

2、下列公式中哪些是永真式？ ( )

(1)$(\neg P \wedge Q) \to (Q \to \neg R)$ (2)$P \to (Q \to Q)$ (3)$(P \wedge Q) \to P$ (4)$P \to (P \vee Q)$

答：（2)，（3)，（4） 可用蕴含等值式证明

3、设有下列公式，请问哪几个是永真蕴涵式 ?( )

(1)$P \Rightarrow P \wedge Q$ (2) $P \wedge Q \Rightarrow P$ (3) $P \wedge Q \Rightarrow P \vee Q$

(4)$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$ (5) $\neg (P \to Q) \Rightarrow P$ (6) $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow \neg P$

答：（2）是第三章的化简律，（3）类似附加律，（4）是假言推理，（3)，（5)，（6）都可以用蕴含等值式来证明出是永真蕴含式

4、公式 $\forall x((A(x) \to B(y, x)) \wedge \exists z C(y, z)) \to D(x)$ 中，自由变元是 ( ) ，约束变元是 ( ) 。

答：x,y, x,z （考察定义在公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中，称 x 为指导变元， A为量词的辖域。在 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 的辖域中， x 的所有出现都称为约束出现，即称 x 为约束变元， A 中不是约束出现的其他变项则称为自由变元。 于是 A(x) 、B(y，x) 和 $\exists z C(y, z)$ 中 y 为自由变元， x 和 z 为约束变元，在 D(x) 中 x 为自由变元）

5、判断下列语句是不是命题。若是，给出命题的真值。 ( )

(1) 北京是中华人民共和国的首都。 (2) 陕西师大是一座工厂。

(3) 你喜欢唱歌吗？ (4) 若 7+8＞18，则三角形有 4 条边。

(5) 前进！ (6) 给我一杯水吧！

答：(1) 是，T (2) 是，F (3) 不是 (4) 是，T (5) 不是 (6) 不是 （命题必须满足是陈述句，不能是疑问句或者祈使句。 ）

6、命题“存在一些人是大学生”的否定是 ( ) ，而命题“所有的人都是要死的”的否定是 ( ) 。

答：所有人都不是大学生，有些人不会死（命题的否定就是把命题前提中的量词“ $\forall$ 换成存在 $\exists$，$\exists$ 换成 $\forall$ ”，然后将命题的结论否定，“且变或 或变且”）

7、设 P：我生病， Q：我去学校，则下列命题可符号化为 ( ) 。

(1) 只有在生病时，我才不去学校 (2) 若我生病，则我不去学校

(3) 当且仅当我生病时，我才不去学校 (4) 若我不生病，则我一定去学校

答：(1) $\neg Q \rightarrow P$ （注意“只有……才……”和“除非……就……”两者都是一个形式的） (2) $P \rightarrow \neg Q$ (3) $P \leftrightarrow \neg Q$ (4) $\neg P \rightarrow Q$

8、设个体域为整数集，则下列公式的意义是 ( ) 。

(1) $\forall x \exists y(x+y=0)$ (2) $\exists y \forall x(x+y=0)$

答：(1) 对任一整数 x 存在整数 y 满足 x+y=0

(2) 存在整数 y 对任一整数 x 满足 x+y=0

9、设全体域 D是正整数集合，确定下列命题的真值：

(1) $\forall x \exists y (xy=y)$ ( ) (2) $\exists x \forall y(x+y=y)$ ( )

(3) $\exists x \forall y(x+y=x)$ ( ) (4) $\forall x \exists y(y=2x)$ ( )

答：(1) F(反证法：假若存在，则（ x-1 ）*y=0 对所有的 x 都成立，显然这个与前提条件相矛盾) (2) F （同理） (3) F （同理） (4) T（对任一整数 x 存在整数 y 满足条件 y=2x 很明显是正确的）

10、设谓词 P(x) ：x 是奇数， Q(x) ：x 是偶数，谓词公式 $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ 在哪个个体域中为真 ?( )

(1) 自然数 (2) 实数 (3) 复数 (4) (1)--(3) 均成立

答：(1)（在某个体域中满足不是奇数就是偶数，在整数域中才满足条件，而自然数子整数的子集，当然满足条件了）

11、命题“ 2 是偶数或 -3 是负数”的否定是（ ）。

答：2 不是偶数且 -3 不是负数。

12、永真式的否定是（　　　）

(1) 永真式　(2) 永假式　(3) 可满足式　(4) (1)--(3) 均有可能

答：(2)（这个记住就行了）

13、公式 $(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 化简为（　　），公式 $Q \rightarrow (P \vee (P \wedge Q))$ 可化简为（　　）。

答：$\neg P$，$Q \rightarrow P$（考查分配率和蕴含等值式知识的掌握）

14、谓词公式 $\forall x(P(x) \vee \exists yR(y)) \rightarrow Q(x)$ 中量词 $\forall x$ 的辖域是（　　　）。

答：$P(x) \vee \exists yR(y)$（一对括号就是一个辖域）

15、令 R(x):x 是实数，Q(x):x 是有理数。则命题“并非每个实数都是有理数”的符号化表示为（　　　）。

答：$\neg \forall x(R(x) \rightarrow Q(x))$

（集合论部分）

16、设 A={a,{a}}，下列命题错误的是（　　）。

(1) $\{a\} \in P(A)$　(2) $\{a\} \subseteq P(A)$　(3) $\{\{a\}\} \in P(A)$　(4) $\{\{a\}\} \subseteq P(A)$

答：(2)（{a} 是 P（A）的一个元素）

17、在 0（　　）Φ 之间写上正确的符号。

(1) =　(2) $\subseteq$　(3) $\in$　(4) $\notin$

答：(4)（空集没有任何元素，且是任何集合的子集）

18、若集合 S 的基数 |S|=5，则 S 的幂集的基数 |P(S)|=（　）。

答：32（2 的 5 次方　考查幂集的定义，即幂集是集合 S 的全体子集构成的集合）

19、设 $P=\{x|(x+1)^2 \leq 4 \text{ 且 } x \in R\}, Q=\{x|5 \leq x^2+16 \text{ 且 } x \in R\}$，则下列命题哪个正确（　　　）

(1) $Q \subset P$　(2) $Q \subseteq P$　(3) $P \subset Q$　(4) P=Q

答：(3)（Q是集合 R，P只是 R中的一部分，所以 P是 Q的真子集）

20、下列各集合中，哪几个分别相等（　　）。

(1) A1={a,b} (2) A2={b,a} (3) A3={a,b,a} (4) A4={a,b,c}

(5) A5={x|(x-a)(x-b)(x-c)=0} (6) A6={x|x^2-(a+b)x+ab=0}

答：A1=A2=A3=A6 A4=A5（集合具有无序性、确定性和互异性）

21、若 A-B=Φ，则下列哪个结论不可能正确？ ( )

(1) A= Φ (2) B= Φ (3) A ⊂B (4) B ⊂A

答：(4)（差集的定义）

22、判断下列命题哪个为真 ?( )

(1) A-B=B-A => A=B (2) 空集是任何集合的真子集

(3) 空集只是非空集合的子集 (4) 若 A 的一个元素属于 B，则 A=B

答：(1)（考查空集和差集的相关知识）

23、判断下列命题哪几个为正确？ ( )

(1) { Φ }∈{ Φ ,{{ Φ }}} (2) { Φ } ⊆ { Φ ,{{ Φ }}} (3) Φ ∈{{ Φ }}

(4) Φ ⊆{ Φ} (5) {a,b} ∈{a,b,{a},{b}}

答：(2)，(4)

24、判断下列命题哪几个正确？ ( )

(1) 所有空集都不相等 (2) { Φ } ≠ Φ (4) 若 A 为非空集，则 A⊂ A 成立。

答：(2)

25、设 A∩B=A∩C，$\bar{A}$ ∩B=$\bar{A}$ ∩C，则 B( )C。

答：=（等于）

26、判断下列命题哪几个正确？ ( )

(1) 若 A∪B＝A∪C，则 B＝C (2) {a,b}={b,a}

(3) P(A ∩B) ≠ P(A) ∩ P(B) （P(S) 表示 S 的幂集）

(4) 若 A 为非空集，则 A≠A∪A 成立。

答：(2)

27、A，B，C是三个集合，则下列哪几个推理正确：

(1) A ⊆B，B⊆C=> A⊆C (2) A ⊆B，B⊆C=> A∈B (3) A ∈B，B∈C=> A∈C

答：(1) （(3) 的反例 C 为{｛0，1}，0} B 为｛0，1}，A为 1 很明显结论不对）

（二元关系部分）

28、设A＝｛1,2,3,4,5,6 ｝，B={1,2,3}，从A到 B的关系R＝ ｛〈x,y 〉|x=y ^{2}

求(1)R (2) R^{-1}

答：（1）R={<1,1>,<4,2>} (2) R^{-1}={<1,1>,<2,4>} （考查二元关系的定义， R^{-1}为 R 的逆关系，即 R^{-1}= ｛<x,y>｝|<y,x> ∈R）

29、举出集合 A上的既是等价关系又是偏序关系的一个例子。 ( )

答：A上的恒等关系

30、集合 A上的等价关系的三个性质是什么？ ( )

答：自反性、对称性和传递性

31、集合 A上的偏序关系的三个性质是什么？ ( )

答：自反性、反对称性和传递性 （题 29，30，31 全是考查定义）

32、设 S={1，2，3，4}，A上的关系R＝ ｛〈1,2 〉,〈2,1〉,〈2,3 〉,〈3,4 〉｝

求(1)R ∘R (2) R^{-1} 。

答：R∘R ={〈1,1〉,〈1,3〉,〈2,2〉,〈2,4〉}（考查 F∘G={<x,y>| ∃t(<x,t> ∈F∧<t,y> ∈G)}）

R^{-1} = ｛〈2,1〉,〈1,2〉,〈3,2〉,〈4,3〉｝

33、设A＝｛1, 2, 3, 4, 5, 6｝，R是 A上的整除关系， 求 R={( )}

R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<6,6>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>,<2,4>,<2,6>,<3,6>}

34、设A＝｛1,2,3,4,5,6 ｝，B={1,2,3}，从A到 B的关系R＝｛〈x,y 〉|x=2y｝，求(1)R (2) R^{-1} 。

答：（1）R={<1,1>,<4,2>,<6,3>} (2) R^{-1}={<1,1>,<2,4>,(36>}

35、设A＝｛1,2,3,4,5,6 ｝，B={1,2,3}，从A到 B的关系R＝｛〈x,y 〉|x=y ^{2}｝，

求 R和 R^{-1} 的关系矩阵。

答：R的关系矩阵 = $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ R^{-1}的关系矩阵 = $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

36、集合 A={1,2, …,10} 上的关系 R={<x,y>|x+y=10,x,y ∈A}，则 R 的性质为（　　）。

(1) 自反的　　(2) 对称的　　(3) 传递的，对称的　(4) 传递的

答：(2)（考查自反　对称　传递的定义）

（代数系统部分）

37、设 A={2,4,6}，A 上的二元运算 *定义为：a*b=max{a,b}，则在独异点<A,*>中，单位元是 (　)，零元是 (　)。

答：2，6（单位元和零元的定义，单位元：　e。x=x　零元：θ。x=θ）

38、设 A={3,6,9}，A 上的二元运算 *定义为：a*b=min{a,b}，则在独异点<A,*>中，单位元是 (　)，零元是 (　)；

答：9，3

（半群与群部分）

39、设〈G,*〉是一个群，则

(1) 若 a,b,x ∈G，a*x=b，则 x=(　)；

(2) 若 a,b,x ∈G，a*x=a*b，则 x=(　)。

答：（1）$a^{-1}*b$　（2）b　（考查群的性质，即群满足消去律）

40、设 a 是 12 阶群的生成元，则 a^2是(　)阶元素，a^3是(　)阶元素。

答：6,4

41、代数系统 <G,*>是一个群，则 G的等幂元是 (　　　)。

答：单位元（由 a^2=a,用归纳法可证 a^n=a*a^(n-1)=a*a=a，所以等幂元一定是幂等元，反之若 a^n=a 对一切 N 成立，则对 n=2 也成立，所以幂等元一定是等幂元，并且在群<G,*>中，除幺元即单位元 e 外不可能有任何别的幂等元）

42、设 a 是 10 阶群的生成元，则 a^4是(　)阶元素，a^3是(　)阶元素

答：5, 10（若一个群 G 的每一个元都是 G 的某一个固定元 a 的乘方，我们就把 G 叫做循环群；我们也说，G 是由元 a 生成的，并且用符号 G=<a> 表示，且称 a 为一个生成元。并且一元素的阶整除群的阶）

43、群<G,*>的等幂元是（ ），有（ ）个。

答：单位元，1（在群<G,*>中，除幺元即单位元 e 外不可能有任何别的幂等元）

44、素数阶群一定是（ ）群，它的生成元是（ ）。

答：循环群，任一非单位元（证明如下：任一元素的阶整除群的阶。现在群的阶是素数 p，所以元素的阶要么是 1 要么是 p。G 中只有一个单位元，其它元素的阶都不等于 1，所以都是 p。任取一个非单位元，它的阶等于 p，所以它生成的 G 的循环子群的阶也是 p，从而等于整个群 G。所以 G 等于它的任一非单位元生成的循环群）

45、设〈G,*〉是一个群，a,b,c ∈G，则

(1) 若 c∗a=b，则 c=( )；(2) 若 c∗a=b∗a，则 c=( )。

答：(1) $b*a^{-1}$ (2) b （群的性质）

46、<H,,∗>是<G,,∗>的子群的充分必要条件是（ ）。

答：<H,,∗>是群 或 ∀a，b ∈G，a∗b∈H，a^{-1}∈H 或∀a,b ∈G，a∗b^{-1}∈H

47、群＜A,*＞的等幂元有（ ）个，是（ ），零元有（ ）个。

答：1，单位元，0

48、在一个群〈G,*〉中，若 G 中的元素 a 的阶是 k，则 a^{-1} 的阶是（ ）。

答：k

49、在自然数集 N 上，下列哪种运算是可结合的？（ ）

(1) a*b=a-b (2) a*b=max{a,b} (3) a*b=a+2b (4) a*b=|a-b|

答：(2)

50、任意一个具有 2 个或以上元的半群，它（ ）。

(1) 不可能是群 (2) 不一定是群

(3) 一定是群 (4) 是交换群

答：(1)

51、6 阶有限群的任何子群一定不是（ ）。

(1) 2　阶　　(2) 3　阶　(3) 4　　阶　　(4) 6　阶

答：(3)

（格与布尔代数部分）

52、下列哪个偏序集构成有界格（　　　）

(1)　（N, ≤）　(2)　（Z, ≥）

(3)　（{2,3,4,6,12},|　　（整除关系））　　(4) (P(A),　⊆)

答：(4) （考查幂集的定义）

53、有限布尔代数的元素的个数一定等于（　　　　）。

(1)　偶数　(2)　奇数　(3)　4　的倍数　　(4)　2　的正整数次幂

答：(4)

（图论部分）

54、设 G是一个哈密尔顿图，则　G一定是 (　)　。

(1)　欧拉图　(2)　　树　　(3)　平面图　(4)　　连通图

答：(4) （考察图的定义）

55、下面给出的集合中，哪一个是前缀码？　(　　　　　　)

(1) {0　，10，110，101111}　　　(2) {01　，001，000，1}

(3) {b　，c，aa，ab，aba}　　　(4) {1　，11，101，001，0011}

答：（2）

56、一个图的哈密尔顿路是一条通过图中　(　　)　　的路。

答：所有结点一次且恰好一次

57、在有向图中，结点 v 的出度 $deg^+(v)$ 表示 (　)　，入度 $deg^-(v)$ 表示 (　)　。

答：以 v 为起点的边的条数，　以 v 为终点的边的条数

58、设 G是一棵树，则　G 的生成树有 (　)　棵。

(1) 0　　　(2) 1　　　(3) 2　　　(4)　不能确定

答：1

59、n 阶无向完全图　K_n 的边数是 (　　)　　，每个结点的度数是　(　)　。

答：$\frac{n(n-1)}{2}$, n-1

60、一棵无向树的顶点数 n 与边数 m关系是 ( ) 。

答：m=n-1

61、一个图的欧拉回路是一条通过图中 ( ) 的回路。

答：所有边一次且恰好一次

62、有 n 个结点的树，其结点度数之和是 ( ) 。

答：2n-2（结点度数的定义）

63、下面给出的集合中，哪一个不是前缀码 ( ) 。

(1) {a ，ab，110，a1b11} (2) {01 ，001，000，1}

(3) {1 ，2，00，01，0210} (4) {12 ，11，101，002，0011}

答：(1)

64、n 个结点的有向完全图边数是 ( ) ，每个结点的度数是 ( ) 。

答：n(n-1),2n-2

65、一个无向图有生成树的充分必要条件是 ( ) 。

答：它是连通图

66、设 G是一棵树， n,m 分别表示顶点数和边数，则

(1) n=m (2) m=n+1 (3) n=m +1 (4) 不能确定。

答：（3）

67、设 T=〈V,E〉是一棵树，若 |V|>1，则 T 中至少存在 ( ) 片树叶。

答：2

68、任何连通无向图 G至少有 ( ) 棵生成树，当且仅当 G 是 ( ) ，G的生成树只有一棵。

答：1， 树

69、设 G是有 n 个结点 m条边的连通平面图，且有 k 个面，则 k 等于：

(1) m-n+2 (2) n-m-2 (3) n+m-2 (4) m+n+2 。

答：（1）

70、设 T 是一棵树，则 T 是一个连通且 (   )   图。

答：无简单回路

71、设无向图 G有 16 条边且每个顶点的度数都是 2, 则图 G有( ) 个顶点。

(1) 10 (2) 4 (3) 8 (4) 16

答：(4)

72、设无向图 G有 18 条边且每个顶点的度数都是 3, 则图 G有( ) 个顶点。

(1) 10 (2) 4 (3) 8 (4) 12

答：(4)

73、设图 G=<V, E>, V={a, b, c, d, e} , E={<a,b>,<a,c>,<b,c>,<c,d>,<d,e>},

则 G是有向图还是无向图？

答：有向图

74、任一有向图中，度数为奇数的结点有 (   ) 个。

答：偶数

75、具有 6 个顶点， 12 条边的连通简单平面图中，每个面都是由 (   ) 条边围成？

(1) 2 (2) 4 (3) 3 (4) 5

答：(3)

76、在有 n 个顶点的连通图中，其边数（   ）。

(1) 最多有 n-1 条 (2) 至少有 n-1 条

(3) 最多有 n 条 (4) 至少有 n 条

答：(2)

77、一棵树有 2 个 2 度顶点， 1 个 3 度顶点， 3 个 4 度顶点，则其 1 度顶点为（   ）。

(1) 5 (2) 7 (3) 8 (4) 9

答：(4)

78、若一棵完全二元（叉）树有 2n-1 个顶点，则它（   ）片树叶。

(1) n (2) 2n (3) n-1 (4) 2

答：（1）

79、下列哪一种图不一定是树（ ）。

(1) 无简单回路的连通图 (2) 有 n 个顶点 n-1 条边的连通图

(3) 每对顶点间都有通路的图 (4) 连通但删去一条边便不连通的图

答：（3）

80、连通图 G是一棵树当且仅当 G中（ ）。

(1) 有些边是割边 (2) 每条边都是割边

(3) 所有边都不是割边 (4) 图中存在一条欧拉路径

答：（2）

（数理逻辑部分）

二、求下列各公式的主析取范式和主合取范式：

1、$(P\rightarrow Q)\wedge R$

解：$(P\rightarrow Q)\wedge R\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge R$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$ （析取范式）

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge R)\vee((\neg P\vee P)\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$（主析取范式）

$\neg((P\rightarrow Q)\wedge R)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)$

$\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$（原公式否定的主析取范式）

$(P\rightarrow Q)\wedge R\Leftrightarrow(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$

$\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)$（主合取范式）

2、$(P\wedge R)\vee(Q\wedge R)\vee\neg P$

解：$(P\wedge R)\vee(Q\wedge R)\vee\neg P$（析取范式）

$\Leftrightarrow(P\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge R)\vee((P\vee\neg P)\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge(R\vee\neg R))$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee$

$(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$（主析取范式）

$\neg$（$(P\wedge R)\vee(Q\wedge R)\vee\neg P$）

$\Leftrightarrow$ $(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)$（原公式否定的主析取范式）

$(P\wedge R)\vee(Q\wedge R)\vee\neg P$ $\Leftrightarrow$ $(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$（主合取范式）

3、$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(R\vee P)$

解：$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(R\vee P)$

$\Leftrightarrow$ $(P\vee Q)\wedge(R\vee P)$（合取范式）

$\Leftrightarrow$ $(P\vee Q\vee(R\wedge\neg R))\wedge(P\vee(Q\wedge\neg Q))\vee R)$

$\Leftrightarrow$ $(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow$ $(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$（主合取范式）

$\neg((\neg P\rightarrow Q)\wedge(R\vee P))$

$\Leftrightarrow$ $(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$

$\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)$（原公式否定的主合取范式）

$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(R\vee P)$

$\Leftrightarrow$ $(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

（主析取范式）

4、$Q\rightarrow(P\vee\neg R)$

解：$Q\rightarrow(P\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow$ $\neg Q\vee P\vee\neg R$（主合取范式）

$\neg$（$Q\rightarrow(P\vee\neg R)$）

$\Leftrightarrow$ $(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)$

$\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee R)$（原公式否定的主合取范式）

$Q\rightarrow(P\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow$ $(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)$

$\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$（主析取范式）

5、$P\rightarrow(P\wedge(Q\rightarrow P))$

解：$P\rightarrow(P\wedge(Q\rightarrow P))$

$\Leftrightarrow$ $\neg P\vee(P\wedge(\neg Q\vee P))$

$\Leftrightarrow$ $\neg P\vee P$

$\Leftrightarrow$ T（主合取范式）

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge \neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge \neg Q)\vee(P\wedge Q)$（主析取范式）

6、$\neg(P\to Q)\vee(R\wedge P)$

解：$\neg(P\to Q)\vee(R\wedge P)\Leftrightarrow \neg(\neg P\vee Q)\vee(R\wedge P)$

$\Leftrightarrow (P\wedge \neg Q)\vee(R\wedge P)$（析取范式）

$\Leftrightarrow (P\wedge \neg Q\wedge(R\vee \neg R))\vee(P\wedge(\neg Q\vee Q)\wedge R)$

$\Leftrightarrow (P\wedge \neg Q\wedge R)\vee(P\wedge \neg Q\wedge \neg R)\vee(P\wedge \neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow (P\wedge \neg Q\wedge R)\vee(P\wedge \neg Q\wedge \neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$（主析取范式）

$\neg(\neg(P\to Q)\vee(R\wedge P))\Leftrightarrow (P\wedge Q\wedge \neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge \neg Q\wedge R)$

$\vee(\neg P\wedge \neg Q\wedge \neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge \neg R)$（原公式否定的主析取范式）

$\neg(P\to Q)\vee(R\wedge P)\Leftrightarrow (\neg P\vee \neg Q\vee R)\wedge(P\vee \neg Q\vee \neg R)\wedge(P\vee Q\vee \neg R)$

$\wedge(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee \neg Q\vee R)$（主合取范式）

7、$P\vee(P\to Q)$

解：$P\vee(P\to Q)\Leftrightarrow P\vee(\neg P\vee Q)\Leftrightarrow (P\vee \neg P)\vee Q$

$\Leftrightarrow T$(主合取范式)

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge \neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge \neg Q)\vee(P\wedge Q)$（主析取范式）

8、$(R\to Q)\wedge P$

解：$(R\to Q)\wedge P\Leftrightarrow (\neg R\vee Q)\wedge P$

$\Leftrightarrow (\neg R\wedge P)\vee(Q\wedge P)$（析取范式）

$\Leftrightarrow (\neg R\wedge(Q\vee \neg Q)\wedge P)\vee((\neg R\vee R)\wedge Q\wedge P)$

$\Leftrightarrow (\neg R\wedge Q\wedge P)\vee(\neg R\wedge \neg Q\wedge P)\vee(\neg R\wedge Q\wedge P)\vee(R\wedge Q\wedge P)$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q\wedge \neg R)\vee(P\wedge \neg Q\wedge \neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$（主析取范式）

$\neg((R\to Q)\wedge P)\Leftrightarrow (\neg P\wedge \neg Q\wedge \neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge \neg R)\vee(P\wedge \neg Q\wedge R)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge \neg Q\wedge R)$（原公式否定的主析取范式）

$(R\to Q)\wedge P\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee \neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee \neg R)$

$\wedge(P\vee \neg Q\vee \neg R)\wedge(P\vee Q\vee \neg R)$（主合取范式）

9、$P\to Q$

解：$P\to Q\Leftrightarrow \neg P\vee Q$（主合取范式）

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge(Q\vee \neg Q))\vee((\neg P\vee P)\wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge \neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$（主析取范式）

10、 $P\vee\neg Q$

解： $P\vee\neg Q$ （主合取范式）

$\Leftrightarrow (P\wedge(\neg Q\vee Q))\vee((\neg P\vee P)\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$（主析取范式）

11、$P\wedge Q$

解：$P\wedge Q$（主析取范式） $\Leftrightarrow (P\vee(Q\wedge\neg Q))\wedge((P\wedge\neg P)\vee Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)$（主合取范式）

12、$(P\vee R)\rightarrow Q$

解：$(P\vee R)\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow \neg(P\vee R)\vee Q$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg R)\vee Q$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\wedge(\neg R\vee Q)$（合取范式）

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee(R\wedge\neg R))\wedge((\neg P\wedge P)\vee Q\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)$（主合取范式）

$\neg$ $(P\vee R)\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)$

（原公式否定的主析取范式）

$(P\vee R)\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$（主析取范式）

13、$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

解：$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P\vee Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\vee R$(析取范式)

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$\vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$\vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$(主析取范式)

$(P \to Q) \to R$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$(析取范式)

$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$(合取范式)

$\Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$(主合取范式)

14、$(P \to (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$

解：$(P \to (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (P \vee (\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R)$（合取范式）

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee (R \wedge \neg R))$

$\wedge (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$\wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$

$\wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$(主合取范式)

$\neg (P \to (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$(原公式否定的主合取范式)

$(P \to (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$(主析取范式)

15、$P \vee (\neg P \to (Q \vee (\neg Q \to R)))$

解：$P \vee (\neg P \to (Q \vee (\neg Q \to R)))$

$\Leftrightarrow P \vee (P \vee (Q \vee (Q \vee R)))$

$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R$(主合取范式)

$\neg(P \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

$\wedge(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$

(原公式否定的主合取范式)

$(P \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$\vee(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$(主析取范式)

16、$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

解、$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$ (合取范式)

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee (R \wedge \neg R) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \wedge Q) \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$(主合取范式)

$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge R)$(合取范式)

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg R)) \vee ((\neg P \vee P) \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \neg R)$

$\vee(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

(主析取范式)

三、证明：

1、$P \rightarrow Q$, $\neg Q \vee R$, $\neg R$, $\neg S \vee P \Rightarrow \neg S$

证明：

(1) $\neg R$ 前提

(2) $\neg Q \vee R$ 前提

(3) $\neg Q$ （1），（2）

(4) $P \rightarrow Q$ 前提

(5) $\neg P$ （3），（4）

(6) $\neg S \vee P$ 前提

(7) $\neg S$ （5），（6）

2、$A \rightarrow (B \rightarrow C)$， $C \rightarrow (\neg D \vee E)$， $\neg F \rightarrow (D \wedge \neg E)$, $A \Rightarrow B \rightarrow F$

证明：

(1) A 前提

(2) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 前提

(3) $B \rightarrow C$ （1），（2）

(4) B 附加前提

(5) C （3），（4）

(6) $C \rightarrow (\neg D \vee E)$ 前提

(7) $\neg D \vee E$ （5），（6）

(8) $\neg F \rightarrow (D \wedge \neg E)$ 前提

(9) F （7），（8）

(10) $B \rightarrow F$ CP

3、$P \vee Q$, $P \rightarrow R$, $Q \rightarrow S \Rightarrow R \vee S$

证明：

(1) $\neg R$ 附加前提

(2) $P \rightarrow R$ 前提

(3) $\neg P$ （1），（2）

(4) $P \vee Q$ 前提

(5) Q （3），（4）

(6) $Q \rightarrow S$ 前提

(7) S （5），（6）

(8) $R \vee S$ CP ，（1），（8）

4、$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)$， $(Q \rightarrow W) \wedge (S \rightarrow X)$， $\neg (W \wedge X)$， $P \rightarrow R \Rightarrow \neg P$

证明：

（1） P 假设前提

（2） $P \to R$ 前提

（3） R （1），（2）

（4） $(P \to Q) \wedge (R \to S)$ 前提

（5） $P \to Q$ （4）

（6） $R \to S$ （5）

（7） Q （1），（5）

（8） S （3），（6）

（9） $(Q \to W) \wedge (S \to X)$ 前提

（10） $Q \to W$ （9）

（11） $S \to X$ （10）

（12） W （7），（10）

（13） X （8），（11）

（14） $W \wedge X$ （12），（13）

（15） $\neg(W \wedge X)$ 前提

（16） $\neg(W \wedge X) \wedge (W \wedge X)$ （14），（15）

5、$(U \vee V) \to (M \wedge N)$, $U \vee P$, $P \to (Q \vee S)$， $\neg Q \wedge \neg S \Rightarrow M$

证明：

(1) $\neg Q \wedge \neg S$ 附加前提

（2） $P \to (Q \vee S)$ 前提

（3） $\neg P$ （1），（2）

（4） $U \vee P$ 前提

（5） U （3），（4）

（6） $U \vee V$ （5）

（7） $(U \vee V) \to (M \wedge N)$ 前提

（8） $M \wedge N$ (6),(7)

（9） M （8）

6、 $\neg B \vee D$, $(E \to \neg F) \to \neg D$, $\neg E \Rightarrow \neg B$

证明：

(1) B 附加前提

(2) ¬B∨D 前提

(3) D （1），（2）

(4) (E →¬F)→¬D 前提

(5) ¬(E→¬F) （3），（4）

(6) E ∧¬F （5）

(7) E （6）

(8) ¬E 前提

(9) E ∧¬E （7），（8）

7、P→(Q→R)， R→(Q→S) => P →(Q→S)

证明：

（1） P 附加前提

（2） Q 附加前提

（3） P →(Q→R) 前提

（4） Q →R （1），（3）

（5） R （2），（4）

（6） R →(Q→S) 前提

（7） Q →S （5），（6）

（8） S （2），（7）

（9） Q →S CP ，（2），（8）

（10） P→(Q→S) CP ，（1），（9）

8、P→¬Q, ¬P→R, R→¬S =>S→¬Q

证明：

（1） S 附加前提

（2） R →¬S 前提

（3） ¬R （1），（2）

（4） ¬P→R 前提

（5） P （3），（4）

（6） P →¬Q 前提

（7） ¬Q (5)，（6）

（8） $S \rightarrow \neg Q$ CP，（1），（7）

9、$P\rightarrow(Q\rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$

证明：

(1) $P \rightarrow Q$ 附加前提

(2) P 附加前提

(3) Q (1),(2)

(4) $P \rightarrow(Q\rightarrow R)$ 前提

(5) $Q \rightarrow R$ (2),(4)

(6) R (3),(5)

(7) $P \rightarrow R$ CP,(2),(6)

(8) $(P \rightarrow Q) \rightarrow(P\rightarrow R)$ CP,(1),(7)

10、$P\rightarrow(\neg Q\rightarrow\neg R)$，$Q\rightarrow\neg P, S\rightarrow R, P \Rightarrow \neg S$

证明：

（1） P 前提

（2） $P \rightarrow(\neg Q\rightarrow\neg R)$ 前提

（3） $\neg Q\rightarrow\neg R$ (1)，(2)

（4） $Q \rightarrow\neg P$ 前提

（5） $\neg Q$ (1)，(4)

（6） $\neg R$ (3),(5)

（7） $S \rightarrow R$ 前提

（8） $\neg S$ (6)，(7)

11、$A, A\rightarrow B, A\rightarrow C, B\rightarrow(D\rightarrow\neg C) \Rightarrow \neg D$

证明：

（1） A 前提

（2） $A \rightarrow B$ 前提

（3） B (1)，(2)

（4） $A \rightarrow C$ 前提

（5） C (1)，(4)

（6） $B\rightarrow(D\rightarrow\neg C)$ 前提

（7） $D \rightarrow \neg C$ (3) ，(6)

（8） $\neg D$ (5) ，(7)

12、$A\rightarrow(C\vee B)$，$B\rightarrow\neg A$, $D\rightarrow\neg C \Rightarrow A\rightarrow\neg D$

证明：

（1） A 附加前提

(2) $A \rightarrow(C\vee B)$ 前提

(3) $C \vee B$ （1），（2）

(4) $B \rightarrow\neg A$ 前提

(5) $\neg B$ （1），（4）

(6) C （3），（5）

(7) $D \rightarrow\neg C$ 前提

(8) $\neg D$ （6），（7）

(9) $A \rightarrow\neg D$ CP ，（1），（8）

13、$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q) \Leftrightarrow (P\vee R) \rightarrow Q$

证明、

$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\wedge(\neg R\vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge \neg R)\vee Q$

$\Leftrightarrow \neg(P\vee R) \vee Q$

$\Leftrightarrow (P \vee R)\rightarrow Q$

14、$P\rightarrow (Q\rightarrow P)\Leftrightarrow \neg P\rightarrow (P\rightarrow \neg Q)$

证明、

$P\rightarrow (Q\rightarrow P)$

$\Leftrightarrow \neg P\vee(\neg Q\vee P)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P)\vee(\neg P\vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg P\rightarrow (P\rightarrow \neg Q)$

15、$(P\rightarrow Q) \wedge (P\rightarrow R)$，$\neg(Q\wedge R)$，$S\vee P\Rightarrow S$

证明、

(1) $(P\rightarrow Q) \wedge (P\rightarrow R)$ 前提

(2) $P \rightarrow (Q \wedge R)$ (1)

(3) $\neg (Q \wedge R)$ 前提

(4) $\neg P$ （2），(3)

(5) $S \vee P$ 前提

(6) S (4),(5)

16、$P\rightarrow \neg Q, Q\vee \neg R, R\wedge \neg S \Rightarrow \neg P$

证明、

(1) P 附加前提

(2) $P \rightarrow \neg Q$ 前提

(3) $\neg Q$ （1），（2）

(4) $Q \vee \neg R$ 前提

(5) $\neg R$ （3），（4）

(6) $R \wedge \neg S$ 前提

(7) R （6）

(8) $R \wedge \neg R$ （5），（7）

17、用真值表法证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$

证明、

列出两个公式的真值表：

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$(P\rightarrow Q) \wedge (Q\rightarrow P)$
F	F	T	T
F	T	F	F
T	F	F	F
T	T	T	T

由定义可知，这两个公式是等价的。

18、$P\rightarrow Q \Rightarrow P\rightarrow(P \wedge Q)$

证明：

设 $P\rightarrow(P \wedge Q)$为 F，则 P 为 T，$P\wedge Q$为 F。所以 P 为 T，Q 为 F，从而 $P\rightarrow Q$也为 F。所以 $P\rightarrow Q \Rightarrow P\rightarrow(P \wedge Q)$。

19、用先求主范式的方法证明 $(P\to Q)\wedge(P\to R) \Leftrightarrow (P\to(Q\wedge R))$

证明：

先求出左右两个公式的主合取范式

$(P\to Q)\wedge(P\to R) \Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee(R\wedge\neg R))\wedge(\neg P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$(P\to(Q\wedge R)) \Leftrightarrow (\neg P\vee(Q\wedge R))$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee(R\wedge\neg R))\wedge(\neg P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

它们有一样的主合取范式，所以它们等价。

20、$(P\to Q)\wedge\neg(Q\vee R) \Rightarrow \neg P$

证明：

设 $(P\to Q)\wedge\neg(Q\vee R)$ 为 T，则 $P\to Q$ 和 $\neg(Q\vee R)$ 都为 T。即 $P\to Q$ 和 $\neg Q\wedge\neg R$ 都为 T。故 $P\to Q$ $\neg Q$ 和 $\neg R$)都为 T，即 $P\to Q$ 为 T，Q 和 R 都为 F。从而 P 也为 F，即 $\neg P$ 为 T。从而 $(P\to Q)\wedge\neg(Q\vee R) \Rightarrow \neg P$

21、为庆祝九七香港回归祖国，四支足球队进行比赛，已知情况如下，问结论是否有效？

前提：(1) 若 A 队得第一，则 B 队或 C 队获亚军；

(2) 若 C 队获亚军，则 A 队不能获冠军；

(3) 若 D 队获亚军，则 B 队不能获亚军；

(4) A 队获第一；

结论：(5) D 队不是亚军。

证明：

设 A：A 队得第一 ;B: B 队获亚军 ;C: C 队获亚军 ;D: D 队获亚军 ; 则前提符号化为 $A\to(B\vee C)$，$C\to\neg A$，$D\to\neg B$，A；结论符号化为 $\neg D$。

本题即证明 $A\rightarrow(B\vee C)$，$C\rightarrow\neg A$，$D\rightarrow\neg B$，$A\Rightarrow\neg D$

（1） A 前提

（2） $A\rightarrow(B\vee C)$ 前提

（3） $B\vee C$ （1），（2）

（4） $C\rightarrow\neg A$ 前提

（5） $\neg C$ （1），（4）

（6） B （3），（5）

（7） $D\rightarrow\neg B$ 前提

（8） $\neg D$ （6），（7）

22、用推理规则证明 $P\rightarrow Q$，$\neg(Q\vee R)$,$P\wedge R$ 不能同时为真。

证明：

(1) $P\wedge R$ 前提

(2) P (1)

(3) $P\rightarrow Q$ 前提

(4) Q (2),(3)

(5) $\neg(Q\vee R)$ 前提

(6) $\neg Q\wedge\neg R$ (5)

(7) $\neg Q$ (6)

(8) $\neg Q\wedge Q$ (4),(7)

(集合论部分)

四、设A，B，C是三个集合，证明：

1、$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

证明：

$(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap\overline{A\cap C}=(A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C})$

$=(A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{C})=A\cap B\cap\overline{C}=A\cap(B\cap\overline{C})$

$=A\cap(B-C)$

2、$(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

证明：

$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$

$=A\cap \overline{B\cap C} = A-(B \cap C)$

3、$A\cup B=A\cup C$, $\overline{A}\cup B=\overline{A}\cup C$, 则 $C=B$

证明：

$B=B\cup(\overline{A}\cap A)=(B\cup \overline{A})\cap (B\cup A)$

$=(C\cup \overline{A})\cap (C\cup A)=C\cup(\overline{A}\cap A)=C$

4、$A\cup B=A\cup(B-A)$

证明：

$A\cup(B-A)=A\cup(B\cap \overline{A})=(A\cup B)\cap(A\cup \overline{A})$

$=(A\cup B)\cap U= A\cup B$

5、$A=B$　　$A \oplus B=\Phi$

证明：

$\Rightarrow$ 设 $A=B$, 则 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\Phi\cup\Phi=\Phi$。

$\Leftarrow$ 设 $A\oplus B=\Phi$，则 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\Phi$。故 $A-B=\Phi$， $B-A=\Phi$，

从而 $A\subseteq B$, $B\subseteq A$, 故 $A=B$。

6、$A\cap B = A\cap C$, $A\cup B=A\cup C$, 则 $C=B$

证明：

$B=B\cap(A\cup B)= B\cap(A\cup C)= (B\cap A)\cup(B\cap C)$

$= (A\cap C)\cup(B\cap C)= C\cap(A\cup B)$

$= C\cap(A\cup C)$

$=C$

7、$A\cap B=A\cap C$, $\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$, 则 $C=B$

证明：

$B=B\cap(A\cup \overline{A})=(B\cap A)\cup(B\cap \overline{A})$

$=(C\cap A)\cup(C\cap \overline{A})=C\cap(A\cup \overline{A})$

$=C$

8、$A-(B\cup C)=(A-B)-C$

证明：

$A-(B\cup C)= A\cap \overline{B}\cup\overline{C}$

$=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}$

$=(A-B)\cap\overline{C}=(A-B)-C$

9、$(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cup C)$

证明：

$(A-B)\cap(A-C)$

$=(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C})$

$=(A\cap A)\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$

$=A\cap\overline{B\cup C}=A-(B\cup C)$

10、A-B=B，则 A=B=Φ

证明：

因为 B=A-B，所以 $B=B\cap B=(A-B)\cap B=\Phi$。从而 A=A-B=B=Φ。

11、$A=(A-B)\cup(A-C)\Leftrightarrow A\cap B\cap C=\Phi$

证明：

$\Rightarrow$ 因为 $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$

$=A\cap\overline{B\cap C}=A-(B\cap C)$，且 $A=(A-B)\cup(A-C)$，

所以 $A=A-(B\cap C)$，故 $A\cap B\cap C=\Phi$。

$\Leftarrow$ 因为 $A\cap B\cap C=\Phi$，所以 $A-(B\cap C)=A$。而 $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$，

所以 $A=(A-B)\cup(A-C)$。

12、$(A-B)\cap(A-C)=\Phi\Leftrightarrow A\subseteq B\cup C$

证明：

$\Rightarrow$ 因为 $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C})=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$

$=A\cap\overline{B}\cup\overline{C}=A-(B\cup C)$，且 $(A-B)\cap(A-C)=\Phi$，

所以 $\Phi=A-(B\cup C)$，故 $A\subseteq B\cup C$。

$\Leftarrow$ 因为 $A\subseteq B\cup C$，所以 $A-(B\cup C)=A$。而 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$，

所以 $A=(A-B)\cap(A-C)$。

13、$(A-B)\cup(B-A)=A\Leftrightarrow B=\Phi$

证明：

$\Rightarrow$ 因为 $(A-B)\cup(B-A)=A$，所以 $B-A\subseteq A$。但 $(B-A)\cap A=\Phi$，故 $B-A=\Phi$。

即 $B\subseteq A$, 从而 $B=\Phi$ （否则 $A-B\subset A$, 从而与 $(A-B)\cup(B-A)=A$ 矛盾）。

$\Leftarrow$ 因为 $B=\Phi$，所以 $A-B=A$ 且 $B-A=\Phi$。从而 $(A-B)\cup(B-A)=A$。

14、$(A-B)-C\subseteq A-(B-C)$

证明：

$\forall x\in(A-B)-C$，有 $x\in A-B$ 且 $x\notin C$, 即 $x\in A$, $x\notin B$ 且 $x\notin C$。

从而 $x\in A$, $x\notin B-C$, 故 $x\in A-(B-C)$。从而 $(A-B)-C\subseteq A-(B-C)$

15、$P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$ （$P(S)$ 表示 S 的幂集）

证明：

$\forall S\in P(A)\cup P(B)$，有 $S\in P(A)$ 或 $S\in P(B)$，所以 $S\subseteq A$ 或 $S\subseteq B$。

从而 $S\subseteq A\cup B$, 故 $S\in P(A\cup B)$。即 $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

16、$P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$ （$P(S)$ 表示 S 的幂集）

证明：

$\forall S\in P(A)\cap P(B)$，有 $S\in P(A)$ 且 $S\in P(B)$，所以 $S\subseteq A$ 且 $S\subseteq B$。

从而 $S\subseteq A\cap B$, 故 $S\in P(A\cap B)$。即 $P(A)\cap P(B)\subseteq P(A\cap B)$。

$\forall S\in P(A\cap B)$，有 $S\subseteq A\cap B$, 所以 $S\subseteq A$ 且 $S\subseteq B$。

从而 $S\in P(A)$ 且 $S\in P(B)$，故 $S\in P(A)\cap P(B)$。即 $P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$。

故 $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

17、$(A-B)\cup B=(A\cup B)-B$ 当且仅当 $B=\Phi$。

证明：

$\Leftarrow$ 当 $B=\Phi$ 时，因为 $(A-B)\cup B=(A-\Phi)\cup\Phi=A$, $(A\cup B)-B=(A\cup\Phi)-\Phi=A$, 所以 $(A-B)\cup B=(A\cup B)-B$。

$\Rightarrow$ 用反证法证明。假设 $B\neq\Phi$，则存在 $b\in B$。因为 $b\in B$ 且 $b\in A\cup B$, 所以 $b\notin(A\cup B)-B$。而显然 $b\in(A-B)\cup B$。故这与已知 $(A-B)\cup B=(A\cup B)-B$ 矛盾。

五、证明或解答：

（数理逻辑、集合论与二元关系部分）

1、设个体域是自然数，将下列各式翻译成自然语言：

(1) $\exists x\forall y(xy=1)$；　(2) $\forall x\exists y(xy=1)$;

(3) $\forall x \exists y\ (xy=0)$; (4) $\exists x \forall y\ (xy=0)$；

(5) $\forall x \exists y\ (xy=x)$; (6) $\exists x \forall y\ (xy=x)$；

(7) $\forall x \forall y \exists z\ (x-y=z)$

答：

（1）存在自然数 x，对任意自然数 y 满足 xy=1;

（2）对每个自然数 x，存在自然数 y 满足 xy=1;

（3）对每个自然数 x，存在自然数 y 满足 xy=0;

（4）存在自然数 x，对任意自然数 y 满足 xy=1;

（5）对每个自然数 x，存在自然数 y 满足 xy=x;

（6）存在自然数 x，对任意自然数 y 满足 xy=x;

（7）对任意自然数 x,y，存在自然数 z 满足 x-y=z。

2、设 A(x,y,z): x+y=z, M（x,y,z）: xy=z, L(x,y): x<y, G(x,y): x>y，个体域为自然数。将下列命题符号化：

（1）没有小于 0 的自然数；

（2）x<z 是 x<y 且 y<z 的必要条件；

（3）若 x<y，则存在某些 z，使 z<0, xz>yz;

（4）存在 x，对任意 y 使得 xy=y;

（5）对任意 x，存在 y 使 x+y=x。

答：

（1）$\forall x\,(G(x,0) \vee M(0,0,x))$ 或 $\neg\exists x\, L(x,0)$

（2）$\forall x \forall y \forall z\,((L(x,y) \wedge L(y,z)) \rightarrow L(x,z))$

（3）$\forall x \forall y\,((L(x,y) \rightarrow \exists z(L(z,0) \wedge G(xz,yz)))$

（4）$\exists x \forall y M(x,y,y)$

（5）$\forall x \exists y A(x,y,x)$

3、列出下列二元关系的所有元素：

（1）A={0,1,2}，B={0,2,4}，R={<x,y>|x,y $\in$ A∩B};

（2）A={1,2,3,4,5}，B={1,2}，R={<x,y>|2 $\leq$ x+y $\leq$ 4 且 x $\in$ A 且 y $\in$ B};

（3）$A=\{1,2,3\}$，$B=\{-3,-2,-1,0,1\}$，$R=\{<x,y>\,|\,|x|=|y|$ 且 $x\in A$ 且 $y\in B\}$;

解：

(1) $R=\{<0,0>,<0,2>,<2,0>,<2,2>\}$

(2) $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,1>\}$;

(3) $R=\{<1,1>,<1,-1>,<2,-2>,<3,-3>\}$。

4、对任意集合 A,B，证明：若 $A\times A=B\times B$，则 $B=B$。

证明：

若 $B=\Phi$，则 $B\times B=\Phi$。从而 $A\times A=\Phi$。故 $A=\Phi$。从而 $B=A$。

若 $B\neq\Phi$，则 $B\times B\neq\Phi$。从而 $A\times A\neq\Phi$。

对 $\forall x\in B$，$<x,x>\in B\times B$。因为 $A\times A=B\times B$，则 $<x,x>\in A\times A$。从而 $x\in A$。故 $B\subseteq A$。

同理可证，$A\subseteq B$。

故 $B=A$。

5、对任意集合 A,B，证明：若 $A\neq\Phi$，$A\times B=A\times C$，则 $B=C$。

证明：

若 $B=\Phi$，则 $A\times B=\Phi$。从而 $A\times C=\Phi$。因为 $A\neq\Phi$，所以 $C=\Phi$。即 $B=C$。

若 $B\neq\Phi$，则 $A\times B\neq\Phi$。从而 $A\times C\neq\Phi$。

对 $\forall x\in B$，因为 $A\neq\Phi$，所以存在 $y\in A$，使 $<y,x>\in A\times B$。因为 $A\times B=A\times C$，则 $<y,x>\in A\times C$。从而 $x\in C$。故 $B\subseteq C$。

同理可证，$C\subseteq B$。

故 $B=C$。

6、设 $A=\{a,b\}$，$B=\{c\}$。求下列集合：

(1) $A\times\{0,1\}\times B$；(2) $B^2\times A$；

(3) $(A\times B)^2$；(4) $P(A)\times A$。

解：

（1）$A\times\{0,1\}\times B=\{<a,0,c>,<a,1,c>,<b,0,c>,<b,1,c>\}$;

（2）$B^2\times A=\{<c,c,a>,<c,c,b>\}$;

（3）$(A\times B)^2=\{<a,c,a,c>,<a,c,b,c>,<b,c,a,c>,<b,c,b,c>\}$;

（4）$P(A)\times A=\{<\Phi,a>,<\Phi,b>,<\{a\},a>,<\{a\},b>,<\{b\},a>,<\{b\},b>,<A,a>,<A,b>\}$。

7、设全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$，　$A=\{a,d\}$，　$B=\{a,b,c\}$，　$C=\{b,d\}$。求下列各集合：

（1）$A\cap B\cap \overline{C}$；　（2）$\overline{A\cap B\cap C}$；（3）$(A\cap \overline{B})\cup C$;

（4）$P(A)-P(B)$;　（5）$(A-B)\cup(B-C)$;　（6）$(A\oplus B)\cap C$;

解：

(1) $A\cap B\cap \overline{C}=\{a\}$;　(2) $\overline{A\cap B\cap C}=\{a,b,c,d,e\}$;

(3) $(A\cap \overline{B})\cup C=\{b,d\}$;　(4) $P(A)-P(B)=\{\{d\},\{a,d\}\}$;

(5) $(A-B)\cup(B-C)=\{d,c,a\}$;　(6) $(A\oplus B)\cap C=\{b,d\}$。

8、设 A,B,C 是任意集合，证明或否定下列断言：

（1）若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

（2）若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，则 $A\in C$;

（3）若 $A\in B$，且 $B\in C$，则 $A\in C$；

（4）若 $A\in B$，且 $B\subseteq C$，则 $A\in C$；

证明：

(1) 成立。

对 $\forall x\in A$，因为 $A\subseteq B$，所以 $x\in B$。又因为 $B\subseteq C$，所以 $x\in C$。即 $A\subseteq C$。

(2) 不成立。反例如下：$A=\{a\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{a,b,c\}$。虽然 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，但 $A\notin C$。

(3) 不成立。反例如下：$A=\{a\}$，$B=\{\{a\},b\}$, $C=\{\{\{a\},b\},c\}$。虽然 $A\in B$，且 $B\in C$，但 $A\notin C$。

(4) 成立。因为 $A\in B$，且 $B\subseteq C$，所以 $A\in C$。

9、A 上的任一良序关系一定是 A 上的全序关系。

证明：

$\forall a$，$b\in A$，则 $\{a,b\}$ 是 A 的一个非空子集。$\because$ $\leq$是 A 上的良序关系，$\therefore$ $\{a,b\}$ 有最小元。若最小元为 a，则 $a\leq b$；否则 $b\leq a$。从而≤为 A 上的的全序关系。

10、若 R 和 S 都是非空集 A 上的等价关系，则 $R\cap S$ 是 A 上的等价关系。

证明：

$\forall a\in A$，因为 R 和 S 都是 A 上的等价关系，所以 xRx 且 xSx。故 $xR\cap Sx$。从而 $R\cap S$ 是自反的。

$\forall a,b \in A$，$aR\cap Sb$，即 aRb 且 aSb。因为 R和 S都是 A上的等价关系，所以 bRa 且 bSa。故 $bR\cap Sa$。从而 $R\cap S$ 是对称的。

$\forall a,b,c \in A$，$aR\cap Sb$ 且 $bR\cap Sc$，即 aRb，aSb,bRc 且 bSc。因为 R和 S都是 A上的等价关系，所以 aRc 且 aSc。故 $aR\cap Sc$。从而 $R\cap S$ 是传递的。

故 $R\cap S$ 是 A上的等价关系。

11、设 $R\subseteq A\times A$，则 R自反 $\Leftrightarrow I_A\subseteq R$。

证明：

$\Rightarrow$ $\forall x\in A$，$\because$ R是自反的，$\therefore xRx$。即 $<x,x>\in R$，故 $I_A\subseteq R$。

$\Leftarrow$ $\forall x\in A$，$\because I_A\subseteq R$，$\therefore <x,x>\in R$。即 xRx，故 R是自反的。

12、设 A是集合，$R\subseteq A\times A$，则 R是对称的 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$。

证明：

$\Rightarrow$ $\forall <x,y>\in R$，$\because$ R是对称的，$\therefore yRx$。即 $<y,x>\in R$，故 $<x,y>\in R^{-1}$。从而 $R\subseteq R^{-1}$。

反之 $\forall <x,y>\in R^{-1}$，即 $<x,y>\in R$。$\because$ R是对称的，$\therefore yRx$。即 $<y,x>\in R$，$R^{-1}\subseteq R$。

故 $R=R^{-1}$。

$\Leftarrow$ $\forall x$，$y\in A$，若 $<x,y>\in R$，即 $<y,x>\in R^{-1}$。$\because R=R^{-1}$，$\therefore <y,x>\in R$。即 yRx，故 R是对称的。

13、设 A,B,C 和 D均是集合，$R\subseteq A\times B$，$S\subseteq B\times C$，$T\subseteq C\times D$，则

(1) $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$；

(2) $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$；

证明：

（1）$\forall <x,z>\in R\circ(S\cup T)$，则由合成关系的定义知 $\exists y\in B$，使得 $<x,y>\in R$ 且 $<y,z>\in S\cup T$。从而 $<x,y>\in R$ 且 $<y,z>\in S$ 或 $<x,y>\in R$ 且 $<y,z>\in T$，即 $<x,z>\in R\circ S$ 或 $<x,z>\in R\circ T$。故 $<x,z>\in(R\circ S)\cup(R\circ T)$。从而 $R\circ(S\cup T)\subseteq(R\circ S)\cup(R\circ T)$。

同理可证 $(R\circ S)\cup(R\circ T)\subseteq R\circ(S\cup T)$。

故 $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$。

(2) $\forall <x,z>\in R\circ(S\cap T)$，则由合成关系的定义知 $\exists y\in B$，使得 $<x,y>\in R$ 且 $<y,z>\in S\cap T$。从而 $<x,y>\in R$ 且 $<y,z>\in S$ 且 $<y,z>\in T$，即 $<x,z>\in R\circ S$ 且 $<x,z>\in R\circ T$。故 $<x,z>\in(R\circ S)\cap(R\circ T)$。从而 $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$。

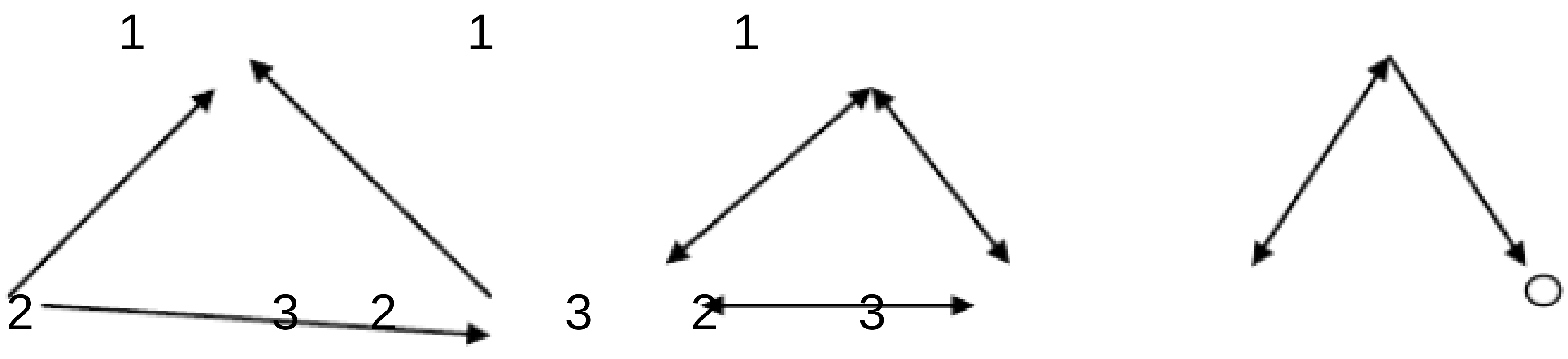
14、设 $\langle A,\leq\rangle$ 为偏序集，$\Phi\neq B\subseteq A$，若 B 有最大(小)元、上(下)确界，则

它们是惟一的。

证明：

设 a,b 都是 B 的最大元，则由最大元的定义 $a\le b$，$b\le a$。$\because$ $\le$ 是 A 上的偏序关系，$\therefore$ a=b。即 B 如果有最大元则它是惟一的。

15、设 A={1,2,3}，写出下列图示关系的关系矩阵，并讨论它们的性质：



解：

（1）R={<2,1>,<3,1>,<2,3>};$M_R=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$; 它是反自反的、反对称的、传递的；

（2）R={<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,1>,<2,3>,<3,2>};$M_R=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$; 它是反自反的、对称的；

（3）R={<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,3>};$M_R=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; 它既不是自反的、反自反的、也不是对称的、反对称的、传递的。

16、设 A={1,2, …,10} 。下列哪个是 A 的划分？若是划分，则它们诱导的等价关系是什么？

（1）B={{1,3,6},{2,8,10},{4,5,7}};

（2）C={{1,5,7},{2,4,8,9},{3,5,6,10}};

（3）D={{1,2,7},{3,5,10},{4,6,8},{9}}

解：

（1）和（2）都不是 A 的划分。

（3）是 A 的划分。其诱导的等价关系是

$I_A\cup$ {<1,2>,<2,1>,<1,7>,<7,1>,<2,7>,<7,2>,<3,5>,<5,3>,<3,10>,

<10,3>,<10,5>,<5,10>,<4,6>,<6,4>,<4,8>,<8,4>,<6,8>,<8,6>}。

17、R是 A={1,2,3,4,5,6} 上的等价关系,

$R=I_A \cup$ {<1,5>,<5,1>,<2,4>,<4,2>,<3,6>,<6,3>}

求 R诱导的划分。

解：

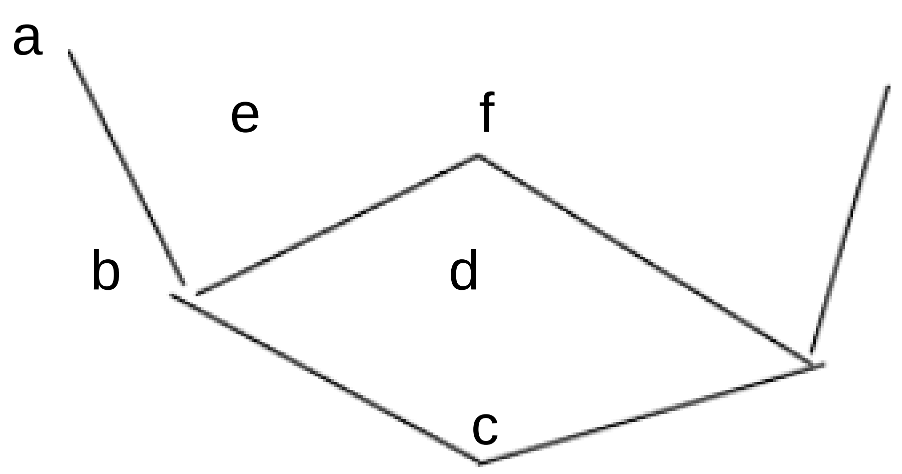
R诱导的划分为 {{1,5},{2,4},{3,6}}。

18、A上的偏序关系 $\le$的 Hasse图如下。

（1） 下列哪些关系式成立： $a \le b, b \le a, c \le e, e \le f, d \le f, c \le f$；

（2） 分别求出下列集合关于 $\le$的极大（小）元、最大（小）元、上（下）界及上（下）确界（若存在的话）：

(a) A; (b) {b,d}; (c) {b,e}; (d) {b,d,e}



解：

(1) $b \le a, c \le e, d \le f, c \le f$ 成立；

(2) (a) 的极大元为 a,e,f, 极小元为 c; 无最大元, c 是最小元；

无上界, 下界是 c; 无上确界, 下确界是 c。

(b) 的极大元为 b,d, 极小元为 b,d; 无最大元和最小元；

上界是 e, 下界是 c; 上确界是 e, 下确界是 c。

(c) 的极大元为 e, 极小元为 b; 最大元是 e, b 是最小元；

上界是 e, 下界是 b; 上确界是 e, 下确界是 b。

(d) 的极大元为 e, 极小元为 b,d; 最大元是 e, 无最小元；

上界是 e, 下界是 c; 上确界是 e, 下确界是 c。

（半群与群部分）

19、求循环群 $C_{12}=\{e,a,a^2,\cdots,a^{11}\}$中 $H=\{e,a^4,a^8\}$的所有右陪集。

解：

因为 $|C_{12}|=12$，$|H|=3$，所以 H 的不同右陪集有 4 个：H，$\{a,a^5,a^9\}$,$\{a^2,a^6,a^{10}\}$,$\{a^3,a^7,a^{11}\}$。

20、求下列置换的运算：

解：

（1）$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&2&6&3&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&2&6&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&2&6&3&1\end{pmatrix}^2$

$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&2&6&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&5&1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$

21、试求出 8 阶循环群的所有生成元和所有子群。

解：

设 G是 8 阶循环群，a 是它的生成元。则 $G=\{e,a,a^2,...,a^7\}$。由于 a^k是 G的生成元的充分必要条件是 k 与 8 互素，故 a,a^3,a^5,a^7是 G的所有生成元。

因为循环群的子群也是循环群，且子群的阶数是 G 的阶数的因子，故 G的子群只能是 1 阶的、2 阶的、4 阶的或 8 阶的。因为 $|e|=1,|a|=|a^3|=|a^5|=8,|a^2|=|a^6|=8,|a^4|=2$，且 G 的子群的生成元是该子群中 a 的最小正幂，故 G的所有子群除两个平凡子群外，还有 $\{e,a^4\}$,$\{e,a^2,a^4,a^6\}$。

22、I 上的二元运算 * 定义为：$\forall a,b\in I$，$a*b=a+b-2$。试问<I,*> 是循环群吗？

解：

<I,*> 是循环群。因为 <I,*> 是无限阶的循环群，则它只有两个生成元。1 和 3 是它的两个生成元。因为 $a^n=na-2(n-1)$，故 $1^n=n-2(n-1)=2-n$。从而对任一个 $k\in I,k=2-(2-k)=1^{2-k}$，故 1 是的生成元。又因为 1 和 3 关于 * 互为逆元，故 3 也是<I,*>的生成元。

23、设<G,·>是群，$a\in G$。令 $H=\{x\in G|a\cdot x=x\cdot a\}$。试证：H 是 G 的子群。

证明：

$\forall$ c，d $\in$ H，则对 $\forall$ c，d $\in$ HK，$c\cdot a=a\cdot c,d\cdot a=a\cdot d$。故 $(c\cdot d)\cdot a=c\cdot(d\cdot a)=c\cdot(a\cdot d)=(c\cdot a)\cdot d=(a\cdot c)\cdot d=a\cdot(c\cdot d)$。从而 $c\cdot d\in H$。

由于 $c\cdot a=a\cdot c$, 且 · 满足消去律，所以 $a\cdot c^{-1}=c^{-1}\cdot a$。故 $c^{-1}\in H$。

从而 H 是 G的子群。

24、证明：偶数阶群中阶为 2 的元素的个数一定是奇数。

证明：

设<G, · >是偶数阶群，则由于群的元素中阶为 1 的只有一个单位元，阶大于 2 的元素是偶数个，剩下的元素中都是阶为 2 的元素。故偶数阶群中阶为 2 的元素一定是奇数个。

25、证明：有限群中阶大于 2 的元素的个数一定是偶数。

证明：

设<G, · >是有限群，则 $\forall a\in G$，有 $|a|=|a^{-1}|$。且当 a 阶大于 2 时，$a\neq a^{-1}$。故阶数大于 2 的元素成对出现，从而其个数必为偶数。

26、试求 $<N_6,+_6>$中每个元素的阶。

解：

0 是 $<N_6,+_6>$中关于 $+_6$ 的单位元。则 $|0|=1$；$|1|=|5|=6$，$|2|=|4|=3$，$|3|=2$。

27、设<G, · >是群，$a,b\in G$，$a\neq e$，且 $a^4\cdot b=b\cdot a^5$。试证 $a\cdot b\neq b\cdot a$。

证明：

用反证法证明。

假设 $a\cdot b=b\cdot a$。则 $a^4\cdot b= a^3\cdot(a\cdot b)= a^3\cdot (b\cdot a)=(a^3\cdot b)\cdot a$

$=(a^2\cdot (a\cdot b))\cdot a=(a^2\cdot(b\cdot a))\cdot a=((a^2\cdot b)\cdot a)\cdot a=(a\cdot (a\cdot b))\cdot (a\cdot a)$

$=(a\cdot (b\cdot a))\cdot a^2=((a\cdot b)\cdot a)\cdot a^2=((b\cdot a)\cdot a)\cdot a^2=(b\cdot a^2)\cdot a^2$

$=b\cdot (a^2\cdot a^2)=b\cdot a^4$。

因为 $a^4\cdot b= b\cdot a^5$，所以 $b\cdot a^5= b\cdot a^4$。由消去律得，$a=e$。

这与已知矛盾。

28、I 上的二元运算 *定义为：$\forall a,b\in I$，$a*b=a+b-2$。试证：<I,*> 为群。

证明：

（1）$\forall a,b,c\in I$，$(a*b)*c=(a*b)+c-2=(a+b-2)+c-2=a+b+c-4$, $a*(b*c)=a+(b*c)-2=a+(b+c-2)-2=a+b+c-4$。故 $(a*b)*c= a*(b*c)$，从而 * 满足结合律。

（2）记 $e=2$。对 $\forall a\in I$，$a*2=a+2-2=a=2+a-2=2*a$。故 $e=2$ 是 I 关于运算 * 的单位元。

（3）对 $\forall a \in I$，因为 $a*(4-a)=a+4-a-2=2=e=4-a+a-2=(4-a)*a$。故 $4-a$ 是 a 关于运算 * 的逆元。

综上所述，$<I,*>$ 为群。

29、设 $<S,\cdot>$ 为半群，$a \in S$。令 $S_a=\{a^i \mid i \in I_+\}$。试证 $<S_a,\cdot>$ 是 $<S,\cdot>$ 的子半群。

证明：

$\forall b, c \in S_a$，则存在 $k,l \in I_+$，使得 $b=a^k, c=a^l$。从而 $b \cdot c=a^k \cdot a^l=a^{k+l}$。因为 $k+l \in I_+$，所以 $b \cdot c \in S_a$，即 S_a 关于运算 · 封闭。故 $<S_a,\cdot>$ 是 $<S,\cdot>$ 的子半群。

30、单位元有惟一逆元。

证明：

设 $<G,*>$ 是一个群，e 是关于运算 $*$ 的单位元。

若 e_1,e_2 都是 e 的逆元，即 $e_1*e=e$ 且 $e_2*e=e$。

因为 e 是关于运算 $*$ 的单位元，所以 $e_1=e_1*e=e=e_2*e=e_2$。

即单位元有惟一逆元。

31、设 e 和 0 是关于 A 上二元运算 * 的单位元和零元，如果 $|A|>1$，则 $e \neq 0$。

证明：

用反证法证明。假设 $e=0$。

对 A 的任一元素 a，因为 e 和 0 是 A 上关于二元运算 * 的单位元和零元，则 $a=a*e=a*0=0$。即 A 的所有元素都等于 0，这与已知条件 $|A|>1$ 矛盾。

从而假设错误。即 $e \neq 0$。

32、证明在元素不少于两个的群中不存在零元。

证明：(用反证法证明)

设在素不少于两个的群 $<G,*>$ 中存在零元 θ。对 $\forall a \in G$，由零元的定义有 $a*\theta=\theta$。

∵ $<G,*>$ 是群，∴ 关于 * 消去律成立。∴ $a=e$。即 G 中只有一个元素，这与 $|G| \geq 2$ 矛盾。故在元素不少于两个的群中不存在零元。

33、证明在一个群中单位元是惟一的。

证明：

设 e_1,e_2 都是群〈$G,*$〉的单位元。 则 $e_1=e_1*e_2=e_2$。

所以单位元是惟一的。

34、设 a 是一个群〈G，*〉的生成元，则 a^{-1} 也是它的生成元。

证明：

$\forall x \in G$，因为 a 是〈G，*〉的生成元，所以存在整数 k，使得 $x=a^k$。

故 $x=((a^k)^{-1})^{-1}=((a^{-1})^k)^{-1}=(a^{-1})^{-k}$。从而 a^{-1} 也是〈G，*〉的生成元。

35、在一个偶数阶群中一定存在一个 2 阶元素。

证明：

群中的每一个元素的阶均不为 0 且单位元是其中惟一的阶为 1 的元素。因为任一阶大于 2 的元素和它的逆元的阶相等。且当一个元素的阶大于 2 时，其逆元和它本身不相等。故阶大于 2 的元素是成对的。从而阶为 1 的元素与阶大于 2 的元素个数之和是奇数。

因为该群的阶是偶数，从而它一定有阶为 2 的元素。

36、代数系统 <G,*> 是一个群，则 G 除单位元以外无其它等幂元。

证明：

设 e 是该群的单位元。若 a 是<G,*>的等幂元，即 $a*a=a$。

因为 $a*e=a$，所以 $a*a=a*e$。由于运算 * 满足消去律，所以 $a=e$。

即 G 除单位元以外无其它等幂元。

37、设<G,*>是一个群，则对于 $a,b \in G$，必有唯一的 $x\in G$，使得 $a*x=b$。

证明：

因为 $a^{-1}*b\in G$，且 $a*(a^{-1}*b)=(a*a^{-1})*b=e*b=b$，所以对于 $a,b \in G$，必有 $x\in G$，使得 $a*x=b$。

若 x_1,x_2 都满足要求。即 $a*x_1=b$ 且 $a*x_2=b$。故 $a*x_1=a*x_2$。

由于 * 满足消去律，故 $x_1=x_2$。

从而对于 $a,b \in G$，必有唯一的 $x\in G$，使得 $a*x=b$。

38、设半群 <S,·>中消去律成立，则<S,·>是可交换半群当且仅当 $\forall a,b \in S$，$(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$。

证明：

$\Rightarrow$ $\forall a,b \in S$，$(a\cdot b)^2=(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)=((a\cdot b)\cdot a)\cdot b$

$=(a\cdot(a\cdot b))\cdot b=((a\cdot a)\cdot b)\cdot b=(a\cdot a)\cdot(b\cdot b)=a^2\cdot b^2$;

$\Leftarrow$ $\forall a,b \in S$，因为（a · b）^{2}=a^2 · b^2，所以(a · b) · (a · b)=(a · a) · (b · b)。故 a · ((b · a) · b)=a · (a · (b · b))。由于 · 满足消去律，所以(b · a) · b=a · (b · b)，即(b · a) · b=(a · b) · b。从而 a · b=b · a。故 · 满足交换律。

39、设群<G,∗>除单位元外每个元素的阶均为 2，则<G,∗>是交换群。

证明：

对任一 $a \in G$，由已知可得 a*a=e，即 a^{-1}=a。

对任一 $a,b \in G$，因为 a*b=(a*b)$^{-1}$=b^{-1}*a^{-1}=b*a，所以运算 * 满足交换律。

从而＜G,*＞是交换群。

40、设 * 是集合 A 上可结合的二元运算，且 $\forall a,b \in A$，若 a*b=b*a，则 a=b。试证明：

（1）$\forall a \in A$，a*a=a，即 a 是等幂元；

（2）$\forall a,b \in A$，a*b*a=a;

（3）$\forall a,b,c \in A$，a*b*c=a*c 。

证明：

（1）$\forall a \in A$，记 b=a*a。因为 * 是可结合的，故有 b*a=(a*a)*a=a*(a*a)=a*b 。由已知条件可得 a=a*a。

（2）$\forall a,b \in A$，因为由（1），a*(a*b*a)=(a*a)*(b*a)=a*(b*a),

(a*b*a)*a=(a*b)*(a*a)=(a*b)*a=a*(b*a) 。

故 a*(a*b*a)=(a*b*a)*a ，从而 a*b*a=a。

（3）$\forall a,b,c \in A$，（a*b*c）*（a*c）=（(a*b*c）*a）*c=(a*(b*c)*a)*c

且(a*c)*(a*b*c)=a*(c*(a*b*c))=a*(c*(a*b)*c)) 。

由（2）可知 a*(b*c)*a=a 且 c*(a*b)*c=c ，

故（a*b*c）*（a*c）=(a*(b*c)*a)*c=a*c

且(a*c)*(a*b*c)= a*(c*(a*b)*c))= a*c ，

即（a*b*c）*（a*c）=(a*c)*(a*b*c) 。

从而由已知条件知，a*b*c=a*c 。

41、设<G, · >是群，作 $f:G \to G, a \mapsto a^{-1}$。证明：f 是 G的自同构 $\Leftrightarrow$ G是交换群。

证明：

$\Rightarrow$ 设 f 是 G 的自同构。对 $\forall$ a，b $\in$ G，$a\cdot b=(b^{-1}\cdot a^{-1})^{-1}=(f(b)\cdot f(a))^{-1}=(f(b\cdot a))^{-1}=((b\cdot a)^{-1})^{-1}=b\cdot a$。故运算·满足交换律，即 G是可交换群。

$\Leftarrow$ 因为当 $a\neq b$ 时，$a^{-1}\neq b^{-1}$，即 $f(a)\neq f(b)$，故 f 是 G到 G中的一个单一函数。又对 $\forall a\in G$，有 $f(a^{-1})=(a^{-1})^{-1}=a$。故 f 是 G到 G上的满函数。从而 f 是 G到 G上的自同构。

对 $\forall$ a, b $\in$ G，因为 G是可交换群，故 $f(a\cdot b)=(a\cdot b)^{-1}=(b\cdot a)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}=f(a)\cdot f(b)$。故 f 满足同态方程。

从而 f 是 G 的自同构。

42、若群<G,∗>的子群<H,∗>满足 $|G|=2|H|$，则<H,∗>一定是群<G,∗>的正规子群。

证明：

由已知可知，G关于 H 有两个不同的左陪集 H，H_1和两个不同的右陪集 H，H_2。因为 $H\cap H_1=\Phi$ 且 $H\cup H_1=G$，$H\cap H_2=\Phi$ 且 $H\cup H_2=G$，故 $H_1=G-H=H_2$。

对 $\forall a\in G$，若 $a\in H$，则 aH=H,Ha=H；否则因为 $a\in G-H$，故 $aH\neq H,Ha\neq H$。从而 aH=Ha=G-H，故 H是 G的不变子群。

43、设 H和 K都是 G的不变子群。证明：$H\cap K$也是 G 的不变子群。

证明：

因为 H和 K都是 G的不变子群，所以 $H\cap K$是 G 的子群。对 $\forall a\in G$，$h\in H\cap K$，有 $a\cdot h\cdot a^{-1}\in a\cdot H\cdot a^{-1}$，$\cdot h\cdot a^{-1}\in a\cdot K\cdot a^{-1}$。因为 H和 K都是 G的不变子群，所以 $a\cdot h\cdot a^{-1}\in H$且 $a\cdot h\cdot a^{-1}\in K$。从而 $a\cdot h\cdot a^{-1}\in H\cap K$。故 $H\cap K$是 G 的不变子群。

44、设群 G的中心为 C（G）$=\{a\in G|\forall x\in G,a\cdot x=x\cdot a\}$。证明 C（G）是 G的不变子群。

证明：

先证 C（G）是 G的子群。

$\forall$a,b $\in$ C（G），对 $\forall x\in G$，有 $a\cdot x=x\cdot a$，$b\cdot x=x\cdot b$。故 $(a\cdot b)\cdot x=a\cdot(b\cdot x)=a\cdot(x\cdot b)=(a\cdot x)\cdot b=(x\cdot a)\cdot b=x\cdot(a\cdot b)$，$a^{-1}\cdot x=x\cdot a^{-1}$。从而 $a\cdot b$，$a^{-1}\in$ C（G）。故 C（G）是 G 的子群。

再证 C（G）是 G的不变子群。

对 $\forall a\in G$，$\forall h\in C(G)$，记 $b=a\cdot h\cdot a^{-1}$。下证 $b\in C(G)$。因为 $h\in C(G)$，所以 $b=(a\cdot h)\cdot a^{-1}=(h\cdot a)\cdot a^{-1}=h\cdot(a\cdot a^{-1})=h\in C(G)$。

故 C（G）是 G的不变子群。

45、设<G,·>是没有非平凡子群的有限群。试证： G是平凡群或质数阶的循环群。

证明：

若 G是平凡群，则结论显然成立。

否则设 <G,·>的阶为 n。任取 $a\in G$ 且 $a\neq e$，记 H=（a）（由 a 生成的 G的子群）。显然 $H\neq\{e\}$，且 G没有非平凡子群，故 H=G，从而 G一定是循环群，且 a 是 G 的生成元。

若 n 是合数，则存在大于 1 的整数 k,m，使得 n=mk。记 $H=\{e,a^k,(a^k)^2,\cdots,(a^k)^{m-1}\}$，易证 H是 G 的子群，但 $1<|H|=m<n$，故 H是 G 的非平凡子群。这与已知矛盾。从而 n 是质数。

故 G是质数阶的循环群。

综上所述， G是平凡群或质数阶的循环群。

46、设 H和 K都是 G 的有限子群，且 |H| 与|K| 互质。试证： $H\cap K=\{e\}$。

证明：

用反证法证明。

若 $H\cap K\neq\{e\}$。则 $H\cap K$ 是一个元素个数大于 1 的有限集。

先证 $H\cap K$ 也是 G的子群，从而也是 H和 K的子群。

$\forall a,b\in H\cap K$，则 $a,b\in H$ 且 $a,b\in K$。因为 H和 K都 是 G的子群，故 $a\cdot b,a^{-1}\in H$ 且 $a\cdot b,a^{-1}\in K$。从而 $a\cdot b\in H\cap K,a^{-1}\in H\cap K$。故 $H\cap K$ 是 G的子群，从而也是 H和 K的子群。

由拉格朗日定理可知， $|H\cap K|$ 是|H| 和|K| 的因子，这与已知矛盾。

47、素数阶循环群的每个非单位元都是生成元。

证明：

设<G,*>是 p 阶循环群， p 是素数。

对 G中任一非单位元 a。设 a 的阶为 k，则 $k\neq 1$。

由拉格朗日定理，k 是 p 的正整因子。因为 p 是素数，故 k=p。即 a 的阶就是 p，即群 G的阶。故 a 是 G的生成元。

48、若<S, •>是可交换独异点，T 为 S 中所有等幂元的集合，则<T, •>是<S, •>的子独异点。

证明：

∵ e•e=e，∴ e∈T，即 T 是 S 的非空子集。

∀ a,b∈T，∵ <S，•>是可交换独异点，

∴ (a•b)•(a•b)=((a•b)•a)•b

=(a•(b•a))•b=（a•(a•b)）•b

=((a•a)•b)•b=(a•a)•(b•b)

=a•b，即 a•b∈T。

故<T, •>是<S, •>的子独异点。

49、设<G, •>是群，且 a∈G的阶为 n，k∈I，则 $|a^k| = \frac{n}{(k,n)}$，其中 (k,n) 为 k 和 n 的最大公因子。

证明：

记 $p=\frac{n}{(k,n)}$，$q=\frac{k}{(k,n)}$，$|a^k|=m$。由 n 和 p 的定义，显然有 $(a^k)^p=e$。故 m≤p 且 m|p。

又由于 $a^{km}=e$，所以由定理 5.2.5 知，n|km。即 p|qm。但 p 和 q 互质，故 p|m。

由于 p 和 m都是正整数，所以 p=m。即 $|a^k| = \frac{n}{(k,n)}$。

50、设<G, •>是有限群，|G| = n，则 ∀ a∈G，|a| ≤n。

证明：

∀ a∈G，由封闭性及 |G|=n 可知 $a,a^2,\cdots,a^n,a^{n+1}$ 中必有相同的元素，不妨设为 $a^k=a^m$，k<m。由消去律得 $a^{m-k}=e$。从而 |a| ≤m-k≤n。

51、设 G=(a)，若 G为无限群，则 G只有两个生成元 a 和 a^{-1}；

证明：

∀ b∈G=(a)，则 ∃ n∈I，使 $b=a^n$。故 $b=(a^{-n})^{-1}=(a^{-1})^{-n}$，从而 a^{-1} 也是 G的生成元。

若 c 是 G的生成元，则 ∃ k,m∈I，分别满足 $c=a^k$ 和 $a=c^m$。从而 $c=(c^m)^k=c^{mk}$。

若 $km\neq 1$，则由消去律可知 c 的阶是有限的，这与 $|G|$ 无限矛盾。从而 $km=1$，即 $k=1,m=1$ 或 $k=-1,m=-1$。故 $c=a$ 或 $c=a^{-1}$。

从而 G 只有两个生成元 a 和 a^{-1}。

52、设 $G=(a)$，$\{e\}\neq H\leq G$，a^m 是 H 中 a 的最小正幂，则

（1） $H=(a^m)$；

（2） 若 G 为无限群，则 H 也是无限群；

证明：

（1） $\forall b\in H$，$\exists k\in I$，使得 $b=a^k$。令 $k=mq+r$，$0\leq r<m$。

则 $a^r=a^{k-mq}=a^k\bullet a^{-mq}=b\bullet(a^m)^{-q}$。

因为 $b,a^m\in H$，且 $H\leq G$，所以 $a^r\in H$。

由于 $0\leq r<m$，且 a^m 是 H 中 a 的最小正幂，故 $r=0$，即 $k=mq$。

从而 $b=(a^m)^q$。故 a^m 是 H 的生成元。

（2）因为 $\{e\}\neq H$，故 H 的生成元为 a^m（$m\neq 0$）。因为 G 是无限群，所以 a 的阶是无限的，从而 a^m 的阶也是无限的，故 H 也是无限群。

53、设 $G=(a)$，$|G|=n$，则对于 n 的每一正因子 d，有且仅有一个 d 阶子群。因此 n 阶循环群的子群的个数恰为 n 的正因子数。

证明：

$\Rightarrow$ 对 n 的每一正因子 d，令 $k=\frac{n}{d}$，$b=a^k$，$H=\{e,b,b^2,\cdots,b^{d-1}\}$。

因为 $|a|=n$，所以 $b^d=(a^k)^d=a^{kd}=a^n=e$ 且 $|b|=d$。

从而 H 中的元素是两两不同的，易证 $H\leq G$。

故 $|H|=d$。所以是 G 的一个 d 阶子群。

设 H_1 是 G 的任一 d 阶子群。则由定理 5.4.4 知，$H_1=(a^m)$，其中 a^m 是 H_1 中 a 的最小正幂，且 $|H_1|=\frac{n}{m}$。因为 $|H_1|=d$，所以 $m=\frac{n}{d}=k$，即 $H_1=H$。从而 H 是 G 的惟一 d 阶子群。

$\Leftarrow$ 设 H 是 G 的惟一的 d 阶子群。若 $d=1$，则结论显然成立。否则 $H=(a^m)$，其中 a^m 是 H 中 a 的最小正幂。由定理 5.4.4 知，$d=\frac{n}{m}$。故 d 是 n 的一个正因子。

54、设 h 是从群 $\langle G_1,*\rangle$ 到 $\langle G_2,\bullet\rangle$ 的群同态，G_1 和 G_2 的单位元分别为 e_1 和 e_2，

则

（1） $h(e_1)=e_2$；

（2） $\forall a\in G_1$，$h(a^{-1})=h(a)^{-1}$；

（3） 若 $H\leq G_1$，则 $h(H)\leq G_2$；

（4） 若 h 为单一同态，则 $\forall a\in G_1$，$|h(a)|=|a|$ 。

证明：

(1) 因为 $h(e_1)\bullet h(e_1)=h(e_1\bullet e_1)=h(e_1)=e_2\bullet h(e_1)$，所以 $h(e_1)=e_2$。

(2) $\forall a\in G_1$，$h(a)\bullet h(a^{-1})=h(a\bullet a^{-1})=h(e_1)=e_2$，

$h(a^{-1})\bullet h(a)=h(a^{-1}\bullet a)=h(e_1)=e_2$，故 $h(a^{-1})=h(a)^{-1}$。

(3) $\forall c,d\in h(H)$，$\exists a,b\in H$，使得 $c=h(a),d=h(b)$ 。故 $c\bullet d=h(a)\bullet h(b)$ $=h(a*b)$。因为 $H\leq G_1$，所以 $a*b\in H$，故 $c\bullet d\in h(H)$。又 $c^{-1}=(h(a))^{-1}=h(a^{-1})$ 且 $a^{-1}\in H$，故 $c^{-1}\in h(H)$。由定理 5.3.2 知 $h(H)\leq G_2$。

(4) 若 $|a|=n$，则 $a^n=e_1$。故 $(h(a))^n=h(a^n)=h(e_1)=e_2$。从而 h(a) 的阶也有限，且 $|h(a)|\leq n$。

设 $|h(a)|=m$，则 $h(a^m)=(h(a))^m=h(e_1)=e_2$。因为 h 是单一同态，所以 $a^m=e_1$。即 $|a|\leq m$。

故 $|h(a)|=|a|$ 。

若 a 的阶是无限的，则类似于上述证明过程可以得出， h(a) 的阶也是无限的。

故结论成立。

55、有限群 G 的每个元素的阶均能整除 G 的阶。

证明：

设 $|G|=n$，$\forall a\in G$，则 $|a|=m$。令 $H=\{e,a,a^2,\cdots,a^{m-1}\}$。

则 H 是 G 的子群且 $|H|=m$。由 Lagrange 定理知 $|H|$ 能整除 $|G|$，故 a 的阶能整除 G 的阶。

56、证明：在同构意义下，只有两个四阶群，且都是循环群。

证明：

在 4 阶群 G 中，由 Lagrange 定理知， G 中的元素的阶只能是 1，2 或 4。阶为

1 的元素恰有一个，就是单位元 e.

若 G有一个 4 阶元素，不妨设为 a，则 G=（a），即 G是循环群，从而是可交换群。

若 G没有 4 阶元素，则除单位元 e 外，G的其余 3 个阶均为 2。不妨记为 a,b,c 。因为 a,b,c 的阶均为 2，故 $a^{-1}=a,b^{-1}=b,c^{-1}=c$。从而 $a\bullet b\neq a$, $a\bullet b\neq b$, $a\bullet b\neq e$, 故 $a\bullet b=c$。同理可得 $a\bullet c=c\bullet a=b$, $c\bullet b=b\bullet c=a$, $b\bullet a=c$。

57、在一个群 <G,*>中，若 G中的元素 a 的阶是 k，即|a|=k，则 a^{-1} 的阶也是 k。

证明：

因为| a |=k，所以 $a^k=e$。即（a^{-1}）$^k=(a^k)^{-1}=e$。

从而 a^{-1} 的阶是有限的，且 $|a^{-1}|\leq k$。

同理可证，a 的阶小于等于 $|a^{-1}|$。

故 a^{-1} 的阶也是 k。

58、在一个群 <G,*>中，若 A和 B 都是 G的子群。若 $A\cup B=G$，则 A=G或 B=G。

证明：

用反证法证明。

若 $A\neq G$ 且 $B\neq G$，则有 $a\in A, a\notin B$ 且 $b\in B, b\notin A$。因为 A，B都是 G的子群，故 $a,b\in G$，从而 $a*b\in G$。

因为 $a\in A$，所以 $a^{-1}\in A$。若 $a*b\in A$，则 $b=a^{-1}*(a*b)\in A$，这与 $a\notin B$ 矛盾。从而 $a*b\notin A$。

同理可证 $a*b\notin B$。

综合可得 $a*b\notin A\cup B=G$，这与已知矛盾。从而假设错误，得证 A=G或 B=G。

59、设 e 是奇数阶交换群 <G,*>的单位元，则 G的所有元素之积为 e。

证明：

设 $G=<\{e,a_1,a_2,\cdots,a_{2n}\},*>$，n 为正整数。

因为 G的阶数为奇数 2n+1，所以由拉格朗日定理知 G中不存在 2 阶元素，即除了单位元 e 以外，G的所有元素的阶都大于 2。故对 G中的任一非单位元 a，它的逆元 a^{-1} 不是它本身，且 G中不同的元素有不同的逆元。

由此可见，G中的 2n个非单位元构成互为逆元的 n 对元素。因为 G 是交换群，

故 G的所有元素之积可变成单位元和 n对互为逆元的元素之积的积，从而结果为 e。

60、设 S=Q×Q，Q为有理数集合，* 为 S 上的二元运算：对任意 (a,b)，(c,d) ∈S，有

(a,b)*(c,d)=(ac,ad+b)，

求出 S 关于二元运算 * 的单位元，以及当 $a\neq 0$ 时，(a,b) 关于 * 的逆元。

解：

设 S 关于 * 的单位元为 (a,b)。根据 * 和单位元的定义，对 ∀(x,y) ∈S，有

(a,b)*(x,y)=(ax,ay+b)=(x,y)，(x,y)*(a,b)=(ax,xb+y)=(x,y)。

即 ax=x,ay+b=y,xb+y=y 对 ∀x,y ∈Q都成立。解得 a=1,b=0。

所以 S 关于 * 的单位元为 (1,0)。

当 $a\neq 0$ 时，设 (a,b) 关于 * 的逆元为 (c,d)。根据逆元的定义，有

(a,b)*(c,d)= (ac,ad+b)=(1,0)

(c,d)*(a,b)= (ac,cb+d)=(1,0)

即 ac=1,ad+b=0,cb+d=0。解得 $c=\frac{1}{a}$，$d=-\frac{b}{a}$。

所以 (a,b) 关于 * 的逆元为 $(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})$。

61、设<G,*>是一个群，H、K是其子群。定义 G上的关系 R：对任意 a,b ∈G，aRb ⇔ 存在 h ∈H,k∈K，使得 b=h*a*k，则 R是 G上的等价关系。

证明：

∀a∈G，因为 H,K是 G的子群，所以 e∈H且 e∈K。令 h=k=e，则 a=e*a*a=h*e*k，从而 aRa，即 R是自反的。

∀a,b ∈G，若 aRb，则存在 h ∈H，k∈K，使得 b=h*a*k。因为 H、K是 G的子群，所以 h^{-1}∈H且 k^{-1}∈K。故 $a=h^{-1}*a*k^{-1}$，从而 bRa，即 R是对称的。

∀a,b,c ∈G，若 aRb,bRc，则存在 h,g ∈H，k,l ∈K，使得 b=h*a*k，c=g*b*l。所以 c=g*b*l=g*(h*a*k)*l=(g*h)*a*(k*l)。因为 H、K是 G的子群，所以 g*h∈H且 k*l ∈K，从而 aRc，即 R是传递的。

综上所述，R是 G上的等价关系。

62、设 H是 G的子群，则下列条件等价：

（1） H 是 G的不变子群；

（2） $\forall a \in G$，$a \bullet H \bullet a^{-1} \subseteq H$；

（3） $\forall a \in G$，$a^{-1} \bullet H \bullet a \subseteq H$；

（4） $\forall a \in G$，$\forall h \in G$，$a \bullet h \bullet a^{-1} \subseteq H$。

证明：

(1) $\Rightarrow$ (2) $\forall a \in G$，则对 $h \in H$，令 $h_1 = a \bullet h \bullet a^{-1}$，因为 $a \bullet h \in a \bullet H$ 且 $H \bullet a = a \bullet H$，所以 $\exists h_2 \in H$，使得 $a \bullet h = h_2 \bullet a$。故 $h_1 = (h_2 \bullet a) \bullet a^{-1} = h_2 \in H$。故 $a \bullet H \bullet a^{-1} \subseteq H$。

(2) $\Rightarrow$ (3) $\forall a \in G$，对 $h \in H$，令 $h_1 = a^{-1} \bullet h \bullet a$，则 $(h_1)^{-1} = a \bullet h^{-1} \bullet a^{-1}$。因为 $h^{-1} \in H$，所以 $(h_1)^{-1} = a \bullet h^{-1} \bullet a^{-1} \in a \bullet H \bullet a^{-1}$。由（2）可知 $(h_1)^{-1} \in H$，从而 $h_1 \in H$，故 $a^{-1} \bullet H \bullet a \subseteq H$。

(3) $\Rightarrow$ (4) 类似于（2）$\Rightarrow$ (3) 的证明。

(4) $\Rightarrow$ (1) $\forall a \in G$，对 $\forall b \in a \bullet H$，则 $\exists h \in H$，使得 $b = a \bullet h$。故 $b = (a \bullet h) \bullet (a^{-1} \bullet a) = (a \bullet h \bullet a^{-1}) \bullet a$。由于 $a \bullet h \bullet a^{-1} \in H$，所以 $b \in H \bullet a$。即 $a \bullet H \subseteq H \bullet a$。

反之对 $\forall b \in H \bullet a$，则 $\exists h \in H$，使得 $b = h \bullet a$。故 $b = (a \bullet a^{-1}) \bullet (h \bullet a) = a \bullet (a^{-1} \bullet h \bullet a) = a \bullet (a^{-1} \bullet h \bullet (a^{-1})^{-1})$。由于 $a^{-1} \bullet h \bullet (a^{-1})^{-1} \in H$，所以 $b \in a \bullet H$。即 $H \bullet a \subseteq a \bullet H$。

即 $H \bullet a = a \bullet H$，从而 H是 G的不变子群。

63、在半群 <G,*>中，若对 $\forall a, b \in G$，方程 $a*x=b$ 和 $y*a=b$ 都有惟一解，则 <G,*>是一个群。

证明：

任意取定 $a \in G$，记方程 $a*x=a$ 的惟一解为 e_R。即 $a*e_R=a$。

下证 e_R 为关于运算 * 的右单位元。

对 $\forall b \in G$，记方程 $y*a=b$ 的惟一解为 y。

$\because$ <G,*>是半群，$\therefore$ 运算 * 满足结合律。

$\therefore b*e_R=(y*a)*e_R=y*(a*e_R)=y*a=b$。

类似地，记方程 $y*a=a$ 的唯一解为 e_L。即 $e_L*a=a$。

下证 e_L 为关于运算 * 的左单位元。

对 $\forall b \in G$，记方程 $a*x=b$ 的惟一解为 x。

$\because$ <G,*>是半群，$\therefore$ 运算 * 满足结合律。

$\therefore e_L*b=e_L*(a*x)=(e_L*a)*x=a*x=b$ 。

从而在半群 <G,*>中，关于运算 * 存在单位元，记为 e。

现证 G中每个元素关于运算 *存在逆元。

对 $\forall b\in G$，记 c 为方程 b*x=e 的惟一解。下证 c 为 b 关于运算的逆元。记 d=c*b。则 b*d=(b*c)*b=e*b=b 。

$\because$ b*e=b, 且方程 b*x=b 有惟一解，$\therefore$ d=e。

$\therefore$ b*c=c*b=e 。从而 c 为 b 关于运算的逆元。

综上所述，<G,*>是一个群。

64、设<G,*>是群，H 和 K都是 G的子群，令 HK={h*s | s∈K, h∈H}，KH={s*h |s ∈K,h ∈H},<HK,*> ，<KH,*>是 G的子群的充分必要条件是 HK=KH。

证明：

$\Rightarrow$ HK是 G的子群。$\forall c\in HK$，则 $c^{-1}\in HK$，故存在 $a\in H,b\in K$，使得 $c^{-1}=a\cdot b$。因为 $c=(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$。因为 H和 K都是 G 的子群，所以 $a^{-1}\in H,b^{-1}\in K$，即 $c\in KH$。从而 $HK\subseteq KH$。$\forall c\in KH$，则存在 $a\in H,b\in K$，使得 $c=b\cdot a$。因为 $c=(a^{-1}\cdot b^{-1})^{-1}$。因为 H和 K都是 G 的子群，所以 $a^{-1}\in H,b^{-1}\in K$，即 $a^{-1}\cdot b^{-1}\in HK$。因为 HK是 G的子群，所以 $c=(a^{-1}\cdot b^{-1})^{-1}\in HK$。从而 $KH\subseteq HK$。

故 HK=KH。

$\Leftarrow$ HK=KH。对 $\forall c,d\in HK$，有 $a_1,a_2\in H,b_1,b_2\in K$，使得 $c=a_1\cdot b_1,d=a_2\cdot b_2$。则 $c\cdot d=(a_1\cdot b_1)\cdot(a_2\cdot b_2)=((a_1\cdot b_1)\cdot a_2)\cdot b_2=(a_1\cdot(b_1\cdot a_2))\cdot b_2$。因为 $b_1\cdot a_2\in KH=KH$，所以存在 $a_3\in H,b_3\in K$，使得 $b_1\cdot a_2=a_3\cdot b_3$。从而 $c\cdot d=(a_1\cdot(b_1\cdot a_2))\cdot b_2=(a_1\cdot(a_3\cdot b_3))\cdot b_2=(a_1\cdot a_3)\cdot(b_3\cdot b_2)$。因为 H和 K都是 G的子群，故 $a_1\cdot a_3\in H$, $b_3\cdot b_2\in K$。从而 $c\cdot d\in HK$。

又 $c^{-1}=(a_1\cdot b_1)^{-1}=b^{-1}_1\cdot a^{-1}_1$。因为 H和 K都是 G的子群，故 $a^{-1}_1\in H$, $b^{-1}_1\in K$。从而 $c^{-1}\in KH$。因为 HK=KH，所以 $c^{-1}\in HK$。

综上所述，HK是 G的子群。

65、设 H和 K都 是 G的不变子群。证明：HK也是 G 的不变子群。

证明：

先证 HK是 G 的子群。

对 $\forall a\in HK$，有 $h\in H$，$k\in K$，使得 $a=h\cdot k$。因为 $a=h\cdot k=(h\cdot k\cdot h^{-1})\cdot h$，且 K

是 G 的不变子群，所以 $h\cdot k\cdot h^{-1}\in K$。故 $a\in KH$。从而 $HK\subseteq KH$。

同理可证，$KH\subseteq HK$。

故 HK=KH。从而 HK 是 G 的子群。

下证 HK 是 G 的不变子群。

对 $\forall a\in G$，$b\in HK$，有 $h\in H$，$k\in K$，使得 $b=h\cdot k$。故 $a\cdot b\cdot a^{-1}=a\cdot(h\cdot k)\cdot a^{-1}=(a\cdot h\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot k\cdot a^{-1})$。因为 H 和 K 都是 G 的不变子群，所以 $a\cdot h\cdot a^{-1}\in H$ 且 $a\cdot k\cdot a^{-1}\in K$。从而 $a\cdot b\cdot a^{-1}\in HK$。故 HK 是 G 的不变子群。

66、设 $<G,*>$ 为群，$a,b,c\in G$。若 $a*b=c*b*a, a*c=c*a, b*c=c*b$，且 a,b 的阶分别为 m,n，则 c 的阶整除 m 与 n 的最大公因子 (m,n)。

证明：

设 c 的阶为 k。在 $a*b=c*b*a$ 两边同时右乘 b^{n-1}，再由 $a*b=c*b*a$ 得

$$a*b^{n}=(c*b*a)*b^{n-1}=(c*b)*(a*b)*b^{n-2}=(c*b)*(c*b*a)*b^{n-2}$$
$$=(c*b)^{2}*a*b^{n-2}=(c*b)^{2}*(a*b)*b^{n-3}=(c*b)^{2}*(c*b*a)*b^{n-3}$$
$$=(c*b)^{3}*a*b^{n-3}=\cdots=(c*b)^{n}*a,$$

再由 $b*c=c*b$ 及 b 的阶为 n 得

$$a=a*b^{n}=(c*b)^{n}*a=(c^{n}*b^{n})*a=c^{n}*a,$$

所以 $c^{n}=e$。故由元素阶的定义有 $k|n$。

由 $a*b=c*b*a, a*c=c*a, b*c=c*b$ 得 $a*b=b*a*c$，两边同时左乘 a^{m-1}，再由 $a*b=b*a*c$ 得

$$a^{m}*b=a^{m-1}*(b*a*c)=a^{m-2}*(a*b)*(a*c)=a^{m-2}*(b*a*c)*(a*c)$$
$$=a^{m-2}*b*(a*c)^{2}=a^{m-3}*(a*b)*(a*c)^{2}=a^{m-3}*(b*a*c)*(a*c)^{2}$$
$$=a^{m-3}*b*(a*c)^{3}=\cdots=b*(a*c)^{m},$$

再由 $a*c=c*a$ 及 a 的阶为 m 得

$$b=a^{m}*b=b*(a*c)^{m}=b*a^{m}*c^{m}=b*c^{m},$$

所以 $c^{m}=e$。故由元素阶的定义有 $k|m$。

由此可见，k 是 m 和 n 的公因子，从而能整除 m 和 n 的最大公因子 (m,n)。

（格与布尔代数）

67、当 n 分别是 24，36，110 时，$<S_n,|>$ 是布尔代数吗？若是，则求出其原

子集。

解：

因为 $|S_{24}|=8$，$|S_{36}|=9$，$|S_{110}|=8$，故 $<S_{36},|>$ 不是布尔代数。在 $<S_{24},|>$ 中 12 没有补元，故它也不是布尔代数。 $<S_{110},|>$ 是布尔代数，其原子集为 $\{2,5,11\}$ 。

68、设 L 是有界格，且 $|L|>1$ 。证明：$0\neq 1$。

证明：

用反证法证明。

设 $0=1$。则任取 $a\in L$，则由于 L 是有界格，故 $a\leq 1$ 且 $0\leq a$。即 $0\leq a\leq 1$。因为 $0=1$ 且 $\leq$ 是 L 上的偏序关系，所以 $a=0$。这与已知 $|L|>1$ 矛盾。

69、设 $(L,\preceq)$ 是格，若 $a,b,c\in L$，$a\preceq b\preceq c$，则

$$a\oplus b=b\odot c，(a\odot b)\oplus(b\odot c)=(a\oplus b)\odot(a\oplus c)$$

证明：

因为 $a\leq b\leq c$，所以 $a*b=a$，$a\oplus b=b=b$，且 $b=b*c$，以 $c=b\oplus c$。从而 $a\oplus b=b*c$。

$(a*b)\oplus(b*c)=a\oplus(b*c)=a\oplus(a\oplus b)=(a\oplus a)\oplus b=a\oplus b=b$,

$(a\oplus b)*(a\oplus c)=(b*c)*(a\oplus c)=b*(c*(a\oplus c))=b*c=b$。

70、在布尔代数中，证明恒等式 $a\oplus(a'*b)=a\oplus b$

证明：

$a\oplus(a'*b)=(a\oplus a')*(a\oplus b)=1*(a\oplus b)=a\oplus b$

71、设 $<L,\leq>$ 是格，$a_1,a_2,\cdots,a_n\in L$。试证：$a_1*a_2*\cdots*a_n=a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n$ 当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。

证明：

$\Leftarrow$ 显然是成立的。

$\Rightarrow$ 对任一 $k=1,2,..,n$，$a_1*a_2*\cdots*a_n\leq a_k$，$a_k\leq a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n$。

因为 $a_1*a_2*\cdots*a_n=a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n$，且 $\leq$ 是 L 上的偏序关系，故 $a_k=a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n$。从而 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。

72、在布尔代数中，证明恒等式 $(a*c)\oplus(a'*b)\oplus(b*c)=(a*c)\oplus(a'*b)$

证明：

$((a*c)\oplus(a'*b))*(b*c)=((a*c)*(b*c))\oplus((a'*b)*(b*c))$

$=(a * b * c) \oplus (a' * b * c)=(a \oplus a') * b * c=1 * b * c=b * c,$

故 $b * c \le (a * c) \oplus (a' * b)$，从而

$(a * c) \oplus (a' * b) \oplus (b * c)=(a * c) \oplus (a' * b)$。

73、在布尔代数中，证明恒等式 $(a * b) \oplus (a' * c) \oplus (b' * c)=(a * b) \oplus c$

证明：

$(a * b) \oplus (a' * c) \oplus (b' * c)=(a * b) \oplus ((a' \oplus b') * c)$

$=(a * b) \oplus ((a * b)' * c)=(a * b) \oplus c$。

74、设 $<L, \le>$ 是格，$a,b,c,d \in L$。试证：若 $a \le b$ 且 $c \le d$，则

$a * c \le b * d$

证明：

因为 $a \le b$，$c \le d$，所以 $a=a * b, c=c * d$。从而

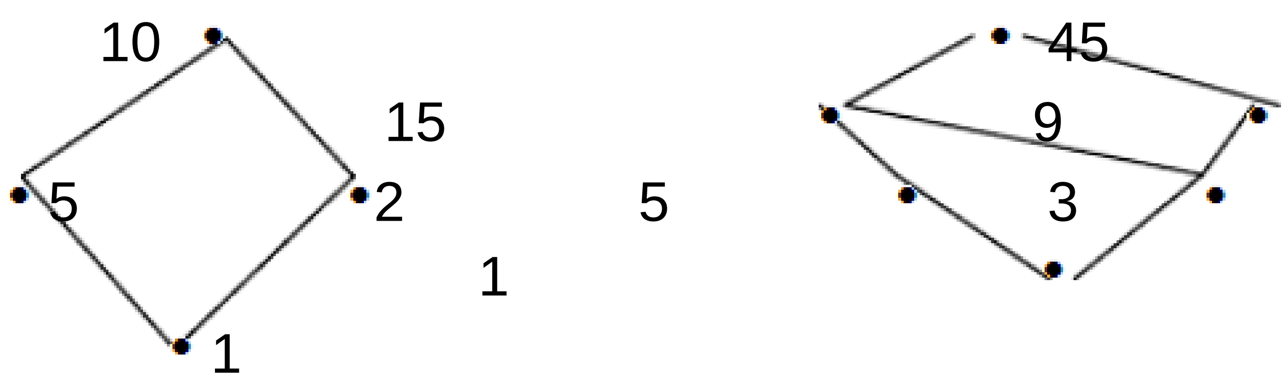
$(a * c) * (b * d)=((a * c) * b) * d=(b * (a * c)) * d=((b * a) * c) * d$

$=a * (c * d)=a * c,$

所以 $a * c \le b * d$。

75、当 n 分别是 10,45 时，画出 $<S_n, |>$ 的哈斯图。

解：



76、在布尔代数中，证明恒等式

$(a \oplus b') * (b \oplus c') * (c \oplus a')=(a' \oplus b) * (b' \oplus c) * (c' \oplus a)$

证明：

$(a \oplus b') * (b \oplus c') * (c \oplus a')$

$=(a * b * c) \oplus (a * b * a') \oplus (a * c' * a') \oplus (a * c' * c) \oplus (b' * b * c)$

$\oplus (b' * c' * c) \oplus (b' * c' * a') \oplus (b' * b * a')=(a * b * c) \oplus (b' * c' * a'),$

$(a' \oplus b) * (b' \oplus c) * (c' \oplus a)$

$=(a' * b' * c') \oplus (a' * b' * a) \oplus (a' * c * c') \oplus (a' * c * a) \oplus (b * b' * c')$

$\oplus(b*b'*a)\oplus(b*c*c')\oplus(b*c*a)=(a*b*c)\oplus(a'*b'*c')$,

故 $(a\oplus b')*(b\oplus c')*(c\oplus a')=(a'\oplus b)*(b'\oplus c)*(c'\oplus a)$。

77、设 $<L,\leq>$ 是格，$a,b\in L$，且 $a\leq b$，记

$$I[a,b]=\{x\in L|a\leq x\leq b\}$$

则 $<I[a,b],\leq>$ 是 $<L,\leq>$ 的子格。

证明：

$\forall x,y\in I[a,b]$，$a\leq x\leq b$ 且 $a\leq y\leq b$。由定理 6.1.1 有 $a\leq x*y\leq b$ 且 $a\leq x\oplus y\leq b$。从而 $x*y\in I[a,b]$ 且 $x\oplus y\in I[a,b]$。故 $I[a,b]$ 关于 $*$ 和 $\oplus$ 是封闭的，从而 $<I[a,b],\leq>$ 是 $<L,\leq>$ 的子格。

78、设 $A=\{a,b,c\}$，求 $<P(A),\subseteq>$ 的子格（$P(A)$ 表示 A 的幂集）。

解：

$P(A)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}$。在 $P(A)$ 的所有非空子集中，只要它关于 $\cap$ 和 $\cup$ 是封闭的，则它就是 $<P(A),\subseteq>$ 的子格。

显然 $<P(A),\subseteq>$ 和 $<\{\Phi\},\subseteq>$ 是 $<P(A),\subseteq>$ 的子格。

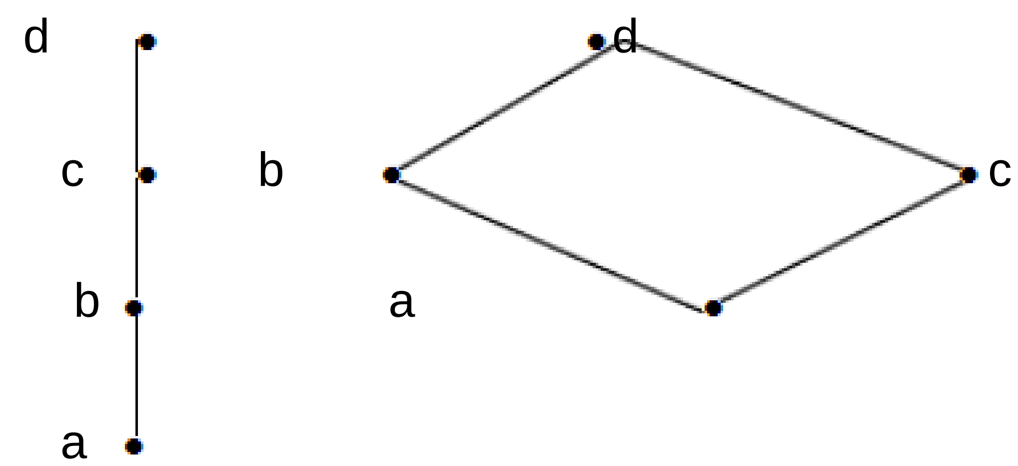
$<\{\Phi,\{a\}\},\subseteq>$、$<\{\Phi,\{b\}\},\subseteq>$、$<\{\Phi,\{c\}\},\subseteq>$、$<\{\Phi,\{a,b\}\},\subseteq>$、$<\{\Phi,\{a,c\}\},\subseteq>$、$<\{\Phi,\{b,c\}\},\subseteq>$、$<\{\Phi,A\},\subseteq>$、$<\{\Phi,\{c\},\{a,c\},\{b,c\},A\},\subseteq>$ 等都是 $<P(A),\subseteq>$ 的子格。

79、证明：在同构意义下，4 阶格只有 2 个。

证明：

若 $\leq$ 是 L 上的全序关系，则它一定是良序关系（因为任一有限的全序集一定是良序集）。若设 $L=\{a,b,c,d\}$，则 L 的四个元素满足：$a\leq b\leq c\leq d$。

若 $\leq$ 不是 L 上的全序关系，则 L 中一定存在两个元素（不妨设为 b,c），$b\leq c$ 和 $c\leq b$ 都不成立。因此 $b*c$ 和 $b\oplus c$ 既不可能相等，也不可能是 b 和 c。不妨记 $a=b*c,d=b\oplus c$。故 $<L,\leq>$ 的四个元素 a,b,c,d 满足 $a\leq a,b\leq b,c\leq c,d\leq d,a\leq b,a\leq c,a\leq d,b\leq d,c\leq d$。



80、设<A, $\leq$>是有界格， $\leq$是 A 上的全序关系。若 $|A| > 2$，则$\forall a \in A-\{0,1\}$ ，a 无补元。

证明：

用反证法证明。

若$\exists a \in A-\{0,1\}$ ，a 有补元 a'。即 $a \oplus a'=1$，$a * a'=0$。因为$\leq$是 A 上的全序关系，所以 $a \leq a'$ 或 $a' \leq a$。若 $a \leq a'$，则 $a= a * a'=0$。若 $a' \leq a$，则 $a= a \oplus a'=1$。

无论如何，这与 $a \neq 0, a \neq 1$矛盾。

81、格<L, $*$ ，$\oplus$ >是模格$\Leftrightarrow$ $\forall a,b,c \in L$，有

$$a \oplus (b * (a \oplus c))=(a \oplus b) * (a \oplus c)$$

证明：

$\Rightarrow$ $\forall a,b,c \in L$，记 $d= a \oplus c$。所以 $a \leq d$, 从而

$a \oplus (b * (a \oplus c))= a \oplus (b * d)= (a \oplus b) * d=(a \oplus b) * (a \oplus c)$。

$\Leftarrow$ $\forall a,b,c \in L$，若 $a \leq c$，则 $c= a \oplus c$。所以

$(a \oplus b) * c= (a \oplus b) * (a \oplus c) = a \oplus (b * (a \oplus c))= a \oplus (b * c)$。

82、设 <L, $*$ ，$\oplus$ >是分配格， $a,b,c \in L$。若 $(a * b) = (a * c)$ 且$(a \oplus b) = (a \oplus c)$，则 $b=c$。

证明：

由吸收律、分配律和交换律有

$b=b \oplus (a * b) = b \oplus (a * c)= (b \oplus a) * (b \oplus c)$

$=(a \oplus c) * (b \oplus c)=c \oplus (a * b)= c \oplus (a * c) = c$。

83、证明：在 有补分配格中，每个元素的补元一定惟一。

证明：

设<L, ≤>是一个有补分配格。 $\forall a \in L$, 设 b 和 c 都是 a 的补元，即

$a \oplus b=1, a \oplus c=1, a * b=0, a * c=0$。

由吸收律、分配律和交换律有

$b= b \oplus 0= b \oplus (a * c)=(b \oplus a) * (b \oplus c)=1 * (b \oplus c)=b \oplus c$,

$c= c \oplus 0=c \oplus (a * b) = (c \oplus a) * (c \oplus b)=1 * (c \oplus b)=c \oplus b$。

故 b=c。从而每个元素的补元是惟一的。

84、设<L, *, ⊕>是格，则 L 是分配格当且仅当 $\forall a,b,c \in L$，有

$(a \oplus b) * c \le a \oplus (b * c)$

证明：

$\Rightarrow$ 设 L 是分配格。对 $\forall a,b,c \in L$，有

$(a \oplus b) * c=(a * c) \oplus (b * c)$

因为 $a * c \le a$，故 $(a * c) \oplus (b * c) \le a \oplus (b * c)$。从而

$(a \oplus b) * c \le a \oplus (b * c)$

$\Leftarrow$ 对 $\forall a,b,c \in L$，因为 $a * c \le a, a * c \le c, a \le a \oplus b, b * c \le c, b * c \le b, b \le a \oplus b$, 所以 $a * c \le a \oplus b$，$a * c \le c$，$b * c \le c, b * c \le a \oplus b$,

从而 $(a * c) \oplus (b * c) \le (a \oplus b) * c$。

又由已知有

$(a \oplus b) * c=((b \oplus a) * c) * c \le (b \oplus (a * c)) * c=((a * c) \oplus b) * c \le (a * c) \oplus (b * c)$。

故 $(a \oplus b) * c=((a * c) \oplus b) * c \le (a * c) \oplus (b * c)$。

从而 L 是分配格。

85、设<S, ⊕, ⊙, ′, 0, 1> 是一布尔代数，则 <S, +>是一个交换群，其中＋定义为

$a+b=(a \odot b') \oplus (a' \odot b)$。

证明：

$\forall a,b \in S$，∵ <S, ⊕, ⊙, ′, 0, 1> 是一布尔代数，

∴ $a+b=(a \odot b') \oplus (a' \odot b)= (b \odot a') \oplus (b' \odot a)=b+a$。

∴ 运算 +满足交换律。

$\forall a,b,c \in S$, $(a+b)+c=((a \odot b') \oplus (a' \odot b))+c$

$=(((a\odot b')\oplus(a'\odot b))\odot c')\oplus(((a\odot b')\oplus(a'\odot b))'\odot c)$

$=(a\odot b'\odot c')\oplus(a'\odot b\odot c')\oplus((a'\oplus b)\odot(a\oplus b')\odot c)$

$=(a\odot b'\odot c')\oplus(a'\odot b\odot c')\oplus(((a'\odot b')\oplus(b\odot a))\odot c)$

$=(a\odot b'\odot c')\oplus(a'\odot b\odot c')\oplus(a'\odot b'\odot c)\oplus(a\odot b\odot c)$

$a+(b+c)=(c+b)+a$

$=(c\odot b'\odot a')\oplus(c'\odot b\odot a')\oplus(c'\odot b'\odot a)\oplus(c\odot b\odot a)$

$=(a\odot b'\odot c')\oplus(a'\odot b\odot c')\oplus(a'\odot b'\odot c)\oplus(a\odot b\odot c)$

$=(a+b)+c$

∴ 运算 +满足结合律。

$\forall a\in S$, ∵ $<S,\oplus,\odot,',0,1>$ 是一布尔代数,

∴ $a+0=(a\odot 0')\oplus(a'\odot 0)=(a\odot 1)\oplus 0=a$。

∴ 0 关于运算 +的单位元。

$\forall a\in S$, ∵ $<S,\oplus,\odot,',0,1>$ 是一布尔代数,

∴ $a+a=(a\odot a')\oplus(a'\odot a)=0\oplus 0=0$。

∴ a 是 a 关于运算 +的逆元。

综上所述, <S,＋>是一个交换群。

86、设 $<S,\oplus,\odot,',0,1>$ 是一布尔代数,则 $R=\{<a,b>\mid a\oplus b=b\}$ 是 S 上的偏序关系。

证明:

$\forall a\in S$, ∵ $\oplus$ 满足等幂律, ∴ $a\oplus a=a$, 故 aRa。即 R是自反的。

$\forall a,b\in S$, 若 aRb且 bRa,∵ $\oplus$ 满足交换律, ∴ $b=a\oplus b=b\oplus a=a$。即 R是反对称的。

$\forall a,b,c\in S$, 若 aRb且 bRc,∵ $\oplus$ 满足结合律, ∴ $c=c\oplus b=c\oplus(b\oplus a)=(c\oplus b)\oplus a=c\oplus a$, 故 aRc。即 R是反对称的。

综上所述, $R=\{<a,b>\mid a\oplus b=b\}$ 是 S上的偏序关系。

87、设 $<S,\oplus,\odot,',0,1>$ 是一布尔代数,则关系 $\leq=\{<a,b>\mid a\odot b=a\}$ 是 S 上的偏序关系。

证明:

$\forall a \in S$，因为⊙满足等幂律，所以 $a \odot a=a$，故 $a \le a$。即 $\le$ 是自反的。

$\forall a,b \in S$，若 $a \le b$ 且 $b \le a$，因为⊙满足交换律，所以 $a=a\odot b=b\odot a=b$。即 $\le$ 是反对称的。

$\forall a,b,c \in S$，若 $a \le b$ 且 $b \le c$，因为⊙满足结合律，因为 $a=a\odot b=a\odot(b\odot c)=(a\odot b)\odot c=a\odot c$，故 $a \le c$。即 $\le$ 是反对称的。

综上所述，$\le=\{<a,b> \mid a\odot b=a\}$ 是 S 上的偏序关系。

（图论部分）

88、证明在有 n 个结点的树中，其结点度数之和是 2n-2。

证明：

设 T=<V,E>是任一棵树，则 |V|=n，且|E|=n-1。

由欧拉握手定理，树中所有结点的度数之和等于 2|E|.

从而结点度数之和是 2n-2。

88、任一图中度数为奇数的结点是偶数个。

证明：

设 G=〈V,E〉是任一图。设 |V|=n。

由欧拉握手定理可得 $\sum_{v\in V} deg(v)=2|E|$ 可得，图中所有结点度数之和是偶数。

显然所有偶数度结点的度数之和仍为偶数，从而所有奇数度结点的度数之和也是偶数。因此，图中度数为奇数的结点一定为偶数个。

89、连通无向图 G的任何边一定是 G的某棵生成树的弦。这个断言对吗？若是对的请证明之，否则请举例说明。

证明：

不对。

反例如下：若 G 本身是一棵树时，则 G的每一条边都不可能是 G的任一棵生成树（实际上只有惟一一棵）的弦。

90、设 T=<V,E>是一棵树，若 |V|>1，则 T 中至少存在两片树叶。

证明：

（用反证法证明）设 |V|=n。

因为 T=〈V,E〉是一棵树，所以 |E|=n-1。

由欧拉握手定理可得 $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|=2n-2$ 。

假设 T 中最多只有 1 片树叶，则 $\sum_{v\in V}\deg(v) \geq 2(n-1)+1>2n-2$ 。

得出矛盾。

91、画一个使它分别满足：

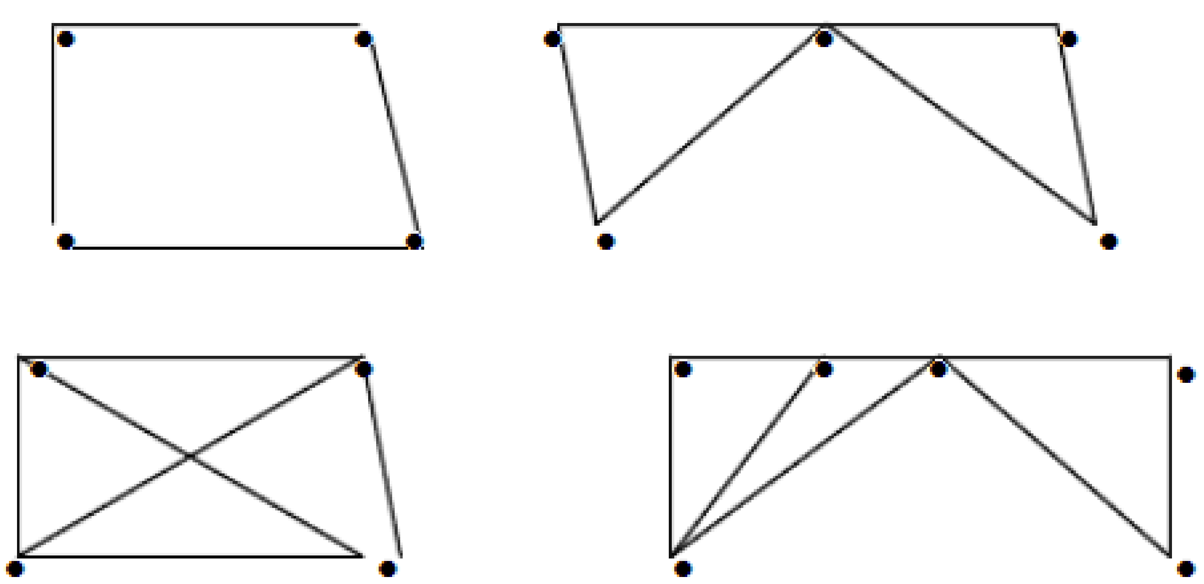
(1) 有欧拉回路和哈密尔顿回路；

(2) 有欧拉回路，但无条哈密尔顿回路；

(3) 无欧拉回路，但有哈密尔顿回路；

(4) 既无欧拉回路，又无哈密尔顿回路。

解



92、设无向图 G=<V,E>，|E|=12 。已知有 6 个 3 度顶点，其他顶点的度数均小于 3。问 G中至少有多少个顶点？

解：

设 G中度数小于 3 的顶点有 k 个，由欧拉握手定理

$$24=\sum_{v\in V}\deg(v)$$

知，度数小于 3 的顶点度数之和为 6。故当其余的顶点度数都为 2 时，G的顶点最少。即 G中至少有 9 个顶点。

93、设图 G=<V,E>，|V|=n，|E|=m。k 度顶点有 n_k 个，且每个顶点或是 k 度顶点或是 k+1 度顶点。证明：$n_k=(k+1)-2m$ 。

证明：

由已知可知，G中 k+1 度顶点为 $n-n_k$ 个。再由欧拉握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V}\deg(v)=kn_k+(k+1)(n-n_k)=(k+1)n+-n_k$$

故 $n_k=(k+1)-2m$。

94、设 G=<V,E>是一个连通且 |V|=|E|+1 的图，则 G 中有一个度为 1 的结点。

证明：

(用反证法证明）

设|V|=n，则 |E|=n-1 。

由欧拉握手定理可得 $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|=2n-2$ 。

因为 G 连通，所以 $\forall v\in V$，$\deg(v)\ge 1$。假设 G 中没有 1 片树叶，则

$$\sum_{v\in V}\deg(v)\ge 2n>2n-2。$$

得出矛盾。

95、若 n 阶连通图中恰有 n-1 条边，则图中至少有一个结点度数为 1。

证明：

（用反证法证明）设 G=<V,E>有 n-1 条边且 |V|=n 。

由欧拉握手定理可得 $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|=2n-2$ 。

因为 G是连通图，所以 G中任一结点的度数都大于等于 1。

假设 G 中不存在度数为 1 的结点，则 G 中任一结点的度数都大于等于 2. 故

$$\sum_{v\in V}\deg(v)\ge 2(n-1)+1>2n-2,$$

得出矛盾。

96、若 G有 n 个结点，m条边，f 个面，且每个面至少由 k($k\ge 3$) 条边围成，则 $m\le k(n-2)/(k-2)$。

证明：

设连通简单无向平面图 G=〈V,E,F〉，则 |V|=n,|E|=m,|F|=p 。

由已知对任一 $f\in F$，$\deg(f)\ge k$。

由公式 $\sum_{f\in F}\deg(f)=2|E|$ 可得，$2|E|\ge k|F|$ 。

再由欧拉公式 $|V|-|E|+|F|=2$ 可得 $|V|-|E|+\frac{2}{k}|E|\geq 2$。

即 $k(n-2)\geq(k-2)m$。

所以 $m\leq k(n-2)/(k-2)$。

97、设 $G=<V,E>$是连通的简单平面图，$|V|=n\geq 3$，面数为 k，则 $k\leq 2n-4$。

证明：

记$|E|=m$。因为 $G=<V,E>$是连通的简单平面图，故每个面的度数都不小于 3。从而

由公式 $\sum_{f\in F}\deg(f)=2|E|$ 可得

$3k\leq 2m$

再由欧拉公式 $|V|-|E|+|F|=2$ 有

$m=n+k-2$

及 $\frac{3}{2}k\leq n+k-2$

故 $k\leq 2n-4$。

98、证明对于连通无向简单平面图，当边数 $e<30$ 时，必存在度数$\leq$4 的顶点。

证明：

若结点个数小于等于 3 时，结论显然成立。

当结点多于 3 个时，用反证法证明。

记$|V|=n,|E|=m,|F|=k$。

假设图中所有结点的度数都大于等于 5。

由欧拉握手定理得 $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$ 得 $5n\leq 2m$。

又因为 $G=\langle V,E,F\rangle$ 是一个连通简单无向平面图，

所以对每个面 $f,\deg(f)\geq 3$。

由公式 $\sum_{f\in F}\deg(f)=2|E|$ 可得，$2m\geq 3k$。

再由欧拉公式 $|V|-|E|+|F|=2$ 可得 $2\leq\frac{2}{5}m-m+\frac{2}{3}m=\frac{1}{15}m$

从而 $30\leq m$,这与已知矛盾。

99、在一个连通简单无向平面图 $G=\langle V,E,F\rangle$中若$|V|\geq 3$，则 $|E|\leq 3|V|$

－6。

证明：

∵ $|V|\geq 3$，且 G=〈V, E, F〉是一个连通简单无向平面图，

∴ $d(f)\geq 3$，$\forall f\in F$。

由公式 $\sum_{f\in F} deg(f)=2|E|$ 可得，$2|E|\geq 3|F|$。

再由欧拉公式 $|V|-|E|+|F|=2$ 可得 $|V|-|E|+\frac{2}{3}|E|\geq 2$。

∴ $|E|\leq 3|V|-6$。

100、给定连通简单平面图 G=<V,E,F>，且 $|V|=6$, $|E|=12$，则对于任意 $f\in F$, $d(f)=3$。

证明：

因为 $|V|=6\geq 3$，且 G=〈V,E,F〉是一个连通简单无向平面图，

所以对任一 $f\in F$，$deg(f)\geq 3$。

由欧拉公式 $|V|-|E|+|F|=2$ 可得 $|F|=8$。

再由公式 $\sum_{f\in F} deg(f)=2|E|$，$\sum_{f\in F} deg(f)=24$。

因为对任一 $f\in F$，$deg(f)\geq 3$，故要使上述等式成立，对任一 $f\in F$，$deg(f)=3$。

101、设 G=<V,E>是 n 个顶点的无向图 (n>2)，若对任意 $u,v\in V$，有 $d(u)+d(v)\geq n$，则 G 是连通图。

证明：

用反证法证明。

若 G 不连通，则它可分成两个独立的子图 G_1 和 G_2，其中 $|V(G_1)|+|V(G_2)|-2=n$，且 G_1 中的任一个顶点至多只和 G_1 中的顶点邻接，而 G_2 中的任一顶点至多只和 G_2 中的顶点邻接。任取 $u\in V(G_1)$,$v\in V(G_2)$，则 $d(u)\leq|V(G_1)|-1$, $d(v)\leq|V(G_2)|-1$。

故 $d(u)+d(v)\leq(|V(G_1)|-1)+(|V(G_2)|-1)\leq|V(G_1)|+|V(G_2)|-2$

$=n-2<n$，这与已知矛盾。

故 G 是连通图。

102、一次会议有 20 人参加，其中每个人都在其中有不下 10 个朋友。这 20 人围成一圆桌入席。有没有可能使任意相邻而坐的两个人都是朋友？为什么？

证明：

可以。

将每个人对应成相应的顶点，若两人是朋友，则对应的两个顶点间连上一条无向边，作出一个简单无向图。由已知，图中每个顶点的度数都大于等于 10。即图中任两个不相邻的顶点的度数大于等于 20，即顶点数。故这个图是一个哈密尔顿图，从而存在哈密尔顿回路。任取一条哈密尔顿回路，按回路经过的顶点的次序安排对应的人的座位，就可满足要求。

103、证明在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友。

证明：

将每个人对应成相应的顶点，若两人是朋友，则对应的两个顶点间连上一条无向边，作出一个简单无向图。则原命题相当于在该无向图中一定存在两个顶点的度数相等。

设该简单无向图中有 n 个顶点，则图中 n 个顶点的度数只能为 0，1，2，…，n-1。若图中有两个或两个以上的顶点度数为 0，则结论显然成立。否则所有顶点的度数都大于等于 1。现用反证法证明该无向图中一定存在两个顶点的度数相等。

设该简单无向图中 n 个顶点中任何一对顶点的度数都不相等，即这 n 个顶点的度数两两不同。但每个顶点的度数只能是 1,2, …,n-1 这 n-1 个数中的某一种，这显然产生了矛盾。

因此该无向图中一定存在两个顶点的度数相等。从而在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友。

104、设有如下有向图 G=<V,E>,

（1）求 G的邻接矩阵；（2）G中 v_1到 v_4的长度为 4 的通路有多少条？（3）G中经过 v_1的长度为 3 的回路有多少条？（4）G中长度不超过 4 的通路有多少条？其中有多少条通路？

解：

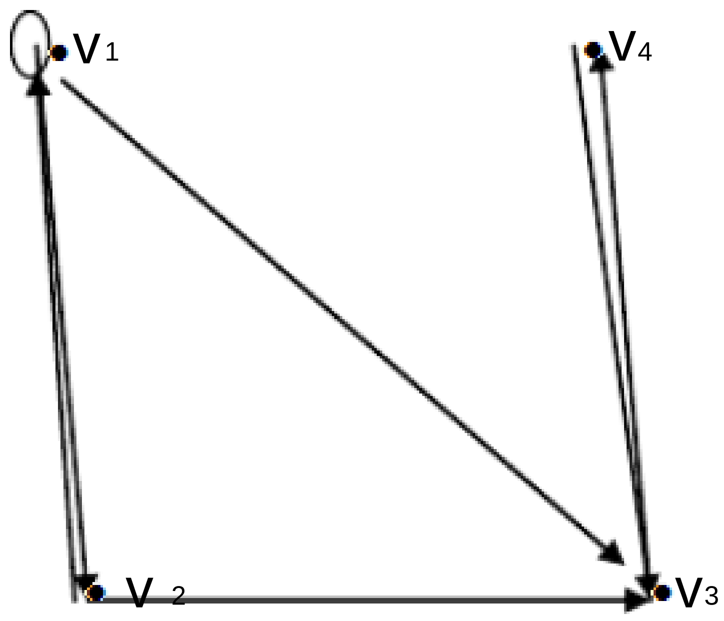
（1） $A=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}2&1&2&1\\1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix}3&2&4&2\\2&1&3&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，$A^4=\begin{bmatrix}5&3&7&4\\3&2&4&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

（2） G 中 v_1到 v_4的长度为 4 的通路有 4 条；

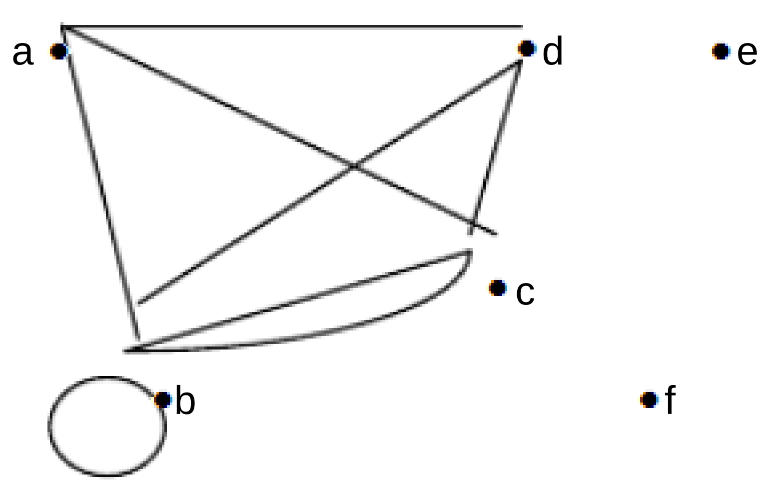
（3） G 中经过 v_1的长度为 3 的回路有 3 条；

（4） G 中长度不超过 4 的通路有 72 条，其中有 19 条回路。

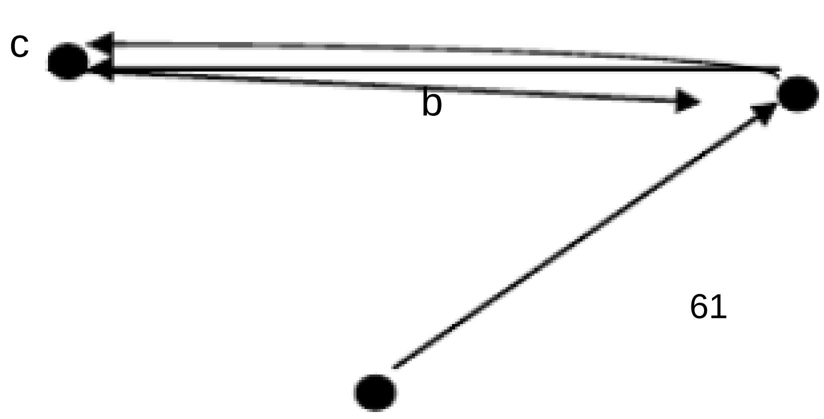


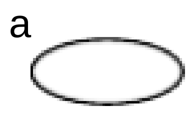
105、求下列无向图中每个顶点的度数；求下列有向图中每个顶点的出度、入度和度。

解：

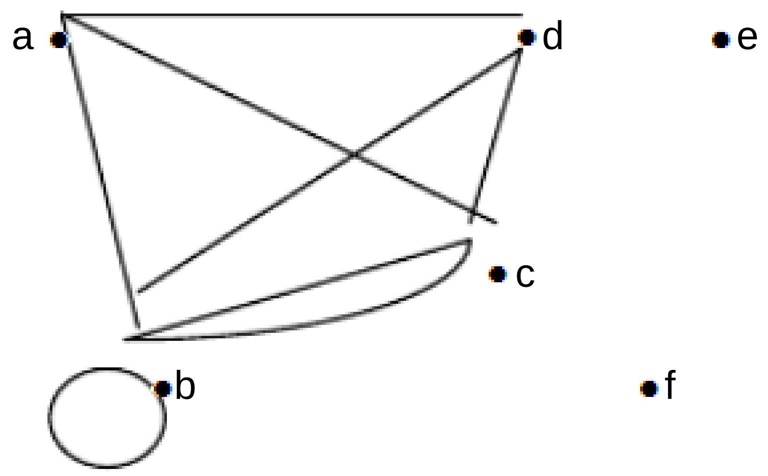


在这个无向图中 d(a)=3,d(b)=6, d(c)=4, d(d)=3, d(e)=0, d(f)=0 。



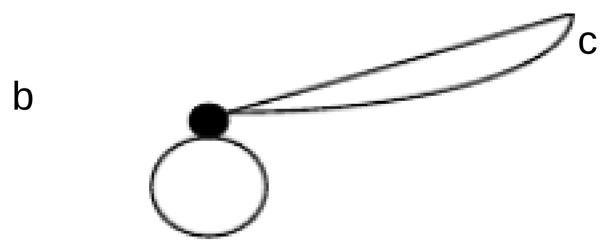


在这个有向图中 $d(a)=3, d(b)=4$, $d(c)=3$, $d^{+}(a)=2$, $d^{-}(a)=1$, $d^{+}(b)=2$, $d^{-}(b)=2, d^{+}(c)=1$, $d^{-}(a)=2$ 。

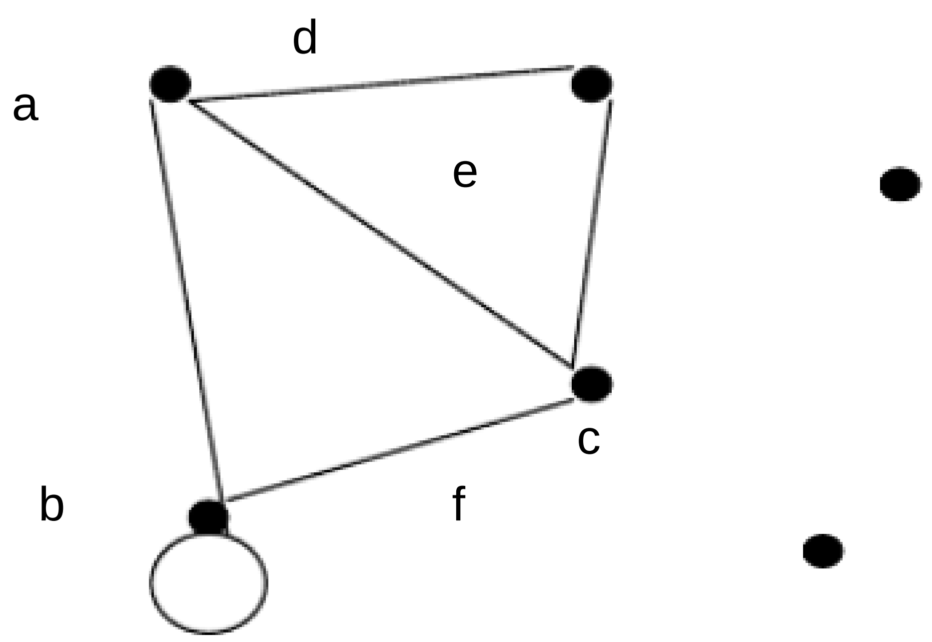


106、求下列无向图的子图、 生成子图、 由边集诱导的子图和由顶点集诱导的子图。

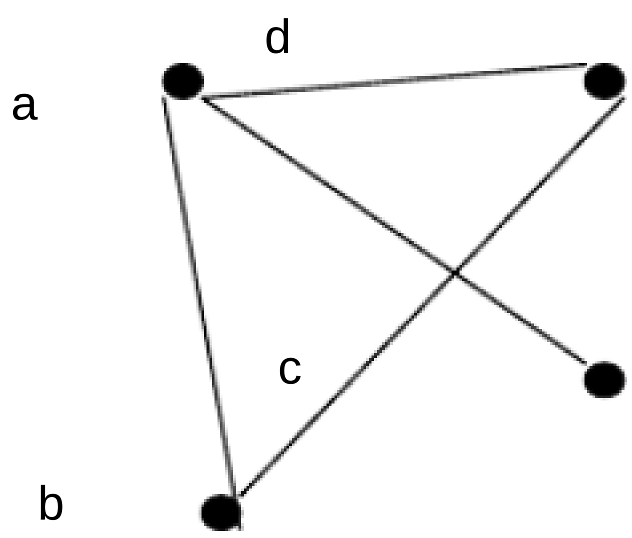
解：



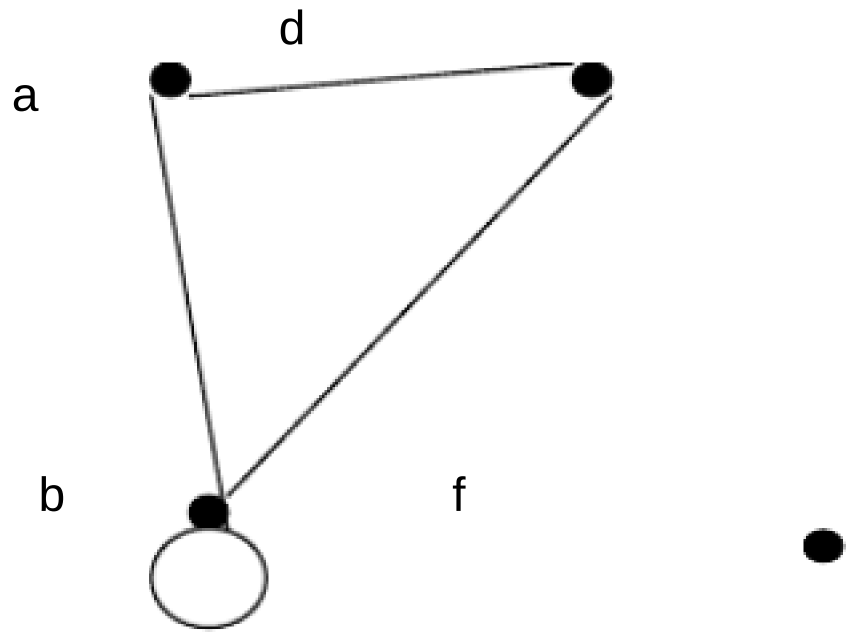
它的一个子图



它的一个生成子图

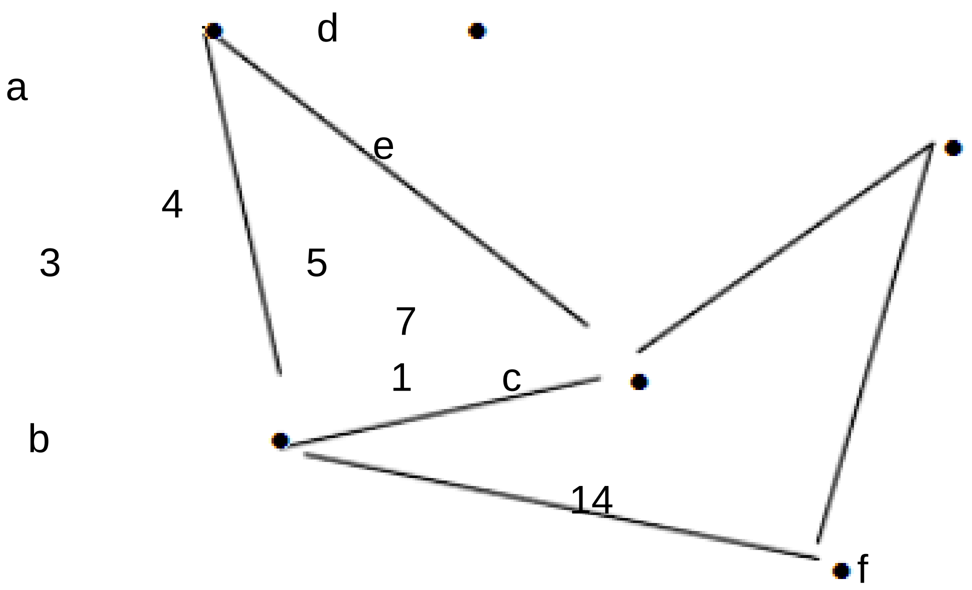


由边集 {(a,b),(a,c),(a,d),(b,d)}　　　诱导出的子图



由顶点集 {a,b,d,f}　诱导出的子图

107、求下列赋权图顶点间的距离。



解：

d(a,b)=3, d(a,c)=3, d(a,d)= ∞, d(a,e)=8, d(a,f)=16,

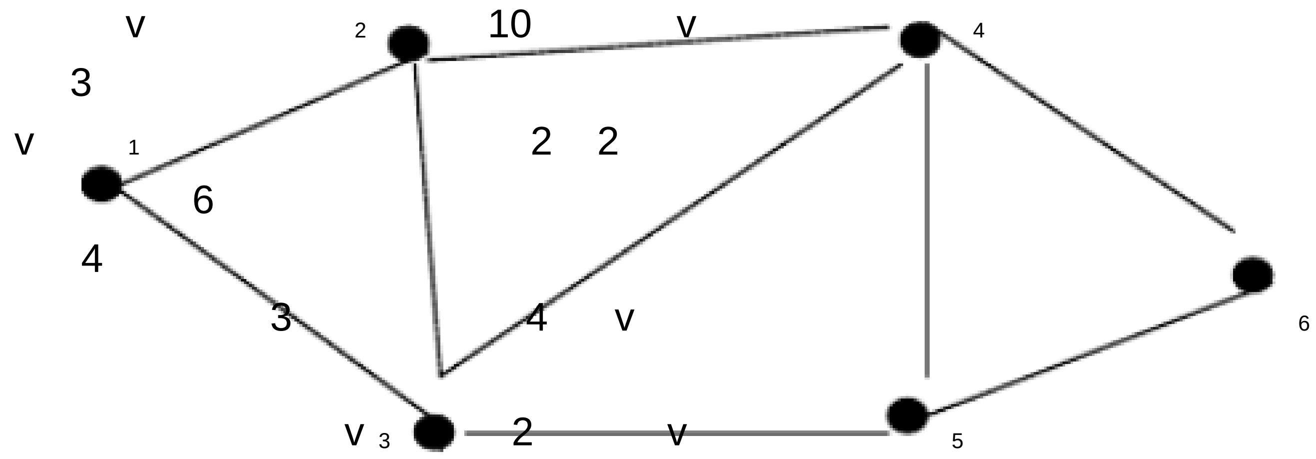
d(b,c)=1, d(b,d)= ∞, d(b,e)=6, d(b,f)=13,

d(c,d)= ∞, d(c,e)=5, d(c,f)=12,

d(d,e)= ∞, d(d,f)= ∞,

d(e,f)=7,

108、求下列赋权图中　v_1到其他顶点的距离。

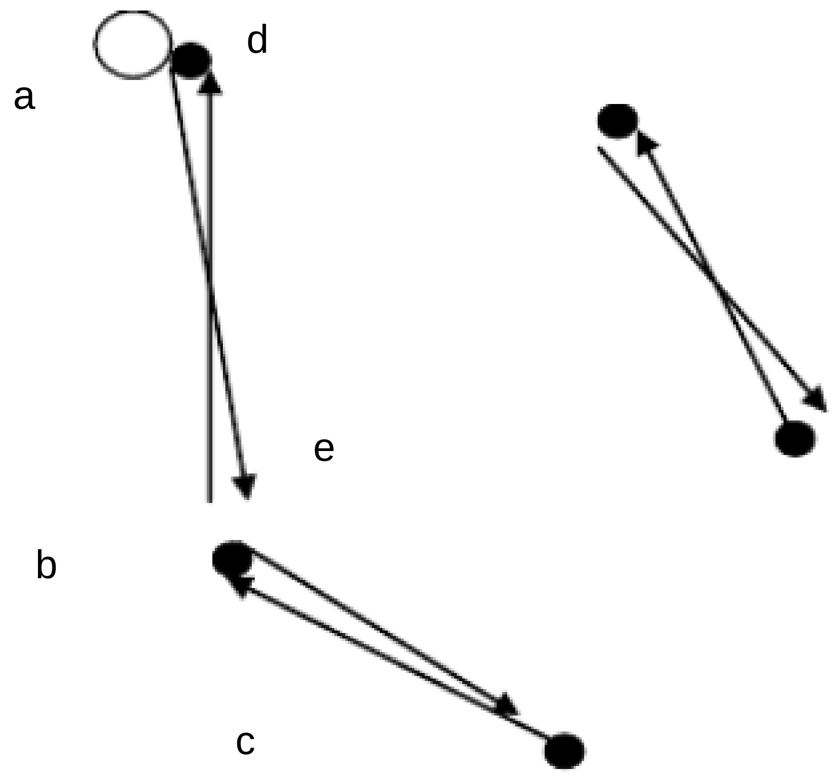


解：

S	$l(v_2)$	$l(v_3)$	$l(v_4)$	$l(v_5)$	$l(v_6)$	t	$l(t)$
$\{v_1\}$	3	4	∞	∞	∞	v_2	3
$\{v_1,v_2\}$		4	13	∞	∞	v_3	4
$\{v_1,v_2,v_3\}$			7	6	∞	v_5	6
$\{v_1,v_2,v_3,v_5\}$			7		10	v_4	7
$\{v_1,v_2,v_3,v_5,v_4\}$					9	v_6	9
$\{v_1,v_2,v_3,v_5,v_4,v_6\}$							

故 v_1 到 v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 的距离分别是 3，4，7，6，9。

109、求下图的可达矩阵。



解：

该图的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

则

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}2&1&1&0&0\\1&2&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

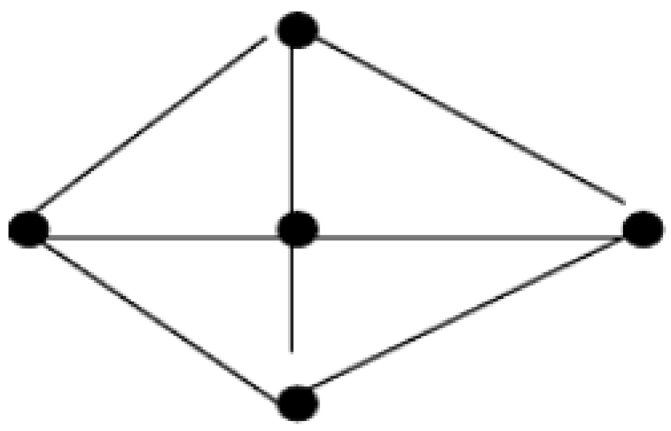
$$A^3=\begin{bmatrix}3&3&1&0&0\\3&1&2&0&0\\1&2&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}6&4&3&0&0\\4&5&1&0&0\\3&1&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

故图的可达矩阵为

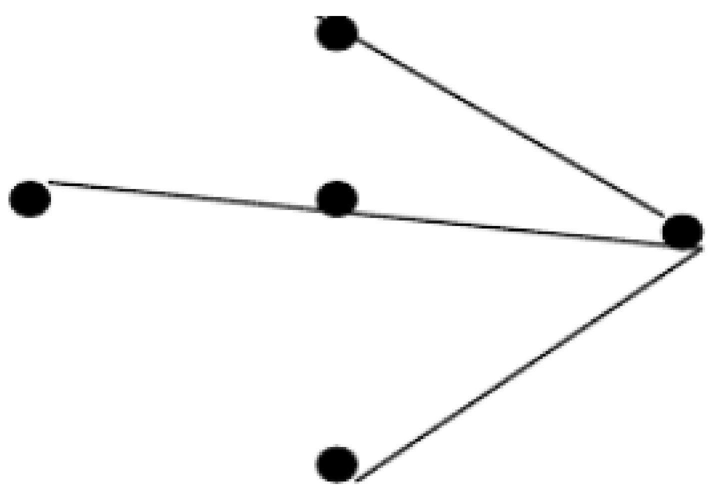
$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

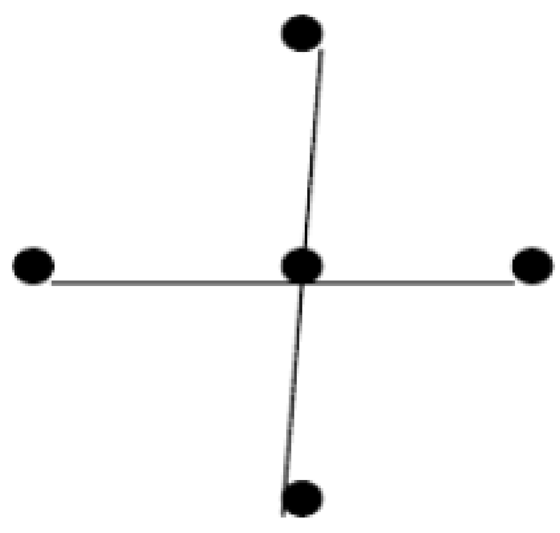
110、求下列图的生成树。



解：

下面是它的两棵生成树：





111、在一个有 n 个顶点的 G=<V,E>中，u,v $\in$ V。若存在一条从 u 到 v 的一条通路，则必有一条从 u 到 v 的长度不超过 n-1 的通路。

证明：

设 $v_0e_1v_1e_2\cdots e_l v_l$ 是从 $u=v_0$ 到 $v=v_l$ 的长为 l 的通路。

若 $l\le n-1$，则结论显然成立。

否则因为 $l+1>n$，故 v_0，v_1，…，v_l 中必有一个顶点是重复出现的。不妨设 $v_i=v_j\,(0\le i<j\le l)$，则新通路 $v_0e_1v_1e_2\cdots v_i e_{j+1}v_{l+1}e_{j+2}v_{j+2}\cdots e_lv_l$ 是一条从 u 到 v 的通路，且此通路长度比原通路长度至少少 1。

若新通路的长度 $\le n-1$，则结论得证。否则对新通路重复上述过程，必可以得到一条从 u 到 v 的长为 n-1 的通路。

112、设简单平面图 G中顶点数 n=7，边数 m=15，证明：G是连通的。

证明：

设 G具有 k 个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_k$。设 G_i 的顶点数为 n_i，边数为 m_i，i=1,2，…,k。

先证每个连通分支的顶点数都大于 1。否则说明 G中有孤立结点。由于 G是简单图，从而要使 G的边数是 15，则 G只有两个连通分支，其中一个是由孤立结点导出的，另一个是 K_6。但 K_6 不是平面图，故要每个连通分支的顶点数都大于 1。

同理可证，每个连通分支的顶点数都大于 2。

由此可得，G的每个连通分支至少有 3 个顶点。从而

$m_i\le 3n_i-6$

即 $m=\sum_{i=1}^{k} m_i\le\sum_{i=1}^{k}(3n_i-6)=3n-6k$

从而 $15\le 21-6k$，即 $k\le 1$。从而 k=1，故 G是连通图。

113、已知一棵无向树中有 2 个 2 度顶点、1 个 3 度顶点、3 个 4 度顶点，其余顶点度数都为 1。问它有多少个 1 度顶点？

解：

设它有 k 个 1 度顶点，则由欧拉握手定理

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$$

可得 2|E|=k+4+3+12=k+19。再由于它是一棵树，故

|E|=k+2+1+3-1=k+5

从而 2(k+5)=k+19, k=9。故它有 9 个 1 度顶点。

114、有向图 G是强连通的 $\Leftrightarrow$ G中有一回路，它至少通过每个顶点一次。

证明：

$\Rightarrow$ 设 G=<V,E>是强连通图。任取 $u,v\in V$，则 u 和 v 相互可达，即从 u 到 v 有路

径 P_1，从 v 到 u 有路径 P_1。故从 P_1 和 P_2 首尾相接可得到一条经过 u 和 v 的回路 C_1。

若 C_1 经过 G中所有顶点至少一次，则 C_1 就是满足结论要求的回路。否则若 C_1 没有经过顶点 w，则类似地我们可得到一条经过 u 和 w的回路 C_2。从 C_1 和 C_2 我们可得到一条经过更多顶点的回路 C_3（先从 u 经过 P_1 到 v, 再从 v 经过 C_2 回到 v, 再从 v 经过 P_2 回到 u）。

对 C_3 重复上述过程，直到得到一条经过所有顶点的回路为止。

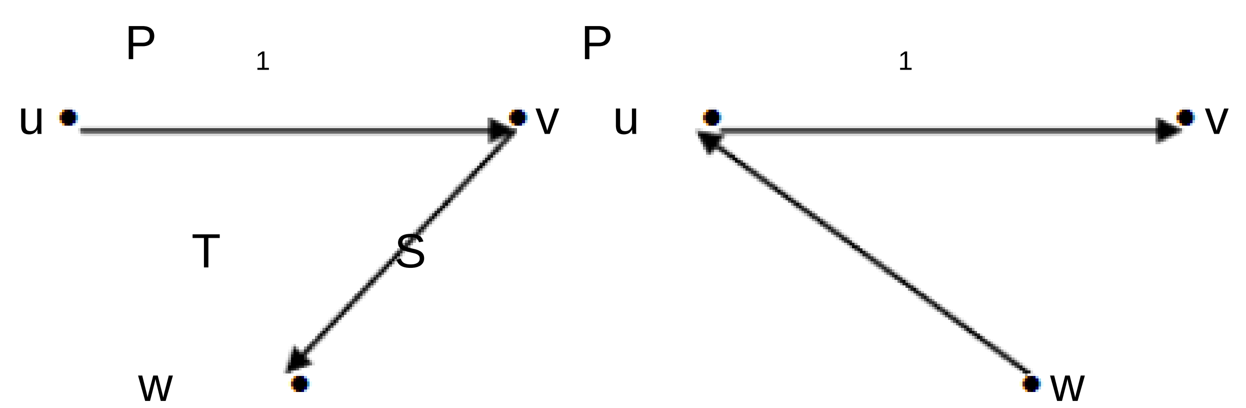
$\Leftarrow$ 若 G中存在一条经过 G中所有顶点至少一次的回路，则 G中任意两个顶点是相互可达的，从而 G是强连通的。

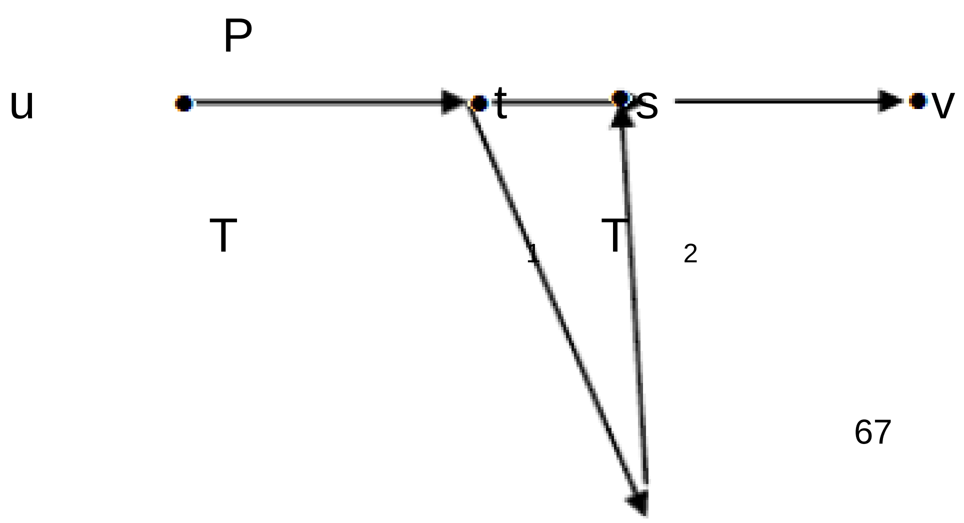
115、一个有向图是单向连通图 它有一条经过所有结点的路。

证明：

$\Rightarrow$ 设 G=<V,E>是单向连通图。任取 u,v $\in$ V，则 u 可达 v 或 v 可达 u。不妨设 u 可达 v，即从 u 到 v 有路径 P_1。

若 P_1 经过 G中所有顶点至少一次，则 P_1 就是满足结论要求的路径。否则若 P_1 没有经过顶点 w，则如果 v 经过路径 T 可达 w，连接 P_1 和 T 我们可得一条经过 P_1 经过的所有顶点及 w的更长的路径 P_2；否则若 w经过路径 S 可达 u，连接 S 和 P_1 我们也可得一条经过 w 及 P_1 经过的所有顶点的更长的路径 P_2；再否则我们一定可以找到 P_1 经过的两个相邻顶点 t 和 s，t 到 s 有边，t 经过路径 T_1 可达 w，w经过路径 T_2 可达 s（否则就与 u 可达 w，w 可达 v 矛盾），我们构造这样一条路径 P_2：从 u 出发经过 P_1 到达 t,t 经过路径 T_1 到达 w，再从 w出发经过路径 T_2 到达 s，然后从 s 出发经过 P_1 到达 v。这是一条经过 w 及 P_1 所经过的所有顶点的更长的路径。





•w

对 P_2 重复上述过程，直到得到一条经过所有顶点的路径为止。

$\Leftarrow$ 若 G中存在一条经过 G中所有顶点至少一次的路径，则 G中任意两个顶点中至少有一个可达另一个，从而 G是单向连通的。