

2015

ROČNÍK 6

ČÍSLO 4

# LOGOS POLYTECHNIKOS

V Š P

J

Vysoká škola  
polytechnická  
Jihlava

VÁŽENÉ ČTENÁŘKY, VÁŽENÍ ČTENÁŘI,

dostává se k vám poslední číslo šestého ročníku odborného časopisu LOGOS POLYTECHNIKOS. Jak se stalo zvykem, poslední číslo v ročníku bývá primárně zaměřeno na technické a matematické problémy, obvykle i s malou třešničkou v podobě příspěvku k výzkumu cizích jazyků. I tentokrát zde tedy naleznete články z oblastí informatiky, programování, matematiky, ale též pedagogiky a lingvistiky. Škála témat je rozprostřena od těch ryze prakticky zaměřených – jako je například problematika objektových databází nebo vývoj mobilních aplikací – až po úlohy abstraktnější, ověnčené krásou základního výzkumu.

Časopisu LOGOS POLYTECHNIKOS se v nedávné době podařilo získat jisté formální uznání, neboť byl zařazen na Seznam recenzovaných neimpaktovaných periodik vydávaných v ČR, který spravuje vládní Rada pro výzkum, vývoj a inovace. Mimo jiné to znamená, že časopis má naději dostat se k širšímu okruhu čtenářů a bude také atraktivnější pro autory. Nezbývá nyní než popřát mu, aby vzájemnou synergii výše zmíněného dále stoupala jeho prestiž a uznání odbornou komunitou a aby se stal kvalitní platformou, na níž bude probíhat vědecký dialog v nadregionálním měřítku. Věřme, že k tomuto cíli přispěje i aktuální číslo časopisu.

**doc. Ing. Zbyněk Bureš, Ph.D.**  
vedoucí katedry technický studií  
Vysoká škola polytechnická Jihlava

# OBSAH

---

5

## GENERAL PRINCIPLES OF TECHNICAL DIAGNOSTIC CONSIDERING GOOD ECONOMIC EFFECT OF MACHINE OPERATION

OBECNÉ ZÁKONITOSTI TECHNICKÉ DIAGNOSTIKY S DŮRAZEM NA DOBRÝ EKONOMICKÝ EFEKT PROVOZU STROJE

RNDr. Marie Hojdarová, CSc.

15

## VÝUKA CAD SYSTÉMŮ DLE NÁZORŮ VYSOKOŠKOLSKÝCH STUDENTŮ

TEACHING OF CAD SYSTEMS ACCORDING TO THE VIEWS OF UNIVERSITY STUDENTS

Ing. Blanka Petrášková, RNDr. Dana Smetanová, Ph.D., RNDr. Jana Vysoká

26

## KONSTRUKCE UNIVERSITNÍHO ROZVRHU PROSTŘEDNICTVÍM VÍCESTUPŇOVÉHO MODELU CÍLOVÉHO PROGRAMOVÁNÍ

UNIVERSITY TIMETABLING VIA MULTI-STAGE GOAL PROGRAMMING MODEL

Ing. Veronika Skočdopolová, Ph.D.

42

## CONDITIONALS – NOT THE EXCLUSIVE ISSUE OF HIGHER LANGUAGE LEVELS

PODMÍNKOVÉ VĚTY – NEJEN VÝSADA VYŠŠÍCH JAZYKOVÝCH ÚROVNÍ

Mgr. Martina Benešová, Ph.D., Ing. Miloslav Reiterman

56

## ODHAD CHYBĚJÍCÍCH HODNOT ORDINÁLNÍ PROMĚNNÉ

THE ESTIMATION OF THE MISSING VALUES OF ORDINAL VARIABLE

RNDr. Jana Borůvková, Ph.D.

68

## ÚLOHA LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ PŘI INTERVALOVĚ ZADANÝCH KAPACITÁCH VLASTNÍCH OMEZENÍ

INTERVAL LIMITS OF CAPACITIES IN CONSTRAINTS OF LP PROBLEMS

Mgr. Andrea Kubišová

85

## ŘEŠENÍ ÚLOH LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ S FUZZY KAPACITAMI VLASTNÍCH OMEZENÍ METODOU $\alpha$ -ŘEZŮ

SOLVING OF LP PROBLEMS WITH FUZZY LIMITS OF CAPACITIES IN CONSTRAINTS WITH  $\alpha$ -CUT METHOD

Mgr. Andrea Kubišová

109

## VÝVOJ APLIKACÍ PRO CHYTRÉ BRÝLE RECON JET

APPLICATION DEVELOPMENT FOR RECON JET

Ing. Marek Musil, Ing. Jakub Novotný, Ph.D.

117

## NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RANDOM PARAMETERS

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC S NÁHODNÝMI PARAMETRY

doc. RNDr. Ivana Pultarová, Ph.D.

# CONTENTS

---

127

## VÝVOJE APLIKACÍ PRO HODINKY GARMIN FENIX 3

APPLICATION DEVELOPMENT PLATFORM GARMIN FENIX 3

PaedDr. František Smrčka, Ph.D., Ing. Jakub Novotný, Ph.D.

139

## PERFORMANCE COMPARISON OF RELATIONAL DATABASE MS SQL WITH OBJECT-ORIENTED DATABASE DB40 IN .NET/C#

POROVNÁNÍ VÝKONOSTI RELAČNÍ DATABÁZE MS SQL A OBJEKTOVÉ DATABÁZE DB40

Ing. Marek Musil

# **GENERAL PRINCIPLES OF TECHNICAL DIAGNOSTIC CONSIDERING GOOD ECONOMIC EFFECT OF MACHINE OPERATION**

MARIE HOJDAROVÁ

COLLEGE OF POLYTECHNICS  
JIHLAVA

## **ABSTRACT**

This article follows articles [6] and [11] which were published in this journal in last two years. They solved some detail problems of longevity, operation reliability and optimal time for renewing machine elements and worked with statistically found functions of variable costs. This paper explains how to get these basic functions and shows general principles for effective application of technical diagnostics, which forms a significant part in the whole system of rules for optimal machine operability protection.

## **KEYWORDS:**

technical diagnostics, machine element, technical state parameter, breakdown, renewal

## 1. INTRODUCTION

Let us try to analyse the problematics of maintenance management with operational reliability of machines. We need a complex reliability and economy characteristics of machine element operation which will involve the risk of failure, the risk of non-economy operation and costs on the diagnostics itself. On its base it will be possible to evaluate an immediate technical state and after its transformation into relative operation time to find the time optimum for renewal which corresponds to the optimal technical state for renewal. The complex characteristics must show the dependence of variable costs on the element operation with respect to various parameters of technical state. Thus it will enable comparing different diagnostic parameters in terms of suitability for such a diagnostic method which will ensure the minimum of variable costs on the element operation and renewal.

## 2. GENERAL VIEW ON TECHNICAL DIAGNOSTICS

It is more and more obvious that technical diagnostics application has not only technical aspects, but its determinative impact is in economy. From the technical point of view, a concrete behaviour of the machine element represents a concrete technical state and requires corresponding intervention. But actually it is necessary to consider prognosis of technical state and respect influences of many variables. The most essential indicators are total costs on operation of the whole machine as a system of many elements which brings the total economic effect of machine operation. The diagnostics itself represents some costs which may not be compensated by effects coming out of its using. Therefore except for choosing the right diagnostic method we must consider the possibility of complete refusing diagnostics in case of having zero effect.

In a concrete moment, without respect to fixed costs and previous operation costs, it is necessary to adopt such measures which ensure the minimum of probable costs per operation time unit for the whole machine.

Application of this rule requires a series of consecutive optimal decisions for individual machine elements. Optimal time for the end of the concrete machine operation is the time when its operation starts to be losing, comparing with replacement the machine with a new one.

The purchase of a randomly worse machine can be then interpreted as a purchase of an older, partly worn-down machine. Following decisions will not further consider that fact. The problem of moral wearing-down can be interpreted by considering a concrete machine to be randomly worse than the most modern machine in the market.

The rules for renewing a single machine element were explained on the examples in [3] and [4]. Further on it will be necessary to apply general rules mentioned in the following paragraph on operation of the whole machine as a system of machine elements.

### 3. RELIABILITY CHARACTERISTICS FOR TECHNICAL DIAGNOSTICS

**T**he whole machine is composed of elements which generally have different lengths of technical life at whose end they have to be replaced for new ones or repaired ones. The element can be a part of the machine, a component, or the whole machine if it would be repaired as a whole. Technical state of the element can be investigated according to various views depending on the element and can be measured with different physical units. We can observe mechanical worn-down, leakage, a change of pressure or temperature and operation time expressed in different ways, for example a number of operation hours, total consumption of fuel, etc.

Technical state can be also expressed as a function of several variables called signals.

Thus we can write

$$s = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

where  $s$  is a parameter of technical state and  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  are signals.

For diagnostic measurement we have to choose such signals which sensitively react to a change of technical state.

For the combustion engine, for example, we often use the signals – see [1] –

$$s = am_0 + bm_p,$$

where  $m_0$  is consumption of fuel per unit,  $m_p$  is consumption of oil per unit,  $a$  and  $b$  are proportion constants of signal influence,

$$\text{or } s = \frac{a}{p} + bt,$$

where  $p$  is maximal compression pressure,  $t$  is operation time,  $a$  and  $b$  are proportion constants of signal influence.

Now, there is a question which signal or combination of signals describes technical state of the element in the best way and at the same time brings the maximal economic effect.

Operation time is one of comparatively advantageous diagnostic signals because its measurement is easy and inexpensive, and on top of that it is in relation with variable costs – one of criteria for optimal renewal.

Let us suppose an experiment with  $n$  elements of the same type. After their operation starts, we will observe a chosen parameter of technical state and at the same time states  $s$  with which single elements lost operability. We will also observe immediate costs on operation influenced by technical state of the elements.

Probable costs on operation and renewal of the element, which we want to minimize, are equal to the ratio of the sum of operation and renewal costs on elements reaching state  $s$  to the sum of operation time of all elements. These are **Average Complete Costs** of the set of elements - **ACC**:

$$ACC(s) = \frac{n \cdot FC + [n - m(s)]BC + \sum_{i=1}^n VC_i(s) + DC \sum_{i=1}^n t_i(s)}{\sum_{i=1}^n t_i(s)}$$

where :  $ACC(s)$  – average complete costs defined above [CZK /operation time]

$s$  – technical state parameter

$n$  – number of elements in the experiment

$m(s)$  – number of elements which did not have a breakdown till reaching state  $s$

$FC$  – fixed costs and other investment costs on the machine element operation (purchase, maintenance) [CZK]

$BC$  – breakdown costs on renewal of the element after breakdown minus costs of the right time renewal [CZK]

$VC_i(s)$  – variable costs on  $i$  – element from the beginning to reaching the state  $s$  or to breakdown before the state  $s$  [CZK]

$DC$  – diagnostic costs on the machine element in one diagnostic interval [CZK /operation time]

$t_i(s)$  – operation time of  $i$ -element from the beginning to reaching the state  $s$  or to breakdown before the state  $s$  ( fuel consumption, moto-hours, production, operation time in hours or years, etc.)

Now let us suppose a set of  $n$  elements, where  $n$  is big enough to enable creating of a continuous function  $ACC(s)$  instead of the discrete one and so to find its minimum more easily.

Then it is

$$n - m(s) = n R(s) \quad (1)$$

where  $R(s)$  is the probability of breakdown-free operation as a function of technical state  $s$ .

From (1) we get

$$n - m(s) = n \int_{s_z}^s f(x) dx \quad (2)$$

where  $f(s)$  is density of breakdown probability as a function of technical state  $s$ ,

$s_z$  is a value of parameter  $s$  at the beginning of the operation.

In a special case when technical state parameter is operation time , ( $s_z = 0, s = t$ ),

the equation (2) will change to

$$n - m(t) = n \int_0^t f(x) dx \quad (3)$$

It is necessary to emphasize again that operation time is only one of many different diagnostic technical state parameters.

Now let us take into consideration that it may not often be possible to measure absolute variable costs  $VC_i(s)$ , but it is easier to investigate their increment  $dVC_i(s)$  corresponding with the increment of operation time  $dt_i(s)$ .

Let us introduce a function

$$MC_i(s) = \frac{dVC_i(s)}{dt_i(s)} \quad (4)$$

where  $MC_i(s)$ , [CZK /operation time], are marginal costs on i-element in its technical state  $s$  – (if its breakdown did not occur before).

Further on we have to find experimentally function  $q_i(s)$  – resistance of i-element  
STRANA 9

$$q_i(s) = \frac{dt_i(s)}{ds} \quad \bullet \quad (5)$$

If there is a breakdown with i-element before reaching state  $s$ , we have  $q_i(s) = 0$ .

Using (5) we can write  $\sum_{i=1}^n t_i(s) = \int_{s_z}^s \sum_{i=1}^n q_i(x) dx$

and then

$$\sum_{i=1}^n t_i(s) = n \int_{s_z}^s q(x) dx , \quad (6)$$

where:  $s_z$ ,  $s$  are initial and immediate technical state of the element,

$q(s)$  is average resistance of the element against the change of a parameter (average resistance against wearing down), [operation time/s],

$$q(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i(s) . \quad (7)$$

Using (6) we can write

$$\bar{t}(s) = \int_{s_z}^s q(x) dx \quad (8)$$

and then

$$d\bar{t}(s) = q(s) ds \quad (9)$$

where  $\bar{t}(s)$  is the average operation time from the beginning of operation till reaching technical state  $s$ .

In a particular case when we take operation time as the main technical state parameter, it means for  $s_z = 0$ ,  $s = t$ , the value of  $q_i(s)$  is:

$q_i(t) = 1$  for elements working at the moment  $t$

$q_i(t) = 0$  for elements having breakdown before the moment  $t$ ,

thus from (7) and (8) we get  $q(t) = R(t)$  and we have

$$t(t) = \int_0^t R(x) dx \quad (10)$$

where  $R(t)$  is the probability of breakdown free operation as a function of operation time and  $\bar{t}(t)$  is average operation time of the element from the beginning of the operation.

We can conclude that function  $q(s)$  – resistance against a change of technical state parameter, is more general reliability characteristics than the probability of breakdown free operation – function  $R(t)$ . Therefore  $q(s)$  should be continually observed in the framework of operation reliability tests.

Now with the help of (4), (5), (6), (7), we can see that

$$\sum_{i=1}^n VC_i(s) = \int_{s_z}^s \sum_{i=1}^n MC_i(x) \cdot q_i(x) dx$$

and finally

$$\sum_{i=1}^n VC_i(s) = \int_{s_z}^s MC(x) \cdot q(x) dx , \quad (11)$$

where  $MC(s)$  are average marginal costs on the element in its technical state  $s$

and we have

$$MC(s) = \frac{\sum_{i=1}^n MC_i(s) q_i(s)}{\sum_{i=1}^n q_i(s)} \quad (12)$$

**Function  $MC(s)$  appears to be a significant reliability characteristic as well, and therefore it should be observed in the framework of operation reliability tests.**

Now we can turn back to function  $ACC(s)$  of average complete costs mentioned above at the beginning of this article. With the help of former relations (2), (6), (9) and (11), we can describe average complete costs on operation and renewal of the element by the equation

$$ACC(s) = \frac{FC + \int_0^{\bar{t}(s)} MC(x) d\bar{t}(x)}{\bar{t}(s)} \quad (13)$$

where  $MC(s)$  are marginal costs on the element up to reaching technical state  $s$

[CZK/operation time] and it is

$$MC(s) = \frac{f(s)}{q(s)} BC + MC(s) + DC . \quad (14)$$

**Function of marginal costs is a complex reliability characteristic of the element which includes a risk of breakdown, operation economy and diagnostic costs.**

This function can be found experimentally in a discrete way and then can be processed into a continuous function with the help of regression.

The reliability experiment has to be made as it is written above, to be able to evaluate functions **f(s)**, **q(s)** and **MC(s)**. Minimum of function **ACC(s)** then determines optimal time **T** for the element renewal, as it was shown by a concrete example in [6] and [11].

#### 4. CONCLUSION

In this article, creation of statistically obtained functions **q(s)**, **MC(s)** and **ACC(s)** was shown. With the help of them it is possible to find optimal time for renewal of an old element by a new one, as it was presented in [6] and [11]. Theoretical explication of evaluating optimal time for renewal will be included in the next article.

## LITERATURE

- [1] Havlíček, J. a kol.: Provozní spolehlivost strojů, vysokoškolská učebnice ČZU Praha 1989, ISBN 80-209-0029-2
- [2] Kadleček,B.,Pejša,L.,Pexa,M.: Virtual vehicle driving cycle for measuring emission and fuel consumption, Report EUCOST 346, 2004, 57 p., CZU Prague
- [3] Pejša,L.:Technická dianostika v sousravě optimální péče o provozní spolehlivost strojů, DrSc thesis, TF ČZU 1978, 174 p.
- [4] Pejša,L.,Kadleček,B..Otto,K.: Výzkum technických opatření v péči o vozidlové motory ekonomicky motivující jejich ekologičnost provozu v podmínkách ČR, Final report of international project COST 319,10, ISBN 80-213-0493-6 , 264 p.,
- [5] De Rus, Ginés: Intrduction to Cost-Benefit Anylysis, EE publishing 2010, ISBN 978-1-84980-454 -7
- [6] Hojdarová,M.:FLC Method for Controlling Process of Vehicle Operation Costs Minimization, Logos Polytechnikos No 4, 2013, VSPJ Jihlava, pp 49-57.., ISSN 1804 -3682.
- [7] Novák,V., Přenosil,M.,Svítek,M.,Votrana,Z.:Problém\ spolehlivosti, životnosti a bezpečnosti systémů. Edice monografií NNW, Praha 2005, ISBN 80- 903298-2-9
- [8] Steadman, D.H.:Remote Sensing - a New Tool for Automobile Inspection and Maintenance, Issue paper 1, January 2002, FIS Utah
- [9] Klausmeier,R.:Vehicle Inspection and Mauintenance, (I/M) programmes, Wisconsin Department of Transportation, Project \Number 0092-02-09, Final Report 2002 Austin TX, 151 p.
- [10] Gordon, J.: Evaluation of Transient Mass Measurements in Vehicle I/M Testing, December 9, 1999, 12p., AREMA Minneapolis
- [11] Hojdarová, M.: Optimal time for renewal of machine element considering planned operting time of whole machine unit, Logos Polytechnikos No 3, 2014, VSPJ Jihlava, pp.44-52, ISSN 1804-3682

# **OBECNÉ ZÁKONITOSTI TECHNICKÉ DIAGNOSTIKY S DŮRAZEM NA DOBRÝ EKONOMICKÝ EFEKT PROVOZU STROJE**

KONTAKTNÍ ÚDAJE:

RNDr. Marie Hojdarová, CSc.  
Vysoká škola polytechnická Jihlava  
katedra matematiky  
Tolstého 16  
586 01 Jihlava  
E-mail: marie.hojdarova@vspj.cz

## **ABSTRAKT**

Článek navazuje na mé předchozí články uveřejněné v tomto časopise. Byly v nich řešeny některé detailní problémy životnosti, provozní spolehlivosti a optimální obnovy strojních součástí. Z těchto konkrétních výsledků lze odvodit obecné závislosti pro účelnou aplikaci technické diagnostiky, která je významným prvkem soustavy optimální péče pro provozuschopnost strojů. Zásady optimální aplikace technické diagnostiky jsou obsahem této statě.

## **KLÍČOVÁ SLOVA:**

technická diagnostika, strojní prvek,  
parametr technického stavu, havárie,  
obnova

# VÝUKA CAD SYSTÉMŮ DLE NÁZORŮ VYSOKOŠKOLSKÝCH STUDENTŮ

BLANKA PETRÁŠKOVÁ  
DANA SMETANOVÁ  
JANA VYSOKÁ

VYSOKÁ ŠKOLA TECHNICKÁ  
A EKONOMICKÁ V ČESKÝCH  
BUDĚJOVICÍCH

## ABSTRAKT

Příspěvek popisuje výsledky výzkumu, ve kterém byly pomocí dotazníku zjištovány hodnotící názory vysokoškolských studentů na výuku předmětu CAD systémy. Dotazníkové šetření proběhlo na Vysoké škole technické a ekonomické v Českých Budějovicích a bylo orientováno na skupinu studentů bakalářských oborů Konstrukce staveb a Stavební management. Průzkum byl zaměřen na zjištění přístupu studentů k výuce různých grafických programů používaných při tvorbě stavebních výkresů. Cílem výzkumu bylo zmapovat názory studentů na výuku předmětu CAD systémy a jejich znalosti grafických programů probíraných na střední škole. Dále výzkum směřoval k analýze toho, jak studenti hodnotí současný způsob výuky na vysoké škole a své individuální dříve nabyté či nově získané znalosti. Současně jsme zkoumali, jak jsou studenti ochotni se dále v této oblasti zdokonalovat a který software upřednostňují pro svou práci. Zjištění těchto faktů může být důležité pro zkvalitnění a zefektivnění výuky a také pro případnou obměnu softwaru v počítačových učebnách.

KLÍČOVÁ SLOVA:

CAD systémy, dotazník

## 1. ÚVOD

**V**ýuka CAD systémů patří v současné době k základním oborům vyučovaným na vysokých školách technických směrů (CAD je zkratka anglického názvu computer-aided design). Jedná se tedy o počítačem podporované projektování, které zastřešuje širokou činnost navrhování (projekty 2D a 3D). Dobrá znalost grafického softwaru je velmi často nutnou podmínkou pro úspěšné uplatnění studentů v praxi. Předmět CAD systémy je na VŠTE vyučován prostřednictvím čtyř semestrálních modulů v oboru Stavební management, které jsou zároveň nabízeny mimo mateřský obor jako volitelné předměty. Moduly jsou uvedeny pod názvy: CAD systémy 1 (CAD 1), CAD systémy 2 (CAD 2), CAD systémy 3 (CAD 3) a CAD systémy 4 (CAD 4).

CAD 1 představuje výuku systému AutoCADu 2D, který je v praxi velmi rozšířen. Další moduly jsou již zaměřeny na výuku 3D softwarů, které umožňují vytvářet tzv. informační modely budovy (technologie BIM). Moduly CAD 2 a CAD 3 jsou zacíleny na výuku Revitu s tím, že CAD 2 procvičuje architektonické modelování a navazující CAD 3 nabízí modelování technických zařízení budov. Vzhledem k tomu, že všechny tyto vyučované programy jsou produktem společnosti Autodesk, jsou navzájem plně kompatibilní a umožňují bezproblémovou spolupráci 2D a 3D verzí. Modul CAD 4 seznamuje studenty s tvorbou stavebních výkresů v dalším grafickém programu Nemetschek-Allplan. Pro bližší seznámení s CAD systémy lze využít např. Autodesk 2014, CAD studio a.s. 2014, CEGRA 2014, Nemetschek-Allplan Česko s.r.o 2014.

## 2. CÍL VÝZKUMU

Cílem výzkumu bylo zjistit:

- názory studentů na výuku předmětu CAD systémy
- které grafické programy znají ze střední školy
- jak jim vyhovuje současná výuka na vysoké škole
- jak hodnotí způsob výuky a své znalosti
- které softwary upřednostňují pro svou práci
- jak jsou připraveni se dále v této oblasti zdokonalovat

Výzkum byl orientovaný na zjištění potřeb studentů vzhledem k výuce a praxi. Zaměřili jsme se zejména na to, jak jsou studenti vybaveni znalostmi z oblasti CAD při příchodu na vysokou školu, zajímala nás evaluace výuky a spokojenosť s dosavadním technickým vybavením učeben. Tyto znalosti jsou důležité pro zlepšení a zefektivnění výuky a také pro případnou obměnu softwarové podpory výuky.

### 3. POPIS VÝZKUMNÉHO VZORKU A VÝZKUMNÉ METODY

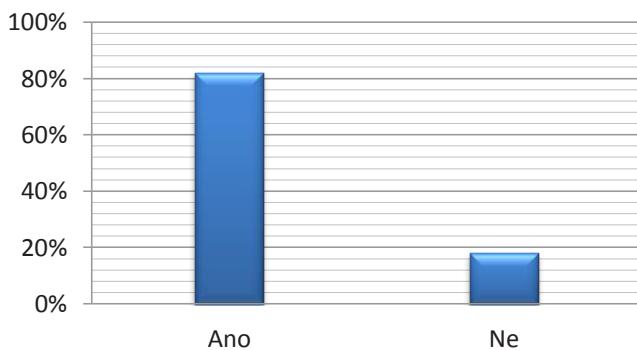
**A**nketa byla zacílena na studenty bakalářských oborů Konstrukce staveb a Stavební management, přičemž průzkumu se zúčastnilo celkem 112 respondentů.

Anketní průzkum proběhl začátkem roku 2014. Pro zajištění vypovídající hodnoty byl výzkum prováděn anonymně. V souladu se zásadami pedagogického výzkumu (Gavora 2010, Chráska 2007, Maňák, Švec 2004) byla zvolena výzkumná metoda pomocí anonymního dotazníku vlastní konstrukce se třinácti otázkami.

Prvních šest otázek bylo určeno ke zjištění informací o přístupu k výuce a vlastních zkušenostech s grafickými programy. Následující čtyři otázky směřovaly ke zjištění potřeb studentů seznamovat se s dalšími počítačovými aplikacemi. V jedenácté a dvanácté otázce respondenti hodnotili vybavení počítačových učeben a své současné znalosti. Poslední položka byla věnována vlastnímu komentáři studentů. Odpovědi studentů jsou vyhodnoceny v následujícím textu.

### 4. ZNĚNÍ A VYHODNOCENÍ DOTAZNÍKU

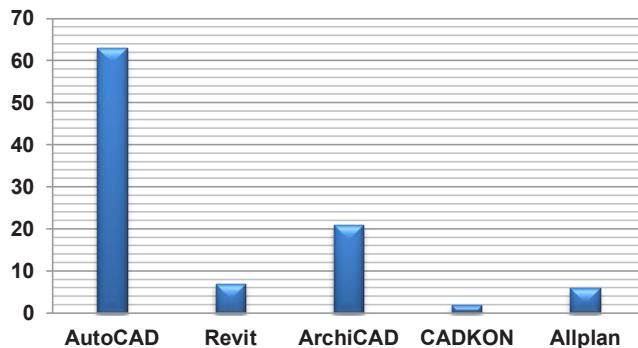
#### **1. Učil/a jste se CAD software na střední škole?**



Obr. 1

Z uvedeného výsledku viz Obr. 1 vyplývá, že většina (81%) studentů má znalosti alespoň jednoho grafického softwaru z absolvované střední školy. Menší část studentů se s těmito software setkává poprvé na vysoké škole.

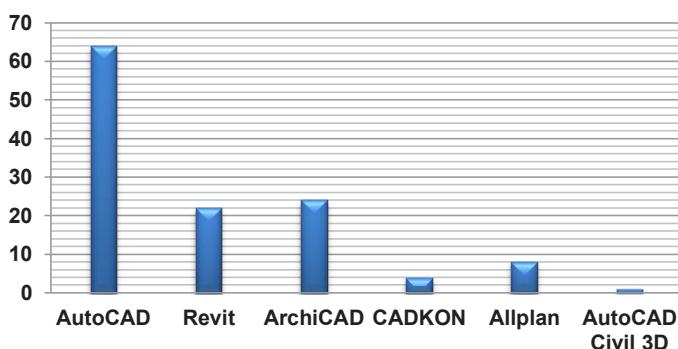
**2. Který grafický software jste se učil/a na střední škole?**



Obr. 2

Zhruba polovina z celkového počtu studentů (63) ovládá ze střední školy AutoCAD, následuje téměř pětina se znalostí ArchiCADu, 3D softwaru společnosti Graphisoft viz Obr. 2.

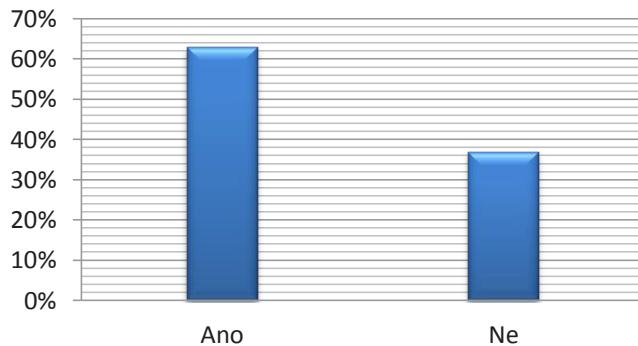
**3. Který CAD software používáte v současnosti?**



Obr. 3

Poměr používaných aplikací 2D a 3D se nemění. Převažuje stále AutoCAD, v 3D aplikacích se vedle ArchiCADC (64 respondentů) začíná prosazovat Revit (22 osob) viz Obr. 3.

#### **4. Vyhovuje Vám rozsah výuky CAD systémů?**



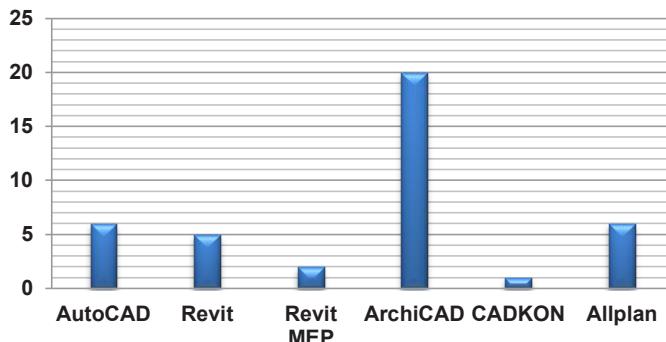
Obr. 4

Většina dotázaných studentů (63%) je spokojena se současným rozsahem výuky na vysoké škole viz Obr. 4.

#### **5. Chtěl/a byste ovládat větší množství CAD systémů? Pokud ano, jaké?**

Pouze 39 % z celkového počtu všech dotázaných studentů má zájem ovládat větší množství CAD systémů, než s kterými byli seznámeni při výuce.

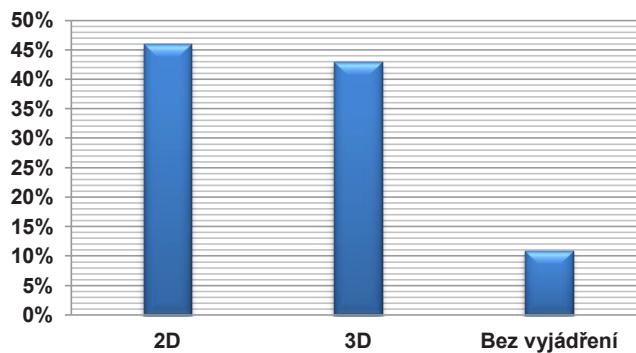
Z následujícího grafu viz Obr. 5. vyplývá, že polovina studentů se zájmem o větší množství CAD systémů by si jako doplňující software vybrala ArchiCAD, dále jsou žádány AutoCAD, Allplan a Revit.



Obr. 5

#### **6. Upřednostňujete CAD software 2D nebo 3D?**

Jak je zřejmé z následujícího grafu viz Obr. 6, ve skupině studentů mírně převažuje obliba 2D softwaru. Důvodem může být jednodušší ovládání.



Obr. 6

#### **7. Který CAD software je dle Vašeho názoru nejlépe uplatnitelný v praxi?**

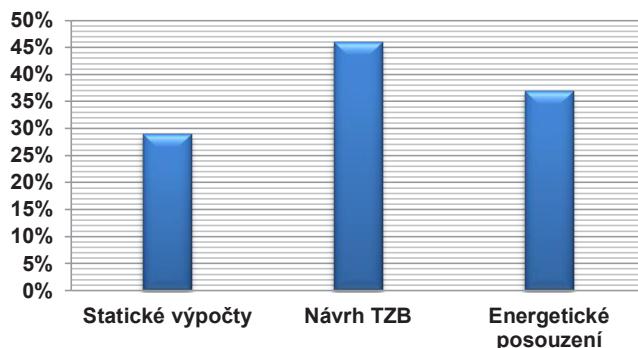
Převažující skupina z celkového počtu dotázaných (64%) považuje AutoCAD za nejlépe uplatnitelný v praxi. Toto mínění odpovídá skutečnosti, že v současné projekční stavební praxi je AutoCAD zatím stále nejrozšířenější. Následuje ArchiCAD s 21%, ostatní software mají malá zastoupení.

#### **8. Měl/a byste zájem využívat CAD software pro statické výpočty?**

**9. Měl/a byste zájem využívat CAD software pro návrh TZB?**

**10. Měl/a byste zájem využívat CAD software pro energetické posouzení budov?**

Předchozí tři otázky 8. – 10. jsou vyhodnoceny v následujícím grafu viz Obr. 7. V grafu je znázorněno, kolik procent respondentů má zájem využívat příslušný software.



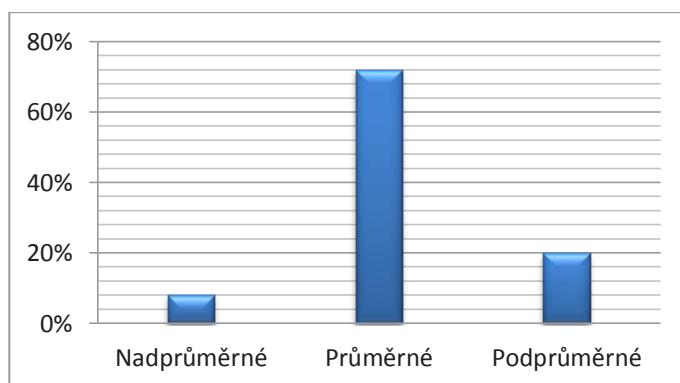
Obr. 7

Většina dotázaných (46%) má zájem o navrhování technických zařízení budov (TZB). Tuto problematiku řeší Revit (dříve Revit MEP) a např. CADKON.

**11. Považujete technické vybavení počítačových učeben za vyhovující?**

70 % dotázaných je spokojeno s technickým vybavením učeben.

**12. Ohodnoťte své současné znalosti používaného CAD systému.**

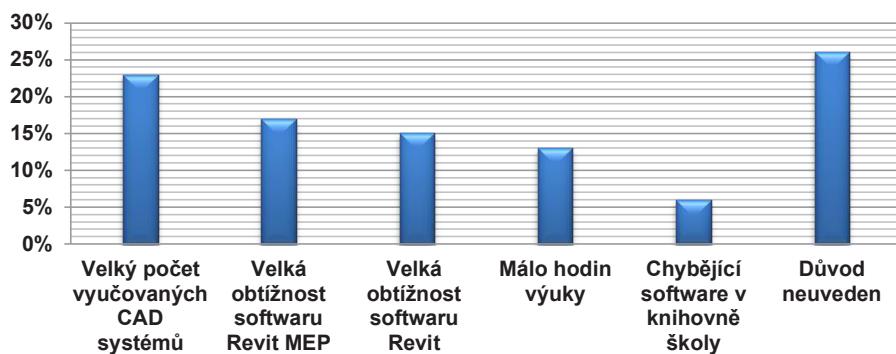


Obr. 8

72 % studentů hodnotí své znalosti jako průměrné. Bohužel 20 % z celkového počtu se považuje za podprůměrné uživatele viz Obr. 8.

### **13. Uveďte svůj vlastní komentář k výuce CAD systémů.**

Vyhodnocení nejčastějších připomínek je uvedeno v následujícím grafu viz Obr. 9.



Obr. 9

V komentářích respondentů je nejčastěji uvedeno: velký počet vyučovaných programů a velká obtížnost softwaru Revit.

## **5. ZÁVĚR**

**Z** dotazníkového šetření vyplývají následující skutečnosti. Studenti přicházející na VŠTE ze středních škol jsou z velké části vybaveni znalostmi grafického softwaru, zejména AutoCAD a ArchiCAD. Také si uvědomují, že tyto softwary jsou pro jejich budoucí praxi značně důležité. Ovšem potenciální zaměstnavatelé využívají převážně AutoCAD (informace ze školení firmou AutoDesk), a proto je výuka zaměřena především na tento software.

Během studia na vysoké škole jsou tyto jejich dovednosti získané na střední škole dále prohlubovány a rozšiřovány a tudíž se postupně ke znalostem či požadavkům na znalosti přidávají programy Revit a Allplan. Obliba 2D a 3D aplikací je vyrovnaná.

Rozsah výuky a vybavení počítačových učeben jsou hodnoceny kladně. Software je přístupný ve všech počítačových učebnách a je každý rok aktualizovaný novějšími verzemi. Část studentů by však tento software chtěla mít k dispozici i v knihovně.

Zájem o využívání CAD systémů pro další stavební profese (TZB, statika a energetické posuzování budov) je střední.

Co se týká hodnocení vlastních znalostí, 20% studentů se považuje za podprůměrné. S tím úzce souvisí nespokojenost s výukou, kterou vyjádřilo 42% studentů. Jako důvod uvádějí zejména velký počet vyučovaných grafických programů a velkou obtížnost softwaru Revit. Z tohoto plynne jednoznačný závěr, že by bylo vhodné se více věnovat obtížnějším programům běžně používaných v praxi (Revit).

## LITERATURA

- [1] AUTODESK 2014. Autodesk. [online]. [cit. 8-12-2014]. Dostupné z: [www.autodesk.cz](http://www.autodesk.cz)
- [2] CAD STUDIO a.s. 2014. CAD studio. [online]. [cit. 8-12-2014]. Dostupné z: [www.cadstudio.cz](http://www.cadstudio.cz)
- [3] CEGRA 2014, Centrum pro podporu počítačové grafiky. [online]. [cit. 8-12-2014]. Dostupné z: [www.cegra.cz](http://www.cegra.cz)
- [4] GAVORA, P., Úvod do pedagogického výzkumu. 2., rozš. české vyd. Brno: Paido, 2010. 261 s. ISBN 978-80-7315-185-0
- [5] CHRÁSKA, M., Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu. Vyd. 1. Praha: Grada, 2007. 265 s. Pedagogika. ISBN 978-80-247-1369-4.
- [6] MAŇÁK, J., ed. - ŠVEC, V., ed. Cesty pedagogického výzkumu. Brno: Paido, 2004. 78 s. Pedagogický výzkum v teorii a praxi; sv. 1. ISBN 8073150786.
- [7] NEMETSCHEK-ALLPLAN ČESKO s.r.o. 2014, Building information modeling s Nemetschek Allplan. [online]. [cit. 8-12-2014]. Dostupné z: [www.nemetschek-allplan.cz](http://www.nemetschek-allplan.cz)

# TEACHING OF CAD SYSTEMS ACCORDING TO THE VIEWS OF UNIVERSITY STUDENTS

## ABSTRACT

The paper describes results of a research in which students shared their opinion on the CAD systems lecture. The questionnaire survey was conducted at the Institute of Technology and Business in České Budějovice. The survey was designed to describe students' approach to learning various graphics programs used in the process of designing buildings and was focused on a group of students of bachelor programs Buildings construction and Buildings management. The survey focused on determining the approach of students to learning various graphics programs used in the process of creating construction drawings. The aim of the research was to explore the opinions of students on the course CAD systems and their knowledge of graphics programs discussed in high school. The research is directed to analyze how students evaluate the current method of teaching at the university, their individual skills, whether they are willing to continue and improve in this area and which software is good for their work. The findings of these facts may be important for improving the quality and efficiency of education and also for possible replacement of the software in computer laboratories.

## KONTAKTNÍ ÚDAJE:

Ing. Blanka Petrášková  
Vysoká škola technická a ekonomická  
v Českých Budějovicích  
Katedra přírodních věd  
Okružní 517/10  
370 01 České Budějovice  
E-mail: petraskova@mail.vstecb.cz

RNDr. Dana Smetanová, Ph.D  
Vysoká škola technická a ekonomická  
v Českých Budějovicích  
Katedra přírodních věd  
Okružní 517/10  
370 01 České Budějovice  
E-mail: smetanova@mail.vstecb.cz

RNDr. Jana Vysoká  
Vysoká škola technická a ekonomická  
v Českých Budějovicích  
Katedra přírodních věd  
Okružní 517/10  
370 01 České Budějovice  
E-mail: vysoka@mail.vstecb.cz

## KEYWORDS:

CAD systems, questionnaire

# KONSTRUKCE UNIVERSITNÍHO ROZVRHU PROSTŘEDNICTVÍM VÍCESTUPŇOVÉHO MODELU CÍLOVÉHO PROGRAMOVÁNÍ

VERONIKA SKOČDOPOLOVÁ

VYSOKÁ ŠKOLA EKONOMICKÁ  
V PRAZE



## ABSTRAKT

Konstrukce universitního rozvrhu je problém, se kterým se potýkají university každý semestr. Některé využívají léty prověřené rozvrhovací tabule, jiné používají více či méně sofistikované počítačové systémy. Vysoká škola ekonomická v Praze patří zatím stále do té první skupiny. Problémem procesu tvorby rozvrhu je, že je pouze nutně upravován rozvrh z předešlého roku, a proto rozvrh nemůže odpovídat specifickým požadavkům či změnám mezi jednotlivými roky. V tomto článku je prezentován výpočetní přístup k tvorbě rozvrhu na úrovni katedry. Úloha konstrukce rozvrhu je rozdělena do čtyř vzájemně propojených částí, které jsou řešeny pomocí metody nazývané celočíselné cílové programování.

## KLÍČOVÁ SLOVA:

tvorba rozvrhu, celočíselní cílové programování, přiřazovací problém

## ÚVOD

**S**estavení rozvrhu je každoroční problém každé university. V éře počítačů však stále existují školy a university, které využívají rozvrhovací tabuli namísto propracovaného softwaru. Navzdory tomu, že tvorba rozvrhů přilákala pozornost mnoha výzkumníků (např. Al-Yakoob a Sherali, 2006, Murray, Muller a Rudová, 2007, nebo Van den Broek, Hurkens a Woeginge, 2009).

Myšlenka využití matematického modelování pro konstrukci universitního rozvrhu se objevila již v sedmdesátých letech (Harwood a Lawless, 1975, Van Dusseldorp et al., 1976). Existují dva hlavní přístupy k tvorbě rozvrhu pomocí matematického modelu. První z nich spočívá v rozložení problému do více částí, obvykle dvou (Badri, 1996, nebo Mirrazavi, Mardle a Tamiz, 2003) nebo tří (Al-Husain, Hasan a Al-Qaheri, 2011). Tyto části či fáze jsou vzájemně propojené, což znamená, že výstup jedné fáze je zároveň vstupní informací následující fáze. Druhý z principů je založen na řešení úlohy pomocí jediného komplexního matematického modelu. Komplexní model je obvykle řešen pomocí celočíselného programování (Daskalaki, Birbas a Housos, 2004, či Bakir a Aksop, 2008). Obecně je však řešení modelů celočíselného programování NP-obtížná úloha (Černý, 2012), což má za následek, že jsou často pro řešení tohoto typu úloh využívány heuristické či metaheuristické metody<sup>1</sup> (Aladag, Hocaoglu a Basaran, 2009, De Causmaecker, Demeester a Berghe, 2009).

V následující části je stručně popsán způsob tvorby rozvrhu na Vysoké škole ekonomické v Praze. Dále je pak představen čtyřfázový matematický model pro tvorbu rozvrhu na úrovni jedné katedry na této škole. Pro řešení matematického modelu, který je stále vylepšován, je využito metodiky cílového programování.

## POSTUP TVORBY ROZVRHU NA VYSOKÉ ŠKOLE EKONOMICKÉ V PRAZE

**N**a Vysoké škole ekonomické v Praze (VŠE) studuje více než 18 tisíc studentů ve čtrnácti studijních programech rozdělených do 136 studijních oborů (Vysoká škola ekonomická v Praze, 2014). Před každým semestrem je třeba připravit rozvrh, který přiřadí přibližně 1 500 předmětů (s různým počtem přednášek a cvičení) do cca 150 učeben a poslucháren a k přibližně 700 vyučujícím z 38 kateder.

Proces tvorby rozvrhu na VŠE začíná na začátku semestru předcházejícího semestru, na který je rozvrh připravován. Nejprve musí všechny katedry z celé university předat pedagogickému oddělení své požadavky na učebny a posluchárny. Tyto požadavky sestávají z informací o tom, které předměty budou v daném semestru vyučovány, kolik

---

<sup>1</sup> Heuristické a metaheuristické metody dávají řešení, která jsou relativně blízká optimálnímu řešení a jsou získána v rozumném čase.

cvičení a přednášek z každého předmětu je plánováno a jaká je požadovaná kapacita jednotlivých učeben či poslucháren. Součástí by měly být také požadavky na specifické vybavení učebny, jako jsou například počítače pro studenty (počítačové učebny), interaktivní tabule nebo konkrétní softwarové vybavení, které nemusí být k dispozici na všech počítačových učebnách. Každá katedra musí odhadnout zájem studentů o jednotlivé předměty, protože na VŠE nemají studenti pevně předepsaný rozvrh (s výjimkou studentů prvního semestru bakalářského studia). Studenti si tvoří rozvrh sami na základě doporučeného studijního plánu povinných předmětů. Tento plán však nemusí dodržovat. Odhad zájmu o předměty je založen na předchozích zkušenostech a na počtu studentů v jednotlivých ročnících. Odhad je obvykle lehce nadhodnocen.

Požadavky jsou předávány v mnoha různých podobách. Jednotný formulář pro zadávání požadavků neexistuje. Malé katedry často jen ústně sdělí své požadavky pracovníkům pedagogického oddělení. Větší katedry pak používají různé tabulky. Jedním z příkladů může být tabulka 1.

Data z tabulky 1 mohou být interpretována následovně. U předmětu PRED1 jsou vyučována pouze cvičení (zádné přednášky). Každé cvičení může navštěvovat až 20 studentů. Je odhadováno, že předmět si zapíše 80 studentů (čtyři cvičení po dvacet studentech). Mohou probíhat maximálně 2 cvičení ve stejném čase. Cvičení probíhají v počítačových učebnách a měla by probíhat v úterý, pokud to bude možné. Zájem o předmět PRED3 byl odhadnut na 80 studentů, kteří budou rozděleni do čtyř cvičení, kde vždy 2 cvičení mají probíhat ve stejném čase, přičemž jedno z nich bude umístěno do počítačové a druhé do běžné učebny.

ID před- mětu	Počet kurzů		Počet možných paralelních kurzů		Kapacita a typ učebny		Poznámky
	Před	Cv	Před	Cv	Před	Cv	
PR1	-	4	-	2	-	20/PC	<b>Pokud možno v úterý</b>
PR2	1	12	1	2	240	20/PC	-
PR3	1	4	1	2	80	20/PC	<b>2 kurzy paralelně, jeden v počítačové, druhý v běžné učebně</b>
PR4	1	2	1	1	60	20/PC	<b>Přednáška ne ve stejném čase jako přednáška PRED2</b>

**Tabulka 1:** Příklad zadání požadavků na učebny

Na základě požadavků jednotlivých kateder poskytne pedagogické oddělení každé katedře rozvrh, ve kterém jsou katedře přiděleny učebny v konkrétních časech. Učebny

nejsou přidělovány katedrám na celý semestr od pondělí do pátku, ale pouze na konkrétní den v týdnu v konkrétní čas. Tyto rozvrhy učeben jsou obvykle jen lehce upraveny oproti předchozímu semestru. Tento rozvrh katedře slouží jako seznam učeben, které má v daných časech na další semestr k dispozici. Následuje přiřazení předmětů a vyučujících k učebnám v daných časech s přihlášením k preferencím učitelů ohledně času výuky. K tomu je využívána rozvrhová tabule, byť modernizovaná jejím přenesením do programu Microsoft Excel. Takto vytvořený rozvrh je předložen studentům v rámci tzv. registrací, což je první fáze tvorby rozvrhu jednotlivých studentů. Prostřednictvím školního informačního systému si studenti registrují jednotlivé povinné i nepovinné předměty, čímž projevují svůj zájem o konkrétní přednášky a cvičení v konkrétních časech. Po skončení registrací může katedra rozvrh upravit dle preferencí studentů, což znamená, že je možné zrušit předměty či kurzy<sup>2</sup> při malém zájmu studentů nebo naopak přidat kurz při zájmu, který převýšil plánovanou kapacitu. Občas také dojde k tomu, že v průběhu registrací studenti upozorní na kolizi povinných předmětů, které mají být dle vzorového studijního plánu studovány ve stejném semestru, což výuka těchto předmětů ve stejném čase neumožňuje. Takový problém je pak řešen ve spolupráci s pedagogickým oddělením a je-li volná učebna v jiném čase, je změněn čas výuky jednoho z předmětů tak, aby byla kolize odstraněna.

## TVORBA ROZVRHU NA ÚROVNI KATEDRY

**V**tomto článku se nebudeme zabývat odhadem zájmu studentů o nabízené předměty. To by bylo téma na jiný statisticky zaměřený článek. Popíšeme zde postup přiřazování vyučujících k předmětům a poté k časovým oknům a učebnám na katedře ekonometrie Vysoké školy ekonomické v Praze.

Při tvorbě rozvrhu je nutné brát v úvahu preference vyučujících. Jednak jde o preference ohledně předmětů, které jsou dány jak specializací učitele, tak i jakousi oblibou jednotlivých předmětů, a jednak jde o preference časů výuky. Jsou dva možné způsoby vyjádření časové preference ze strany vyučujících. Jedním z nich je, že učitel poskytne informaci o preferenci každého časového okna. Tato informace může být typu ANO (učitel může/chce v daném čase učit), NE (učitel v daném čase učit nemůže/nechce), nebo může jít o hodnocení na dané stupnici, např. 0 (v daném čase nemůže učitel v žádném případě učit) – 5 (jedná se o nejpreferovanější čas výuky). Druhý způsob, jak může učitel vyjádřit své časové preference, je poskytnutí informací typu, že vyučující chce učit maximálně tři dny v týdnu, nejvýše 2 kurzy těsně po sobě, maximálně tři kurzy během jednoho dne a nechce učit v prvním časovém okně každého

---

<sup>2</sup> Rozumějme, že předmět je rozdělen do více kurzů, např. k předmětu probíhají přednášky ve dvou termínech a cvičení ve čtyřech termínech; student si vybírá jeden termín přednášky a jeden termín cvičení. Pojmem kurz rozumíme libovolnou přednášku či cvičení.

dne. Tento způsob vyjádření preferencí času je však komplikovaný z hlediska formulace omezujících podmínek matematického modelu.

## CÍLOVÉ PROGRAMOVÁNÍ

**C**ílové programování je jednou z metod vícekriteriálního programování, které se zabývá hledáním tzv. kompromisního řešení. Ve většině rozhodovacích situací se řídíme podle více často protichůdných úhlů pohledu (kritérií) a abychom došli k nějakému rozhodnutí, musíme často najít kompromis mezi těmito protichůdnými kritérii.

Cílové programování primárně vychází z předpokladu, že cílem rozhodovatele je dosáhnout předem daných cílů. Další princip, na kterém je cílové programování založeno, je optimalizace – rozhodovatel chce vybrat nejlepší řešení ze všech možných. V tomto případě hovoříme o tzv. Pareto-optimálním řešení, kdy nelze zlepšit hodnotu žádného z kritérií, aniž bychom zhoršili hodnotu jiného kritéria. Prvky optimalizace lze v cílovém programování vypozorovat v případě, kdy se chceme co nejvíce přiblížit optimisticky nastaveným cílům. V neposlední řadě využívá cílové programování také princip balancování, který je založen na minimalizaci maximální odchylky od daných cílů (Jones a Tamiz, 2010).

Nyní si formulujme obecný model úlohy cílového programování. Předpokládejme, že úloha má obecně  $K$  cílů, které označíme indexy  $k = 1, 2, \dots, K$ . Dále uvažujeme  $n$  proměnných  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , jejichž prostřednictvím rozhodovatel ovlivňuje své rozhodnutí. Pro proměnné musí platit

$$\mathbf{x} \in X,$$

kde  $X$  je množina přípustných řešení, tedy řešení, která splňují všechny omezující podmínky pro danou úlohu včetně podmínek nezápornosti. Každý cíl (kritérium) je vyjádřen kriteriální funkcí  $f_k(\mathbf{x})$ . Rozhodovatel stanoví množinu cílových hodnot  $g_k$ , kterých chce dosáhnout. Pro  $k$ -tý cíl pak můžeme formulovat následující omezení

$$f_k(\mathbf{x}) + d_k^- - d_k^+ = g_k,$$

kde  $d_k^-$  je záporná odchylka od  $k$ -tého cíle, která vyjadřuje, kolik nám scházelo k dosažení cíle, a  $d_k^+$  je kladná odchylka od  $k$ -tého cíle, která vyjadřuje, o kolik jsme daný cíl překročili. Obě odchylky nabývají pouze nezáporných hodnot a nemohou nabývat kladných hodnot obě zároveň. Rozhodovatel musí předem určit, která z odchylek je pro něj nežádoucí, tedy kterou z odchylek chce penalizovat. Penalizovat lze jak samostatně kladnou, nebo zápornou odchylku, tak jejich součet. Příkladem nežádoucí záporné odchylky může být dosažení určitého zisku, kde každá nižší hodnota

než je daný cíl, je nežádoucí. Příkladem nežádoucí kladné odchylky je pak překročení daného limitu nákladů. Penalizaci součtu obou odchylek využijeme v případě, kdy se chceme co nejvíce přiblížit konkrétní hodnotě kritéria. Tímto způsobem zapisujeme tzv. měkká omezení modelu – nemusíme přesně dosáhnout hodnoty  $g_k$ , ale chceme se jí co nejvíce přiblížit.

Obecně lze tedy úlohu cílového programování formulovat následovně:

minimalizovat

$$z = f(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+),$$

za podmínek

$$\mathbf{x} \in X,$$

$$f_k(\mathbf{x}) + d_k^- - d_k^+ = g_k, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$d_k^-, d_k^+ \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

kde  $z = f(\mathbf{d}^-, \mathbf{d}^+)$  je obecná penalizační funkce. Je nutné zmínit, že model by měl obsahovat také podmínu  $d_k^- \cdot d_k^+ = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , která zajistí, aby pro žádné z kritérií nenabývala kladná i záporná odchylka nenulovou hodnotu. Tato podmínka však bude splněna automaticky vzhledem k minimalizaci penalizační funkce (Jones a Tamiz, 2010).

## ČTYŘFÁZOVÝ MODEL CELOČÍSELNÉHO CÍLOVÉHO PROGRAMOVÁNÍ

**N**yní popíšeme čtyřfázový matematický model pro konstrukci rozvrhu na úrovni jedné katedry. Popsaný model využívá celočíselné cílové programování a je založený na třífázovém modelu, který publikovali Al-Husain, Hasan a Al-Qaheri (2011). Zároveň jde o rozšíření modelu prezentovaného v Skočdopolová (2012). V popsaném modelu je konstrukce rozvrhu rozdělena do čtyř vzájemně propojených fází. Výstup jedné fáze slouží jako vstupní informace pro fázi následující. Využití cílového programování umožňuje formulaci tzv. měkkých omezení. Měkká omezení, na rozdíl od tvrdých omezení, která musí být splněna vždy, by měla být splněna, ale jsou povoleny určité odchylky. V každé fázi modelu je minimalizován vážený součet těchto odchylek.

Model je řešen pomocí optimalizačního systému *LINGO*. Vstupní a výstupní data jsou ukládána v externím souboru vytvořeném pomocí *MS Excel*. Úprava dat mezi jednotlivými fázemi je prováděna pomocí procedur napsaných v jazyce *Visual Basic for Application (VBA)*.

## FÁZE I

**P**ro zápis matematického modelu je použito pět indexních množin – *ucitel* (reprezentuje všechny vyučující, kteří jsou v daném semestru k dispozici), *pred* (přednášky, které je třeba umístit do rozvrhu), *cvic* (cvičení, která je třeba umístit do rozvrhu), *cas* (časová okna), *ucebna* (učebny, které má katedra pro daný semestr k dispozici).

V první fázi modelu je sestaven nejprve rozvrh přednášek. Vzhledem k malému počtu přednášek na katedře je možné tento rozvrh sestavit v jedné fázi. Vyučující *i* je přiřazen k přednášce *j* v časovém okně *k* v učebně *l*. Matematický model první fáze je formulován následovně:

minimalizovat

$$z = p_1 \delta_1^- + p_2 \sum_{i \in \text{ucitel}} (\delta_{2i}^- + \delta_{2i}^+) + p_3 \sum_{l \in \text{ucebna}} (\delta_{3i}^- + \delta_{3i}^+) \quad (1)$$

za podmínek

$$\sum_{i \in \text{ucitel}} \sum_{j \in \text{pred}} SP_{ij} x_{ij} + \delta_1^- - \delta_1^+ = \text{PREF\_SP}, \quad (2)$$

$$x_{ij} \leq SP_{ij}, \quad i \in \text{ucitel}, j \in \text{pred}, \quad (3)$$

$$\sum_{j \in \text{pred}} x_{ij} + \delta_{2i}^- - \delta_{2i}^+ = L_i, \quad i \in \text{ucitel}, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in \text{ucitel}} x_{ij} = 1, \quad j \in \text{pred}, \quad (5)$$

$$\sum_{k \in \text{cas}} y_{ijk} \leq x_{ij}, \quad i \in \text{ucitel}, j \in \text{pred}, \quad (6)$$

$$\sum_{j \in \text{pred}} y_{ijk} \leq P_{jk}, \quad i \in \text{ucitel}, k \in \text{cas}, \quad (7)$$

$$\sum_{i \in \text{ucitel}} y_{ijk} = a_{jk}, \quad j \in \text{pred}, k \in \text{cas}, \quad (8)$$

$$\sum_{j \in pred} y_{ijk} \leq 1, \quad i \in ucitel, k \in cas, \quad (9)$$

$$\sum_{k \in cas} a_{jk} = 1, \quad j \in pred, \quad (10)$$

$$\sum_{l \in ucebnna} b_{jl} = 1, \quad j \in pred, \quad (11)$$

$$\sum_{j \in pred} b_{jl} \leq 1, \quad l \in ucebnna, \quad (12)$$

$$\sum_{j \in pred} C_j b_{jl} + \delta_{3l}^- - \delta_{3l}^+ = \sum_{j \in pred} K_l b_{jl}, \quad l \in ucebnna, \quad (13)$$

$$\sum_{k \in cas} T_k a_{jk} = \sum_{l \in ucebnna} TW_l b_{jl}, \quad j \in pred, \quad (14)$$

$$\sum_{l \in ucebnna} PC_l b_{jl} = COMP_j, \quad j \in pred, \quad (15)$$

$$\delta_{3l}^+ \leq 0,05K_l, \quad l \in ucebnna, \quad (16)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in ucitel, j \in pred,$$

$$y_{ijk} \in \{0,1\}, \quad i \in ucitel, j \in pred, k \in cas, \quad a_{jk} \in \{0,1\}, \quad j \in pred, k \in cas,$$

$$b_{jl} \in \{0,1\}, \quad j \in pred, l \in ucebnna, \quad (17)$$

$$\delta_1^-, \delta_1^+, \delta_{2i}^-, \delta_{2i}^+ \geq 0, \quad i \in ucitel,$$

$$\delta_{3l}^-, \delta_{3l}^+ \geq 0, \quad l \in ucebnna,$$

kde je binární proměnná  $x_{ij}$  rovna 1, pokud je učitel  $i$  přiřazen k přednášce  $j$ , a 0 v opačném případě. Binární proměnná  $y_{ijk}$  je rovna 1, pokud přednáška  $j$  přiřazena učiteli  $i$  je přiřazena do časového okna  $k$ , a 0 v opačném případě. Binární proměnná  $a_{jk}$  (resp.  $b_{jl}$ ) se rovná 1, pokud je přednáška  $j$  (přiřazená učiteli  $i$ ) přiřazena časovému oknu  $k$  (resp. učebně  $l$ ), a 0 v opačném případě. Parametr  $SP_{ij}$  vyjadřuje preferenci přednášky  $j$  ze strany učitele  $i$ . Může nabývat hodnot od 0 do 5, kde 0 znamená, že učitel  $i$  nemůže vyučovat přednášku  $j$ , a hodnota 5 znamená, že učitel  $i$  preferuje výuku přednášky  $j$ . Parametr  $PREF\_SP$  vyjadřuje maximální možnou celkovou preferenci přednášek (jde

o pětinásobek počtu rozvrhovaných přednášek). Parametr  $L_i$  představuje maximální zatížení učitele  $i$ , tj. maximální počet přednášek, které může učitel  $i$  v daném semestru vést. Parametr  $P_{jk}$  se rovná 1, pokud učitel přiřazený k přednášce  $j$  může učit v časovém okně  $k$ , a 0 v opačném případě. Parametr  $C_j$  udává požadovanou kapacitu přednášky  $j$ , parametr  $K_l$  udává kapacitu učebny  $l$ . Parametr  $T_k$  představuje číslo časového okna  $k$ , parametr  $TW_l$  je číslo časového okna, ve kterém je k dispozici učebna  $l$ . Parametr  $PC_i$  vyjadřuje, zda je učebna  $l$  vybavena počítači (hodnota 1), nebo není (hodnota 0), parametr  $COMP_j$  udává, zda je pro výuku přednášky  $j$  nutná počítačová učebna (hodnota 1), nebo není (hodnota 0). Proměnné  $\delta$  jsou odchylkové proměnné, které vyjadřují míru nesplnění jednotlivých měkkých omezení a  $p_1, p_2, p_3$  jsou priority určující důležitost jednotlivých měkkých omezení.

Podmínka (2) maximalizuje celkovou preferenci přednášek. Omezení (3) zajišťuje, aby vyučující  $i$ , který pro přednášku  $j$  stanoví preferenci  $SP_{ij} = 0$ , přednášku  $j$  neučil. Měkké omezení (4) zajišťuje, aby každý vyučující  $i$  učil předem dané množství přednášek  $L_i$ . Podmínka (5) přiřazuje každé přednášce právě jednoho vyučujícího. Omezení (6), (8) a (14) zajišťují provázání binárních proměnných  $x_{ij}, y_{ijk}, a_{jk}$  a  $b_{jl}$ . Vyučující  $i$  bude k dispozici v čase  $k$  díky podmínce (7). Podmínka (9) zabraňuje časovým konfliktům, tj. vyučující  $i$  může v čase  $k$  vést nejvýše jednu přednášku. Každá přednáška  $j$  musí být přiřazena právě do jednoho časového okna  $k$  (podmínka 10)) a právě do jedné učebny  $l$  (podmínka (11)). V každé učebně  $l$  může probíhat nejvýše jedna přednáška (podmínka (12)). Měkké omezení (13) zajišťuje efektivní využívání kapacit učeben, tj. každá přednáška s kapacitou  $C_j$  by měla být přiřazena do učebny odpovídající kapacity  $K_l$ , přičemž kapacita přednášky může kapacitu učebny převýšit maximálně o 5 % (omezení (16)). Prostřednictvím podmínky (15) jsou přednášky, které mají probíhat na počítačových učebnách, přiřazovány do těchto učeben. Penalizační funkce zajišťuje minimalizaci odchylek od cílů (2), (4) a (13).

Po této fázi jsou data v excelovském sešitu upravena prostřednictvím VBA procedury. Modifikace dat spočívá v úpravě přítomnosti učitele (pokud má učitel přednášku v časovém okně  $k$ , nemůže v tomto čase vést žádné cvičení) a ve vyřazení již přidělených učeben ze seznamu dostupných učeben. Následující fáze se zabývají tvorbou rozvrhu cvičení. Použité značení má stejný význam jako v předchozí fázi pouze s tím rozdílem, že index  $j$  představuje cvičení namísto přednášky.

## FÁZE II

**D**ruhá fáze modelu přiřazuje učitele  $i$  ke cvičení  $j$ . Matematický model druhé fáze může být formulován následovně:

minimalizovat

$$z = p_1 \delta_1^- + p_2 \sum_{i \in ucitel} (\delta_{2i}^- + \delta_{2i}^+) \quad (18)$$

za podmínek

$$\sum_{i \in ucitel} \sum_{j \in cvic} SP_{ij} x_{ij} + \delta_1^- - \delta_1^+ = PREF\_SC, \quad (19)$$

$$x_{ij} \leq SP_{ij}, \quad i \in ucitel, j \in cvic, \quad (20)$$

$$\sum_{j \in cvic} x_{ij} + \delta_{2i}^- - \delta_{2i}^+ = S_i, \quad i \in ucitel, \quad (21)$$

$$\sum_{i \in ucitel} x_{ij} = 1, \quad j \in cvic, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \delta_{2i}^- &\leq 1, & i \in ucitel, \\ \delta_{2i}^+ &\leq 1, & i \in ucitel, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &\in \{0, 1\}, & i \in ucitel, j \in cvic, \\ \delta_1^-, \delta_1^+, \delta_{2i}^-, \delta_{2i}^+ &\geq 0, & i \in ucitel, \end{aligned} \quad (24)$$

kde  $S_i$  je maximální možný počet cvičení přiřazených vyučujícímu  $i$  a  $PREF\_SC$  je maximální možná celková preference cvičení (jde o pětinásobek počtu rozvrhovaných cvičení). Význam omezení (19)–(22) odpovídá omezením (2)–(5) z první fáze modelu. Podmínky (23) zajišťují, aby počet cvičení přidělených vyučujícímu  $i$  byl nejvýše o 1 větší či menší, než předem daná hodnota  $S_i$ .

### FÁZE III

Třetí fáze modelu přiřazuje cvičení  $j$  (přiřazené učiteli  $i$ ) do časového okna  $k$ . Matematický model třetí fáze může být formulován následovně:

minimalizovat

$$z = \sum_{k \in cas} \delta_{lk}^+ \quad (25)$$

za podmínek

$$\sum_{k \in cas} y_{ijk} \leq x_{ij}, \quad i \in ucitel, j \in cvic, \quad (26)$$

$$\sum_{j \in cvic} y_{ijk} \leq P_{jk}, \quad i \in ucitel, k \in cas, \quad (27)$$

$$\sum_{i \in ucitel} y_{ijk} = a_{jk}, \quad j \in cvic, k \in cas, \quad (28)$$

$$\sum_{j \in cvic} a_{jk} + \delta_{lk}^- - \delta_{lk}^+ = R_k, \quad k \in cas, \quad (29)$$

$$\sum_{j \in cvic} COMP_j a_{jk} \leq PCR_k, \quad k \in cas, \quad (30)$$

$$\sum_{j \in cvic} y_{ijk} \leq 1, \quad i \in ucitel, k \in cas, \quad (31)$$

$$\sum_{k \in cas} a_{jk} = 1, \quad j \in cvic, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} y_{ijk} &\in \{0,1\}, \quad i \in ucitel, j \in cvic, k \in cas, \\ a_{jk} &\in \{0,1\}, \quad j \in cvic, k \in cas, \\ \delta_{lk}^-, \delta_{lk}^+ &\geq 0, \quad k \in cas, \end{aligned} \quad (33)$$

kde použité značení má stejný význam jako v první fázi při zaměnění přednášek za cvičení.  $R_k$  je počet učeben, které jsou k dispozici v časovém okně  $k$  a  $PCR_k$  je počet počítačových učeben k dispozici v časovém okně  $k$ . Omezení (26)–(28), (31) a (32) mají

obdobný účel jako omezení (6)–(10) v modelu fáze I. Podmínky (29) a (30) zajišťují, aby řešení získané ve fázi III bylo přípustné pro fázi IV. Omezení (29) zajistí, aby do časového okna  $k$  bylo přiřazeno nejvýše tolik cvičení, kolik je k dispozici učeben. Omezení (30) zajišťuje totéž pro počítačové učebny.

## FÁZE IV

$\nabla$  poslední fázi modelu je cvičení  $j$  (přiřazené učiteli  $i$  v časovém okně  $k$ ) přiřazeno do učebny  $l$ . Matematický model fáze IV může být formulován takto:

minimalizovat

$$z = p_1 \sum_{l \in ucebna} \delta_{il}^+ + p_2 \sum_{l \in ucebna} \delta_{il}^- \quad (34)$$

za podmínek

$$\sum_{l \in ucebna} z_{jkl} = a_{jk}, \quad j \in cvic, k \in cas, \quad (35)$$

$$\sum_{k \in cas} z_{jkl} = b_{jl}, \quad j \in cvic, l \in ucebna, \quad (36)$$

$$\sum_{k \in cas} \sum_{l \in ucebna} z_{jkl} = 1, \quad j \in cvic, \quad (37)$$

$$\sum_{j \in cvic} \sum_{k \in cas} z_{jkl} \leq 1, \quad l \in ucebna, \quad (38)$$

$$\sum_{j \in cvic} C_j b_{jl} + \delta_{il}^- - \delta_{il}^+ = K_l, \quad l \in ucebna, \quad (39)$$

$$\sum_{j \in cvic} T_j b_{jl} = TW_l \sum_{j \in cvic} b_{jl}, \quad l \in ucebna, \quad (40)$$

$$\sum_{j \in cvic} COMP_j b_{jl} \leq PC_l, \quad l \in ucebna, \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
 z_{jkl} &\in \{0,1\}, \quad j \in cvic, k \in cas, l \in ucebna, \\
 b_{jl} &\in \{0,1\}, \quad j \in cvic, l \in ucebna, \\
 \delta_{ll}^- &, \delta_{ll}^+ \geq 0, \quad l \in ucebna,
 \end{aligned} \tag{42}$$

kde binární proměnná  $z_{jkl}$  nabývá hodnoty 1, pokud je cvičení  $j$  (přiřazené časovému oknu  $k$ ) přiřazeno do učebny  $l$ , a 0 v opačném případě,  $T_j$  je číslo časového okna přiřazené ke cvičení  $j$  a další značení má stejný význam jako v první fázi při zaměnění přednášek za cvičení. Význam omezení (39)–(41) je obdobný jako u podmínek (13)–(15) v modelu první fáze. Podmínky (35) a (36) zajišťují provázanost binárních proměnných  $a_{jk}$ ,  $b_{jl}$  a  $z_{jkl}$ . Omezení (37) zajistí, že každé cvičení  $j$  bude přiřazeno právě do jedné učebny  $l$  a jednoho časového okna  $k$ . Podmínka (38) zajišťuje, že učebna  $l$  bude v čase  $k$  přiřazena nejvýše jednomu cvičení  $j$ .

Po vyřešení poslední fáze tohoto modelu je sestaven výsledný rozvrh pomocí procedur ve VBA.

## ZÁVĚR

**P**rezentovaný model se zabývá tvorbou rozvrhu na katedře ekonometrie Vysoké školy ekonomické v Praze. Výsledkem modelu je rozvrh, který splňuje všechna tvrdá omezení, která jsou na rozvrh kladena, a který zohledňuje preference vyučujících ohledně času i předmětů, které mají vyučovat. Model byl verifikován na několika datových souborech, kde počet učitelů byl cca 30, počet přednášek cca 20, počet cvičení cca 60, počet časových oken 35 a počet učeben cca 80. Popsaný model byl implementován do aplikace, která pro optimalizaci jednotlivých fází využívá optimalizační systém LINGO. Uživatelské prostředí aplikace je naprogramováno v jazyce *Visual Basic for Application* a vstupní data jsou zadávána prostřednictvím *MS Excel*.

Podrobné výsledky tohoto modelu přesahují rámec tohoto článku a lze je nalézt v (Skočdopоловá, 2015). Rozvrhy získané pomocí tohoto postupu jsou přípustné, tj. neobsahují žádné konflikty, ať už časové, či prostorové. Rozvrhy však často nejsou kompaktní, tj. učitel učí jeden kurz ráno a další až pozdě odpoledne, nebo naopak učí všechny své kurzy v jeden den, což ne každému vyhovuje. Součástí budoucího výzkumu proto bude zajištění zadávání preference časů výuky druhým z výše popsaných způsobů, což zajistí strukturu rozvrhu odpovídající požadavkům každého učitele.

## PODĚKOVÁNÍ

**Č**lánek vznikl s podporou grantu Interní grantové agentury VŠE č. F4/62/2015 Ca institucionální podpory na dlouhodobý koncepční rozvoj vědy a výzkumu na FIS VŠE.

## LITERATURA

- [1] AL-HUSAIN, R.; HASAN, M.K.; AL-QAHERI, H. A Sequential Three-Stage Integer Goal Programming (IGP) Model for Faculty-Course-Time-Classroom Assignments. *Informatica*. 2011, 35, s. 157–164.
- [2] AL-YAKOOB, S. M.; SHERALI, H. D. Mathematical programming models and algorithms for a class–faculty assignment problem. *European Journal of Operational Research*. 2006, 173, s. 488–507.
- [3] ALADAG, C.; HOCAOGLU, G.; BASARAN, M. The effect of neighbourhood structures on tabu search algorithm in solving course timetabling problem. *Expert Systems with Applications*. 2009, 36, s. 12349–12356.
- [4] BADRI, M.A. A two-stage multiobjective scheduling model for [faculty-course-time] assignments. *European Journal of Operational Research*. 1996, 94, s. 16–28.
- [5] BAKIR, M.A.; AKSOP, C. A 0-1 Integer Programming Approach to a University Timetabling Problem. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. 2008, 37, s. 41–55.
- [6] ČERNÝ, M. Výpočty, Volume III. Praha: Professional Publishing, 2012.
- [7] DASKALAKI, S.; BIRBAS, T.; HOUSOS, E. An integer programming formulation for a case study in university timetabling. *European Journal of Operational Research*. 2004, 153, s. 117–135.
- [8] DE CAUSMAECKER, P.; DEMEESTER, P.; BERGHE, G. A decomposed metaheuristic approach for a real-world university timetabling problem. *European Journal of Operational Research*. 2009, 195, s. 307–318.
- [9] HARWOOD, G.; LAWLESS, R. Optimizing organizational goals in assigning faculty teaching schedules. *Decision Science*. 1975, 6, s. 513–524.
- [10] JONES, D.; TAMIZ, M. Practical Goal Programming. International Series in Operations Research & Management Science 141. New York: Springer, 2010.
- [11] MIRRAZAVI, S.K.; MARDLE, S.J.; TAMIZ, M. A Two-Phase Multiple Objective Approach to University Timetabling Utilising Optimisation and Evolutionary Solution Methodologies. *The Journal of the Operational Research Society*. 2003, 54, s. 1155–1166.
- [12] MURRAY, K.; MULLER, T.; RUDOVA, H. Modeling and Solution of a Complex University Course Timetabling Problem. *Practice and Theory of Automated Timetabling VI – Lecture Notes in Computer Science*. 2007, 3867, s. 189–209.
- [13] SKOČDOPOLOVÁ, V. Construction of time schedules using integer goal programming. In *Mathematical Methods in Economics 2012*, Karviná, 2012, s. 793–798.
- [14] SKOČDOPOLOVÁ, V. Modely cílového programování: teorie, aplikace, softwarová podpora. *Disertační práce*, Vysoká škola ekonomická v Praze, 2015.
- [15] Vysoká škola ekonomická v Praze. *Výroční zpráva o činnosti Vysoké školy ekonomické v Praze za rok 2013*. Nakladatelství Oeconomica, Praha, 2014.

- [16] VAN DEN BROEK, J.; HURKENS, C.; WOEGINGE, G. Timetabling problems at the TU Eindhoven. European Journal of Operational Research. 2009, 196, s. 877–885.
- [17] VAN DUSSELDORP, R.A. ET AL. Applications of Goal Programming to Education. In Proceedings of the 14th Annual International Convention of the Association for Educational Data Systems, Arizona, 1976.

# UNIVERSITY TIMETABLING VIA MULTI-STAGE GOAL PROGRAMMING MODEL

KONTAKTNÍ ÚDAJE:

Ing. Veronika Skočdopolová, Ph.D.  
Vysoká škola ekonomická v Praze  
Fakulta informatiky a statistiky  
Katedra ekonometrie  
Nám. W. Churchilla 4  
130 67 Praha 3  
[veronika.skocdopolova@vse.cz](mailto:veronika.skocdopolova@vse.cz)

## ABSTRACT

Problem of university timetable construction is problem that each university deals each term with. Some of them use time-tested scheduling board, the other use more or less sophisticated computer-based system. The University of Economics, Prague, belongs to the first group. The problem of this process is that the timetable from the previous year is only modified a little bit. Therefore the timetable does not react on specific changes between the two academic years. This paper presents a computational approach to timetable construction at department level. The problem of timetabling is divided into four interrelated stages, that each is solved via integer goal programming model.

KEYWORDS:

timetabling, integer goal programming,  
assignment problem

# **CONDITIONALS – NOT THE EXCLUSIVE ISSUE OF HIGHER LANGUAGE LEVELS**

MARTINA BENEŠOVÁ  
MILOSLAV REITERMAN

COLLEGE OF POLYTECHNICS  
JIHLAVA

## **ABSTRACT**

One of the very often used, yet often underappreciated phenomena in English grammar is conditionals. They appear in areas of spoken as well as written discourses, from informal talk to highly professional texts. In various language courses almost entirely canonical conditional forms are presented, which leads to not sufficient preparing students for real life language experience. In this paper we attempt to show the necessity of including also non-canonical forms which occur in real discourses in the majority of cases, as proven in several quantitative researches. To support this attempt we analysed several real texts in economic science and health care science and nursing, which are used in the courses of professional English at VŠPJ, and figured out that the prevalence of the conditionals found is non-canonical, examples of them are listed in our paper.

## **KEYWORDS:**

conditionals, ESP, canonical and non-canonical forms of conditionals

## INTRODUCTION

One of the very often used, yet often underappreciated phenomena in English grammar is conditionals. They appear in areas of spoken as well as written discourses, from informal talk to highly professional texts. They describe the relationship between the cause and the result and concern the possibility of realization of the main clause content which depends on meeting the condition expressed in the dependent (subordinate) clause/if-clause, cf. [5]. Conditionals consist of minimum two clauses which may refer to different time frames, which is often misunderstood, sometimes even ignored by students. This leads to the situation that this grammar area is often underestimated. Moreover, almost every conditional is specific in that it employs different grammar features (tenses, verb forms,...) in the main clause compared to the dependent clause. The aim of this paper is not to bring any comprehensive overview of grammatical aspects or any teaching methodology. Our targets are to demonstrate frequent occurrence and significance of this phenomenon in both everyday English and real professional spoken and written texts and the significance of its highlighting in professional language classes. Due to our practical experience we have chosen particular example conditional sentences from the texts<sup>1</sup> of economic science and health care science and nursing. This way we would like to show that their real usage is often not in a rut of "textbook" syntagms, which must not be ignored.

The main clause expresses the result of meeting the condition in the dependent clause. The dependent clause expresses the condition which must be met to result in the action described in the main clause. The inherent non-assertiveness or 'iffiness' [4] of conditionals means that they can be used for hypothesizing and hedging. In domains such as medicine where absolute certainty is frequently impossible they therefore enable researchers to retain a certain distance from their claims ([11]; [1]; [9]). This is particularly true of the clinical investigations analysed here where reasoning is inductive and evidence must be carefully weighed. If-conditionals can also have an important argumentative role, enabling the text producer to set up an alternative argumentative or fictional space to promote research claims, by envisaging alternatives and conceding competing points of view. At the same time results obtained in science, and in medical research in particular, are often established under strictly controlled conditions. Researchers need to carefully delimit the research space and specify the conditions under which the research was carried out. Conditional constructions can

---

<sup>1</sup> There are two kinds of these texts: in the first semesters the students at VSPJ are supplied text which serve as a simplified simulation of professional texts so that the students can train professional text processing. Such texts are not aimed at grammar study primarily. The other text type is real professional texts with which the students are acquainted and which they are trained to use for information mining.

play an extremely important role here, in specifying for example the eligibility criteria for patients involved in trials, cf. [10].

As for the types, we are going to deal with four basic types of conditionals plus mixed types and some specific forms related to conditionals; the four basic types are traditionally called conditionals 0, 1, 2, 3. Conditionals 1, 2, 3 are sometimes referred to as canonical conditionals. The Czech traditional terminology concerning conditionals differs very much from the English terminology as it reflects the use of conditionals in different time frames. Sometimes also conditional 4/mixed is mentioned.

The use of conditionals in English is very frequent. Each of them is commonly used in both the everyday life and in trade, travel, sciences, health care etc. Therefore it is advisable not to underestimate them and to pay due attention to them. Sometimes a misuse of conditionals may lead to fatal consequences.

There are seven degree programmes at College of Polytechnics Jihlava where professional English is taught. We have chosen to demonstrate the use of conditionals in examples from two areas connected with the above mentioned degree programmes, i.e. economic sciences (ES) and health care sciences and nursing (HCS). With the following example conditional sentences we did not mean to demonstrate the frequency proportion of particular conditional type occurrence but to bring the same extensive number of real examples to highlight that conditionals are employed in professional texts naturally and frequently.

## CONDITIONAL 0<sup>2</sup>

ES: *If there are any proposals like that, they are dealt with under AOB.*

*If a client is unable to repay his or her loan (principal plus interest), the mortgaged asset becomes the property of the bank.*

*If management wishes to increase the number of authorized shares, it needs the agreement of shareholders.*

*If you own a bond, you are entitled to a regular interest (or coupon) payment and at maturity you get back the bond's face value (or principal).*

*If you sign an agreement to rent this equipment for a year, you are the lessee and the owner is the lessor.*

---

<sup>2</sup> Conditional 0 sample sentences taken from [3], [8], [13].

*Operating leases are attractive to equipment users if the lease payment is less than the user's equivalent annual cost of buying the equipment.*

*If the company takes out a bank loan, it enters into a contract with the bank promising to pay interest and eventually repay the principal.*

*The agenda is adopted if it is backed by the simple majority.*

*If the retailer defaults on the loan, the bank can seize the collateral and use it to pay off the debt.*

*I feel very uncomfortable if I overdraw my account.*

HCS: *If the fetus has the umbilical cord around its neck, the Cesarean section has to be performed.*

*If one medication enhances the effect of the other drug, we speak about synergistic effect.*

*If the body's system is in order, it produces substances called antibodies, which in the blood and attack things foreign to the body such as micro-organisms.*

*If bone surgery is to be performed, the skin is scrubbed with an antiseptic after hairs have been removed.*

*If the thrombus or a part of it becomes detached and moves freely in the circulation, it is termed embolus.*

*If the tiny lumen of the appendix becomes obstructed with faecal and inflamed, we speak about appendicitis.*

*If pulmonary embolism is large, it may cause a sudden death – otherwise the patient complains pain in the chest, difficulty in breathing and a sudden need to have their bowels opened.*

*When it is cold, scrotal muscles contract to wrinkle the skin and elevate the testes, conserving temperature. When warm, they relax.*

*If glucose is not needed immediately for energy, the liver converts extra glucose into glycogen, which is stored in the liver.*

*I feel nauseated if I take this pill.*

## CONDITIONAL 1<sup>3</sup>

ES: *High unemployment and excess capacity will prevail if the economy produces less than its potential.*

*Goods A and B are substitutes if an increase in the price of good A will increase the demand for substitute B.*

*If the economy produces less than its potential, high unemployment and excess capacity will prevail.*

*If a market becomes monopolized, the price at each level of output will increase.*

*If the central bank is face with a business downturn, it can increase the money supply and lower interest rates to stimulate economic activity.*

*If the firm wishes to raise additional capital, it may do so either by borrowing or by selling new shares to investors.*

*If somebody wants to make a payment, they can make out a cheque or arrange a money transfer from their account to somebody else's account.*

*If you need a flip chart, please tell me.*

*If you do not mind, let us turn now to my presentation.*

*If you turn to page 10 of the study before you, you will see the exact numbers.*

As we can see conditionals 0 and 1 are mainly used in real information sources used in economic sciences as means of expressing: generally valid fact, instruction.

HCS: *You will feel better if you eat less meat and more vegetable.*

*If you quit smoking immediately, you will not suffer from cough attacks so much.*

*If special laboratory tests are required before surgery or if the patient is in a weakened condition, the admission to hospital may be a few days prior the operation.*

*If the patient requires close observation for a longer period of time, he may be transferred to the intensive care unit (ICU).*

---

<sup>3</sup> Conditional 1 sample sentences taken from [3], [8], [12], [13].

*If the blood leaks, I will apply a plaster on it.*

*If the egg is fertilized in the fallopian tube, the resulting cell mass may implant in the wall of uterus.*

*Consult primary health care provider if intractable vomiting occurs.*

*Condition will disappear if lifting and carrying baby does not aggravate it.*

*If initial weight loss is greater than 10%, infant's nutritional and hydration status must be reassessed.*

*If infant is to be formula fed, initiate first feeding after assessment gastrointestinal functioning.*

As we can see conditionals 0 and 1 are mainly used in real information sources used in health care sciences and nursing as means of expressing: generally accepted truth, instructions and physical or emotional state.

## CONDITIONAL 2<sup>4</sup>

ES: *Imperfect competition would occur if a single seller (a monopolist) raised a price of a good sky-high to earn extra profit.*

*If technology did not change, but the price of inputs changed, the costs of production would change and so would supply.*

*If this listed price were for a \$1,000 face-value bond, then this price would be equal to \$1,021.25.*

*I would be grateful if I had the opportunity to talk to you today about the result of our marketing campaign.*

*I would like to introduce myself if I could.*

*If the price of the share stood at the same price at the end of the year, I would keep them.*

*If there were any other questions, we could deal with them under the item "Other business".*

*If you were interested, I would like to introduce a paper dealing with this.*

---

<sup>4</sup> Conditional 2 sample sentences taken from [3], [12], [13].

*If you did not quite catch that, I would not mind going over it again.*

*I think we should move on now if we were going to finish by 11 o'clock.*

As we can see conditional 2 is mainly used in real information sources used in economic sciences as means of expressing: hypotheses, alternative behavior, politeness, instructions.

HCS: *If I were you, I would not refuse that operation.*

*You would have less problems with your hip joint if you lost weight.*

*If you were not feeling well, you would have to have yourself examined.*

*If you did not maintain the treatment procedures, there would be a great danger of complications.*

*If you did not mind, I would take your pulse.*

*I would be able to assess your health condition better if I had your file at my disposal.*

*If the side effects were severe for you or if you had a condition that would be affected by a medication, the drug was contraindicated for you and cannot be prescribed.*

*If you did not suffer from allergy, I would prescribe this medicine for you.*

*If I knew your family history, I would be able to assess the risk of operation.*

*If there were the bleeding again, you should take her to maternity hospital immediately.*

As we can see conditional 2 is mainly used in real information sources used in health care sciences and nursing as means of expressing: hypotheses, advice, instructions, recommendation, politeness, alternative behavior.

## CONDITIONAL 3<sup>5</sup>

ES: *If there had not been a drop between July and November of 2p in Resox shares, I would not have bought them.*

---

<sup>5</sup> Conditional 3 sample sentences taken from [3], [14].

*If you had contacted me earlier, I would have given you some background information.*

*I would have gone on to the next point if there had not been so many enquiries.*

*I would have passed round this sample and asked you to test the quality of our material if I had had it at my disposal at that time.*

*If this sum of money had been kept as cash, it would have borne no interest.*

*If the company had taken out a bank loan, it would have entered into a contract with the bank promising to pay interest and eventually repay the principal.*

*If a chocolate producer had been worried about rising cocoa prices, it could have used the derivatives markets to fix the price at which it would have bought future cocoa requirements.*

*If you had bought shares in a money-market fund, your money would have been pooled with that of other investors and would be used to buy safe, short-term securities.*

*If no one had been prepared to sell at your price at that time, the specialist would have been prepared to make a note of your order and executed it as soon as possible.*

*If the economy had attempted to produce more than its potential output, prices would have begun to rise more and more rapidly as resources would have been utilized too intensively.*

HCS: *If you had followed the doctor's instructions more carefully, you could have been released from hospital much earlier.*

*I would have made your bed if you had asked me.*

*If it were not such an infectious disease, you would not have had to stay in hospital so long.*

*If you had not gone to work with flu, you would not have suffered from valve stenosis.*

*If you had been able to provide first aid, the patient could have stayed alive.*

*If you had used the sleeping pill, you would not have suffered from insomnia.*

*If you had used the sun care cream, you would not have burnt yourself.*

*If you had got dressed enough and properly, you would not have got cystitis.*

*If there had not appeared such profuse inflammation, we would have been able to operate you on earlier.*

*If a staff member had had an infection, he would have been excluded from the operating theatre.*

*If you had mentioned all of your symptoms, there would not have been such complications.*

As we can see conditional 3 is mainly used in real information sources used in economic sciences as well as in health care sciences and nursing as means of expressing: the condition which did not happen in the past and therefore made the action result in the past impossible either, very often it is used to express reproaches and regret.

## CONDITIONAL 4<sup>6</sup>

ES: *If a country had been doing well, the balance of payments would be positive; the currency would tend to appreciate.*

*If the firm had failed to make the promised payments to the bank, it may be forced into bankruptcy.*

*If a company's articles had permitted cumulative voting, the directors would be voted upon jointly and stockholders could, if they wished, allot their votes to just one candidate.*

*If the company had missed a preferred dividend, the preferred stockholders would gain some voting rights.*

*If the retailer had defaulted on the loan, the bank would seize the collateral and use it to help pay off the debt.*

*If you had followed financial news more carefully, you would not be surprised now.*

*The 2008 economic depression would not have spread all over the world so quickly if banks were not so greedy.*

---

<sup>6</sup> Conditional 4 sample sentences taken from [3], [8].

*If the agenda had been handed out in advance, there would not be so much misunderstanding.*

HCS: *If you had taken that medicine, your blood pressure would be fine now.*

*If you had yourself examined regularly, you would not have fallen unconscious yesterday.*

*If only I had used any contraception, I would not be pregnant.*

*If you had not been in draught for so long, you would not have an earache.*

*If the pancreas in this patient had not produced sufficient insulin to allow glucose to enter the body cells, the condition called diabetes mellitus would develop.*

*If the patient had been dyspnoeic after the last seizure, hospitalization would be necessary with current complications.*

*If this patient did not have such high blood pressure, he would not have had CVA.*

*If this patient had not had such high blood pressure, he would not have CVA.*

In our example sentences above conditional 4 means a mixture of conditional 2 and 3 components. And as a mixture which stands outside the “textbook” syntagm it very often causes troubles to students, yet statistically it is used more frequently than pure canonical conditionals.

Therewithal, there are two types of them: The first, more common, is the condition expressed as conditional 3 (because the condition initiates the results, i.e. it is earlier in time) and the result as second conditional. In the other type the condition is expressed as conditional 2 (it is generally valid) and the result as third conditional.

However, real texts show that we cannot be content with the knowledge of the so far mentioned mixed conditional types. As examples the following conditional type examples may serve:

ES: *If a firm acts in its shareholder's interest, it should accept those investments that increase the value of their stake in the firm. (real source example – [3])*

*If a firm acts in its shareholder's interest, it accepts those investments that increase the value of their stake in the firm.*

HCS: *If your condition grew worse, call the emergency immediately.* (real source example – [13])

*If your condition grew worse, you should call the emergency immediately.*

In both cases we start with a real source example sentence. Both example conditionals, however, do not match any of the above mentioned “textbook” conditional types (in the former case in the dependent clause there is a present simple tense verb, which may refer to either zero or first conditional, yet in the main clause we find a modal verb in conditional, which shows second conditional; in the latter case in the dependent clause there is a past simple verb referring to second conditional and in the main clause there is an imperative). Below the real source example sentences we came with the artificial “textbook” conditional sentences closest as for the meaning. In both cases we can see that the real source sentences change the meaning to some extent with respect to the given situation, i.e. there may be situations when we cannot do only with “textbook” syntagms.

Simply said, the only component of the conditional sentence which can be modelled via the above listed rules is the dependent clause. As for the main clause the user is practically free to use anything he or she wishes to expresses whatever he or she intends.

This view is applicable also in the following sentence types:

*He looks as if he was/were sick now.*

*He looked yesterday as if he had not slept the night before.*

The same is valid also for wish clauses, e.g.:

*I wish I was granted the loan.*

*I wish I had not invested in this hedge fund.*

When dealing with this phenomena, it should be reminded that one cannot be limited solely with the conjunction if; other expressions are frequently used according to different situations, e.g. unless, on condition that, providing/provided, supposing/supposed, in case.

## CONCLUSION

To back our empirically-based approach we would like to quote that in the year of 2008 Elizabeth Rowley-Jolivet and Shirley Carter Thomas, cf. [10], performed a quantitative research on the usage of conditionals in research articles (RA) and conference presentations (CP) in health care sciences by native and non-native speakers. The outputs showed that “the frequency of if-conditionals varies considerably with genre, ranging from only 0.96/1000w. in the RA to 3 times as many in the CPs (3/1000w.). This corroborates other studies which have found the construction to be more frequent in speech than in writing, both in general and in specialised discourses, cf. [7], [2], [6]. While the difference between the two speaker groups is negligible in the RA (native speakers 1.06 vs. non-native speakers 0.85/1000w), it is considerably more marked in the CP, where the native English speakers use the construction twice as frequently as their French-speaking colleagues (NSE 3.85 vs. FSE 1.96).” Another interesting and important finding of this research was that 95.4% in RA and 87.5% in CP were other than canonical forms of conditionals (present + present, present + modal, present + past, modal + other, past + past, past + modal, past perfect + past, truncated verb sequences etc.); these non-canonical syntagms are very often omitted in traditional textbooks and ESP materials.

## CONCLUSION

The outcomes of the above mentioned research as well as our long-time ESP experience have proven the significance of going beyond teaching of canonical conditionals. Naturally, beginners have to start with the canonical structures as regular as possible so that they are able to absorb the substance of conditional usage in English. However, the more experienced the students are, the bigger need of “irregular” conditionals arises, and they therefore should be incorporated into the teaching/learning process. It is highly beneficial to back and support such process with real texts encounter where the students can clearly see the evidence of such non-canonical conditional usage high frequency and learn also to understand and process them from the point of view of the receiver.

## LITERATURE

- [1] Adams-Smith, D. E. 1984. Medical discourse: Aspects of author's comment. *The ESP Journal* 3, 25-36.
- [2] Biber, D., S. Johansson, G. Leech, S. Conrad, et E. Finegan. 1999. Longman Grammar of Spoken and Written English. Harlow, GB: Pearson Education.
- [3] Brealey, R. A., Myers, S. C., Allen, F. Principles of Corporate Finance. New York: McGraw-Hill, 2008.
- [4] Carter-Thomas, S. 2007. The 'iffiness' of medical research articles. A comparison of English if and French si. In K. Flottum (ed.). *Language and Discipline Perspectives on Academic Discourse*. Newcastle, GB: Cambridge Scholars Press, 161-188.
- [5] Dušková, L. Mluvnice současné angličtiny na pozadí češtiny. Praha: Academia, 2003.
- [6] Ferguson, G. 2001. If you pop over there: a corpus-based study of conditionals in medical discourse. *English for Specific Purposes* 20/1, 61-82.
- [7] Ford, C.E. et S.A. Thompson. 1986. Conditionals in discourse: A text-based study from English. In E. Traugott, A. ter Meulen, J.S. Reilly, et C.A. Ferguson (eds.). *On Conditionals*. Cambridge: Cambridge University Press, 353-372.
- [8] Kaftan, M., Horáková, L. English in Economics. 2004. Praha : Karolinum, 2004.
- [9] Prince, E.F., J. Frader, C. Bosk. 1982. On hedging in physician-physician discourse. In R. J. di Pietro (ed.). *Linguistics and the professions*. Hillsdale NJ: Ablex, 83-97.
- [10] Rowley-Jolivet, E., Carter-Thomas, S. When practice belies 'theory': Form, function and frequency of if-conditionals in specialised discourse. ASp [online]. 2008, (53-54) [cit. 2015-09-03]. Available from: <http://asp.revues.org/343#article-343>
- [11] Salager-Meyer, F. 1994. Hedges and textual communicative function in medical English written discourse. *English for Specific Purposes* 13, 149-170.
- [12] Samuelson, P.A., Nordhaus, W.D. Economics. Boston : McGraw-Hill, 2005. ISBN 0-07-28725-5.
- [13] Topilová, V. Medical English: Angličtina pro zdravotníky. Havlíčkův Brod: TOBIÁŠ, 2001.
- [14] Weygandt, J. J.; Kimmel, P. D.; Kieso, D. D. Accounting Principles. Wiley, 2008

# **PODMÍNKOVÉ VĚTY**

## **- NEJEN VÝSADA**

## **VYŠŠÍCH JAZYKOVÝCH**

## **ÚROVNÍ**



### **KONTAKTNÍ ÚDAJE:**

Mgr. Martina Benešová, Ph.D.  
Vysoká škola polytechnická Jihlava  
katedra jazyků  
Tolstého 16  
586 01 Jihlava  
E-mail: martina.benesova@vspj.cz

Ing. Miloslav Reiterman  
Vysoká škola polytechnická Jihlava  
katedra jazyků  
Tolstého 16  
586 01 Jihlava  
E-mail: miloslav.reiterman@vspj.cz

### **ABSTRAKT**

Jedním z velmi často se vyskytujících, nicméně mnohdy podceňovaných jevů anglické gramatiky jsou podmínkové věty. Objevují se v mluvených i psaných výpovědích, ve spektru od neformálního projevu až po vysoce odborné texty. V nejrůznějších jazykových kurzech jsou studenti téměř výhradně seznamováni s kanonickými tvary podmínkových vět, což vede k nedostatečné přípravě studentů pro používání anglického jazyka v reálné praxi. V tomto příspěvku se pokoušíme poukázat na nutnost výuky nekanonických tvarů podmínkových vět, které se objevují v reálných výpovědích ve větině případů, jak dokazuje řada kvantitativních výzkumů. Abychom tuto skutečnost prakticky ilustrovali, analyzovali jsme několik reálných textů z oblastí ekonomie a zdravotnictví a ošetřovatelství, které na VŠPJ používáme v kurzech odborného anglického jazyka. Z celkového počtu podmínkových vět byla zjištěna převaha nekanonických tvarů, jejichž ukázky jsou uvedeny v textu.

### **KLÍČOVÁ SLOVA:**

podmínkové věty, ESP, kanonické a nekanonické tvary podmínkových vět

# ODHAD CHYBĚJÍCÍCH HODNOT ORDINÁLNÍ PROMĚNNÉ

JANA BORŮVKOVÁ

VYSOKÁ ŠKOLA POLYTECHNICKÁ  
JIHLAVA

## ABSTRAKT

Cílem tohoto článku je představit dvě naprosto odlišné matematicko-statistické metody, které je možné použít pro predikci ordinální proměnné. První metoda je jednou z metod data miningu – klasifikační strom typu CART, druhá je běžně používaný lineárně regresní model, který se primárně používá pro odhad spojité proměnné. Oba popisované přístupy je možné použít jak k predikci chybějících ordinálních dat, tak i k analýze vztahů mezi proměnnými. Modely jsou popsány s důrazem na porovnání výhod a nevýhod obou přístupů.

## KLÍČOVÁ SLOVA:

data mining, klasifikační strom, CART, lineární regresní model, faktorová analýza, chybějící hodnoty

## ÚVOD

**V** praxi se při analýze dat často setkáme s problém chybějících dat, a stojíme před úkolem tuto situaci řešit. Konkrétním příkladem může být HDP (v PPS na obyvatele) za rok 2011 pro regiony NUTS 2, který je publikován na webovém portálu Eurostatu [1]. HDP je sice původně spojité proměnná, pro další prezentaci na webu Eurostatu však byla tríděna dle metodiky používané Eurostatem do šesti intervalů. Pro 9 regionů (7 švýcarských regionů, Island a Lichtenštejnsko) údaj o HDP na obyvatele (v PPS) není dostupný. K řešení tohoto problému se nabízí několik možností:

1. vyloučit neúplně popsané případy (casewise deletion)
2. vyloučit pouze neúplné páry (pairwise deletion)
3. nahradit chybějící hodnoty střední hodnotou (mean substitution)
4. chybějící hodnoty dopočítat (imputation)

Vyloučení dat z analýzy (tedy možnost 1 a 2) se používá velmi často, může však vést k různým problémům, zejména pokud máme soubor malého rozsahu nebo pokud nejsou chybějící data rozmištěna náhodně. Nahrazení chybějící hodnoty střední hodnotou (aritmetickým průměrem nebo mediánem) může být problematické, protože snižuje variabilitu v datech. Snížení variability je přímo úměrné počtu chybějících hodnot.

V poslední době se velmi často přistupuje k dopočítání chybějících dat pomocí některé matematicko-statistické metody. Pro tento přístup je nutné mít nezávisle proměnné, na jejichž základě by bylo možné odhadnout hodnoty závisle proměnné, v našem případě HDP na osobu (v PPS). Eurostat publikuje na svém portálu obrovské množství informací na úrovni regionů NUTS 2, z nichž by bylo možné vtipovat proměnné vhodné pro tento typ modelu. Výběr konkrétních proměnných je však již nad rámec tohoto článku.

V tomto článku budou představeny dvě metody – klasifikační strom typu CART (zástupce skupiny metod spadající mezi tzv. data mining) a lineární regresní model (klasický statistický přístup založený na verifikaci hypotéz) a oba přístupy k odhadování chybějících hodnot budou navzájem porovnány. V článku se zaměříme pouze na odhad chybějících hodnot ordinální proměnné.

## DATA MINING

**D**ata mining (doslovny český překlad „dolování dat“ se zpravidla nepoužívá) je proces hledání závislostí, vztahů, vzorců, případně trendů analyzováním vlastností velkých objemů dat uložených v databázích s využitím různých matematických a statistických metod. V data miningu na rozdíl od klasické konfirmatorní statistické analýzy, kdy výzkumník nejprve formuluje hypotézu a data použije k jejímu vyvrácení nebo potvrzení, žádnou předem formulovanou hypotézu nemáme a snažíme se popsat jakékoli závislosti a souvislosti v datech. Přesto není možné přesně určit hranici, která by oddělovala statistické metody patřící do data miningu od ostatních.

V praxi se při data miningu setkáváme s několika typy úloh:

- regrese – vytváří se model, který lze použít pro odhad spojitých vlastností neznámých objektů
- klasifikace – vytváří model, který lze použít pro odhad diskrétních vlastností neznámých objektů
- predikce – vytváří se model, který lze použít pro odhad vlastností měnících se v čase
- shlukování – vytváří se model, který dokáže identifikovat sobě podobné objekty

Mezi hlavní techniky data miningu tedy patří:

- metody popisné statistiky
- klasifikační a regresní stromy
- regresní analýza
- diskriminační analýza
- neuronové sítě
- shluková analýza
- analýza časových řad

Z uvedeného je zřejmé, že využití data miningu je skutečně široké. V tomto článku bude představena jedna z metod – klasifikační strom typu CART a dále bude popsáno její využití k odhadu chybějících hodnot ordinální proměnné.

## KLASIFIKAČNÍ STROM

**R**ozhodovací strom je sada hierarchicky uspořádaných rozhodovacích pravidel, u nichž je zřejmá analogie s reálnými stromy, jak je známe z přírody, proto tedy lze hovořit o tom, že rozhodovací strom „rosté“, „větví se“ nebo „je prořezáván“.

Pro vytváření stromů existuje celá řada algoritmů. Základním a nejčastěji používaným představitelem binárních stromů je strom typu CART (Classification and Regression Tree) [2]. Při klasifikaci vytváříme model, který popisuje danou situaci tak, aby byl schopen zařazovat neznámé vzorky do předem daných kategorií, kterých je konečně mnoho. Naproti tomu regresní stromy modelují závislost spojité proměnné na jedné či více nezávislých proměnných.

Na začátku vytváření stromu patří všechna pozorování do jednoho uzlu (kořene). Následně jsou tato pozorování rozdělena do dvou dceřiných uzlů na základě jednoho z prediktorů a určité jeho hodnoty. Tyto dceřiné uzly jsou dále opět binárně děleny na další uzly. K výběru prediktoru a stanovení jeho dělící hodnoty, která zajistí nejlepší rozdělení souboru, používáme kriteriální statistiku (splitting criterium) určující homogenitu uzlu.

Podle [3] je nejčastěji používaná kriteriální statistika pro regresní stromy kvadratická chyba, kterou minimalizujeme. Snažíme se tedy najít takové rozdělení závisle proměnné  $Y$ , které bude mít nejmenší průměrnou kvadratickou odchylku ( $Q_t$ ) hodnoty  $y_i$  v potenciálním uzlu  $t$  od průměru těchto hodnot:

$$\bar{y}_t = \frac{1}{N_t} \sum y_{i(t)}$$

$$Q_t = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} (y_{i(t)} - \bar{y}_t)^2$$

kde  $N_t$  je počet pozorování v uzlu  $t$  a  $y_{i(t)}$  jsou hodnoty závisle proměnné v uzlu  $t$ .

Kriteriální statistika pro klasifikační stromy je podle [3] založena na poměru kategorií závisle proměnné v potenciálních uzlech. Nejpoužívanějšími kritérii jsou Gini index ( $G_I$ ), Entropie ( $H$ ) a Klasifikační chyba ( $ME$ ):

$$GI = \sum_{c=1}^J p_{tc}(1 - p_{tc}) = 1 - \sum_{c=1}^J p_{tc}^2$$

$$H = - \sum_{c=1}^J p_{tc} \log_2 p_{tc}$$

$$ME = 1 - \max\{p_{tc}\}$$

kde  $p_{tc}$  je pravděpodobnost kategorie  $c$  v uzlu  $t$  a  $J$  je počet kategorií.

Pro klasifikační stromy typu CART je nejčastěji používaná kriteriální statistika Gini index.

Při růstu klasifikačního stromu CART se opakuje následující postup: Ke každému spojitému prediktoru  $X$  se určí dělící hodnota  $a$ , pro kterou je kriteriální statistika minimální. Následně je vybrán prediktor s nejnižší hodnotou kriteriální statistiky a hodnota  $a$  je použita k rozdelení souboru do dvou dceřiných uzel. Tento proces nazýváme růst stromu.

Růst stromu se zastaví buď sám, a to v těchto případech:

- terminální uzel obsahuje pouze jedno pozorování
- všechna pozorování v uzlu mají stejnou hodnotu všech prediktorů
- všechna pozorování v uzlu mají stejnou hodnotu závisle proměnné

nebo dosažením nastaveného parametru, kterým může být např.:

- maximální počet větví
- minimální počet pozorování v terminálním uzlu
- frakce pozorování v uzlu, která již nemůže být oddělena

Před vlastní analýzou rozdělíme případy náhodně na dvě přibližně stejně velké skupiny – trénovací a testovací data. Zatímco trénovací data jsou použita k vybudování modelu, testovací data slouží k jeho verifikaci. Pro každý model je nutné vhodně zvolit složitost modelu, která je reprezentována počtem terminálních uzel [4]. Strom by měl mít co největší přesnost, ale zároveň by rozdíl v chybě mezi trénovacím a testovacím souborem měl být co nejmenší. Optimální složitost je možné stanovit pomocí křížové validace (Crossvalidation), při které jsou pozorování rozdělena do  $k$  nezávislých podsouborů.  $k - 1$  souborů se použije pro tvorbu modelu a zbývající soubor se použije pro testování. Celkem je tedy vytvořeno  $k$  modelů otestovaných na  $k$  testovacích

souborech [3]. Další metodou optimalizace složitosti modelu je prořezávání složitého stromu [5].

Výsledný model je sada několika rozhodovacích pravidel. Každé cestě stromem od kořene k terminálnímu uzlu odpovídá jedno pravidlo. Uzly, které nejsou terminální, se spolu s dělící hodnotou objeví v předpokladu pravidla, zatímco kategorie přiřazená terminálnímu uzlu bude v závěru pravidla. Jako příklad jednotlivého pravidla může sloužit:

*IF* příjem > 20 000 *AND* konto > 50 000 *AND* zaměstnaný = ano *THEN* úvěr = ano.

Výsledný klasifikační strom může být použit jak pro predikci chybějících kategoriálních dat, tak i pro identifikaci vztahů mezi jednotlivými proměnnými a jejich vysvětlení pomocí pravidel a kritérií.

## LINEÁRNÍ REGRESNÍ MODEL

**C**ílem lineární regrese je objasnění vztahu mezi vysvětlovanou proměnnou  $Y$  a vstupními vysvětlujícími proměnnými  $X_i$  [6]. Využití regrese se primárně týká odhadu hodnoty spojité proměnné, ale je možné lineární regresní model použít i pro odhad hodnoty ordinální proměnné; při procesu ordinalizace však ztrácíme další část informace.

Efekt, který má na proměnnou  $Y$  variabilita prediktorů  $X_i$ , lze popsát pomocí prostého lineárního vztahu

$$Y = b_0 + \sum_i b_i X_i + E$$

kde  $b_i$  jsou koeficienty regresního modelu a  $E$  reziduum.

Kvalitu modelu a jeho predikční schopnosti lze posoudit na základě koeficientu determinace  $R^2$ , který je podílem variability vysvětlené modelem a celkové variability, je roven části variability proměnné  $Y$ , která je vysvětlena prediktory  $X_i$ .

Předpokladem pro vytvoření lineárního modelu jsou lineární vztahy mezi prediktory a závisle proměnnou. Pro odhad parametrů lineárního regresního modelu se nejčastěji používá metoda nejmenších čtverců, k jejímž základním předpokladům podle [6] patří

- nekorelované prediktory
- rezidua s normálním rozdělením a s nulovou střední hodnotou
- závislost čistých reziduí na předpovězených hodnotách nevykazuje žádné systematické vztahy
- rezidua neobsahují vlivné body (vybočující nebo odlehlé hodnoty)

Před vlastním vytvořením modelu je tedy nutné zajistit, aby prediktory byly nekorelované. V praxi se však velmi často u prediktorů setkáváme s vysokou multikolinearitou. Tu je možné odstranit např. použitím faktorové analýzy s vhodnou (ortogonální) rotací, která redukuje počet proměnných, a výsledné faktory jsou ortogonální.

Po vytvoření modelu je ještě potřeba model verifikovat, to znamená analyzovat rezidua a ověřit, že platí všechny čtyři výše uvedené předpoklady pro rezidua.

Výsledný model lze použít pro predikci hodnot spojité proměnné, které je následně možno transformovat do ordinální proměnné. Kromě predikce chybějících hodnot model popisuje efekt, který má na závisle proměnnou variabilitu prediktorů, a lze jej tedy využít i pro popis a kvantifikaci vztahů mezi závislou proměnnou a nezávisle proměnnými. Jestliže všechny proměnné před vlastní analýzou standardizujeme, lze podle standardizovaných regresních koeficientů posuzovat relativní přínos prediktorů k predikci závisle proměnné.

## FAKTOROVÁ ANALÝZA

**P**odle mnoha autorů, např. [7] nebo [8], mohou vysoce korelované prediktory způsobovat problémy při interpretaci koeficientů lineárního modelu. Z tohoto důvodu je nutné redukovat počet proměnných např. pomocí faktorové analýzy, která vysvětluje závislost proměnných. Redukce dat je dosaženo vyčíslením skóre pro každý faktor a následnou nahradou původních proměnných novými latentními proměnnými, které nazýváme faktory [9].

K nevýhodám metody patří zejména nutnost zvolit počet společných faktorů ještě před provedením vlastní analýzy. Není-li počet společných faktorů znám, je nutné jej odhadnout např. pomocí grafu úpatí vlastních čísel. Protože numerické výsledky jsou silně závislé na zvoleném počtu společných faktorů, je vhodné analýzu provést s několika rozličnými hodnotami.

Vztahy mezi původními proměnnými  $x_i$  a novými faktory  $F_j$  lze popsat soustavou  $m$  rovnic:

$$x_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} F_j + e_i \quad \text{kde } i = 1, \dots, m$$

Koeficienty  $a_{ij}$  se nazývají faktorové zátěže  $i$ -té proměnné  $x_i$  na  $j$ -tém faktoru  $F_j$ . Jedná se o prvky matice faktorových zátěží  $\mathbf{A}$  typu  $m \times p$  ( $m$  je počet původních proměnných,  $p$  je počet faktorů). Faktorové zátěže nabývají hodnot mezi  $-1$  a  $+1$  a lze je interpretovat jako korelační koeficienty mezi původními proměnnými a faktory.

$e_i$  je specifická (chybová, reziduální) část proměnné  $x_i$ , o níž předpokládáme, že její korelace se všemi faktory je nulová. Také korelační koeficienty každé dvojice faktorů jsou nulové, protože faktory jsou konstruovány tak, aby spolu vzájemně nekorelovaly.

Součet druhých mocnin faktorových zátěží  $a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 + \dots + a_{ip}^2$  je roven části variability proměnné  $x_i$  vysvětlené všemi faktory  $F_j$ . Tento součet se nazývá komunalita proměnné. Je to tedy ta část variability proměnné, která je vysvětlena faktory. Maximální možná hodnota komunality je rovna 1.

Součástí faktorové analýzy je i tzv. rotace faktorů. Jejím cílem je odvodit z dat snadno vysvětlitelné a pojmenovatelné společné faktory. Počáteční odhad faktorů (tedy před rotací) bývají často obtížně vysvětlitelné. Je to tím, že většina faktorů je korelována s více proměnnými. Protože jedním z cílů faktorové analýzy je právě identifikace smysluplných faktorů, je rotace faktorů důležitou transformací. Očekáváme, že rotované faktory jsou zvoleny tak, že některé zátěže dosahují vysokých hodnot, blízkých  $\pm 1$ , a zbývající pak hodnot velmi nízkých, téměř nulových. Je vhodné, aby každá proměnná dosahovala vysoké zátěže pouze u jediného faktoru.

Pokud při rotaci zůstane zachována nezávislost faktorů, nazýváme takovou rotaci ortogonální. Po neortogonální rotaci naopak dostaneme faktory, které nejsou na sebe kolmé. V praxi je nejčastěji používaná metoda varimax, která minimalizuje počet znaků s vysokou faktorovou zátěží. Další z metod je metoda quartimax, která minimalizuje počet faktorů potřebných k popisu původních proměnných. Metoda equimax kombinuje obě předchozí metody. [8]

## ZÁVĚR

**V**elkou výhodou rozhodovacích stromů je zejména skutečnost, že nekladou nároky na rozložení dat, proto není nutné používat transformace proměnných. Rozhodovací stromy jsou vhodné i pro vyšší počet proměnných, a to všech typů.

K nesporným výhodám metody patří i velmi jednoduchá interpretace výsledků a snadné grafické znázornění výsledné stromové struktury. Metoda je velmi jednoduše použitelná pro klasifikaci nových případů, a tím k predikci neznámých hodnot závislé ordinální proměnné. Kromě klasifikace a predikce je metoda vhodná i pro identifikaci vztahů mezi jednotlivými proměnnými a jejich vysvětlení pomocí pravidel a kritérií.

Na druhé straně nevýhodou je značná nestabilita rozhodovacích stromů. I relativně malé změny v nastavení jednotlivých parametrů mohou mít značný dopad na výslednou klasifikaci a tím i predikci.

Vzhledem k tomu, že lineární regresní model predikuje hodnoty spojité proměnné, nelze jej přímo použít pro predikci hodnot kategoriální proměnné. Proto je nutné hodnoty, které byly lineárním regresním modelem predikovány, transformovat na hodnoty ordinální proměnné. Standardizované regresní koeficienty mohou sloužit k posouzení relativního přínosu prediktorů k odhadu závisle proměnné. Lineární regresní model ve své podstatě popisuje efekt, který má na závisle proměnnou variabilitu prediktorů, a proto jej můžeme využít i pro popis vztahů mezi závislou proměnnou a nezávisle proměnnými a jejich kvantifikaci.

Nevýhodou lineárního regresního modelu je skutečnost, že velmi často jsou prediktory lineárně závislé a je nutné před vlastním vytvořením modelu počet prediktorů redukovat. K tomu se zpravidla používá faktorová analýza s ortogonální rotací, jejímž výstupem jsou ortogonální faktory. Vztahy v modelu potom souvisí s původními proměnnými zprostředkovaně přes tyto společné faktory a interpretace vztahů je složitější.

Využití lineární regrese se primárně týká odhadu hodnoty spojité proměnné, ale je možné tento model použít i pro odhad hodnoty ordinální proměnné; při procesu ordinalizace však ztrácíme další část informace.

Oba popisované přístupy je možné použít jak k predikci chybějících ordinálních dat, tak i k analýze vztahů mezi proměnnými. V praxi se ukazuje, že oba přístupy poskytují analogické výsledky.

## LITERATURA

- [1] Eurostat: Gross domestic product (GDP) at current market prices by NUTS 2 regions [online]. [cit. 2015-08-12]. Dostupné z: [http://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=nama\\_r\\_e2gdp](http://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=nama_r_e2gdp)
- [2] BREIMAN, Leo et al. Classification and regression trees. Repr. New York, N.Y.: Chapman & Hall, 1993. ISBN 9780412048418.
- [3] KOMPRDOVÁ, Klára. Rozhodovací stromy a lesy. Vyd. 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2012, 98 s. ISBN 978-80-7204-785-7.
- [4] HASTIE, Trevor, Robert TIBSHIRANI a J FRIEDMAN. The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction. 2nd ed. New York, N.Y.: Springer, 2009, xxii, 745 s. Springer series in statistics. ISBN 9780387848570.
- [5] RYCHLÝ, Marek. Klasifikace a predikce [online]. [cit. 2015-08-12]. Dostupné z: <http://www.fit.vutbr.cz/~rychly/public/>
- [6] MELOUN, Milan a Jiří MILITKÝ. Statistická analýza experimentálních dat. Vyd. 2., upr. a rozš. Praha: Academia, 2004, 953 s. ISBN 80200-1254-0.
- [7] DE VAUS, D. Analyzing social science data. Thousand Oaks, Calif.: SAGE, 2002, xxiv, 401 p. ISBN 0761959386.
- [8] RUD, Olivia. Data mining cookbook: modeling data for marketing, risk and customer relationship management. Chichester: Wiley, 2000, 416 p. ISBN 0471385646.
- [9] MELOUN, Milan, Jiří MILITKÝ a Martin HILL. Počítacová analýza vícerozměrných dat v příkladech. Vyd. 1. Praha: Academia, 2005, 449 s. ISBN 80-200-1335-0.

# THE ESTIMATION OF THE MISSING VALUES OF ORDINAL VARIABLE

KONTAKTNÍ ÚDAJE:

RNDr. Jana Borůvková, Ph.D.  
Vysoká škola polytechnická Jihlava  
katedra matematiky  
Tolstého 16  
586 01 Jihlava  
E-mail: jana.boruvkova@vspj.cz

## ABSTRACT

The aim of this paper is to describe two completely different mathematics-statistical methods that can be used to predict ordinal variable. The first method is one of the data mining methods – classification tree CART, the second one is a commonly used linear regression model. It is possible to use both described approaches for prediction of missing ordinal values as well as for analysis of relations between the variables. The models are described with emphasis on comparison of advantages and disadvantages both of approaches.

KEYWORDS:

data mining, classification tree, CART,  
multiple regression, factor analysis,  
missing values

# **ÚLOHA LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ PŘI INTERVALOVĚ ZADANÝCH KAPACITÁCH VLASTNÍCH OMEZENÍ**

ANDREA KUBIŠOVÁ

VYSOKÁ ŠKOLA POLYTECHNICKÁ  
JIHLAVA

## ABSTRAKT

V typických demonstračních úlohách lineárního programování jsou obvykle všechny koeficienty matematického modelu přesně stanoveny a je tak nalezeno přesné optimum. V praxi však často přesné vstupní hodnoty nejsou známy, nezbývá tedy, než tyto kapacity alespoň předběžně odhadnout v nějakém rozmezí. V článku je optimální řešení takového problému popsáno pomocí intervalové analýzy pro úlohy LP se dvěma strukturními proměnnými, aby jednoduchý příklad mohl být ilustrován také graficky. Získaný výsledek může být po úvaze zobecněn.

## KLÍČOVÁ SLOVA:

lineární programování, optimální řešení, Cramerovo pravidlo, hodnota účelové funkce, intervalové číslo, intervalová analýza

## ÚVOD

**V**lineárním programování se obvykle setkáváme s úlohami, které vedou na sestavení matematického modelu, jehož všechny koeficienty jsou konkrétní reálná čísla. V praxi ovšem často nelze tato čísla přesně stanovit, a je třeba nahradit je intervalovým vyjádřením. Nejčastěji se tento problém týká kapacit jednotlivých požadavků, uvažujme například situaci, že disponibilní množství surovin ve skladu není přesně zaznamenáno nebo že aktuální časová kapacita zaměstnanců firmy není přesně známa předem. U cenových koeficientů jednotlivých produktů by intervalová analýza nebyla také zajímavá a plánovaná struktura výroby bývá naopak obvykle zadavatelem popsána přesně. Pro jednoduchost se článek věnuje pouze úlohám LP se dvěma strukturními proměnnými, aby bylo možné získané výsledky intervalové analýzy konfrontovat také s grafickým řešením těchto úloh. Článek obsahuje dva ilustrační příklady, na kterých se získané poznatky demonstrují.

## LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

**N**eprve poznamenejme, že tento úkol v matematice spadá do oblasti tzv. operačního výzkumu, jehož metody nacházejí široké praktické uplatnění. Mezi nejjednodušší typy úloh patří tzv. úlohy lineárního programování, mezi něž řadíme také nutriční problém. Lineární programování se obecně věnuje pouze úlohám, kde lze vztahy mezi proměnnými popsat pouze pomocí lineárních rovnic nebo nerovnic.

**Úlohou lineárního programování** (nebo stručně LP) s  $n$  neznámými a  $m$  vlastními omezeními, kde  $m, n \in \mathbb{N}$  rozumíme úlohu nalézt extrém (maximalizovat nebo minimalizovat) účelovou funkci ve tvaru (Bazaraa, M. S. et al 2011, Kubišová, A. 2014)

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

za podmínek (tzv. vlastních omezení) ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \quad (2)$$

a za podmínek nezápornosti proměnných

$$x_j \geq 0 \text{ pro každé } j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

popř. za podmínek celočíselnosti proměnných

$$x_j \in Z \text{ pro každé } j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Reálná čísla  $x_j$ , kde  $j = 1, 2, \dots, n$ , nazýváme **strukturní proměnné**, reálná čísla  $a_{ij}$ , kde  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , nazýváme **strukturní koeficienty** (v  $i$ -tém vlastním omezení u  $j$ -té strukturní proměnné), reálná čísla  $b_i$ , kde  $i = 1, 2, \dots, m$ , nazýváme **pravé strany** ( $i$ -tého vlastního omezení), reálná čísla  $c_j$ , kde  $j = 1, 2, \dots, n$ , nazýváme **cenové koeficienty** ( $j$ -tého produktu). Matematickým modelem úlohy LP rozumíme zápis (1) – (3).

Doplňením podmínky (4) do tohoto zápisu dostáváme obecnou **úlohu celočíselného programování**.

**Přípustným řešením** každé úlohy LP nazývejme všechna řešení ve tvaru  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , která vyhovují všem podmínkám příslušného matematického modelu, **optimálním řešením** úlohy LP nazývejme přípustné řešení, které dává nejlepší hodnotu účelové funkce (1).

Řešení lze univerzálně nalézt pomocí algoritmu primárně simplexové metody, popř. pomocí Řešitele v MS Excel, který tohoto algoritmu využívá. Pokud  $m = 2$ , lze úlohu řešit také pomocí grafické metody a souřadnice nalezeného optima lze určit jako průsečík hraničních přímkov dvou polohovin určených vlastními omezeními (obecné přímky) nebo podmínkami nezápornosti (souřadné osy) úlohy pomocí Cramerova pravidla. Zabývejme se pouze první ze zmíněných možností, případný průsečík obecné přímky se souřadnou osou lze určit z paměti.

**Cramerovo pravidlo:** Mějme soustavu lineárních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Je-li její matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

regulární, tj. determinant  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ,

potom má soustava (4) jediné řešení  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  a pro  $i = 1, 2$  platí

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

kde matici  $A_i$  získáme z matice  $A$  nahrazením  $i$ -tého sloupce vektorem pravých stran

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Nalezené optimální řešení úlohy LP tedy můžeme zapsat jako vektor  $\mathbf{x}_{\text{opt}} = (x_1, x_2)$ , kde

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (5)$$

Dosazením jeho složek do účelové funkce získáme její optimální hodnotu

$$z_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

## INTERVALOVÁ ANALÝZA

**Intervalovým číslem** rozumíme (Moor, R. E., Kearfort, R. B. and Cloud, M. J. 2009) uzavřený interval  $[a, b], a \leq b, (a, b) \in (-\infty, \infty)^2$ . **Aritmetické operace s intervalovými čísly** definujeme vztahy:

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d], \\ [a, b] - [c, d] &= [a - d, b - c], \\ [a, b] \cdot [c, d] &= [\min\{ac, ad, bc, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\}], \\ [a, b] / [c, d] &= [a, b] \cdot [1/d, 1/c] \text{ pro } 0 \notin [c, d]. \end{aligned}$$

Pro  $\forall a \in (-\infty; \infty)$  klademe  $a = [a, a]$ . Jestliže  $a > 0$ , pak píšeme  $[a, b] > 0$  apod.

Poznámka: Operaci dělení lze zapisovat též ve formě zlomků a dle potřeby symbol operace násobení  $\cdot$  vynecháváme.

Dále uvedeme některé **vlastnosti intervalových čísel**:

Jestliže  $A, B, C$  jsou intervalová čísla, potom pro operaci součet intervalových čísel platí komutativní a asociativní zákon

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \\ 0 + A &= A \end{aligned}$$

a pro operaci součin intervalových čísel platí komutativní a asociativní zákon

$$\begin{aligned} A \cdot B &= B \cdot A \\ A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C \\ 1 \cdot A &= A \end{aligned}$$

a ve speciálním případě také distribuční zákon

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &\subset A \cdot B + A \cdot C \\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \text{ pro } B \cdot C > 0. \end{aligned}$$

Jestliže  $A, B, C, D$  jsou intervalová čísla  $A \subset C, B \subset D$ , potom platí

$$\begin{aligned} A + B &\subset C + D \\ A - B &\subset C - D \\ A \cdot B &\subset C \cdot D \\ A / B &\subset C / D \text{ pro } 0 \notin D \end{aligned}$$

Jestliže  $A = [a, b]$  a  $B = [c, d]$ , potom platí

$$\begin{aligned} \text{pro } a \geq 0, c \geq 0 \text{ je } A \cdot B &= [ac, bd], \\ \text{pro } b \leq 0, d \leq 0 \text{ je } A \cdot B &= [bd, ac], \\ \text{pro } a > 0, c > 0 \text{ je } A / B &= [a/d; b/c]. \end{aligned}$$

Ještě je třeba uvést definici intervalové funkce a její intervalové hodnoty:

Nechť  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  je reálná funkce a  $I_1, \dots, I_n$  jsou intervalová čísla. **Intervalovou hodnotou** této funkce rozumíme intervalové číslo (pokud existuje)

$$[\min f(x_1, \dots, x_n), \max f(x_1, \dots, x_n)],$$

kde  $(x_1, \dots, x_n) \in I_1 \times \dots \times I_n$ , a funkci  $f(I_1, \dots, I_n)$  nazýváme **intervalová funkce**.

Jestliže spojitá funkce  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  na množině  $I_1 \times \dots \times I_n$  je rostoucí, resp. klesající ve všech nezávisle proměnných na množině  $I_1 \times \dots \times I_n$ , potom její intervalová hodnota je

$$[\min f(x_1, \dots, x_n), \max f(x_1, \dots, x_n)] = [f(\min I_1, \dots, \min I_n), f(\max I_1, \dots, \max I_n)],$$

resp.

$$[\min f(x_1, \dots, x_n), \max f(x_1, \dots, x_n)] = [f(\max I_1, \dots, \max I_n), f(\min I_1, \dots, \min I_n)].$$

Speciálně **lineární intervalová funkce**  $y = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in I_1 \times \dots \times I_n$ , kde  $a_1, \dots, a_n$  jsou reálné konstanty, je v jednotlivých proměnných  $x_i$  rostoucí, resp. klesající, jestliže  $a_i > 0$ , resp.  $a_i < 0$ . Proto můžeme psát

$$[\min y, \max y] = \left[ \sum_{\substack{i=1 \\ a_i > 0}}^n a_i \min I_i + \sum_{\substack{i=1 \\ a_i < 0}}^n a_i \max I_i, \sum_{\substack{i=1 \\ a_i > 0}}^n a_i \max I_i + \sum_{\substack{i=1 \\ a_i < 0}}^n a_i \min I_i \right].$$

Případ, kdy je  $a_i = 0$ , nemá vliv na hodnotu extrému dané funkce.

## INTERVALOVÉ OPTIMÁLNÍ ŘEŠENÍ ÚLOHY LP

Jestliže místo přesně stanovených kapacit  $b_i$  uvažujeme intervalová čísla  $B_i = [b'_i, b''_i]$ , tj. intervaly obsahující  $b_i$ ,  $i = 1, 2$ , můžeme zapsat intervalovou soustavu lineárních rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = B_1 \quad (6)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = B_2$$

Při změně soustavy lineárních rovnic z tvaru (4) na (6) je zřejmě (nezměněná) matice  $A$  stále regulární. Nová soustava má tedy stále jediné řešení, které zapíšeme ve tvaru  $X = (X_1, X_2)$ , kde

$$X_1 = [\min x_1, \max x_1],$$

$$X_2 = [\min x_2, \max x_2].$$

Předpokládejme, že rozpětí odhadu každé z intervalových kapacit je dostatečně malé, aby nedošlo k tomu, že optimální bod bude od jisté hodnoty průsečíkem jiné dvojice hraničních přímek odpovídajících soustavě rovnic (4). Propojením předchozích vztahů a vlastností intervalových čísel dostaneme následující postup pro výpočet intervalového optimálního řešení a také intervalové optimální hodnoty účelové funkce.

**Intervalový odhad optimálního řešení úlohy LP** zapíšeme jako vektor  $X_{\text{opt}} = (X_1, X_2)$ , kde

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & a_{12} \\ B_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & B_1 \\ a_{21} & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad (7)$$

a dosazením jeho souřadnic do intervalové účelové funkce

$$Z_{\max} = c_1 X_1 + c_2 X_2$$

získáme **intervalový odhad optimální hodnoty účelové funkce**

$$Z_{\max} = c_1 \frac{\begin{vmatrix} B_1 & a_{12} \\ B_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} + c_2 \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & B_1 \\ a_{21} & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Pokud je determinant  $|A| > 0$ , jsou kvůli dodržení podmínek nezápornosti obou neznámých zřejmě oba čitatele kladné a platí

$$Z_{\max} = c_1 \left[ \frac{b'_1 a_{22} - a_{12} b''_2}{|A|}, \frac{b''_1 a_{22} - a_{12} b'_2}{|A|} \right] + c_2 \left[ \frac{a_{11} b'_2 - b''_1 a_{21}}{|A|}, \frac{a_{11} b''_2 - b'_1 a_{21}}{|A|} \right] =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \left[ c_1 \begin{vmatrix} b'_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b''_1 \\ a_{21} & b'_2 \end{vmatrix}; c_1 \begin{vmatrix} b''_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b''_2 \end{vmatrix} \right]. \quad (8)$$

Naopak pokud je  $|\mathbf{A}| < 0$ , jsou kvůli dodržení podmínek nezápornosti obou neznámých oba čitatele záporné a analogicky dostáváme

$$Z_{\max} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \left[ c_1 \begin{vmatrix} b''_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b''_2 \end{vmatrix}; c_1 \begin{vmatrix} b'_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b''_1 \\ a_{21} & b'_2 \end{vmatrix} \right]. \quad (9)$$

Využití odvozených vzorců a jejich význam demonstrujme na konkrétním příkladu. Nejprve řešme úlohu LP s pevně stanovenými kapacitami a poté teprve úlohou LP s intervalově zadanými kapacitami. Vše pro názornost ilustrujme také provedením grafického řešení úlohy. V obou případech ponechme pro lepší srovnání stejné strukturní a cenové koeficienty.

**Příklad 1.:** Pro firmu, která vyrábí dva typy výrobků, sestavte optimální výrobní program s maximálním možným ziskem. Spotřeba výrobních činitelů, jejich kapacita a jednotkový zisk z obou typů výrobků jsou uvedeny v tabulce:

Spotřeba		na jeden výrobek		Kapacity
výrobních činitelů		typu A	typu B	
Surovina	kg	2	4	36
Opracování	h	3	3	42
ZISK	Kč	50	80	max.

Tabulka 1 – Zadání – pevné kapacity

Zdroj: vlastní

### Řešení

Označme  $x_1$ , resp.  $x_2$  počet výrobků typu A, resp. typu B v tisících ks. Z grafického řešení v Obr. 1 je patrné, že množina všech přípustných řešení tvoří čtyřúhelník  $ABCD$ . Ze sklonu izokvant účelové funkce vyplývá, že úloha má jediné optimální řešení v bodě  $B$ , jehož souřadnice získáme řešením soustavy lineárních rovnic přímek  $a$  a  $b$ , které se v bodě  $B$  protínají:

$$2x_1 + 4x_2 = 36$$

$$3x_1 + 3x_2 = 42$$

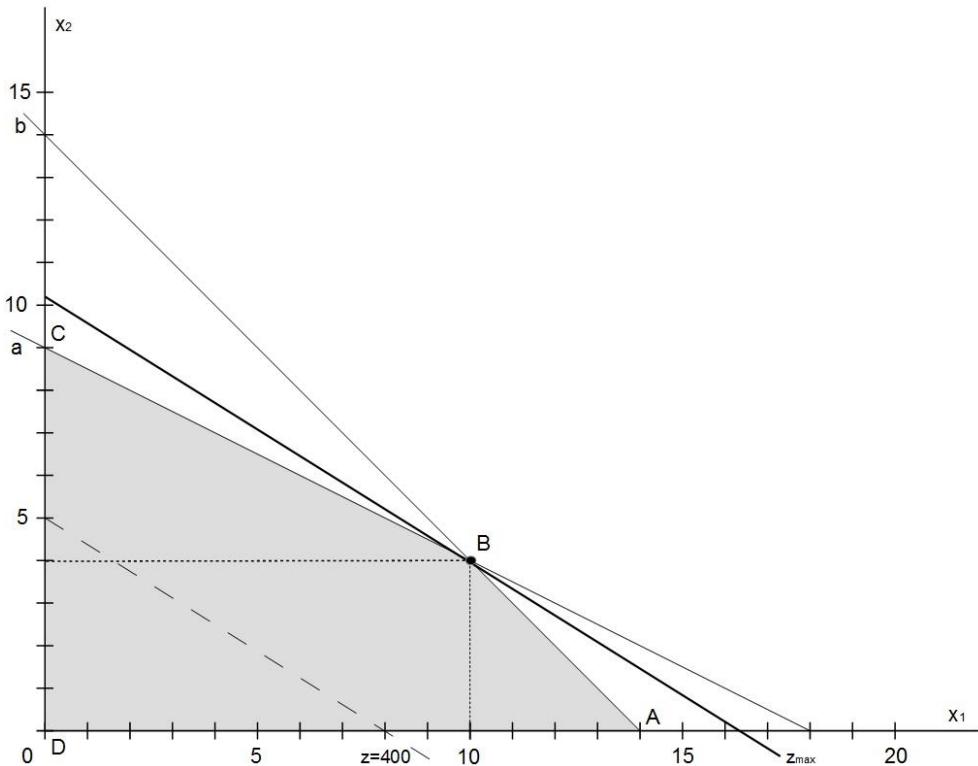
Nalezené optimální řešení zapíšeme jako vektor  $\mathbf{x}_{\text{opt}} = (x_1, x_2)$ , kde

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 36 & 4 \\ 42 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-60}{-6} = 10, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 36 \\ 3 & 42 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-24}{-6} = 4.$$

Dostáváme tedy  $\mathbf{x}_{\text{opt}} = (10; 4)$ . Dosazením do rovnice účelové funkce získáme její optimální hodnotu

$$z_{\max} = 50 \cdot 10 + 80 \cdot 4 = 500 + 320 = 820 \text{ tisíc Kč.}$$

Optimálního zisku v maximální možné výši 820 tisíc Kč dosáhneme jediným možným způsobem, když se bude vyrábět 10 tisíc kusů výrobku typu A a 4 tisíce výrobku typu B.



Obrázek 1 – Grafické řešení – přesně stanovené hodnoty kapacit

Zdroj: vlastní

Poznámka: Kdyby byly jednotkové zisky rovny 10 Kč a 30 Kč, zřejmě by bylo optimální řešení reprezentováno bodem A a sestavená soustava pro nalezení jeho souřadnic by triviálně obsahovala jen rovnici přímky  $b$  a osy  $x_1$ .

**Příklad 2.:** Pro firmu, která vyrábí dva typy výrobků, sestavte optimální výrobní program s maximálním možným ziskem. Spotřeba výrobních činitelů, horní a dolní odhady jejich kapacit a jednotkový zisk z obou typů výrobků jsou uvedeny v tabulce:

Spotřeba		na jeden výrobek		Odhad kapacit	
výrobních činitelů		typu A	typu B	min.	max.
Surovina	kg	2	4	32	40
Opracování	h	3	3	36	45
ZISK	Kč	50	80	max.	

**Tabulka 2 – Zadání – intervalové kapacity**

Zdroj: vlastní

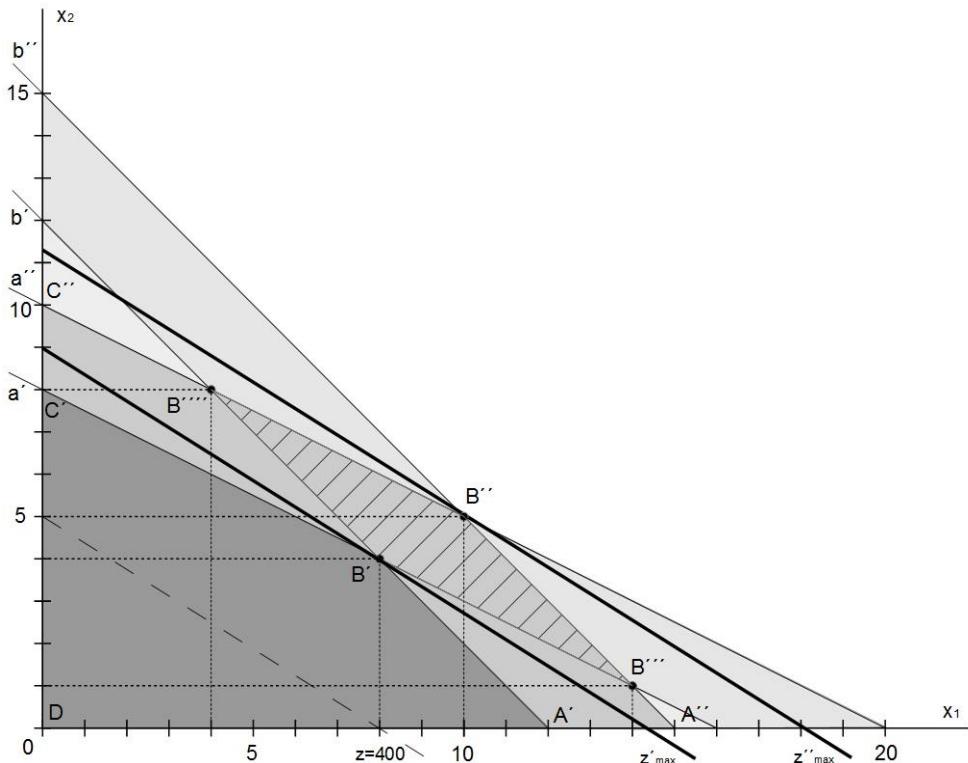
### Řešení

Označme  $X_1$ , resp.  $X_2$  intervalové odhady optimálního počtu výrobků typu A, resp. typu B v tisících ks.

Z předchozího příkladu se stejnými strukturními koeficienty víme, že  $|A| = -6$ , dosadíme tedy do odvozeného vzorce (9) a dostáváme

$$Z_{\max} = \frac{1}{-6} \left[ 50 \cdot \begin{vmatrix} 32 & 4 \\ 45 & 3 \end{vmatrix} + 80 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 40 \\ 3 & 36 \end{vmatrix}; 50 \cdot \begin{vmatrix} 40 & 4 \\ 36 & 3 \end{vmatrix} + 80 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 32 \\ 3 & 45 \end{vmatrix} \right] = [720; 900] \text{ v tis. Kč.}$$

Z grafického řešení v Obr. 2 je patrné, že množina všech přípustných řešení tvoří v minimalistickém případě čtyřúhelník  $A'B'C'D'$  a ze sklonu izokvant úcelové funkce vyplývá, že úloha by v tomto krajním případě měla jediné optimální řešení v bodě  $B'$ , jehož souřadnice lze získat řešením soustavy lineárních rovnic přímek  $a'$  a  $b'$ , které se v bodě  $B'$  protínají, a odpovídá mu v dané situaci maximální dosažitelný zisk ve výši 720 tisíc Kč.



**Obrázek 2 – Grafické řešení – intervalové hodnoty kapacit**

Zdroj: vlastní

V maximalistickém případě by množinu přípustných řešení mohl tvořit čtyřúhelník  $A''B''C''D''$ , úloha by v tomto krajním případě měla jediné optimální řešení v bodě  $B''$ , jehož souřadnice lze získat řešením soustavy lineárních rovnic přímek  $a''$  a  $b''$ , které se v bodě  $B''$  protínají, a odpovídá mu v dané situaci maximální dosažitelný zisk ve výši 900 tisíc Kč.

Zabýváme-li se také intervalovým vymezením optimálních hodnot strukturních proměnných, řešíme intervalovou soustavu rovnic

$$2x_1 + 4x_2 = [32; 40]$$

$$3x_1 + 3x_2 = [36; 45].$$

Nalezené optimální řešení zapíšeme jako intervalové optimální řešení  $\mathbf{x}_{\text{opt}} = (X_1, X_2)$ . Rozepsáním vztahů (7) zde při záporném determinantu  $|A|$  dostáváme

$$X_1 = \frac{1}{|A|} \left[ \begin{vmatrix} b''_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b'_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{vmatrix} \right] = [4; 14],$$

$$X_2 = \frac{1}{|A|} \left[ \begin{vmatrix} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b''_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{11} & b''_1 \\ a_{21} & b'_2 \end{vmatrix} \right] = [1; 8],$$

čímž jsme vymezili intervaly, které určitě nepřesáhnou optimální hodnoty strukturních proměnných, budou-li se pohybovat kapacity vlastních omezení ve výše stanovených intervalech.

Pozor, nelze bezhlavě tvořit jakékoli kombinace takovýchto souřadnic, z Obr. 2 je ihned zřejmé, že např. bod  $[x''_1; x''_2] = [14; 8]$  vůbec není přípustným řešením zadané úlohy LP.

K nalezení konkrétních hodnot všech vrcholů rovnoběžníku  $B'B'''B''B''''$  všech možných případných optimálních řešení by bylo třeba řešit dílčí soustavy odpovídajících rovnic o dvou neznámých. Jejich hodnoty jsou z Obr. 2 patrné. Také všechny jejich konvexní lineární kombinace by mohly být v určitém případě optimálním řešením zadané úlohy. Tato množina bodů je v Obr. 2 vyšrafovaná.

Z intervalových odhadů pro optimální řešení úlohy vyplývá, že je možné dosáhnout optimálního zisku mezi 720 a 900 tisíci Kč, a v odpovídajícím výrobním programu se bude výrobků typu A produkovat mezi 4 a 14 tisíci ks a výrobků typu B mezi 1 až 8 tisíci ks. Mimochodem, i výsledek Příkladu 1 toto samozřejmě splňuje, stejně jako všechny ostatní body rovnoběžníku  $B'B'''B''B''''$ .

Poznámka: Kdyby byly jednotkové zisky z prodeje jednotlivých typů výrobků rovny postupně 10 Kč a 30 Kč, zřejmě by bylo optimální řešení reprezentováno bodem A, úvaha nad tvarem množiny všech možných případných optimálních řešení je ponechána k rozmyšlení čtenáři.

Diskutujme ještě **dosažitelnost** jakékoli předem stanovené hodnoty účelové funkce  $z_{\max}$  a zabývejme se v této souvislosti také otázkou, zda může v některých případech tato hodnota být hodnotou optimální a pro jaké hodnoty strukturních proměnných. Pokud označíme krajní hodnoty nalezené intervalové hodnoty účelové funkce  $Z_{\max} = [z'_{\max}; z''_{\max}]$ , pak jsou zřejmě hodnoty účelové funkce vyšší než  $z''_{\max}$  nedosažitelné, hodnoty nižší než  $z'_{\max}$  jsou vždy dosažitelné (odpovídají celé úsečce přípustných řešení, ale nikdy nejde o optimum) a hodnoty účelové funkce z intervalu  $[z'_{\max}; z''_{\max}]$  jsou při určitých hodnotách kapacit výrobních činitelů dosažitelné, a to pro hodnoty strukturních proměnných, které vyplní celou úsečku bodů MN, která triviálně

pro hodnotu  $z_{\max}'$  odpovídá pouze jedinému bodu – vrcholu  $B'$  a pro hodnotu  $z_{\max}''$  odpovídá pouze jedinému bodu – vrcholu  $B''$ .

Z uvedeného intervalového optimálního řešení můžeme z pevně zvolené hodnoty  $z_{\max}$  z vypočteného intervalového zisku  $Z_{\max}$  určit všechna optimální řešení  $\mathbf{x}_{\text{opt}} = (x_1, x_2)$ , která zvolený zisk  $z_{\max}$  zaručují. Doplňme pro názornost ještě jeden ilustrační příklad.

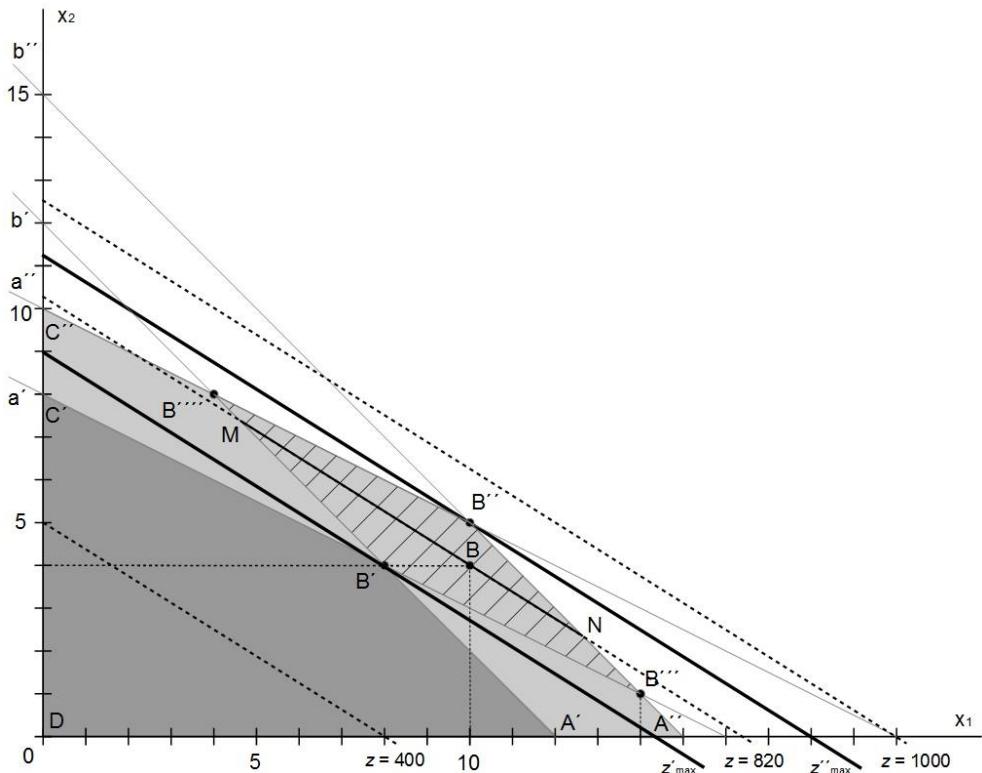
**Příklad 3.:** Uvažujme nadále firmu z Příkladu 2. Rozhodněte, zda je v dané situaci dosažitelný zisk ve výši 400 tisíc Kč, 820 tisíc Kč, resp. 1 milion Kč, může-li jít v tom případě o hodnotu optimální a jaké konkrétní počty výrobků obou typů tento optimální zisk zaručují.

### Řešení

Vrátíme-li se k intervalovému vymezení optimální hodnoty účelové funkce  $Z_{\max} = [720; 900]$ , je zřejmé, že dosažení optimálního zisku vyššího než 900 tisíc Kč je zcela nereálné, zisku 1 milion Kč tedy určitě za žádných okolností (ani při maximálním stavu kapacit suroviny i času na opracování) nelze dosáhnout. V Obr. 3 ilustruje situaci čárkovaně vyznačená izokvanta  $z = 1000$ , která nemá s polygonem všech přípustných řešení neprázdný průnik za žádných okolností.

Naopak zisku nižšího než 720 Kč lze dosáhnou za každé situace popsané intervalově vymezenými kapacitami, ale nikdy nepůjde o řešení optimální, ale pouze přípustné, tedy bude existovat určitě jiné řešení s lepší hodnotou účelové funkce. V Obr. 3 ilustruje tuto situaci čárkovaně vyznačená izokvanta  $z = 400$ , na které sice leží celá úsečka (nekonečně mnoha) přípustných řešení s touto hladinou zisku, která má ovšem neprázdný průnik s rovnoběžníkem  $B'B'''B''B''''$  případných optimálních řešení.

Pokud se budeme ptát na dosažitelnost nějaké hodnoty účelové funkce ležící v intervalu  $[720; 900]$ , lze jí vždy dosáhnout za některých konkrétních situací popsaných intervalově vymezenými kapacitami, příslušná izokvanta bude určitě protínat množinu všech případných přípustných řešení (polygon  $A''B''C''D$ ), speciálně též množinou případných optimálních řešení (vyšrafováný rovnoběžník  $B'B'''B''B''''$ ). Z Obr. 2 vidíme, že všechna taková optimální řešení tvoří úsečku popsanou MN: Speciálně krajní dosažitelné hodnoty  $Z_{\max}$  ve výši 720 tisíc Kč, resp. 900 tisíc Kč odpovídají vrcholům  $B'$ , resp.  $B''$ .



**Obrázek 3 – Grafické řešení – dosažitelnost zisku**

Zdroj: vlastní

Z výše uvedených skutečností dostaneme po dalším výpočtu parametrické vyjádření všech hledaných optimálních řešení (optimálních variant výrobního programu), které zaručí optimální hodnotu účelové funkce ve výši 820 tisíc Kč

$$\mathbf{x}_{\text{opt}} = (14/3 + 8t; 22/3 - 5t),$$

kde parametr  $t \in [0;1]$ .

Krajní body úsečky M, resp. N lze získat dosazením hodnoty parametru  $t = 0$ , resp.  $t = 1$ , zřejmě nejde o celočíselná řešení, což může být u některých úloh problém. Například pro hodnotu parametru  $t = 2/3$  však obdržíme celočíselné optimální řešení  $\mathbf{x}_{\text{opt}} = (10; 4)$ , kde  $z_{\max} = 820$  z Příkladu 1, které samozřejmě do množiny případných optimálních řešení také patří a je dalším z nekonečně mnoha bodů, ve kterých by mohlo být za určitých přípustných okolností požadovaného optima ve výši 820 tisíc Kč dosaženo. V Obr. 3 ilustruje poslední situaci čárkovaně vyznačená izokvantou  $z = 820$ , optimální řešení z Příkladu 1 je reprezentováno bodem B.

## ZÁVĚR

**N**e vždy je možné pro úlohy LP sestavit matematický model v obvyklém tvaru s pevně stanovenými kapacitami, pro který je pomocí simplexové metody nalezeno optimální řešení. V případě, že je kapacitu výrobních činitelů nutné intervalově odhadnout, jsou také optimální řešení pouze intervalovým odhadem. Rozpětí každé odhadované kapacity určuje šíři pásu, ve kterém se určitě nachází optimální řešení. Pokud je toto rozpětí „malé“, má ještě smysl úlohu řešit pomocí výše popsaných postupů. S rostoucím rozpětím odhadu kapacit roste samozřejmě také výsledná množina případných optimálních řešení a tím pádem také nepřesnost jeho nalezení. Způsob řešení popsaný v tomto článku nabízí možnost, jak řešit úlohy LP i pro případ, že nejsou známy přesné kapacity výrobních činitelů. Praktické aplikace intervalového pojetí matematických modelů v ekonomických i technických úlohách nejsou bohužel obvyklé, i když na rozdíl od „klasických“ modelů umožňují respektovat nepřesnosti vstupních údajů získaných ve formě statistických nebo expertních intervalů (Karpíšek, Z., Lacinová, V. 2010).

## LITERATURA

- [1] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J. and Sherali, H. D. Linear Programming and Network Flows. New York: John Wiley & Sons 2011, ISBN 1118211324.
- [2] Moor, R. E., Kearfott, R. G., and Cloud, M. J. Introduction to Interval Analysis. Philadelphia: SIAM 2009, ISBN 978-0-898716-69-6.
- [3] Moore, R. E. Interval Analysis. Englewood Cliff, New Jersey: Prentice-Hall 1966. ISBN 0-13-476853-1.
- [4] Hansen, E. R. Global Optimization Using Interval Analysis Marcel Dekker, New York, 1992
- [5] Hansen, E. R. and Walster, G.W. Global Optimization Using Interval Analysis Marcel Dekker, New York, 2003.
- [6] Hansen, E. R. Topics in Interval Analysis. Oxford University Press, London, 1969
- [7] Alefeld, G. and Herzberger, J. Introduction to Interval Computations Academic Press, New York, 1983.
- [8] Jaulin, L.; Kieffer, M.; Didrit, O., Walter, E. Applied Interval Analysis. Berlin: Springer 2001. ISBN 1-85233-219-0
- [9] Sunaga, T. Theory of interval algebra and its application to numerical analysis, RAAG Memoirs, 2. 1958, pp. 29-46.
- [10] Hansen, E. R. On solving systems of equations using interval arithmetic. Math. Comput., 22(102):374–384, April 1968.
- [11] Karpíšek, Z., Lacinová, V. System Reliability Computed by Interval Arithmetic. In: MENDEL2010 - 16th International Conference on Soft Computing. June 23-25, 2010, Brno, pp. 565-570. ISSN 1803-3814 (Mendel Journal Series on CD), ISBN 978-80-214-4120-0 (print).
- [12] Kubišová, A.: Operační výzkum. VŠPJ, Jihlava 2014.

# INTERVAL LIMITS OF CAPACITIES IN CONSTRAINTS OF LP PROBLEMS

KONTAKTNÍ ÚDAJE:

Mgr. Andrea Kubišová  
Vysoká škola polytechnická Jihlava  
katedra matematiky  
Tolstého 16  
586 01 Jihlava  
E-mail: andrea.kubisova@vspj.cz

## ABSTRACT

In common LP problems there are usually all coefficients of mathematic model set exactly and therefore the exact optimum can be found. But the limit values are often not precisely known in practice, and it is necessary to estimate the capacities with an interval. This article gives solution of such a difficulty with interval analysis tools for LP problem of two structural variables, to make comparing it with graphical solving possible. Gained results can be generalized.

KEYWORDS:

linear programming, optimal solution, Cramer's rule, objective function value, interval number, interval analysis

# **ŘEŠENÍ ÚLOH LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ S FUZZY KAPACITAMI VLASTNÍCH OMEZENÍ METODOU $\alpha$ -ŘEZŮ**

ANDREA KUBIŠOVÁ

VYSOKÁ ŠKOLA POLYTECHNICKÁ  
JIHLAVA

## ABSTRAKT

V typických demonstračních úlohách lineárního programování jsou obvykle všechny koeficienty matematického modelu přesně stanoveny a je tak nalezeno přesné optimum. V praxi však často nemohou být vstupní hodnoty přesně vymezeny, jejich nahrazení přesnou hodnotou by tak znamenalo odklon od reality. V článku je popsáno optimální řešení úlohy LP s vágně stanovenými kapacitami vlastních omezení pomocí fuzzy analýzy, a to pro úlohy se dvěma strukturními proměnnými, aby jednoduchý příklad mohl být ilustrován také graficky. Získaný výsledek může být po úvaze zobecněn.

## KLÍČOVÁ SLOVA:

lineární programování, optimální řešení, Cramerovo pravidlo, hodnota účelové funkce, fuzzy množina, fuzzy číslo, fuzzy analýza

## ÚVOD

**V**lineárním programování se obvykle setkáváme s úlohami, které vedou na sestavení matematického modelu, jehož všechny koeficienty jsou konkrétní reálná čísla. V praxi ovšem často nelze tato čísla přesně stanovit. Nejčastěji se tento problém týká kapacit jednotlivých požadavků, uvažujme například situaci, že disponibilní množství surovin ve skladu se může měnit nebo je určeno vágní formulací rozhodovatele, tedy jeho konkrétní hodnota není v době výpočtu přesně známa. Již z antického Řecka je znám tento paradox slovního vyjádření množství: „Mějme malou hromadu kamení. Pokud přidáme jeden kámen, dostaneme opět malou hromadu kamení. Tedy každá hromada kamení je malá.“ Formalizací vágních pojmu se zabýval Lotfi A. Zadeh, který v roce 1965 publikoval článek Fuzzy množiny. Jednou z možností, jak vágně zadané hodnoty lépe vystihnout, je nahrazení přesných hodnot použitím fuzzy čísel. Pro jednoduchost se tento článek věnuje pouze úlohám LP se dvěma strukturními proměnnými, aby bylo možné získané výsledky fuzzy analýzy konfrontovat také s grafickým řešením těchto úloh. Článek obsahuje dva ilustrační příklady, na kterých se získané poznatky demonstrují. Fuzzy analýza je zde záměrně pro porovnání provedena na stejných příkladech, na kterých byly v předcházejícím článku (Kubišová, A., 2015) demonstrovány výsledky intervalové analýzy.

## LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

**Ú**lohou lineárního programování (nebo stručně LP) s  $n$  neznámými a  $m$  vlastními omezeními, kde  $m, n \in N$  rozumíme úlohu nalézt extrém (maximalizovat nebo minimalizovat) účelovou funkci ve tvaru (Bazaraa, M. S. et al 2011, Kubišová, A. 2014)

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

za podmínek (tzv. vlastních omezení) ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \quad (2)$$

a za podmínek nezápornosti proměnných

$$x_j \geq 0 \text{ pro každé } j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

popř. za podmínek celočíselnosti proměnných

$$x_j \in Z \text{ pro každé } j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Reálná čísla  $x_j$ , kde  $j = 1, 2, \dots, n$ , nazýváme **strukturní proměnné**, reálná čísla  $a_{ij}$ , kde  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , nazýváme **strukturní koeficienty** (v  $i$ -tém vlastním omezení u  $j$ -té strukturní proměnné), reálná čísla  $b_i$ , kde  $i = 1, 2, \dots, m$ , nazýváme **pravé strany** ( $i$ -tého vlastního omezení), reálná čísla  $c_j$ , kde  $j = 1, 2, \dots, n$ , nazýváme **cenové koeficienty** ( $j$ -tého produktu). Matematickým modelem úlohy LP rozumíme zápis (1) – (3).

Doplněním podmínky (4) do tohoto zápisu dostáváme obecnou **úlohu celočíselného programování**.

**Přípustným řešením** každé úlohy LP nazývejme všechna řešení ve tvaru  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , která vyhovují všem podmínkám příslušného matematického modelu, **optimálním řešením** úlohy LP nazývejme přípustné řešení, které dává nejlepší hodnotu účelové funkce (1).

Řešení lze univerzálně nalézt pomocí algoritmu primárně simplexové metody, popř. pomocí Řešitele v MS Excel, který tohoto algoritmu využívá. Pokud  $m = 2$ , lze úlohu řešit také pomocí grafické metody a souřadnice nalezeného optima lze určit jako průsečík hraničních přímkov dvou polovin určených vlastními omezeními (obecné přímlky) nebo podmínkami nezápornosti (souřadné osy) úlohy pomocí Cramerova pravidla. Zabývejme se pouze první ze zmíněných možností, případný průsečík obecné přímlky se souřadnou osou lze určit z paměti.

**Cramerovo pravidlo:** Mějme soustavu lineárních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Je-li její matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

regulární, tj. determinant  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ,

potom má soustava (4) jediné řešení  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  a pro  $i = 1, 2$  platí

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

kde matici  $A_i$  získáme z matice  $A$  nahrazením  $i$ -tého sloupce vektorem pravých stran

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Nalezené optimální řešení úlohy LP tedy můžeme zapsat jako vektor  $\mathbf{x}_{\text{opt}} = (x_1, x_2)$ , kde

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (5)$$

Dosazením jeho složek do účelové funkce získáme její optimální hodnotu

$$z_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

## FUZZY ANALÝZA

**N**echť  $X$  je univerzální množina (univerzum). Potom **fuzzy množinou** nazýváme fuzzy podmnožinu  $A$  univerza  $X$ , která je definována svou **funkcí příslušnosti**

$$\mu_A : X \rightarrow [0;1]$$

která každému prvku  $x \in X$  přiřazuje reálné číslo  $\mu_A(x)$  z intervalu  $[0;1]$ , jehož hodnota vyjadřuje stupeň příslušnosti prvku  $x$  k množině  $A$ .

Mějme dánu fuzzy množinu  $A \subset X$  a libovolné reálné číslo  $\alpha \in [0;1]$ . Potom  **$\alpha$ -řezem množiny A** rozumíme (klasickou) množinu

$${}^\alpha A = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Říkáme, že množina  $A$  je **normální**, jestliže existuje prvek  $x \in A$ , pro který  $\mu_A(x) = 1$ .

**Fuzzy číslem** nazýváme konvexní normální fuzzy množinu  $A \subset \mathbb{R}$ , jejíž funkce příslušnosti je po částech spojitá.

$\alpha$ -řez fuzzy čísla je intervalové číslo (Kubišová, 2015).

Pojmem **trojúhelníkové číslo** budeme nazývat fuzzy číslo, které je definováno funkcí příslušnosti ve tvaru

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \end{cases}$$

a značíme je  $A = [a; b; c]$ .

Na ukázku zapišme  **$\alpha$ -řez trojúhelníkového čísla**  $A = [a; b; c]$ . Položme obě komponenty jeho funkce příslušnosti  $\mu_A(x) = \alpha$ , dostaváme

$$\alpha = \frac{x-a}{b-a}, \text{ resp. } \alpha = \frac{c-x}{c-b}$$

odkud můžeme vyjádřit  $x$  v závislosti na hodnotě  $\alpha$

$$x = (b-a)\alpha + a, \text{ resp. } x = c - (c-b)\alpha$$

a můžeme obecně vyjádřit  $\alpha$ -řez trojúhelníkového čísla  $A$

$${}^\alpha A = [(b-a)\alpha + a; c - (c-b)\alpha],$$

tedy interval reálných čísel.

Pro naše účely postačí se dále věnovat pouze úlohám LP, které mají kapacity vyjádřené jako trojúhelníková čísla.

**Rozšířené aritmetické operace s fuzzy čísly** zavedeme pomocí **metody  $\alpha$ -řezů**. Pro potřeby řešení úloh LP nám zde postačí uvést pouze unární operaci reálného násobku fuzzy čísla a binární operaci součet dvou fuzzy čísel.

Nechť  $X = [a; b; c]$  a  $Y = [r; s; t]$  jsou dvě fuzzy čísla, jejichž funkce příslušnosti jsou

$$\mu_X(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \end{cases} \quad \text{a} \quad \mu_Y(x) = \begin{cases} \frac{x-r}{s-r}, & r \leq x \leq s \\ \frac{t-x}{t-s}, & s \leq x \leq t \end{cases}.$$

a jejich  $\alpha$ -řezy vyjádříme postupně jako

$${}^\alpha X = [(b-a)\alpha + a; c - (c-b)\alpha],$$

$${}^\alpha Y = [(s-r)\alpha + r; t - (t-s)\alpha].$$

Nechť  $k \in \mathbf{R}$  je libovolné reálné číslo.

### Reálný $k$ -násobek fuzzy čísla $X$

Nejprve určíme  $k$ -násobek  $\alpha$ -řezu fuzzy čísla  $X$

$$k{}^\alpha X = k[(b-a)\alpha + a; c - (c-b)\alpha], \text{ odkud}$$

pro  $k \geq 0$  je

$$k{}^\alpha X = [k(b-a)\alpha + ka; kc - k(c-b)\alpha].$$

Položme nyní obě komponenty rovny  $x$ , dostáváme

$$x = k(b-a)\alpha + ka, \text{ resp. } x = kc - k(c-b)\alpha$$

odkud můžeme vyjádřit  $\alpha$  v závislosti na hodnotě  $x$

$$\alpha = \frac{x - ka}{k(b-a)}, \text{ resp. } \alpha = \frac{kc - x}{k(c-b)},$$

pro určení definičního obou komponent vždy postačí položit  $\alpha$  rovno hraničním hodnotám funkce příslušnosti 0 a 1, odtud dostáváme zápis funkce příslušnosti

$$\mu_{kX}(x) = \begin{cases} \frac{x - ka}{k(b-a)}, & ka \leq x \leq kb \\ \frac{kc - x}{k(c-b)}, & kb \leq x \leq kc \end{cases}.$$

Pro  $k \leq 0$  je

$$k{}^\alpha X = [kc - k(c-b)\alpha; k(b-a)\alpha + ka],$$

odtud analogickým postupem dostáváme zápis funkce příslušnosti

$$\mu_{kx}(x) = \begin{cases} \frac{kc-x}{k(c-b)}, & kc \leq x \leq kb \\ \frac{x-ka}{k(b-a)}, & kb \leq x \leq ka \end{cases}.$$

Reálný  $k$ -násobek trojúhelníkového čísla je tedy opět trojúhelníkové číslo.

### Součet dvou fuzzy čísel $X$ a $Y$

Nejprve určíme součet  $\alpha$ -řezů fuzzy čísel  $X$  a  $Y$

$${}^\alpha X + {}^\alpha Y = [(b-a)\alpha + a; c - (c-b)\alpha] + [(s-r)\alpha + r; t - (t-s)\alpha],$$

odkud

$$\begin{aligned} {}^\alpha X + {}^\alpha Y &= [(b-a)\alpha + a + (s-r)\alpha + r; c - (c-b)\alpha + t - (t-s)\alpha] = \\ &= [((b+s)-(a+r))\alpha + (a+r); (c+t) - ((c+t)-(b+s))\alpha]. \end{aligned}$$

Položme nyní obě komponenty rovny  $x$ , dostáváme

$$x = ((b+s)-(a+r))\alpha + (a+r), \text{ resp. } x = (c+t) - ((c+t)-(b+s))\alpha$$

odkud můžeme vyjádřit  $\alpha$  v závislosti na hodnotě  $x$

$$\alpha = \frac{x - (a+r)}{(b+s) - (a+r)}, \text{ resp. } \alpha = \frac{(c+t) - x}{(c+t) - (b+s)},$$

pro určení definičního obou komponent vždy postačí položit  $\alpha$  rovno hraničním hodnotám funkce příslušnosti 0 a 1, odtud dostáváme zápis funkce příslušnosti

$$\mu_{X+Y}(x) = \begin{cases} \frac{x - (a+r)}{(b+s) - (a+r)}, & (a+r) \leq x \leq (b+s) \\ \frac{(c+t) - x}{(c+t) - (b+s)}, & (b+s) \leq x \leq (c+t) \end{cases}.$$

Součet dvou trojúhelníkových čísel je tedy opět trojúhelníkové číslo.

Pro zápis účelové funkce zavedeme ještě pojem lineární kombinace fuzzy čísel, pro jehož definici využijeme výhradně právě definovaných rozšířených aritmetických operací s fuzzy čísly:

Nechť  $X_i$  jsou fuzzy čísla pro  $i = 1, \dots, n$ . Řekneme, že **fuzzy číslo  $X$  je lineární kombinací fuzzy čísel  $X_1, \dots, X_n$** , právě když existují reálné konstanty  $c_1, \dots, c_n$  takové, že fuzzy číslo  $X$  lze vyjádřit ve tvaru

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n.$$

Lineární kombinace trojúhelníkových čísel je proto také trojúhelníkovým číslem.

## FUZZY OPTIMÁLNÍ ŘEŠENÍ ÚLOHY LP

Jestliže místo přesně stanovených kapacit  $b_i$  uvažujeme trojúhelníková fuzzy čísla  $B_i = [b_i'; b_i; b_i'']$ ,  $i = 1, 2$ , můžeme zapsat fuzzy soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= B_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= B_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Při změně soustavy lineárních rovnic z tvaru (4) na (6) je zřejmě (nezměněná) matice  $\mathbf{A}$  stále regulární. Nová soustava má tedy stále jediné řešení, které zapíšeme ve tvaru  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ , kde

$$X_1 = [x_1'; x_1; x_1''] \text{ a } X_2 = [x_2'; x_2; x_2''].$$

Předpokládejme, že rozpětí odhadu každé z intervalových kapacit je dostatečně malé, aby nedošlo k tomu, že optimální bod bude od jisté hodnoty průsečkem jiné dvojice hraničních přímek odpovídajících soustavě rovnic (4). Propojením předchozích vztahů a vlastností fuzzy čísel dostaneme následující postup pro výpočet fuzzy optimálního řešení a také fuzzy optimální hodnoty účelové funkce.

**Fuzzy odhad optimálního řešení úlohy LP** zapíšeme jako vektor  $\mathbf{X}_{\text{opt}} = (X_1, X_2)$ , kde

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & a_{12} \\ B_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & B_1 \\ a_{21} & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \tag{7}$$

a dosazením všech hodnot jeho souřadnic do intervalové účelové funkce

$$Z_{\max} = c_1 X_1 + c_2 X_2 \quad (8)$$

získáme **fuzzy odhad optimální hodnoty účelové funkce.**

Nejprve se věnujme zápisu řešení soustavy (6). Vztah (7) pro  $X_1$  lze vyjádřit pouze pomocí dvou výše zavedených operací s fuzzy čísla  $B_1$  a  $B_2$  jako

$$X_1 = \frac{a_{22}B_1 - a_{12}B_2}{|A|} = \frac{a_{22}}{|A|} B_1 + \frac{-a_{12}}{|A|} B_2$$

Připomeňme zápis  $\alpha$ -řezu čísel  $B_1$  a  $B_2$  jako

$${}^\alpha B_1 = [(b_1 - b'_1)\alpha + b'_1; b''_1 - (b''_1 - b_1)\alpha],$$

$${}^\alpha B_2 = [(b_2 - b'_2)\alpha + b'_2; b''_2 - (b''_2 - b_2)\alpha],$$

a vyjádříme  $\alpha$ -řez fuzzy čísla  $X_1$

$${}^\alpha X_1 = \frac{a_{22}}{|A|} [(b_1 - b'_1)\alpha + b'_1; b''_1 - (b''_1 - b_1)\alpha] + \frac{-a_{12}}{|A|} [(b_2 - b'_2)\alpha + b'_2; b''_2 - (b''_2 - b_2)\alpha],$$

Nadále předpokládejme, že koeficienty matice  $A$  jsou nezáporné a  $|A| > 0$ , v opačném případě je třeba v reálném násobku fuzzy čísla zaměnit pořadí složek.

Koeficient u  $B_2$  je dle tohoto předpokladu záporný a po úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} {}^\alpha X_1 = & \left[ \frac{a_{22}}{|A|} ((b_1 - b'_1)\alpha + b'_1) - \frac{a_{12}}{|A|} (b''_2 - (b''_2 - b_2)\alpha); \right. \\ & \left. \frac{a_{22}}{|A|} (b''_1 - (b''_1 - b_1)\alpha) - \frac{a_{12}}{|A|} ((b_2 - b'_2)\alpha + b'_2) \right]. \end{aligned}$$

Položme nyní obě komponenty rovny  $x$ , pro první dostáváme

$$x = \frac{a_{22}}{|A|} ((b_1 - b'_1)\alpha + b'_1) - \frac{a_{12}}{|A|} (b''_2 - (b''_2 - b_2)\alpha),$$

odkud můžeme vyjádřit  $\alpha$  v závislosti na hodnotě  $x$

$$\alpha = \frac{|A|x - \begin{vmatrix} b'_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b'_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Pro druhou komponentu analogicky dostaváme

$$x = \frac{a_{22}}{|A|} (b''_1 - (b''_1 - b'_1)\alpha) - \frac{a_{12}}{|A|} ((b_2 - b'_2)\alpha + b'_2)$$

odkud můžeme vyjádřit  $\alpha$  v závislosti na hodnotě  $x$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} b''_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{vmatrix} - |A|x}{\begin{vmatrix} b''_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Pro oba zápisy určíme také definiční obory a můžeme zapsat funkci příslušnosti pro  $X_1$

$$\mu_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{|A|x - \begin{vmatrix} b'_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b'_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{vmatrix}}, \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} b'_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{vmatrix} \leq x \leq \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \\ \frac{\begin{vmatrix} b''_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{vmatrix} - |A|x}{\begin{vmatrix} b''_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}, \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \leq x \leq \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} b''_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{vmatrix} \end{cases}. \quad (9)$$

Vztah (7) pro  $X_2$  lze opět vyjádřit pouze pomocí dvou výše zavedených operací s fuzzy čísly  $B_1$  a  $B_2$  jako

$$X_2 = \frac{a_{11}B_2 - a_{21}B_1}{|A|} = \frac{a_{11}}{|A|} B_2 + \frac{-a_{21}}{|A|} B_1$$

a vyjádříme  $\alpha$ -řez fuzzy čísla  $X_2$

$${}^\alpha X_2 = \frac{a_{11}}{|A|} [(b_2 - b'_2)\alpha + b'_2; b''_2 - (b''_2 - b_2)\alpha] + \frac{-a_{21}}{|A|} [(b_1 - b'_1)\alpha + b'_1; b''_1 - (b''_1 - b_1)\alpha].$$

Koeficient u  $B_1$  je dle předchozího předpokladu záporný a po úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} {}^\alpha X_2 = & \left[ \frac{a_{11}}{|A|} ((b_2 - b'_2)\alpha + b'_2) - \frac{a_{21}}{|A|} (b''_1 - (b''_1 - b_1)\alpha); \right. \\ & \left. \frac{a_{11}}{|A|} (b''_2 - (b''_2 - b_2)\alpha) - \frac{a_{21}}{|A|} ((b_1 - b'_1)\alpha + b'_1) \right]. \end{aligned}$$

Položme nyní obě komponenty rovny  $x$ , pro první dostáváme

$$x = \frac{a_{11}}{|A|} ((b_2 - b'_2)\alpha + b'_2) - \frac{a_{21}}{|A|} (b''_1 - (b''_1 - b_1)\alpha),$$

odkud můžeme vyjádřit  $\alpha$  v závislosti na hodnotě  $x$

$$\alpha = \frac{|A|x - \begin{vmatrix} a_{11} & b''_1 \\ a_{21} & b'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & b''_1 \\ a_{21} & b'_2 \end{vmatrix}}.$$

Pro druhou komponentu analogicky dostáváme

$$x = \frac{a_{11}}{|A|} (b''_2 - (b''_2 - b_2)\alpha) - \frac{a_{21}}{|A|} ((b_1 - b'_1)\alpha + b'_1)$$

odkud můžeme vyjádřit  $\alpha$  v závislosti na hodnotě  $x$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b''_2 \end{vmatrix} - |A|x}{\begin{vmatrix} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b''_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Pro oba zápisy určíme také definiční obory a můžeme zapsat funkci příslušnosti pro  $X_2$

$$\mu_{x_2}(x) = \begin{cases} \frac{|A|x - \begin{vmatrix} a_{11} & b'' \\ a_{21} & b'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b'_2 \end{vmatrix}}, \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & b'' \\ a_{21} & b'_2 \end{vmatrix} \leq x \leq \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \\ \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{11} & b'_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & b'_2 \\ a_{11} & b'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b'' \end{vmatrix}}, \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \leq x \leq \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b'' \end{vmatrix} \\ \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & b'' \\ a_{11} & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & b'_2 \\ a_{11} & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}, \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \leq x \leq \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b'' \end{vmatrix} \end{cases}. \quad (10)$$

Pozor, nelze bezhlavě tvořit jakékoli kombinace takovýchto souřadnic, k nalezení konkrétních dvojic hodnot všech možných případných optimálních řešení by bylo obecně třeba řešit dílčí soustavy odpovídajících rovnic o dvou neznámých pro všechny hodnoty kapacit s nenulovým stupněm příslušnosti. Extrémní hodnoty  $\alpha = 0$  vymezí rovnoběžník všech možných případných optimálních řešení, získáme je řešením následujících čtyř soustav lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b''_1 \\ b''_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b'_1 \\ b''_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b''_1 \\ b'_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

V grafu označme jeho vrcholy postupně jako  $B'$ ,  $B''$ ,  $B'''$  a  $B''''$ .

Za povšimnutí stojí, že optimální řešení s nejvyšším stupněm příslušnosti  $\alpha = 1$  odpovídá řešení soustavy (4), kterou můžeme přepsat také ve tvaru

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

bod, který mu odpovídá v grafu, označme jako bod  $B$ .

K zápisu fuzzy optimální hodnoty účelové funkce využijeme optimálních řešení příslušných soustav pro minimalistickou a maximalistickou kombinaci extrémních hodnot kapacit (v seznamu (11) uvedené jako první a druhou), a také pro kombinaci kapacit s nejvyšším stupněm příslušnosti (tedy poslední výše uvedenou), označíme ji

$$Z_{\max} = [z'_{\max}; z''_{\max}; z''''_{\max}].$$

Na znaménku jednotlivých cenových koeficientů v další úpravě závisí, jaký vzorec pro zápis reálného násobku jednotlivých složek použijeme. Nejprve pro jednoduchost předpokládejme, že jsou oba cenové koeficienty nezáporné. Potom platí

$$Z_{\max} = \frac{1}{|A|} \left[ c_1 \begin{vmatrix} b'_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b'_2 \end{vmatrix}; c_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}; c_1 \begin{vmatrix} b''_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b''_1 \\ a_{21} & b''_2 \end{vmatrix} \right].$$

odkud můžeme zapsat funkci příslušnosti pro  $Z_{\max}$  jako vztah (12)

$$\mu_{Z_{\max}}(x) = \begin{cases} \frac{|A|x - c_1 \begin{vmatrix} b'_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b'_2 \end{vmatrix}}{c_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}, \\ \text{pro } \frac{1}{|A|} \left[ c_1 \begin{vmatrix} b'_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b'_2 \end{vmatrix} \right] \leq x \leq \frac{1}{|A|} \left[ c_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \right], \\ c_1 \begin{vmatrix} b''_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b''_1 \\ a_{21} & b''_2 \end{vmatrix} - |A|x \\ \frac{c_1 \begin{vmatrix} b''_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b''_1 \\ a_{21} & b''_2 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{c_1 \begin{vmatrix} b''_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b''_1 \\ a_{21} & b''_2 \end{vmatrix}}, \\ \text{pro } \frac{1}{|A|} \left[ c_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \right] \leq x \leq \frac{1}{|A|} \left[ c_1 \begin{vmatrix} b''_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & b''_1 \\ a_{21} & b''_2 \end{vmatrix} \right] \end{cases}.$$

Opět je (po vytknutí determinantu) vidět, že se jedná o trojúhelníkové fuzzy číslo.

Řešení druhé z výše uvedeného výčtu soustav (11) ležící na hranici zmíněného rovnoběžníku dává absolutně nejvyšší hodnotu účelové funkce, ovšem funkce příslušnosti v tomto případě nabývá nulové hodnoty. Je tedy na rozhodovateli, jaký kompromis mezi stupněm příslušnosti vybraného optimálního řešení a jemu odpovídající optimální hodnotou účelové funkce zvolí. Obvykle proto rozhodovatel také stanovuje minimální pro něj přijatelný stupeň příslušnosti hledaného optima, pro toto libovolně vysoké  $\alpha$  lze potom zúžit množinu případných optimálních řešení pomocí  $\alpha$ -řezu na její podmnožinu přijatelných optimálních variant, která opět tvoří rovnoběžník. Souřadnice jeho vrcholů případně získáme řešením soustav

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (b_1 - b'_1)\alpha + b'_1 \\ (b_2 - b'_2)\alpha + b'_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b''_1 - (b'_1 - b_1)\alpha \\ b''_2 - (b'_2 - b_2)\alpha \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (b_1 - b'_1)\alpha + b'_1 \\ b''_2 - (b''_2 - b_2)\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b''_1 - (b'_1 - b_1)\alpha \\ (b_2 - b'_2)\alpha + b'_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

V grafu označme tyto jeho vrcholy postupně jako  ${}^{\alpha}B'$ ,  ${}^{\alpha}B''$ ,  ${}^{\alpha}B'''$  a  ${}^{\alpha}B''''$ .

Rovnoběžníky  $B'B''B''B'''$  a  ${}^aB'{}^aB''{}^aB'{}^aB'''$  jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti v bodě B a koeficientem  $\alpha$ .

Využití odvozených vzorců a jejich význam demonstrujme na konkrétním příkladu. Nejprve řešme úlohu LP s pevně stanovenými kapacitami a poté teprve úlohou LP s fuzzy kapacitami. Vše pro názornost ilustrujme také provedením grafického řešení úlohy. V obou případech ponechme pro lepší srovnání stejné strukturní a cenové koeficienty. Poznamenejme, že stejné hodnoty koeficientů byly pro srovnání použity také v příkladech předchozího článku (Kubišová, 2015).

**Příklad 1.:** Pro firmu, která vyrábí dva typy výrobků, sestavte optimální výrobní program s maximálním možným ziskem. Spotřeba výrobních činitelů, jejich kapacita a jednotkový zisk z obou typů výrobků jsou uvedeny v tabulce:

Spotřeba		na jeden výrobek		Kapacity
výrobních činitelů		typu A	typu B	
Surovina	kg	2	4	36
Opracování	h	3	3	42
ZISK	Kč	50	80	max.

**Tabulka 1 – Zadání – pevné kapacity**

Zdroj: vlastní

### Řešení

Označme  $x_1$ , resp.  $x_2$  počet výrobků typu A, resp. typu B v tisících ks. Z grafického řešení v Obr. 1 je patrné, že množina všech přípustných řešení tvoří čtyřúhelník ABCD. Ze sklonu izokvant úcelové funkce vyplývá, že úloha má jediné optimální řešení v bodě B, jehož souřadnice získáme řešením soustavy lineárních rovnic přímek  $a$  a  $b$ , které se v bodě B protínají:

$$2x_1 + 4x_2 = 36$$

$$3x_1 + 3x_2 = 42$$

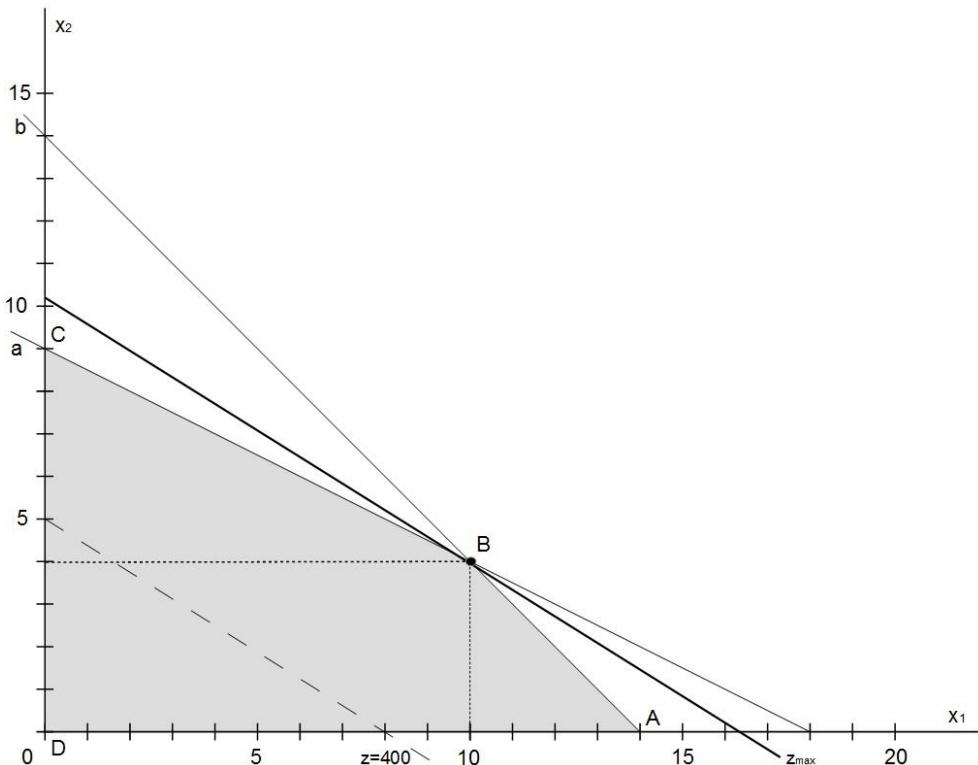
Nalezené optimální řešení zapíšeme jako vektor  $x_{\text{opt}} = (x_1, x_2)$ , kde

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 36 & 4 \\ 42 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-60}{-6} = 10, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 36 \\ 3 & 42 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-24}{-6} = 4.$$

Dostáváme tedy  $x_{\text{opt}} = (10; 4)$ . Dosazením do rovnice účelové funkce získáme její optimální hodnotu

$$z_{\max} = 50 \cdot 10 + 80 \cdot 4 = 500 + 320 = 820 \text{ tisíc Kč.}$$

Optimálního zisku v maximální možné výši 820 tisíc Kč dosáhneme jediným možným způsobem, když se bude vyrábět 10 tisíc kusů výrobku typu A a 4 tisíce výrobku typu B.



**Obrázek 1 – Grafické řešení – přesně stanovené hodnoty kapacit**

Zdroj: vlastní

Poznámka: Kdyby byly jednotkové zisky rovny 10 Kč a 30 Kč, zřejmě by bylo optimální řešení reprezentováno bodem A a sestavená soustava pro nalezení jeho souřadnic by triviálně obsahovala jen rovnici přímky  $b$  a osy  $x_1$ .

**Příklad 2.:** Pro firmu, která vyrábí dva typy výrobků, sestavte optimální výrobní program s maximálním možným ziskem. Spotřeba výrobních činitelů, horní a dolní odhadové hodnoty jejich kapacit a jednotkový zisk z obou typů výrobků jsou uvedeny v Tab. 2.

### Řešení

Označme  $X_1 = [x'_1; x_1; x''_1]$ , resp.  $X_2 = [x'_2; x_2; x''_2]$  fuzzy odhady optimálního počtu výrobků typu A, resp. typu B v tisících ks.

Fuzzy kapacity jsou  $B_1 = [b'_1; b_1; b''_1] = [32; 36; 40]$ ,  $B_2 = [b'_2; b_2; b''_2] = [36; 42; 45]$ , z předchozího příkladu se stejnými strukturními koeficienty víme, že  $|A| = -6$ .

Spotřeba		na jeden výrobek		Odhad kapacit		
výrobních činitelů		typu A	typu B	min.	nej.	max.
Surovina	kg	2	4	32	36	40
Opracování	h	3	3	36	42	45
ZISK	Kč	50	80	max.		

**Tabulka 2 – Zadání – fuzzy kapacity**

Zdroj: vlastní

Pozor, zde není splněn dříve pro zjednodušení provedený předpoklad  $|A| > 0$  a vzorce (9) a (10). Je třeba zaměnit pořadí komponent a mezí definičního oboru proměnné  $x$ . Je-li  $|A| < 0$ , platí

$$\mu_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{\left| \begin{matrix} b''_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{matrix} \right| - |A|x}{\left| \begin{matrix} b''_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{matrix} \right|}, & \frac{1}{|A|} \left| \begin{matrix} b''_1 & a_{12} \\ b'_2 & a_{22} \end{matrix} \right| \leq x \leq \frac{1}{|A|} \left| \begin{matrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{matrix} \right| \\ \frac{\left| \begin{matrix} b'_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{matrix} \right| - |A|x}{\left| \begin{matrix} b'_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{matrix} \right|}, & \frac{1}{|A|} \left| \begin{matrix} b'_1 & a_{12} \\ b''_2 & a_{22} \end{matrix} \right| \leq x \leq \frac{1}{|A|} \left| \begin{matrix} b'_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{matrix} \right| \\ \frac{\left| \begin{matrix} b''_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{matrix} \right| - |A|x}{\left| \begin{matrix} b''_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{matrix} \right|}, & \frac{1}{|A|} \left| \begin{matrix} b''_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{matrix} \right| \leq x \leq \frac{1}{|A|} \left| \begin{matrix} b''_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{matrix} \right| \end{cases} \quad (14)$$

a

$$\mu_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{\left| \begin{array}{cc} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b''_2 \end{array} \right| - |A|x}{\left| \begin{array}{cc} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b''_2 \end{array} \right|}, \frac{1}{|A|} \left| \begin{array}{cc} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b''_2 \end{array} \right| \leq x \leq \frac{1}{|A|} \left| \begin{array}{cc} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{array} \right| \\ \frac{|A|x - \left| \begin{array}{cc} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b'_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} a_{11} & b'_1 \\ a_{21} & b'_2 \end{array} \right|}, \frac{1}{|A|} \left| \begin{array}{cc} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b'_2 \end{array} \right| \leq x \leq \frac{1}{|A|} \left| \begin{array}{cc} a_{11} & b''_1 \\ a_{21} & b'_2 \end{array} \right| \end{cases} . \quad (15)$$

Po dosazení dostáváme

$$\mu_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{\left| \begin{array}{cc} 40 & 4 \\ 36 & 3 \end{array} \right| + 6x}{\left| \begin{array}{cc} 40 & 4 \\ 36 & 3 \end{array} \right|}, \frac{1}{-6} \left| \begin{array}{cc} 40 & 4 \\ 36 & 3 \end{array} \right| \leq x \leq \frac{1}{-6} \left| \begin{array}{cc} 36 & 4 \\ 42 & 3 \end{array} \right| \\ \frac{\left| \begin{array}{cc} 40 & 4 \\ 36 & 3 \end{array} \right| - 42}{\left| \begin{array}{cc} 40 & 4 \\ 36 & 3 \end{array} \right|}, \frac{x-14}{-4}, 10 \leq x \leq 14 \end{cases} , \text{ tj. } \mu_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{-6}, 4 \leq x \leq 10 \\ \frac{x-14}{-4}, 10 \leq x \leq 14 \end{cases}$$

a

$$\mu_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{\left| \begin{array}{cc} 2 & 32 \\ 3 & 45 \end{array} \right| + 6x}{\left| \begin{array}{cc} 2 & 32 \\ 3 & 45 \end{array} \right|}, \frac{1}{-6} \left| \begin{array}{cc} 2 & 32 \\ 3 & 45 \end{array} \right| \leq x \leq \frac{1}{-6} \left| \begin{array}{cc} 2 & 36 \\ 3 & 42 \end{array} \right| \\ \frac{\left| \begin{array}{cc} 2 & 32 \\ 3 & 45 \end{array} \right| - 36}{\left| \begin{array}{cc} 2 & 32 \\ 3 & 45 \end{array} \right|}, \frac{1-x}{-3}, 1 \leq x \leq 4 \end{cases} , \text{ tj. } \mu_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{-3}, 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{x-8}{-4}, 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Fuzzy optimální hodnoty strukturních proměnných jsou tedy opět trojúhelníková fuzzy čísla

$$X_1 = [x'_1; x_1; x''_1] = [4; 10; 14] \text{ a } X_2 = [x'_2; x_2; x''_2] = [1; 4; 8].$$

Dosazením do vzorce (12) a dostaneme také fuzzy optimální hodnotu účelové funkce

$$\mu_{Z_{\max}}(x) = \begin{cases} -6x - 50 \begin{array}{c|cc} 32 & 4 \\ 36 & 3 \end{array} \begin{array}{c|cc} 2 & 32 \\ 3 & 36 \end{array}, \\ \hline 50 \begin{array}{c|cc} 36 & 4 \\ 42 & 3 \end{array} + 80 \begin{array}{c|cc} 2 & 36 \\ 3 & 42 \end{array} \begin{array}{c|cc} 32 & 4 \\ 36 & 3 \end{array} \begin{array}{c|cc} 2 & 32 \\ 3 & 36 \end{array}, \\ pro \frac{1}{-6} \left[ 50 \begin{array}{c|cc} 32 & 4 \\ 36 & 3 \end{array} + 80 \begin{array}{c|cc} 2 & 32 \\ 3 & 36 \end{array} \right] \leq x \leq \frac{1}{-6} \left[ 50 \begin{array}{c|cc} 36 & 4 \\ 42 & 3 \end{array} + 80 \begin{array}{c|cc} 2 & 36 \\ 3 & 42 \end{array} \right] \\ \hline 50 \begin{array}{c|cc} 40 & 4 \\ 45 & 3 \end{array} + 80 \begin{array}{c|cc} 2 & 40 \\ 3 & 45 \end{array} + 6x \\ \hline 50 \begin{array}{c|cc} 40 & 4 \\ 45 & 3 \end{array} + 80 \begin{array}{c|cc} 2 & 40 \\ 3 & 45 \end{array} \begin{array}{c|cc} 36 & 4 \\ 42 & 3 \end{array} \begin{array}{c|cc} 2 & 36 \\ 3 & 42 \end{array}, \\ pro \frac{1}{-6} \left[ 50 \begin{array}{c|cc} 36 & 4 \\ 42 & 3 \end{array} + 80 \begin{array}{c|cc} 2 & 36 \\ 3 & 42 \end{array} \right] \leq x \leq \frac{1}{-6} \left[ 50 \begin{array}{c|cc} 40 & 4 \\ 45 & 3 \end{array} + 80 \begin{array}{c|cc} 2 & 40 \\ 3 & 45 \end{array} \right] \end{cases}$$

tj.

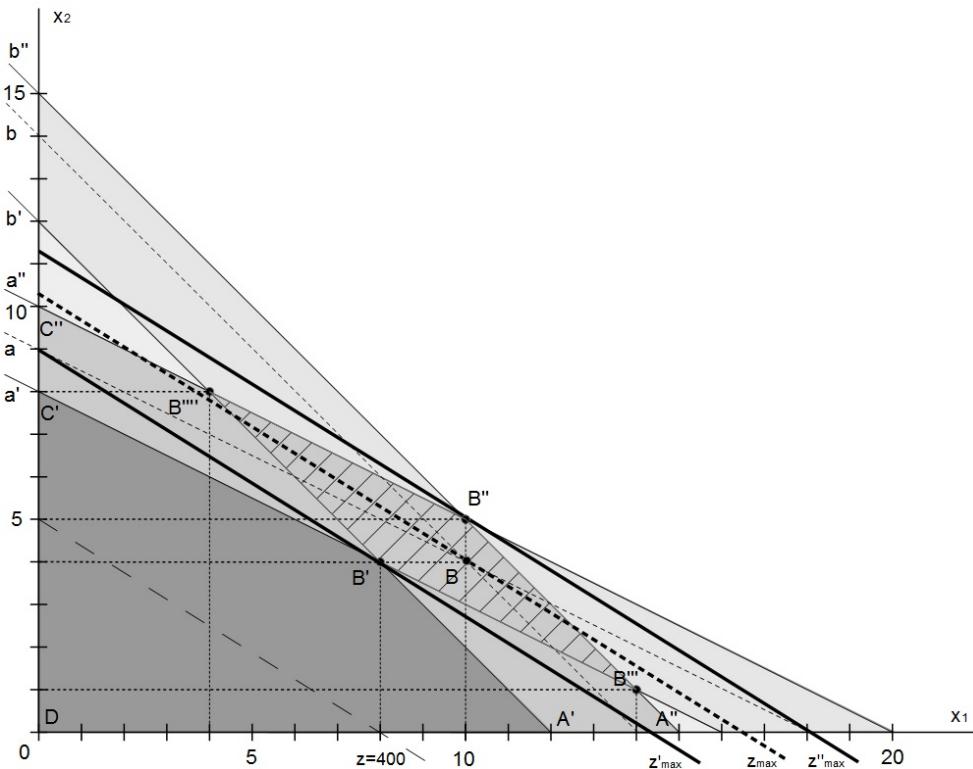
$$\mu_{Z_{\max}}(x) = \begin{cases} \frac{x - 720}{100}, & 720 \leq x \leq 820 \\ \frac{900 - x}{80}, & 820 \leq x \leq 900 \end{cases}.$$

Fuzzy optimální hodnota účelové funkce  $z$  je tedy také trojúhelníkové fuzzy číslo,

$$Z_{\max} = [z'_{\max}; z_{\max}; z''_{\max}] = [720; 820; 900] \text{ v tisících Kč.}$$

Z fuzzy odhadů pro optimální řešení úlohy vyplývá, že je možné dosáhnout optimálního zisku mezi 720 a 900 tisíci Kč, a v odpovídajícím výrobním programu se bude výrobků typu A produkovat mezi 4 a 14 tisíci ks a výrobků typu B mezi 1 až 8 tisíci ks (zatím jsme neuplatnili požadavek na minimální stupeň příslušnosti). Nejenže jsme vymezili, jakých hodnot mohou všechny veličiny případně nabývat, ale také s jakým stupněm příslušnosti.

Z grafického řešení v Obr. 2 je patrné, že množina všech přípustných řešení tvoří v minimalistickém případě čtyřúhelník  $A'B'C'D$  a ze sklonu izokvant účelové funkce vyplývá, že úloha by v tomto krajním případě měla jediné optimální řešení v bodě  $B'$ , jehož souřadnice lze získat řešením soustavy lineárních rovnic přímek  $a'$  a  $b'$ , které se v bodě  $B'$  protínají, a odpovídá mu v dané situaci maximální dosažitelný zisk ve výši 720 tisíc Kč, tuto hodnotu reprezentuje tučně vyznačená izokvanta  $z'_{\max}$ .



**Obrázek 2 – Grafické řešení – optimum při fuzzy kapacitách ( $\alpha$  bez omezení)**

Zdroj: vlastní

V maximalistickém případě by množinu přípustných řešení mohl tvořit čtyřúhelník  $A''B''C''D$ , úloha by v tomto krajním případě měla jediné optimální řešení v bodě  $B''$ , jehož souřadnice lze získat řešením soustavy lineárních rovnic přímek  $a''$  a  $b''$ , které se v bodě  $B''$  protínají, a odpovídá mu v dané situaci maximální dosažitelný zisk ve výši 900 tisíc Kč, tuto hodnotu reprezentuje tučně vyznačená izokvanta  $z''_{max}$ .

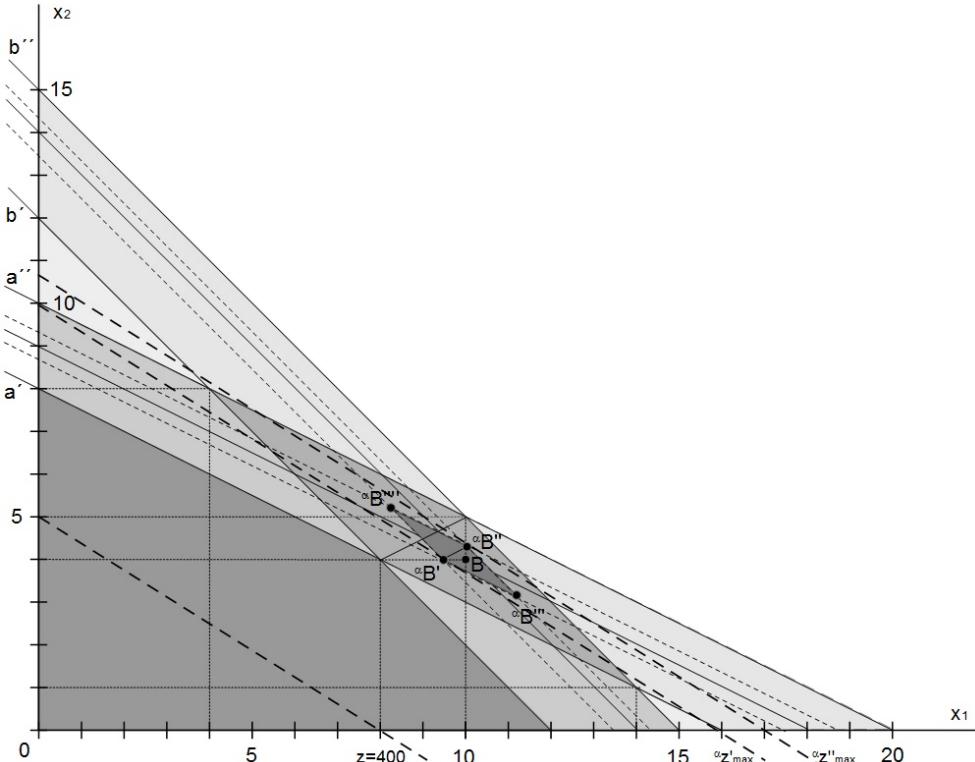
Pozor, v obou těchto krajních případech je ovšem stupeň příslušnosti zmíněných hodnot nulový. Naopak pro  $\alpha = 1$  by úloha měla jediné optimální řešení v bodě  $B$ , jehož souřadnice jsme získali při řešení Příkladu 1. V bodě  $B$  se protínají přímky  $a$  a  $b$  (v grafu vyznačené tence čárkované), a odpovídá mu v dané situaci maximální dosažitelný zisk ve výši 820 tisíc Kč (reprezentovaná tučně čárkovaně vyznačenou izokvantou  $z_{max}$ ).

Dle zadání ještě zbývá určit odhad optimálního řešení pro rozhodovatelem požadovaný minimální stupeň příslušnosti  $\alpha = 0,8$ .

K odhadu optimální hodnoty strukturních proměnných opět využijeme vztahů (14), resp. (15), kde položíme postupně pro každou z větví  $\mu_{X_1}(x)=0,8$ , resp.  $\mu_{X_2}(x)=0,8$  a získáme

${}^{\alpha} X_1 = [{}^{\alpha} x'_1, {}^{\alpha} x''_1] = [8,8;10;10,8]$  a  ${}^{\alpha} X_2 = [{}^{\alpha} x'_2, {}^{\alpha} x''_2] = [3,4;4;4,8]$ , k odhadu optimální hodnoty účelové funkce opět využijeme vztahu (12), kde položíme postupně pro každou z větví  $\mu_{Z_{\max}}(x) = 0,8$  a získáme

$${}^{\alpha} Z_{\max} = [{}^{\alpha} z'_{\max}; {}^{\alpha} z''_{\max}] = [800;820;836]$$



**Obrázek 3 – Grafické řešení – optimum pro fuzzy kapacity a stanovené minimální  $\alpha$**   
Zdroj: vlastní

Vyvarujme se mylného předpokladu, že extrémní hodnoty  ${}^{\alpha} x'_1$ ,  ${}^{\alpha} x''_1$ ,  ${}^{\alpha} x'_2$  a  ${}^{\alpha} x''_2$  musejí být souřadnicemi bodů generujícími extrémní hodnoty účelové funkce  ${}^{\alpha} z'_{\max}$  a  ${}^{\alpha} z''_{\max}$ .

Jak je vidět v Obr. 3, získáme tak pouze souřadnice zbývajících dvou vrcholů rovnoběžníku všech případných optimálních řešení

$${}^{\alpha} B''' = [{}^{\alpha} x'_1; {}^{\alpha} x''_2] = [10,8;3,4] \text{ a } {}^{\alpha} B'''' = [{}^{\alpha} x''_1; {}^{\alpha} x'_2] = [8,8;4,8],$$

jimž po řadě odpovídají hodnoty  ${}^{\alpha} z'''_{\max} = 824$  a  ${}^{\alpha} z''''_{\max} = 812$ .

Pokud bychom chtěli znát hodnoty strukturních proměnných odpovídajících extrémním hodnotám účelové funkce pro daný minimální stupeň příslušnosti, museli bychom ještě řešit první a druhou soustavu ze (13)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (36-32)\alpha + 32 \\ (42-36)\alpha + 36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 - (40-36)\alpha \\ 45 - (45-42)\alpha \end{pmatrix}$$

pro  $\alpha = 0,8$ , a odtud získáme po řadě

$${}^{\alpha}B' = [9,6;4] \text{ a } {}^{\alpha}B'' = [10;4,2].$$

V daném případě by „za určitých okolností“ (tedy při realizaci maximálních uvažovaných kapacit, jejichž stupeň příslušnosti je 80%) bylo možné dosáhnout zisku až 836 tisíc Kč tak, že bychom vyráběli 10 tisíc kusů výrobků typu A a 4 200 kusů výrobků typu B.

Stupeň příslušnosti  $\alpha$  se můžeme pokusit vyjádřit graficky pomocí obdobky tzv. kótovaného promítání výškou (kótou) každého bodu příslušného nějaké konkrétní fuzzy množně. Potom například hranice rovnoběžníku  ${}^{\alpha}B' {}^{\alpha}B''' {}^{\alpha}B'' {}^{\alpha}B''''$  tvoří množinu případných optimálních řešení se stupněm příslušnosti rovnému právě  $\alpha$ , tedy obdobu vrstevnice v mapě. Jak již bylo řečeno, tyto rovnoběžníky jsou stejnolehlé s původním rovnoběžníkem  $B' B''' B'' B''''$  podle středu  $B$  s koeficientem  $\alpha$ .

Poznámka: Kdyby byly jednotkové zisky z prodeje jednotlivých typů výrobků rovny postupně 10 Kč a 30 Kč, zřejmě by bylo optimální řešení reprezentováno bodem A, úvaha nad tvarem množiny všech možných případných optimálních řešení je zde ponechána k rozmyšlení čtenáři.

## ZÁVĚR

**N**e vždy je možné pro úlohy LP sestavit matematický model v obvyklém tvaru s pevně stanovenými kapacitami, pro který je pomocí simplexové metody nalezeno optimální řešení. V případě, že je kapacitu výrobních činitelů nutné odhadnout pomocí fuzzy čísel, jsou také optimální řešení pouze fuzzy odhadem. Rozpětí každé odhadované kapacity určuje šíři pásu, ve kterém se určitě nachází optimální řešení. Pokud je toto rozpětí „malé“, má ještě smysl úlohu řešit pomocí výše popsaných postupů. S rostoucím rozpětím odhadu kapacit roste samozřejmě také výsledná množina případných optimálních řešení a tím pádem také nepřesnost jeho nalezení. Rozhodovatel zde musí také věnovat pozornost hladině příslušnosti získaných řešení, je třeba zvolit vhodný kompromis mezi stupněm příslušnosti a příslušné výši hodnot, jejichž růst je nepřímo úměrný.

Grafické řešení lze použít pouze u úloh se dvěma strukturními proměnnými, může ovšem dobře posloužit k ilustraci řešení algebraického, konstrukce rovnoběžníků případných optimálních řešení pro různé hladiny jejich stupně příslušnosti  $\alpha$  je názorná a jednoduchá, stejně jako určování rozpětí při fuzzy odhadu optimální hodnoty účelové funkce.

Způsob řešení popsaný v tomto článku tedy nabízí možnost, jak řešit úlohy LP i pro případ, že nejsou známy přesné kapacity výrobních činitelů. Praktické aplikace fuzzy pojetí matematických modelů v ekonomických i technických úlohách nejsou bohužel obvyklé, i když na rozdíl od „klasických“ modelů umožňují respektovat nepřesnosti vstupních údajů.

Tento text úzce navazuje na článek zabývající se řešením úloh LP při intervalově zadaných kapacitách (Kubišová, 2015), kvůli názornějšímu porovnání algebraických výsledků i jejich grafických interpretací jsou v obou článcích záměrně voleny stejné demonstrační příklady řešených úloh LP.

## LITERATURA

- [1] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J. and Sherali, H. D. Linear Programming and Network Flows. New York: John Wiley & Sons 2011, ISBN 1118211324.
- [2] Zadeh, Lotfi A., Fu K., Tanaka, K., Shimura, M.: Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes, Academic Press, New York 1975. ISBN 0-12-775260-9.
- [3] Klir, G. J., and Yuan B.: Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Prentice Hall of India Private limited, New Delhi 2005.
- [4] Klir, G. J., and Yuan B.: Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice Hall of India Private limited, New Delhi 1995. ISBN 0-13-101171-5.
- [5] Novák, V.: Základy fuzzy modelování. BEN- technická literatura, Praha 2000.
- [6] Navara, M., Olšák, P.: Základy fuzzy množin. Skriptum ČVUT, 2. vydání, Praha, 2007.
- [7] Kolesárová, A., Kováčová, M.: Fuzzy množiny a ich aplikácie, Slovenská technická univerzita, Bratislava 2002. ISBN 8022720364.
- [8] Kubišová, A.: Úloha LP při intervalově zadaných kapacitách vlastních omezení. Logos polytechnikos, roč. 6, č. 4, 2015, Jihlava 2015.
- [9] Kubišová, A.: Operační výzkum. VŠPJ, Jihlava 2014. ISBN 978-80-87035-83-2.

# **SOLVING OF LP PROBLEMS WITH FUZZY LIMITS OF CAPACITIES IN CONSTRAINTS WITH $\alpha$ -CUT METHOD**

KONTAKTNÍ ÚDAJE:

Mgr. Andrea Kubišová  
Vysoká škola polytechnická Jihlava  
katedra matematiky  
Tolstého 16  
586 01 Jihlava  
E-mail: andrea.kubisova@vspj.cz

## **ABSTRACT**

In common LP problems there are usually all coefficients of mathematic model set exactly and therefore the exact optimum can be found. But the limit values are often not precisely known in practice, replacing them by crisp numbers causes deviation from reality. This article deals with optimal solution of LP problems with vaguely set capacities of constraints using fuzzy analysis  $\alpha$ -cut method for LP problems of two structural variables, it enables to compare algebraic and graphical solving methods. Gained results can be generalized.

## **KEYWORDS:**

linear programming, optimal solution, Cramer's rule, objective function value, fuzzy set, fuzzy number, fuzzy analysis

# VÝVOJ APLIKACÍ PRO CHYTRÉ BRÝLE RECON JET

JAKUB NOVOTNÝ  
MAREK MUSIL

VYSOKÁ ŠKOLA POLYTECHNICKÁ  
JIHLAVA

## ABSTRAKT

Jedním ze segmentů v rámci chytrých mobilních zařízení jsou wearables – chytrá mobilní zařízení integrovaná do ošacení či módních doplňků. Specifickou částí wearables jsou chytré brýle. Předkládaný příspěvek se zabývá charakteristikou brýlí Recon Jet využívaných pro vývoj aplikací a testování na VŠPJ. Jedná se o sportovní brýle s integrovaným mobilním procesorem, displejem, řadou senzorů a operačním systémem Recon OS postaveným na OS Android. Vývoj aplikací pro tuto platformu je tak obdobný vývoji aplikací pro Android. V článku je popsána část vývoje aplikace pro sportovní trénink typu fartlek za použití vývojového prostředí Android Studio, což zakládá značný potenciál pro další rozvoj i množství uživatelsky dostupných aplikací.

## KLÍČOVÁ SLOVA:

Wearables, Recon Jet, Android, vývoj aplikací

## ÚVOD

Po dynamickém rozvoji chytrých mobilních telefonů je i přes jejich další vývoj aktuálním trendem rozvoj další oblasti mobilní elektroniky tzv. wearables.

Wearables můžeme pracovně vymezit jako chytré mobilní zařízení integrovaná do ošacení či do módních doplňků, která lze pohodlně nosit na těle. Tržně nejrozšířenějšími i cenově nejdostupnějšími jsou různé druhy chytrých náramků a hodinek. Specifickým segmentem wearables jsou chytré brýle. Tento segment je i díky značné úvodní propagaci nejčastěji spojován s projektem Google Glass, který však prozatím ustoupil do pozadí a nedošlo k tržní realizaci finálního produktu. Jedním z prvních tržně dostupných zařízení v oblasti chytrých brýlí je model Recon Jet. Toto zařízení je jako první v České republice již nějakou dobu používáno na Vysoké škole polytechnické Jihlava pro testování a vývoj aplikací. V předkládaném příspěvku chceme stručně představit brýle Recon Jet po hardwarové stránce a dále také specifika vývoje aplikací pro tuto platformu.

## CHYTRÉ BRÝLE RECON JET

Recon Jet jsou chytré sportovní brýle vyvinuté a produkované kanadskou společností Recon. Jejich primární určení je pro sport a to zejména pro cyklistiku, ale lze je využít i pro některé profese či pro zábavu. Jedná se v podstatě o integrovaný mobilní počítač do sportovních (slunečních) brýlí. Více informací lze zjistit v [1].



**Obrázek 1:** Brýle Recon Jet

Základem je dvou jádrový procesor ARM Cortex-A9 taktovaný na frekvenci 1 GHz. Vnitřní úložiště typu flash má kapacitu 8 GB, velikost RAM je 1 GB. Přímo v zařízení jsou zabudované následující senzory: 3D akcelerometr, 3D gyroskop, 3D magnetometr, čidlo atmosférického tlaku a IR senzor. Brýle mají i vlastní vestavěný GPS modul a je možné je propojit s celou řadou dalších externích senzorových uzlů či zařízení díky konektivitě přes protokoly Bluetooth 4.0 a ANT+. Nechybí ani modul WiFi podporující standardy IEEE 802.11a/b/g/n. Dostupný je i jeden port Micro USB 2.0.

K zobrazování slouží zabudovaný display s rozlišením WQVGA a poměrem stran 16:9. Display je umístěn ve spodní části pravého skla brýlí a virtuálně odpovídá obrazovce s uhlopříčkou 30“ ve vzdálenosti cca 2 m. K ovládání slouží dvě hardwarová tlačítka (ENTER a ESC) a optický touchpad použitelný i za deště či v rukavicích.



**Obrázek 2:** Pohled skrz brýle na displej.

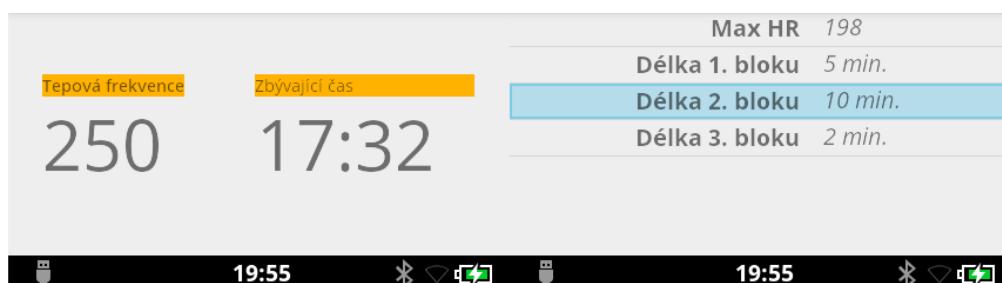
Přibližně v úrovni oka uživatele je umístěna čočka fotoaparátu pro pořizování snímků či natáčení krátkých videosekvencí. V brýlích je také zabudován duální mikrofon a reproduktor. O napájení celého zařízení se stará vyměnitelný lithium-ionový akumulátor, který zajišťuje provoz brýlí na cca 4 hodiny. Dobíjení probíhá přes Micro USB port.

Operační systém brýlí je prezentován pod názvem Recon OS (v době psaní článku ve verzi 4.2), jedná se však o systém založený na OS Android s dostupným SDK pro vývoj vlastních aplikací.

## VÝVOJ APLIKACÍ PRO OS RECON

**V**ývoj aplikací pro platformu Recon OS nastíníme na příkladu konkrétní aplikace pro fartlek trénink. Fartlek je metoda zejména běžeckého tréninku spočívající ve změnách rychlosti. Název fartlek pochází ze švédštiny a znamená „hra s rychlosí“. Popisovaná aplikace bude sloužit k fartlek tréninku řízenému podle srdeční frekvence sportovce (nikoli podle subjektivního pocitu). Vyjma brýlí Recon Jet je pro takovýto druh tréninku potřebný externí senzor k měření tepové frekvence, obvykle se jedná o bezdrátově propojený hrudní pás. Vlastní aplikace provede sportovce postupně třemi etapami celého cvičení. Nejprve bude uživatel veden k zahřátí klusem po dobu minimálně pět minut a zároveň k dosažení tepové frekvence minimálně na úrovni 60 %<sup>1</sup> maximální tepové frekvence daného uživatele. Po zahřátí následuje vlastní fartleková fáze, při které aplikace instruuje atleta podle aktuální tepové frekvence střídavě ke zrychlování, až k dosažení 75 % maximální tepové frekvence a následně zpomalení běhu, až k poklesu aktuální tepové frekvence pod 60 % její maximální hodnoty. Tento proces je cyklicky opakován po dobu 20 minut. Poslední sekvencí je pak výklus a zklidnění po dobu min. 5 minut.

Popsaná aplikace je vyvíjena na VŠPJ v prostředí Android Studio, které je podporováno společností Google. Lze také použít vývojové prostředí Eclipse, které ale není společností Google podporováno. Informace pro vývoj byly čerpány z [4] a [5]. Projekt aplikace je standardní projekt s nastavením API level na hodnotu 16 a použitým programovacím jazykem je Java. K přímému propojení brýlí a Android Studia je nutné nainstalovat do PC speciální ovladač usb (usb-driver). Pro vlastní ladění pak je ještě nutné nahradit ADB-driver jiným, který je defaultně poskytován s Android SDK. Postup je uveden v [3]. Toto řešení umožnuje ladění programu (vykonání debug módu) přímo ve skutečných brýlích místo v emulátoru.

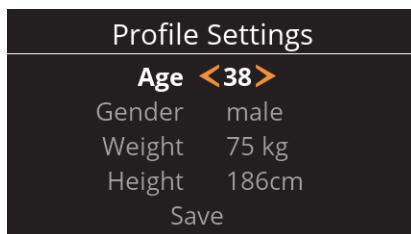


Obrázek 3: Obrazovky aplikace Fartlek

<sup>1</sup> Tuto hodnotu stejně jako ostatní lze pochopitelně zvolit i jinak dle úrovně trénovanosti sportovce i účelu tréninku.

Na obrázku 3 vidíme v levé části první obrazovku aplikace, která zobrazuje (a vykonává) vlastní fartlek. Informuje o aktuální tepové frekvenci a v jednotlivých fázích tréninku vede sportovce danou částí. Pravá část obrázku pak zobrazuje druhou obrazovku aplikace, která umožňuje individuální nastavení požadovaných hodnot pro konkrétní trénink. Jedná se o parametry: maximální tepová frekvence sportovce, minimální doba trvání každé fáze a případně další potřebné hodnoty. Všechny hodnoty jsou uloženy a mohou být změněny i později (jsou editovatelné).

Účelem vývoje popisované aplikace bylo zejména seznámení se s možnostmi vytváření aplikace pro brýle Recon Jet a dále porovnání s ostatními platformami využívanými pro chytré sportovní zařízení (zejména Suunto Apps a Garmin Connect IQ). Vývoj aplikací pro Recon OS je popsán v [2]. Jak již bylo uvedeno, aplikace se skládá ze dvou obrazovek. Celý proces trénování je uskutečněn na první obrazovce. Druhá obrazovka je určena pro nastavení aplikace. Umožňuje přenastavit hodnotu maximální tepové frekvence, minimální doby trvání každé fáze tréninku a další klíčové hodnoty fáze trénování – např. pro fázi č. 2 je to procento minimální a maximální hodnoty tepové frekvence pro zrychlování a zpomalování. Vizuální layout aplikace je znázorněn na obrázku 3. Profile settings (viz. obrázek 4) umožňuje další nastavení. Některé hodnoty nejsou pro fartlek podstatné, ale pro některé další funkcionality využívané aplikace ano.



**Obrázek 4:** Nastavení profilu

Pro vizualizaci dat používáme standardní předdefinované komponenty určené pro zobrazení a zadání dat. Pro přechod mezi stránkami pak fragment ViewPager, který je podporovaný knihovnou Android Support Library.

## SOUČASNÝ STAV APLIKACE A DALŠÍ ZÁMĚRY

**P**opisovaná aplikace v současné době simuluje proces tréninku a navigace v každé jeho fázi a to bez příjmu informace o aktuální tepové frekvenci. Komunikace mezi brýlemi a hrudním pásem je v řešení. K tomu účelu budeme používat bezdrátový protokol ANT+. Jedná se o bezdrátový protokol pro oblast sítí PAN, který ale nespadá mezi standardy IEEE. Protokol ANT+ je využívan od roku 2003 společností Dynastream Innovations a má primárně za cíl nízkou spotřebu.

Hlavním úkolem je realizace komunikace aplikace a brýlí. Bude implementována třída logické vrstvy, jejímž použitím bude zajištěno vyhodnocení příchozí tepové frekvence k vedení tréninku. Prezentační vrstva aplikace pak bude komunikovat s touto třídou. Pro zachování interakce uživatelského rozhraní aplikace bude proces zpracován v samostatném vlákně. Řešením může být také využití cizí komponenty.

## ZÁVĚR

**Ú**čelem tohoto příspěvku bylo seznámit čtenáře s chytrými sportovními brýlemi Recon Jet a specifiky vývoje aplikací pro tuto platformu. Přestože hardwarové parametry jsou z hlediska použitého procesoru a dostupné paměti poněkud slabší oproti parametrům současných high-endových mobilních zařízení, z hlediska výkonu se jedná o dostatečné řešení a (dle dosavadních zkušeností z testování na VŠPJ) o uživatelsky neomezující. Naopak dostupná konektivita a vestavěné senzory obsahují všechny v chytrých sportovních zařízeních aktuálně dostupné technologie.

Vzhledem k tomu, že operační systém brýlí Recon Jet Recon OS je založen na systému Android, není vývoj aplikací na rozdíl třeba od zcela proprietární platformy Garmin Connect IQ výrazně odlišný od vývoje aplikací pro platformu Android. To zakládá značný potenciál pro další rozvoj i množství uživatelsky dostupných aplikací. Přesto se dá předpokládat, že segment chytrých brýlí bude jen tržně okrajovou záležitostí. Z programátorského i uživatelského hlediska se však díky určité unikátnosti jedná o velmi atraktivní oblast.

## LITERATURA

- [1] Recon Jet [online]. 2015 [cit. 2015-09-01]. Dostupné z:  
<http://www.reconinstruments.com/products/jet/>.
- [2] Recon OS: Operating System for Reconfigurable Computing [online].  
[cit. 2015-09-17]. Dostupné z: <http://www.reconos.de/>
- [3] Recon SDK 4 API. Recon OS: Operating System for Reconfigurable Computing [online]. [cit. 2015-09-18]. Dostupné z: <http://www.reconinstruments.com/developers/develop/getting-started/recon-sdk-4-api/>
- [4] Android Studio: SDK [online]. [cit. 2015-09-17]. Dostupné z:  
<https://developer.android.com/develop/index.html>
- [5] ALLEN, Grant. 2013. Android 4: průvodce programováním mobilních aplikací.  
1. vyd. Brno: Computer Press, 656 s. ISBN 978-80-251-3782-6.

# APPLICATION DEVELOPMENT FOR RECON JET



## KONTAKTNÍ ÚDAJE:

Ing. Marek Musil  
Vysoká škola polytechnická Jihlava  
katedra technických studií  
Tolstého 16  
586 01 Jihlava  
E-mail: marek.musil@vspj.cz

Ing. Jakub Novotný, Ph.D.  
Vysoká škola polytechnická Jihlava  
katedra technických studií  
Tolstého 16  
586 01 Jihlava  
E-mail: jakub.novotny@vspj.cz

## ABSTRACT

Wearables are one of the segments in the field of smart mobile devices. Wearables are smart mobile devices integrated into clothing or fashion accessories. A specific part of wearables are then smart glasses. This paper deals with the characteristics of glasses Recon Jet used for application development and testing at College of Polytechnics Jihlava. Jet is a sports glasses with integrated mobile processor, display, a variety of sensors and Recon OS operating system built on Android OS. Development of applications for this platform is so similar to development for Android. The article describes the development of the applications for sports training of fartlek type by use of Android Studio development environment. This conditions constitutes a significant potential for further development of user-available applications.

## KEYWORDS:

wearables, Recon Jet, Android,  
application development

# NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RANDOM PARAMETERS

IVANA PULTAROVÁ

COLLEGE OF POLYTECHNICS  
JIHLAVA

## ABSTRACT

Numerical methods for the solution of differential equations with randomly distributed parameters provide uncertainty quantification of the approximate solution. One of such methods is the stochastic Galerkin method, which uses the weak form of the equation and yields a projection of the exact solution onto an appropriate finite dimensional function space. Since the computational cost of the solution of related systems of linear equations may be high, some preconditioning techniques are used. In this paper we study a block structure of the corresponding matrices, and introduce some new characteristics of their spectra, namely, the number of unit eigenvalues.

## KEYWORDS:

differential equations, probability,  
numerical methods

# 1 Introduction

Differential equations representing theoretical and engineering problems can be affected by uncertainties in their data. In such cases, numerical methods should provide uncertainty quantification of the solution. The Monte Carlo method, collocation methods and the stochastic Galerkin method (SGM) belong to the main solution tools for such problems [2, 3, 13]. The SGM is efficient especially for elliptic or parabolic problems dependent linearly on random parameters. Still, the obtained systems of linear equations are hard to solve, and some preconditioning algorithms should be applied [1]. In this paper we recall some well known preconditioning techniques and provide new characteristics of spectra of resulting matrices. While in some recent papers [4, 9, 10], resulting condition numbers are estimated, in our paper we provide an estimate of the least number of unit eigenvalues of the preconditioned matrices. It is well known that not only the extreme eigenvalues but also their distribution influence the convergence of iterative solution methods.

The paper is organized as follows. In the next part, we introduce the notation and the problem. In section 3, we recall the SGM. In Section 4, we show three types of preconditioning methods and introduce a lower bound to the number of unit eigenvalues of the resulting matrices. Short discussion concludes the paper.

## 2 Notation and problem description

We study numerical solution of an elliptic differential equation in almost sure sense [13]

$$-\nabla \cdot (a(x, y)\nabla u(x, y)) = b(x), \quad (1)$$

where  $x$  is a physical (spatial) variable,  $x \in \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}$  is a bounded domain,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^d$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$ , and  $a(x, y)$  is a scalar random field. The gradient symbol  $\nabla$  denotes differentiation with respect to  $x$ . Homogeneous Dirichlet conditions are applied on  $\partial\mathcal{D} \times \Omega$ , where  $\partial\mathcal{D}$  is the boundary of  $\mathcal{D}$ . Let  $b \in L^2(\mathcal{D})$ .

We assume that  $y = (y_1(\omega), \dots, y_N(\omega)) : \Omega \rightarrow \mathcal{R}^N$  is a vector of  $N$  random variables, which are defined by a probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , where  $\Omega$  is a sample space with  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  and probability measure  $\mathcal{P}$ . Let the random variables  $y_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , be independent and identically distributed and have zero mean and bounded variance. Let  $\rho$  denote the probability density function of each of  $y_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . The mean value of a function  $g$  of  $y_k$  is then

$$\mathbb{E}[g(y_k)] = \int_{\Omega} g(y_k(\omega)) d\mathcal{P}(\omega) = \int_{\mathcal{R}} g(z)\rho(z) dz.$$

Let there exist  $a_1$  and  $a_2$  such that

$$0 < a_1 \leq a(x, y) \leq a_2 < \infty \quad \text{a.e. in } D \times \Omega. \quad (2)$$

Three main approaches can be used to solve such kind of problems, see, for example, [2, 3, 13]. The most straightforward and versatile is the Monte Carlo method where large number of random sample parameters are generated for (1). Desired characteristics of the solution are then computed from a large set of obtained solutions of the particular deterministic problems. Apparently, this can be rather time consuming. However, parallel implementation can speed up the solution process. In the collocation method, instead of generating large number of samples, a certain small set of parameter values can be used in (1), and the same number of deterministic problems are

solved. Then characteristics of the solution can be obtained by means of the Gauss quadrature formulae. Unfortunately, to get a more accurate solution, one needs to change the whole set of samples, which is a drawback of this method. In this paper, we make use of the third method: the stochastic Galerkin method (SGM). It is derived from the well known variational principle for elliptic differential equations where the exact weak solution  $u(x, y)$  is projected onto some appropriate finite-dimensional subspace of the solution space.

### 3 Stochastic Galerkin method

Let us denote the Hilbert space  $H = H_0^1(\mathcal{D}) \times L_{\bar{\rho}}^2(\mathcal{R}^N) = \{u(x, y); \int_{\mathcal{R}^N} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u(x, y)|^2 \bar{\rho}(y) dx dy < \infty, u(x, y) = 0, (x, y) \in \partial D \times \Omega\}$  where  $\bar{\rho}(y) = \prod_{k=1}^N \rho(y_k)$ . The weak form of (1) then reads [2, 3, 5]: find  $u(x, y) \in H$  such that

$$\int_{\mathcal{R}^N} \int_{\mathcal{D}} a(x, y) \nabla u(x, y) \nabla v(x, y) \bar{\rho}(y) dx dy = \int_{\mathcal{R}^N} \int_{\mathcal{D}} b(x) v(x, y) \bar{\rho}(y) dx dy, \quad (3)$$

for all  $v(x, y) \in H$ . The truncated polynomial chaos approximation [2, 13] to the exact solution  $u(x, y)$  of (3) is defined by

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^M u_i(x) \Phi_i(y), \quad (4)$$

where  $\Phi_1(y), \dots, \Phi_M(y)$  are  $N$ -variate polynomials orthogonal in  $L_{\bar{\rho}}^2(\mathcal{R}^N)$ . The polynomials  $\Phi_i(y)$  can be chosen in the form of products of normalized univariate polynomials  $\phi_i$  orthogonal in  $L_{\rho}^2(\mathcal{R})$ ,

$$\Phi_i(y) = \prod_{k=1}^N \phi_{i_k}(y_k),$$

where the degree of  $\phi_j(z)$  is equal to  $j$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . We refer to [2, 5] for the detailed convergence theory and a priori error estimates of the SGM.

The physical parts  $u_i(x)$  of the expansion (4) can be approximated by some finite element basis functions  $\psi_r(x)$ ,  $r = 1, \dots, F$ ,

$$u_j(x) = \sum_{r=1}^F u_{jr} \psi_r(x). \quad (5)$$

A discretization space of the SGM for approximation of the solution  $u(x, y)$  of (3) is then a tensor product of some finite element space  $V_{\mathcal{D}} \subset H_0^1(D)$  of a dimension  $F$  and of a set of  $M$  orthogonal multivariate polynomials of  $N$  random variables. Basis functions are then of the type  $\psi_r(x) \Phi_i(y)$ ,  $r = 1, \dots, F$ ,  $i = 1, \dots, M$ . For the polynomial chaos expansion (4) of  $u(x, y)$  [7] we use in this paper the so called complete polynomials, which are products of univariate orthogonal polynomials, the total degree of which does not exceed a given constant  $q \in \{0, 1, \dots\}$ . We denote

$$V_q = \left\{ \prod_{k=1}^N \phi_{i_k}(y_k); \sum_{k=1}^N \deg(\phi_{i_k}) \leq q \right\}, \quad (6)$$

where  $\deg(\phi_j)$  means the degree of  $\phi_j$ . The dimension of  $V_q$  is

$$M_q := \dim V_q = \binom{N+q}{N}.$$

Let us consider  $a(x, y)$  in the following form

$$a(x, y) = a_0(x) + \sum_{k=1}^N a_k(x)y_k. \quad (7)$$

In this paper we do not distinguish between a function  $u$  and its vector representation with respect to some basis of the approximation space  $V_q \times V_D$ . Galerkin discretization of (3) leads to a set of  $M_q \times F$  linear equations with  $M_q \times F$  unknowns,

$$Au = B, \quad (8)$$

where the elements of  $A$  and  $B$  are

$$\begin{aligned} A_{ir,js} &= \int_{\mathcal{R}^N} \int_{\mathcal{D}} a(x, y) \nabla \psi_r(x) \nabla \psi_s(x) \Phi_i(y) \Phi_j(y) \bar{\rho}(y) dx dy \\ &= \int_{\mathcal{R}^N} \int_{\mathcal{D}} a_0(x) \nabla \psi_r(x) \nabla \psi_s(x) \Phi_i(y) \Phi_j(y) \bar{\rho}(y) dx dy \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{R}^N} \int_{\mathcal{D}} a_k(x) y_k \nabla \psi_r(x) \nabla \psi_s(x) \Phi_i(y) \Phi_j(y) \bar{\rho}(y) dx dy \\ &=: (A_0)_{ir,js} + \sum_{k=1}^N (A_k)_{ir,js}, \\ B_{ir} &= \int_{\mathcal{R}^N} \int_{\mathcal{D}} b(x) \psi_r(x) \Phi_i(y) \bar{\rho}(y) dx dy, \end{aligned}$$

where  $i, j = 1, \dots, M_q$ ,  $r, s = 1, \dots, F$ . Let us define matrices  $K_m$ ,  $G_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$ , by

$$(K_0)_{rs} = \int_{\mathcal{D}} a_0(x) \nabla \psi_s(x) \nabla \psi_r(x) dx, \quad (K_m)_{rs} = \int_{\mathcal{D}} a_m(x) \nabla \psi_s(x) \nabla \psi_r(x) dx, \quad (9)$$

$$(G_0)_{ij} = \int_{\mathcal{R}^N} \Phi_i(y) \Phi_j(y) \bar{\rho}(y) dy = \delta_{ij}, \quad (G_m)_{ij} = \int_{\mathcal{R}^N} y_m \Phi_i(y) \Phi_j(y) \bar{\rho}(y) dy. \quad (10)$$

Then the Galerkin matrix of the discretized problem (3) reads

$$A = G_0 \otimes K_0 + \sum_{m=1}^N G_m \otimes K_m, \quad (11)$$

where  $\otimes$  stands for the Kronecker product of matrices. Let us order the basis functions  $\psi_r(x)\Phi_j(y)$  in such manner that the indices at the physical basis functions  $\psi_r(x)$  are changing fastest. Let the polynomials  $\Phi_i(y)$  be ordered in such a way that the polynomials with lower total degree  $q$  go first.

Due to the orthogonality of the polynomials  $\phi_j$ , the matrix  $A$  is block sparse and the non-zero structure of  $A$  depends on numbering of the base functions  $\psi_r(x)\Phi_i(y)$ . According to our ordering,  $A$  is a block matrix with blocks of the type  $F \times F$ . Such a block of  $A$  with coordinates  $i, j$  corresponds to a pair of polynomials  $\Phi_i$  and  $\Phi_j$ . An example of  $A$  defined by (11) for  $N = 2$  uniformly distributed random variables  $y_1$  and  $y_2$  and for  $q = 2$  reads

$$A = \left( \begin{array}{ccc|ccc} K_0 & \frac{1}{\sqrt{3}}K_1 & \frac{1}{\sqrt{3}}K_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}K_1 & K_0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{15}}K_1 & \frac{1}{\sqrt{3}}K_2 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}K_2 & 0 & K_0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}K_1 & \frac{2}{\sqrt{15}}K_2 \\ \hline 0 & \frac{2}{\sqrt{15}}K_1 & 0 & K_0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}K_2 & \frac{1}{\sqrt{3}}K_1 & 0 & K_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{15}}K_2 & 0 & 0 & K_0 \end{array} \right),$$

where  $K_0, K_1, K_2$  are defined by (9) and the constant coefficients are defined by (10). Note that for uniformly distributed random variables the Legendre orthogonal polynomials  $\phi_i$  are used. Another example of the non-zero block-structure of  $A$  is displayed in Figure 1 for  $N = 4$  and  $q = 3$ . This scheme is obtained for uniformly distributed random variables and for the Legendre polynomials  $\phi_i(y_k)$ . Note that the same non-zero scheme can be obtained, for example, for normally distributed random variables  $y_1, \dots, y_4$  and for the Hermite polynomials. The straight lines indicate the parts of  $A$  which correspond to  $q = 0, 1, 2$ , respectively. Every small colored rectangle stands for a block matrix of the size  $F \times F$ . The small rectangles represent some multiples of matrices  $K_i$ , thus the non-zero structure of these small  $F \times F$  blocks is the same as the non-zero structure of a stiffness matrix  $K_0$  of the corresponding deterministic problem. The non-zero block structure of  $A$  depends on properties of the approximation polynomials  $\Phi_j(y)$  and on the expansion of  $a(x, y)$ . Since for many types of probability distributions some short-term recursive formula is available, the non-zero block structure of  $A$  remains sparse but, of course, spectral properties of  $A$  may change. See, for example, [7].

## 4 Preconditioning and spectra of resulting matrices

The systems of linear equations (8) are apparently of huge dimensions. The convergence of frequently used iterative solution methods depends on a distribution of the error of an initial approximation among spectral components of  $A$ . To solve a preconditioned problem means to solve the system of equations

$$C^{-1/2}AC^{-1/2}y = C^{-1/2}B \quad (12)$$

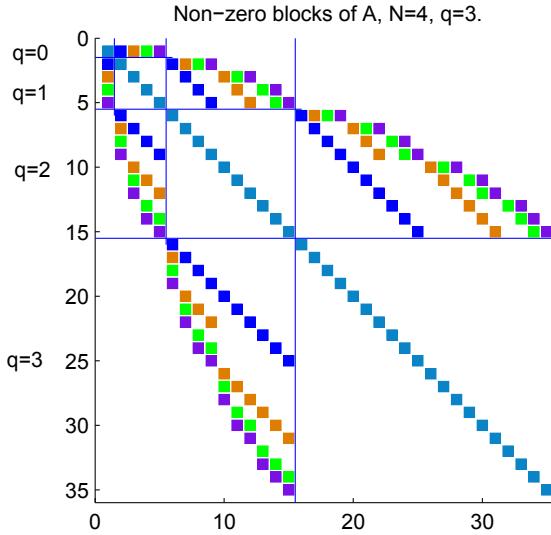


Figure 1: Non-zero blocks of the matrix  $A$  for  $N = 4$  and  $q = 3$ . Matrix  $A$  consists of  $35 \times 35$  blocks of the size  $F \times F$ . Diagonal blocks are all equal to the matrix  $K_0$ . Off-diagonal rectangles correspond to some multiples of  $F \times F$  matrices  $K_j$ , which have different colours for different  $j = 1, 2, 3, 4$ . Left upper  $M_q \times M_q$  block parts of  $A$  correspond to smaller problems with  $q = 0, 1, 2$ , respectively, where  $M_0 = 1$ ,  $M_1 = 5$  and  $M_2 = 15$ .

and then set  $u = C^{-1/2}y$  [1, 8]. We aim to find such a symmetric matrix  $C$  that any equation with the matrix  $C$  is easy to solve, and that all eigenvalues of  $C^{-1}A$  are close to unity. Then any iterative method for (12) converges fast.

In the sequel, we assume that the random variables  $y_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , are uniformly distributed on  $\langle -1, 1 \rangle$  and thus  $\rho(y_k) = 1/2$ . In this case, all diagonal blocks of  $A$  equal to  $K_0$ . We compare spectral properties of  $C^{-1}A$  resulting from three kinds of preconditioning of  $A$ , cf. [4, 7, 6, 9, 10, 12]: Block-diagonal (BD) preconditioning, two-by-two block (B2) preconditioning and algebraic multilevel (AML) preconditioning, see [8]. Let us denote the corresponding matrices by  $C_{\text{BD}}$ ,  $C_{\text{B2}}$  and  $C_{\text{AML}}$ , respectively.

For the BD preconditioning, the matrix  $C_{\text{BD}}$  is equal to the block diagonal of  $A$  composed from all  $M_q$  diagonal blocks  $K_0$ . The solution of the system with the matrix  $C_{\text{BD}}$  is very fast. Indeed, it is the solution of the related deterministic problem with  $M_q$  right hand sides. Matrix  $C_{\text{B2}}$  has two-by-two block structure with null off-diagonal blocks. The first diagonal block equals to the left upper  $M_{q-1} \times M_{q-1}$  block part of  $A$  and the second diagonal block equals to the lower right  $(M_q - M_{q-1}) \times (M_q - M_{q-1})$  block part of  $A$ , cf. Figure 1. Note, that for the first block, again the same type of preconditioning can be used recursively. Good efficiency of this approach is due to a favorable relation between approximation subspaces corresponding to this matrix splitting, see [10]. The matrix  $C_{\text{AML}}$  can be obtained similarly as  $C_{\text{B2}}$ , but some parts are built recursively, which corresponds to a W-cycle multilevel scheme, see [8, 10]. Of course, neither  $A$  nor the matrices  $C$  are constructed explicitly during practical computation.

In this paper we study preconditioning of  $A$  from a completely new perspective. Apart from condition numbers, we study spectra of resulting preconditioned matrices, namely the number of unit eigenvalues. Our numerical results are supported by theoretically obtained lower bounds introduced in Theorem 1. This characteristics contributes to understanding the efficiency of particular preconditioning methods. A graphical plot of the spectra of  $A$  and of the resulting matrices after

BD, B2 and AML preconditioning can be found in Figure 2. Note the difference between the scales of the left and right panels. The underlying problem here is the equation (1) in  $\mathcal{D} = (0, 1)$  with homogeneous boundary condition, where  $a(x, y)$  is piecewise constant,  $N = 3$  and  $q = 3$ .

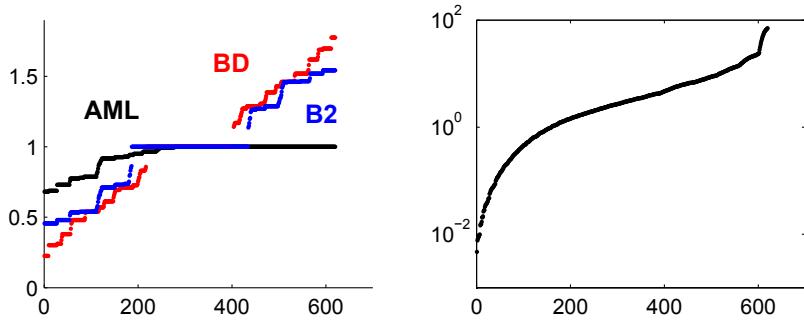


Figure 2: Spectra of  $A$  (right) and of resulting preconditioned matrices (left) using BD (red), B2 (blue) and AML (black) preconditioning, respectively. The eigenvalues are ordered according to their growing values.

The main result of this paper follows. This is the lower bound to the number of unit eigenvalues of the preconditioned matrix  $A$ . A proof of this theorem is technical and we do not introduce it here. It will be presented together with a further development of this theory elsewhere.

**Theorem 1** *Let us consider matrix  $A$  defined by (11) for  $N$  uniformly distributed random variables and the degree of approximation complete polynomials at most  $q$ . Let  $n_{\text{BD}}(N, q)$  and  $n_{\text{B2}}(N, q)$  be numbers of unit eigenvalues of matrices  $C_{\text{BD}}^{-1}A$  and  $C_{\text{B2}}^{-1}A$ , respectively. Then for  $N = 1, 2, \dots$  and  $q = 2, 3, \dots$*

$$\begin{aligned} n_{\text{B2}}(N, 2) &= n_{\text{BD}}(N, 2) = (N^2 - N + 2)F/2, \\ n_{\text{B2}}(1, q) &= (q - 1)F, \quad n_{\text{BD}}(1, q) = (1 + (-1)^q)F/2, \\ n_{\text{BD}}(N, q) &= n_{\text{BD}}(N - 1, q) + n_{\text{BD}}(N, q - 1), \\ n_{\text{B2}}(N, q) &= n_{\text{B2}}(N - 1, q) + n_{\text{B2}}(N, q - 1). \end{aligned}$$

Let us notice that the number of unit eigenvalues grows faster with increasing  $N$  (if  $q > 2$ ) and/or with increasing  $q$  for the B2 preconditioning than for the BD one.

## 5 Discussion

Preconditioning of the SGM for parametrized partial differential equations is a theoretically difficult task due to a complicated structure of the discretized problem. However, numerical experiments [5, 6, 9, 12] and first theoretical results [7, 10, 11] indicate that efficient preconditioning can be performed. Moreover, the quality of some preconditioning techniques, for example the AML method [1, 8], does not depend on  $N$ ,  $q$  and  $F$ .

In this paper we compare preconditioning methods of the SGM from a new perspective. In addition to the condition number, we study also the number of unit eigenvalues of resulting preconditioned matrices. This point of view contributes to better understanding of the interplay between preconditioning techniques and numerical methods used for the resulting systems of equations. While in this paper we study only uniformly distributed random parameters, any other distribution can be studied using the same tools.

## LITERATURA

- [1] O. Axelsson: Iterative Solution Methods. Cambridge University Press, 1996.
- [2] I. Babuška, F. Nobile, R. Tempone: A stochastic collocation method for elliptic partial differential equation with random input data. *SIAM Rev.* 2 (2010), 317–355.
- [3] I. Babuška, R. Tempone, G. E. Zouraris: Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 42 (2004), 800–825.
- [4] A. Bespalov, C. E. Powell, D. Silvester: A priori error analysis of stochastic Galerkin mixed approximations of elliptic PDEs with random data. *SIAM J. Numer. Anal.* 50 (2014), 2039–2063.
- [5] M. K. Deb, I. M. Babuška, J. T. Oden: Solution of stochastic partial differential equations using Galerkin finite element techniques. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2001), 6359–6372.
- [6] O. G. Ernst, C. E. Powell, D. J. Silvester, E. Ullmann: Efficient solvers for a linear stochastic Galerkin mixed formulation of diffusion problems with random data. *SIAM J. Sci. Comput.* 31 [7] (2009), 1424–1447.
- [8] O. G. Ernst, E. Ullmann: Stochastic Galerkin matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 31 (2010), 1848–1872.
- [9] J. Kraus, S. Margenov: Robust Algebraic Multilevel Methods and Algorithms. Radon Series on Computational and Applied Mathematics 5, RICAM, Walter de Gruyter, 2009, Germany.
- [10] C. E. Powell, H. C. Elman: Block-diagonal preconditioning for spectral stochastic finite-element systems. *IMA J. Numer. Anal.* 29 (2009), 350–375.
- [11] I. Pultarová: Hierarchical preconditioning for the stochastic Galerkin method: upper bounds to the strengthened CBS constants. Submitted. Available in ERC-CZ project LL1202 database, <http://more.karlin.mff.cuni.cz>.
- [12] I. Pultarová: Adaptive algorithm for stochastic Galerkin method. *Applications of Mathematics* 60, (2015) 551–571.
- [13] B. Sousedík, R. G. Ghanem and E. T. Phipps: Hierarchical Schur complement preconditioner for the stochastic Galerkin methods. *Numerical Linear Algebra with Applications* 21 (2013), 136–151.
- [14] D. Xiu: Numerical Methods for Stochastic Computations. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2010.

# NUMERICKÉ ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC S NÁHODNÝMI PARAMETRY

KONTAKTNÍ ÚDAJE:

doc. RNDr. Ivana Pultarová, Ph.D.  
Vysoká škola polytechnická Jihlava  
katedra matematiky  
Tolstého 16  
586 01 Jihlava  
E-mail: ivana.pultarova@vspj.cz

## ABSTRACT

Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic s náhodnými parametry poskytují pravděpodobnostní charakteristiky získaného přibližného řešení. Jednou z těchto metod je stochastická Galerkinova metoda, která využívá slabou formulaci úlohy a poskytuje projekci přesného řešení do vhodného konečně dimenzionálního prostoru funkcí. Jelikož řešení příslušných systémů lineárních rovnic může být výpočetně náročné, používají se různé metody předpodmínění. V tomto příspěvku studujeme blokovou strukturu příslušných matic a uvádíme nové charakteristiky jejich spekter, speciálně počet vlastních čísel rovných jedné.

## KEYWORDS:

diferenciální rovnice, pravděpodobnost,  
numerické metody

# VÝVOJE APLIKACÍ PRO HODINKY GARMIN FENIX 3

FRANTIŠEK SMRČKA  
JAKUB NOVOTNÝ

VYSOKÁ ŠKOLA POLYTECHNICKÁ  
JIHLAVA

## ABSTRAKT

V roce 2015 se dostaly na trh sportovní hodinky Garmin Fénix 3, které jsou určeny pro sportovce. Jsou vybaveny pokročilými senzory GPS a konektivitou k externím senzorům. Je zde podpora Connect IQ, což je otevřená proprietární platforma pro nositelnou elektroniku umožňující vývojářům programovat aplikace pro kompatibilní zařízení. Jedná se především o alternativní vzhledy obrazovek, tréninkové programy nebo podporu pro další příslušenství. Pro programování aplikací se používá jazyk Monkey C, což je objektově orientovaný jazyk. Používá počítání referencí pro automatické vyčistění paměti, takže není nutné paměť spravovat. Článek se zabývá principem vývoje aplikací na platformě Connect IQ. Nejprve je ve článku základní seznámení s použitým hardware - sportovními hodinkami Fenix 3, jejich funkcionalitou a možnostmi využití. Součástí článku je popis instalace potřebných vývojových komponent. Jedná se především o open source vývojové prostředí Eclipse, určené pro programování v jazyce Java. Dále je nutné doinstalovat Connect IQ SDK. Finálně je v článku popsána jednoduchá aplikace pro změnu vzhledu displeje včetně vložení vlastního loga na displej zařízení. Závěrečná část obsahuje popis vývoje aplikace pro navigaci do „základního tábora“.

## KLÍČOVÁ SLOVA:

Garmin Fenix 3, Connect IQ, Monkey C, sportovní hodinky, aplikace, Eclipse

## ÚVOD

**V**dnešní době se stávají stále více populárními chytré hodinky. Specifickým a z hlediska historie nejstarším segmentem chytrých wearables jsou sportovní hodinky s funkcí monitoru tepové frekvence.[1] Moderní chytré sportovní hodinky umožňují bezdrátovou komunikaci s externími senzory, měření a navigaci pomocí GPS, logování tras, zjišťování teploty a tlaku okolí. Také obvykle poskytují možnost celodenního monitoringu lidské aktivity, počítání ušlých kroků, spálených kalorií nebo monitoringu spánkové aktivity. Vedoucí postavení mezi výrobcí takovýchto hodinek patří firmám Polar, Suunto a Garmin.

V tomto příspěvku se zaměříme na stručný popis a ukázky vývoje aplikací pro model sportovních hodinek Fenix 3 společnosti Garmin (známější spíše jako výrobce přístrojů pro navigaci). Model Fenix 3 je kompatibilní s platformou Connect IQ, což je sice otevřená nicméně proprietární platforma společnosti Garmin pro nositelnou elektroniku. Tím je umožněno vývojářům programovat aplikace pro zařízení kompatibilní s touto platformou. I přesto, že platforma Connect IQ byla představena v druhé polovině roku 2014 a první kompatibilní přístroje se objevily až v průběhu roku 2015, vzniká postupně řada aplikací pro další využití a rozšíření funkcí hodinek. Veřejně dostupné aplikace pro model Fenix 3 je možné si stáhnout nebo kupit na adrese: <https://apps.garmin.com/cs-CZ/devices/fenix3/apps>. Nabízené aplikace však v době vzniku tohoto příspěvku ani zdaleka nepokrývají možnosti hodinek, a také požadavky uživatelů. Chybí například aplikace typu nastavení vzhledu displeje podle osobních požadavků, navigace na bod z uložených bodů, případně individuální tréninkový program například pro běžce. V tomto článku chceme přiblížit, jak vytvořit jednoduché aplikace na platformě Connect IQ.

## POPIS HODINEK FENIX 3

**F**enix 3 jsou GPS sportovní hodinky určené pro náročné sportovce. Jsou vybaveny pokročilými senzory s vysoce citlivým GPS/GLONASS přijímačem s novou ocelovou anténnou umístěnou kolem barevného displeje. Součástí hodinek jsou multi-sportovní tréninkové funkce, dynamika běhu, vyhodnocení plaveckých tréninků, výpočet VO<sub>2</sub> (ukazatel aerobní výtrvalosti, tedy maximální využití kyslíku). V režimu Smart hodinky vydrží až 6 týdnů na jedno nabití akumulátoru. Fenix 3 umožňují sledování celodenních aktivit. Je možné stanovit cílový počet kroků na den, sledovat prošlou vzdálenost a počet kroků, zobrazit spálené kalorie a to včetně těch pasivních.



Obrázek 1: Hodinky Garmin Fenix 3

Zdroj: [2]

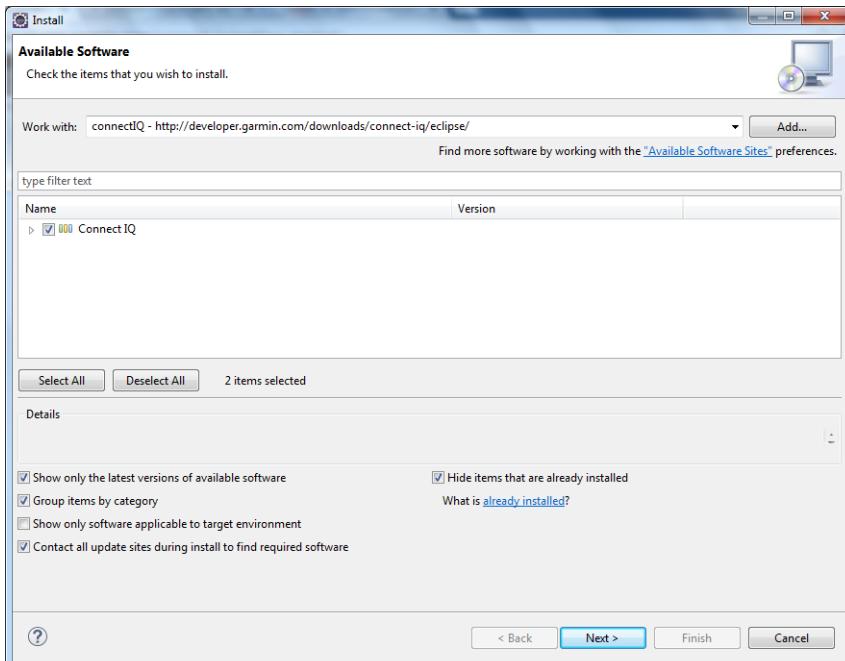
Fenix 3 má velký, kruhový, barevný displej s rozlišením 218 x 218 pixelů. Hodinky Fenix 3 patří do kategorie high-endových sportovních přístrojů a nabízí širokou škálu tréninkových funkcí. Jedná se zejména o různá nastavení alarmů na srdeční tep, tempo běhu, rychlosť, vzdálenost, výkon. V hodinkách je buď možné nastavit jednoduchý intervalový trénink, nebo za pomocí počítače složitější s různě dlouhými intervaly. Je možné také využít předpřipravené tréninkové plány pro běh nebo jízdu na kole. Pro jednotlivé sporty je možné přizpůsobit nastavení hodinek včetně zobrazovaných informací na displeji. Ve spojení s externím senzorem tepu hodinky po každé aktivitě doporučí dobu potřebnou k regeneraci organismu, po každém běhu delším než 10 minut vypočtou hodnotu VO<sub>2</sub> max a zhodnotí, s jakým výsledkem by uživatel zaběhl vzdálenost: 5km, 10km, půlmaraton a maraton. [3]

Jak jsme již konstatovali výše, přístroj podporuje Connect IQ. Je také vybaven možností připojit se k chytrým mobilním telefonům (Android, iOS) pomocí Bluetooth LowEnergy přenosu. Hodinky jsou poté schopny zobrazovat notifikace telefonu (SMS, emaily, hovory) nebo aplikací (informace o aktualizacích apod.). Propojení s mobilním telefonem využívá i automatické odesílání tréninkových záznamů na tréninkový server okamžitě po ukončení aktivity. Další dostupnou funkcí je on-line sledování pozice běžece na trati. Díky vestavěné Wi-Fi jsou hodinky schopny odeslat data o tréninku nebo aktualizovat software bez nutnosti zapínat počítač nebo mobilní telefon. Dále hodinky podporují bezdrátový protokol ANT+, používaný hlavně pro připojení fitness příslušenství jako např.: snímač tepu, snímač kadence, krokometr, měřič výkonu, teplotní čidlo. Nativním portálem pro ukládání, analýzu a sdílení sportovních aktivit zaznamenaných pomocí zařízení Garmin je služba/portál Garmin Connect.

## INSTALACE VÝVOJOVÝCH NÁSTROJŮ

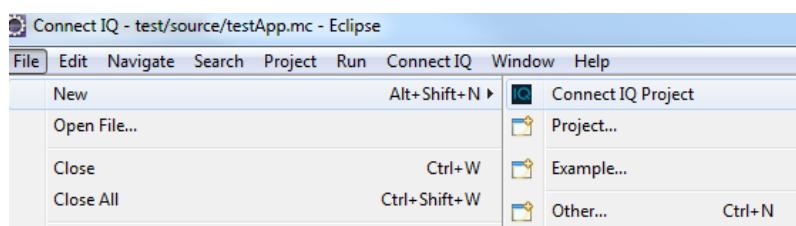
Aplikace pro platformu Connect IQ (a tedy u zařízení Fenix 3) se vytváří v open source prostředí Eclipse. Nejprve je potřeba stáhnout a nainstalovat do vhodného adresáře aplikaci Connect IQ SDK. Zopakujme, že Connect IQ je otevřená platforma pro vývoj aplikací pro některá zařízení Garmin a pomocí této platformy lze např. přizpůsobit či měnit vzhled displeje, získávat data ze senzorů hodinek, vytvářet nová vypočítaná pole a ucelené aplikace.

Dále je potřeba z adresy: <http://www.eclipse.org/luna/> stáhnout vývojové prostředí Eclipse Luna. Do ní doinstalovat plugin Connect IQ, který Eclipse Luna vyžaduje.



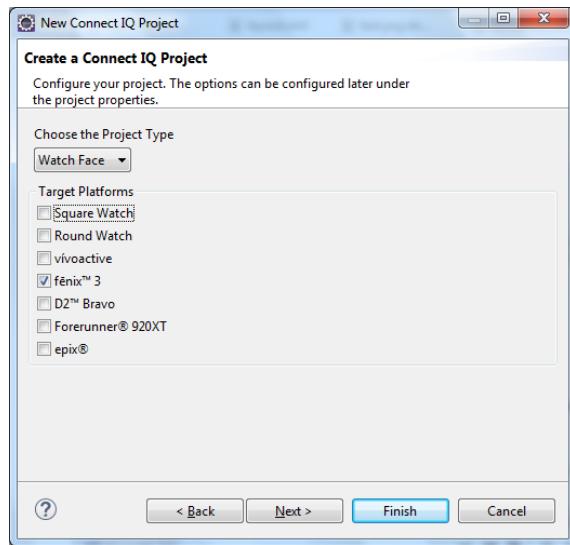
Obrázek 2: Instalace pluginu Connect IQ do Eclipse Luna

Poté je již možné vytvářet nebo pracovat s jednotlivými projekty pro hodinky. Nový projekt vytvoříme přímo v nabídce File – New, zde vybereme Connect IQ Projekt. Nový projekt již obsahuje pracovní soubory a základní nastavení.



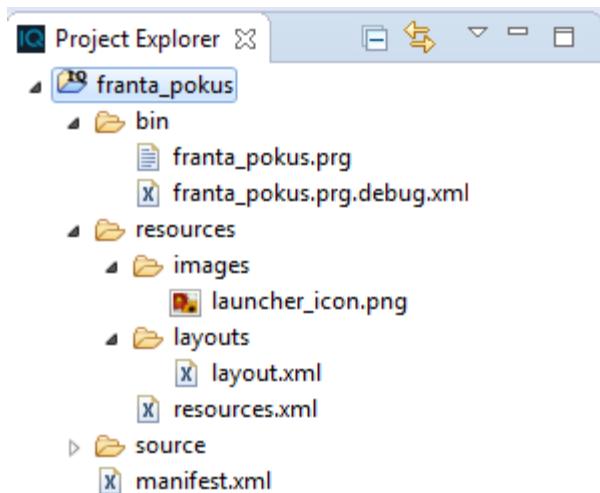
Obrázek 3: Vytvoření nového projektu

V novém projektu Connect IQ Projekt se vybere platforma, pro kterou bude projekt určen. Nabídka obsahuje různé typy chytrých hodinek od firmy Garmin. V našem případě se vybere Fenix 3.

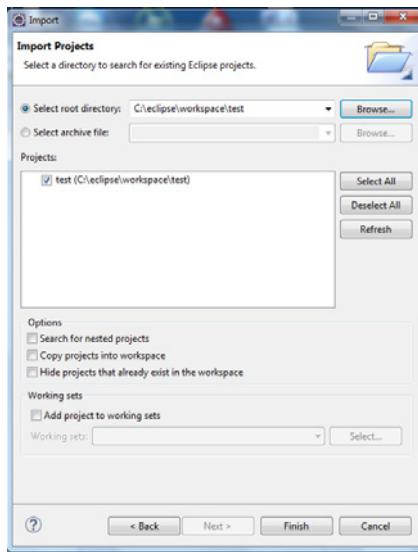


Obrázek 4: Výběr platformy

V nově vytvořeném projektu jsou již vytvořeny základní pracovní soubory se základním nastavením (programový kód - .mc, nastavení - xml)



Další možností je pracovat s již vytvořeným projektem. V tomto případě je nutné projekt nainstalovat.[4]



Obrázek 5: Import projektu do Eclipse

## ÚVOD DO MONKEY C

Aplikace na platformě Connect IQ (v našem případě pro Fenix 3) se programují v jazyce Monkey C. S tímto jazykem se pracuje podobně jako s jazyky Java, PHP, Ruby či Python, respektive uvedený jazyk je jejich jistou kombinací. Monkey C je objektově orientovaný jazyk, který pracuje s Monkey Brains virtuálním strojem, určeným pro snadný vývoj aplikací na přenosných zařízeních. Používá počítání referencí pro automatické vyčistění paměti, takže není nutné se zaměřovat na správu paměti. Překladač zdroje pomáhá spravovat různá rozložení obrazovky mezi různými zařízeními. Žádosti Monkey C jsou dynamicky propojeny do systému. Pokud aplikace dělá odkaz na rozhraní API, které neexistuje na konkrétním systému, aplikace selže při běhu, kdy aplikace odkazuje API, nikoli v době zatížení. Dokumentace pro API je umístěna na internetové: <http://developer.garmin.com/connect-iq/api-docs/>.

Funkce Monkey C mohou obsahovat argumenty, u kterých není nutné deklarovat typ. Také není nutné deklarovat návratové hodnoty funkce. Hodnota se z funkce vrací příkazem return. Pokud funkce nemá return, vrátí poslední hodnotu v zásobníku. [5]

Dokumentace pro funkce je na internetové adrese:

<http://developer.garmin.com/connect-iq/developer-tools/functions/>

Všechny aplikace Connect IQ vyžadují soubor manifestu. Manifest soubor je XML, který určuje vlastnosti aplikace, jako je typ aplikace a podporované produkty. Soubor manifest je automaticky vytvořen pro plug-in Eclipse, ale lze jej vytvořit i ručně.

## PŘÍKLAD WATCH FACE VŠPJ

Poštup práce naznačíme ukázkou aplikace pro změnu displeje (tj. watch face) na vlastní obrázkové logo Vysoké školy polytechnické Jihlava (VŠPJ). Displej má rozlišení 218 x 218 pixelů, což je také limitující pro velikost obrázku. V našem případě jsme zvolili velikost grafiky 80 x 52 pixelů. Základní nastavení je v souboru layout.xml, který obsahuje nastavení barev a písma displeje pro jednotlivé nápisy.

Node	Content
layout	WatchFace
@ id	
label	
@ id	VSPJLabel
@ x	center
@ y	15
@ font	Gfx.FONT_LARGE
@ justification	Gfx.TEXT_JUSTIFY_CENTER
@ color	Gfx.COLOR_RED
label	
@ id	TimeLabel
@ x	90
@ y	center
@ font	Gfx.FONT_NUMBER_THAI_HOT
@ justification	Gfx.TEXT_JUSTIFY_CENTER
@ color	Gfx.COLOR_WHITE
label	
@ id	DateLabel
@ x	center
@ y	160
@ font	Gfx.FONT_TINY
@ justification	Gfx.TEXT_JUSTIFY_CENTER
@ color	Gfx.COLOR_WHITE
!--	<bitmap id="batteryPicture" filename="../images/batteryPicture.png" x="center" y="165" />
bitmap	
@ id	id_logo
@ filename	../images/logo.png
@ x	110
@ y	43

Obrázek 6: Obsah souboru layout.xml

V sekci bitmap je cesta k obrázku, který se zobrazuje na displeji. Vlastní programový kód je v souboru MyClocksView.mc. Příkazem using se importují jmenné prostory. Funkce onUpdate zobrazuje na displeji čas a stav nabítí baterie.[6]

```
using Toybox.WatchUi as Ui;
using Toybox.Graphics as Gfx;
using Toybox.System as Sys;
using Toybox.Lang as Lang;

class MyClocksView extends Ui.WatchFace {

    //! Nahrání zdroje
    function onLayout(dc) {
        setLayout(Rez.Layouts.WatchFace(dc));
    }
}
```

```

//! Obnovení stavu aplikace a připravení pohledu, který se zobrazí.
function onShow() {
}

//! Aktualizace zobrazení
function onUpdate(dc) {

    // zobrazení aktuálního času
    //-----
    var clockTime = Sys.getClockTime();
    var timeString = Lang.format(((clockTime.hour <= 9) ? "0" : "") +
"$1$:" + ((clockTime.min <= 9) ? "0" : "") + "$2$", [clockTime.hour,
clockTime.min.format("%0.2d")]);
    var viewTime = View.findDrawableById("TimeLabel");
    viewTime.setText(timeString);
    //-----

    // zobrazení stavu baterie
    //-----
    var clockBattery = Sys.getSystemStats();
    var StringBattery = Lang.format("Power: $1%", [
clockBattery.battery.format("%2d")]);
    var viewBattery = View.findDrawableById("DateLabel");
    viewBattery.setText(StringBattery);
    //-----

    // Volání rodičovské funkce onUpdate layout
    View.onUpdate(dc);
}

```

Na obrázku je výsledek zobrazený pomocí simulátoru Connect IQ.



Obrázek 7: Výsledný vzhled displeje

## APLIKACE PRO NAVIGACI DO ZÁKLADNÍHO TÁBORA

Tato aplikace naviguje z jednoho bodu o daných souřadnicích do druhého (základního tábora). Aplikace ukazuje směr, vzdálenost a výškový rozdíl do základního tábora.

Při vývoji této aplikace bylo nutné vyřešit několik problémů. První je načtení a uložení GPS souřadnic a výšky aktuálního místa. Dále je nutné vypočítat vzdálenost mezi dvěma místy z GPS souřadnic a azimut na základní tábor.

Hodinky Fenix 3 mají GPS modul, který čte GPS souřadnice aktuálního místa na Zemi. Jeho souřadnice pak lze získat pomocí API modulu Position: Location (<http://developer.garmin.com/connect-iq/api-docs/>). Tím získáme latitude (číslo), longitude (číslo). V tomto modulu je možné nastavit formát souřadnic buď ve stupních, nebo radiánech. Pro výpočty vzdálenosti používáme radiány.

## VÝPOČET NEJKRATŠÍ VZDÁLENOSTI NA KOULI

Pro výpočet nejkratší vzdálenosti se používá elipsoidní model Země. I když bychom v případě krátké vzdálenosti v České republice mohli řešit výpočet pouze v rovině. Pro zjednodušení tedy budeme uvažovat o Zemi jako o kouli. Hodnoty souřadnic pro výpočet budou v radiánech. Průměrný poloměr Země je přibližně 6371 km.

Vzorec pro výpočet:

Mějme  $\varphi_1, \lambda_1$  a  $\varphi_2, \lambda_2$  zeměpisnou šířku (latitude) a zeměpisnou délku (longitude) bodů 1 a 2.  $\Delta\varphi, \Delta\lambda$  jsou jejich absolutní rozdíly, pak  $\Delta\sigma$ , je úhel mezi nimi, který vypočteme z kosinovy věty.

$$\Delta\sigma = \arccos(\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos(\Delta\lambda))$$

Vzdálenost  $d$ , (arc délky) mezi dvěma body, na kouli o poloměru  $r$  a  $\Delta\sigma$  je  $d = r \Delta\sigma$ .[7]

Zdrojový kód pro výpočet vzdálenosti vypadá takto:

```
double Vzdalenostmezibody (double sirka1, double delka1,
    double sirka2, double delka2)
{
    return 6371 * Math.Acos(
        Math.Sin(sirka1) * Math.Sin(sirka2)
        + Math.Cos(sirka1) * Math.Cos(sirka2)
        * Math.Cos(delka2 - delka1));
}
```

## AZIMUT

Pro určení úhlu směru pohybu z jednoho bodu do druhého na povrchu Země použijeme výpočet azimutu. Pro výpočet použijeme následující vzorec. Pro případ bodu 1 ležícího severněji než bod 2 připočítáme k azimutu 180.

Bod 1 leží severněji než Bod 2, tj. S1>S2:

```
AZIMUT = 180+arctg(sin(D2-D1)*cos(S2)/[sin(S2)*cos(S1)-
cos(S2)*sin(S1)*cos(D2-D1)])
```

Bod 1 leží jižněji než Bod 2, tj. S1<S2:

```
AZIMUT = arctg(sin(D2-D1)*cos(S2)/[sin(S2)*cos(S1)-cos(S2)*sin(S1)*cos(D2-
D1)])
```

Kde D je zeměpisná délka a S zeměpisná šířka.

## ZÁVĚR

Tento článek představil proprietární vývojové prostředí Connect IQ a jazyk Monkey C pomocí ukázky vývoje jednoduché aplikace pro zobrazení vlastního loga na displeji hodinek Fenix 3. V úvodu jsou popsány základní rysy použitého hardware (hodinek). Dále je popsána instalace základních vývojových programů pro vytváření aplikací. Jedná se o open source Eclipse Luna a plugin Connect IQ. Vlastní aplikace je vytvořena v objektovém programovacím jazyce Monkey C. Součástí článku je i část zdrojového kódu vytvořené aplikace, včetně podrobnějšího vysvětlení. Při programování jsme narazili na několik problémů. Hotové aplikace z hodinek není možné zobrazit ve zdrojovém kódu, a proto je nutné hledat vzorové příklady na Internetu.

Vzhledem k nové technologii není na Internetu příliš příkladů a zdrojů k vývoji aplikací.

## LITERATURA

- [1] NOVOTNÝ, J. - WINKLEROVÁ, M. How Programmer Plans Training? International Journal of Advanced Computer Science and Information Technology. 2014, Vol. 3, Iss. 4, s. 379-389. ISSN 2296-1739.
- [2] Garmin [online]. 2015. [cit. 2015-09-02]. Dostupné z:  
<http://www.garmin.cz/produkty/0/fenix/garmin-fenix3-sapphire-performer.html>.
- [3] Garmin fenix3 Sapphire Performer [online]. 2015 [cit. 2015-09-02]. Dostupné z:  
<http://www.garmin.cz/produkty/0/fenix/garmin-fenix3-sapphire-performer.html>.
- [4] Getting Started [online]. 2015. [cit. 2015-09-02]. Dostupné z:  
<http://developer.garmin.com/connect-iq/getting-started/>
- [5] Fuctions [online]. 2015 [cit. 2015-09-02]. Dostupné z:  
<http://developer.garmin.com/connect-iq/developer-tools/functions/>.
- [6] API Docs. Developer [online]. 2015 [cit. 2015-09-02]. Dostupné z:  
<http://developer.garmin.com/connect-iq/api-docs/>.
- [7] Admiralty Manual of Navigation, Volume 1, The Stationery Office, 1987, p. 10, ISBN 9780117728806.

# APPLICATION DEVELOPMENT PLATFORM GARMIN FENIX 3



## KONTAKTNÍ ÚDAJE:

PaedDr. František Smrčka, Ph.D.  
Vysoká škola polytechnická Jihlava  
katedra technických studií  
Tolstého 16  
586 01 Jihlava  
E-mail: frantisek.smrcka@vspj.cz

Ing. Jakub Novotný, Ph.D.  
Vysoká škola polytechnická Jihlava  
katedra technických studií  
Tolstého 16  
586 01 Jihlava  
E-mail: jakub.novotny@vspj.cz

## ABSTRACT

In 2015 came on the market sport watch Garmin Fenix 3, which are designed for athletes. They are equipped with advanced GPS sensors and enables connection to other external sensors. There is support of Connect IQ, which is an open proprietary platform for wearable technology that allows developers to program applications for compatible devices. These are primarily alternative appearances screens, training programs and support for other accessories. Application programming language used Monkey C that is an object-oriented language. Uses reference counting, automatic cleaning memory, eliminating the need to manage memory. This article deals with the principle of application development on platform Connect IQ. First, the article describes sport watches Fenix 3, their functionality and possibilities. The article presents how to install the necessary components. This is especially the open

source Eclipse development environment designed for the Java programming language. It is also necessary to install the Connect IQ SDK. Finally this article demonstrate a simple application to change the look of the display, including inserting own logo on watch face. The final section contains a description of the development application to navigate to the "base camp".

## KEYWORDS:

diferenciální rovnice, pravděpodobnost,  
numerické metody

# **PERFORMANCE COMPARISON OF RELATIONAL DATABASE MS SQL WITH OBJECT- ORIENTED DATABASE DB4O IN .NET/C#**

MAREK MUSIL

COLLEGE OF POLYTECHNICS  
JIHLAVA

## ABSTRACT

Relational databases have been used as a good choice for storing large and structured data. They are preferred for decade and several years. However, it began to be diverted from traditional databases with changes in IT-world. Not only SQL databases (so-called "NoSQL") are currently preferred and deployed for storing of nonstructural large data like images, video, documents, etc. This solution probably finds applying in several areas. The performance stays high in terms of speed and size. The performance, as well as usability from a developer's perspective, is crucial. Therefore, we decided to perform a simple experiment of performance.

This paper deals with performance comparison of two databases, the traditional relational database MS SQL and the object-oriented database db4o, the representative of NoSQL databases. The measurement is performed in .NET environment using by available components. It is based on executing of simple database operations (select, insert, update and delete) in one table within the meaning of time execution. This

paper presents an overview in features of the above mentioned databases, the considered testing plan and .NET-tools used to the creating testing application. The first result of performance comparison is presented and discussed.

## KEYWORDS:

.NET, C#, db4o, MS SQL, NoSQL,  
Object-oriented database, performance,  
Relational database

## INTRODUCTION

The relational databases based on the relation model proposed by E. F. Codd have been used for decades and for the last several years. They became popular mainly thanks to their performance, usefulness and capabilities. “*Relational databases have been the means of choice for storing large amounts of structured data for decades due to their high performance and ACID capabilities (atomicity, consistency, isolation and durability)*” [1]. The changes of requirements in the IT-world arising from the need to store very large and non-structural interrelated data, such as images, videos, or documents, lead to utilization of a more suitable database model. It was caused by the social web and cloud services [1].

NoSQL (Not only SQL) databases have emerged and are gaining most popular. These are used to storing non-relational internal data structure in form key-value. However, their high performance is kept thanks losing data consistency, availability or partition tolerance. NoSQL databases are rich described in [1]. Parker, Poe and Vrbsky [2] introduce an interesting explanation of them. Several representatives of NoSQL databases are described and rich discussed in [3]. Graph databases and object databases, two representatives of NoSQL databases, are often mentioned and investigated.

Holzschuher and Peinl [1] summarize usefulness and features of graph databases as a query language, efficient structure of data object storing as well as their reason. “*Graph databases are especially interesting since they often offer a proper query language, which most key-value stores as well as document-oriented databases are currently missing.*” [1] “*They perform especially well in domains like chemistry, biology and social networking.*” [1] The reason of a graph databases follows. Modeling such graphs in a relational database causes a high number of many-to-many relations. Complex join operations are needed to retrieve such data. Graph databases on the other hand to store such data and to deliver a high performance traversing them.

Object-oriented database are known the mid-80's. “*They began developing to meet the requirements of applications beyond the data processing applications which were served by relational database system.*” [4] Differences between a relational database and an object-oriented database are greatly summarized in [4], [5]. In addition, Datta and Gupta [4] discuss various constraints of both database models. The overview of them follows.

### **Relational database**

- A relational database system is based on the relational model.

- Data as well as its relations are stored in tables containing data fitted into predefined categories.
- Possibility of data processing is explained follow. "*The data can be accessed or reassembled in many different ways without having to change the table form.*" [1]
- Data stored in the record are identified – and in the classical relational theory uniquely determined – by a primary key. The relations between tables and thus the related data are based on a secondary key.

### **Object-oriented database**

- An object-oriented database system is based on the object model. Objects are inherited and usually create hierarchical structure that describes the reality.
- Data is stored as an object. The object is basic element of object-oriented database, which is defined by a class. The classes create hierarchical structure.
- Data (object) is identified by unique object ID. The relations are based on object references. In addition, the object usually holding methods that perform communicating with other objects and accessing on the data in the object. "*All control for access, modification, and integrity start at the object level.*" [4]

Suri and Sharma [5] demonstrate an interesting example as the reason of an object-database. In addition, they present a comparative study between the performance of the relational and the object oriented database. Their explanation may help to the better understanding of principles of relational and object-oriented databases.

Holzschuer and Painl [1] present an interesting comparison in evaluation of some query languages as Java API, Cypher, Gremlin and SQL. Whereas the easy of learning for SQL is high, cold readability comes worse and optimization possibilities are very low. The result of all is discussed in their paper.

## **RELATED WORKS**

Holzschuer and Peinl [1] deal with querying a graph database. They analyse both performance of the query language as well as that of the data connection and transmission. In addition, they consider it from developer's perspective.

Datta and Gupta [4] summarized and present the difference between relational and object-oriented database as well as their achievements and weakness. Especially, they deal with different constraints in representatives of databases.

Suri and Sharma [5] introduced a theoretical comparative study between the performances of a relational and an object oriented database in data warehousing. Especially, they perform an analysis of the benefits of object-oriented database in principles, regardless of any specific database product.

Tudorica and Bucur [3] present measurements of performance in several representatives of NoSQL databases. Their research lies in time latency for typical database operation as read and write. In addition, they investigated considered databases in feature persistence, replication, high availability, transaction, rack-locality awareness, implementation language, influence (sponsors) and license type.

Roopak, Swati, Ritesh and Satzadhyan [6] deal with querying methodology and analyse performance of the traditional database MySQL and object-oriented database db4o. Regarding performance, they deal with database operation as insert, select, delete. Their conclusion is clear. Object-oriented database management system is more efficient compared to relational database management system.

Parker, Poe and Vrbsky [2] compare performance NoSQL Mongo db with relational SQL db. Their finding is as follows. Mongo db performs equally as well or better than the relational database.

Database comparison and identified differences are introduced in other several works [7], [8], [9] and [10].

In our work, we focus on an object databases, namely db4o concretely only.

## MATERIALS AND METHODS

We can see that the issue of database performance is resolved in many works. Several of all are described in the previous chapter. Especially, they all deal with performance of databases and their mutual comparison. Whereas Tudorica and Bucur [3] examine NoSQL-type databases in principles and Holzschuh and Peinl [1] focus on a graph database, other above mentioned works present performance comparison between the traditional related SQL database and any representatives of NoSQL. Roopak, Swati, Ritesh and Satzadhyan [6] provide performance comparison between the traditional related database SQL and the object-oriented database db4o. Parker, Poe and Vrbsky [2] compare performance NoSQL Mongo db with the relational SQL. The last two mentioned works could be very interesting for us. It may serve for comparison of results.

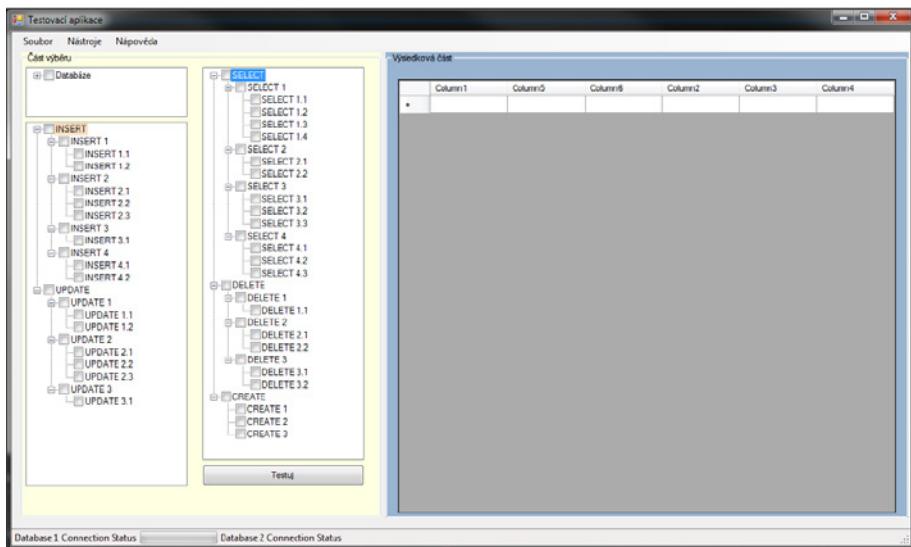
Our intention is to provide and verify performance differences between SQL and db4o. First of all, we would like to prepare useful (suitable) environment for the testing.

Subsequently, we make primarily experiment and provide the first finding. Large data affect the choice of the database system. We focus on .NET and language C#, because they are often used to create user forms applications working with a database. Used components of .NET and the test result are described hereafter. In this paper, there are introduced several results discovered by Smazal and presented in [11].

## TESTING APPLICATION AND USED .NET COMPONENTS

For the purpose of testing we create a win-forms application using by MS Visual Studio 2013. The Fig. 1 shows a main form layer. The form provides test cases selection, database selection as well as saving data into csv-file format. This file can be further processed in MS Excel.

**Fig. 1:** The forms application for the purpose of testing. It provides all testing functionality as test cases selection, tested database and data storing into csv file. [11]



For the purpose of time measuring, we use `StopWatch`. This component provides a time in milliseconds and its using is very easy. It offers methods `Start()` and `Stop()` indicating timestamps and a property `ElapsedMilliseconds` getting the total elapsed time measured by the current instance. The Fig. 2 demonstrates using of `StopWach`.

**Fig. 2:** Using of StopWatch in our testing application.

```
using System.Diagnostics;

string insertString = String.Format
    ("Insert into Pokus(name, dimension, floor) Values ('{0}', '{1}', '{2}')",
     vysledek, vysledek2, vysledek3);

SqlCommand command = new SqlCommand(insertString, conn);
var watch = Stopwatch.StartNew();
command.ExecuteNonQuery();
watch.Stop();
var time = watch.ElapsedMilliseconds;
allTime += Convert.ToDouble(time);

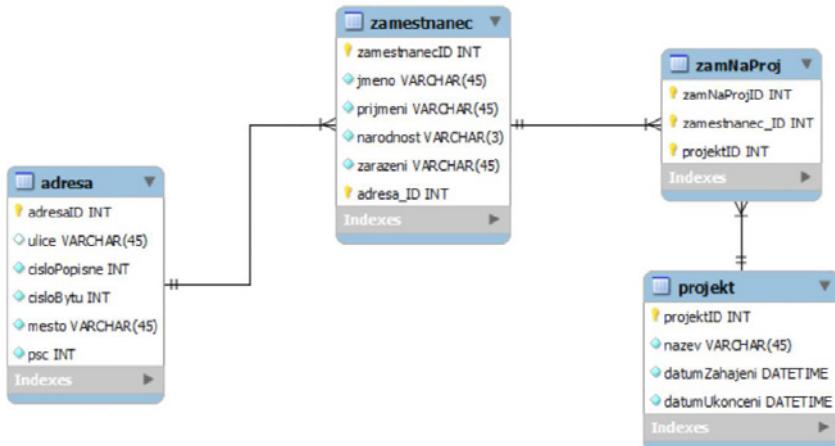
conn.Close();
string msg = String.Format("Uloženo do databáze za: {0} milisekund"), allTime.ToString());
MessageBox.Show(msg);
allTime = 0;
```

Form components as TreeView and DataGridView are used on the form. The tree-view component enables selection of many test cases in a subtree. Data are shown in the data-grid-view component enabling ordering, filtering, etc. Of course, the testing as well as data processing are realized in the separable class that is independent on the form (presentation layer). When working with the MS SQL, the standard library/workspace System.Data.Sql and System.Data.SqlClient are used. In case of db4o, the additional library Db4objects.Db4o.dll is used. This library must be added into the project.

## TEST CASES PLANNING

The testing will be performed by using a usual PC with configuration. However, all testing will be performed by using the one PC and the result will be directly comparable. We create a database according to the era-model on the Fig. 3. Thank it we have the use of indexation and relations between tables to performing inner-join commands in the future. The relation and indexation is our next intent in the future, but not in this contribution.

**Fig 3:** ERA model of the database that is used in our testing. [11]



The object-oriented database db4o is filled from the structural database SQL. For this purpose, several data classes are defined. However, these classes will be necessary for working in db4o. The Fig. 4 shows them. These classes are in accordance with the proposed era-model. Whereas the db-file of the SQL has extension .mdf, the db-file of the db4o has extension .yap or .db.

**Fig. 4:** Classes for db4o according to the era-model. [11]

```

public class zamestnanec
{
    public string _jmeno;
    public string _prijmeni;
    public string _narodnost;
    string _zarazeni;
    int _adresaId;
    public adresse _adresa;

    public List<projekt> listProjektu;
}

public class adresse
{
    public string _ulice;
    public int _cisloPopisne;
    public int _cisloBytu;
    public string _mesto;
    public string _PSC;

    public List<zamestnanec> zam;
}

public class projekt
{
    public int _cisloProjektu;
    public string _nazev;
    public DateTime? _zahajeni;
    public DateTime? _ukonceni;

    public List<zamestnanec> listZam;
}
    
```

In db4o, there are four options for the questioning: QBE (Query By Example), Native Query, LINQ Language Integrated Query) and SODA Query API. The Fig. 5 shows a program part for the questioning using by QBE.

**Fig. 5:** Questioning in db4o using by QBE. This example shows the operation select enabling update and indexation [12].

```
IEmbeddedConfiguration config = Db4oEmbedded.NewConfiguration();
config.Common.ObjectClass(typeof(adresa)).CascadeOnUpdate(true);
config.Common.ObjectClass(typeof(zamestnanec)).CascadeOnUpdate(true);
config.Common.ObjectClass(typeof(adresa)).ObjectField("_cisloBytu").Indexed(true);
using (IObjectContainer db = Db4oEmbedded.OpenFile(config, connObj))
{
    IQuery q2 = db.Query();
    q2.Constrain(typeof(adresa));
    IConstraint constr2 = q2.Descend("zam").Descend("_narodnost").Constrain("Portugal");
    IConstraint constr1 = q2.Descend("zam").Descend("_narodnost").Constrain("China").Or(constr2);
    q2.Descend("_cisloBytu").Constrain(150).Greater().And(constr1);
    q2.Execute();
}
```

One test case will be performed for five times and the values will be averaged. We measure *time executing* of a test case in dependence data-size. We focus on the basic database operations - insert, update, delete and select. The next and future aim is focusing on indexation, relation and grouping.

The testing is performed for 3 or 4 different data-sizes:

- **Low:** 1700 records in the table
- **Middle:** 7000 records in the table
- **Full:** 14000 records in the table
- **FullDouble:** 28000 records in the table. This option is used only, if previous options are not sufficient for our evaluation.

## RESULTS AND DISCUSSION

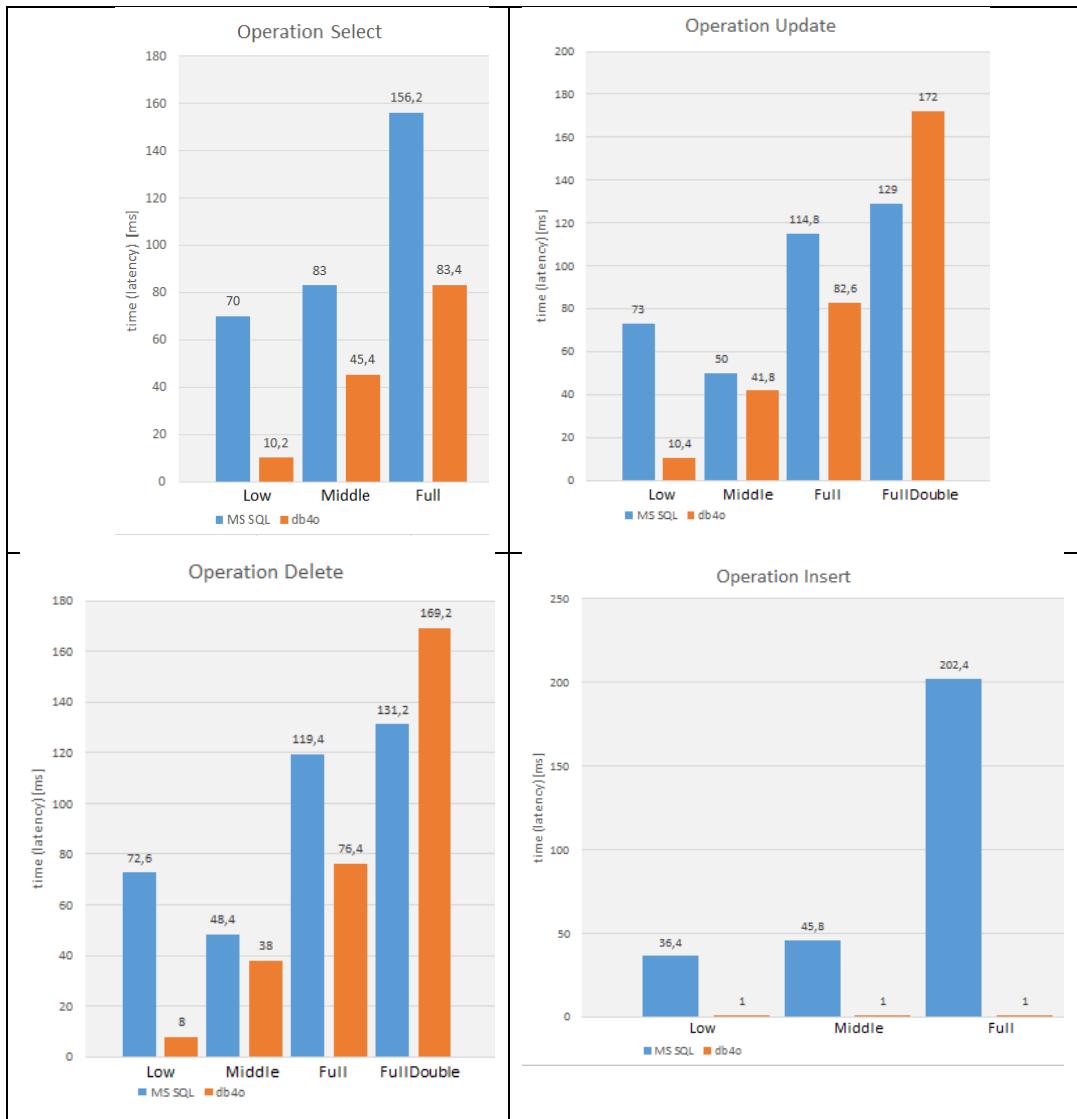
We introduce the result of basic experiment containing base operation insert, update, detect and select over one table. The measurement is convincing.

The Graph 1 shows results. Select, update, delete, insert operations are as follows. The blue column corresponds to MS SQL, the orange column to db4o. The first, second, third and fourth column pairs show the result for the Low, Middle, Full and FullDouble data-size options, respectively.

The insert operation is clear. SQL is slower than db4o, independent on the data-size. Latency in db4o is constant and evidently independent on the data-size. The select operation is faster in db4o compared to SQL, depending on the data-size: the db4o is

approximately seven time faster at small data-size, at larger data-size is just twice as fast. Update and delete operations are ambiguous. Whereas db4o is ten times faster at small data size, at larger data-size the difference is smaller. It seems that db4o is slower than SQL at very large data-size.

**Graph 1:** Time in executing of operations select, update, delete and insert. The blue column corresponds to MS SQL, the orange column to db4o. The first, second, third and fourth column pairs show the result for the Low, Middle, Full and FullDouble data-size options, respectively. [11]



## CONCLUSION

Firstly, we presented features of the traditional related database MS SQL and the object-oriented database db4o in overview and their comparison. Secondly, the implemented testing application and the considered test cases were described. The application for testing was developing on the platform .NET/C#. The reason is mentioned. Our goal was performance comparison in dependence on data-size. Lastly, we performed performance comparison between the MS SQL and the db4o. The choice of this option is justified in the chapter Materials and methods. The performance of operations select, insert, update and delete are presented.

Performance difference between the relational and the object-oriented database is clear. The db4o appears faster, but the SQL outperforms the db4o for the very large data-size. It seems that the performance of db4o becomes nonlinear starting with the larger data. Opposite, the nonlinearity of SQL is noticeable (observable) at smaller data-size.

Our future intent could introduce performance of advanced and more difficult operations - indexation, relation between tables, inner-join operation, grouping by, processing of more records in operation update, delete and select, etc. In addition, estimated position of a search record could be considered. These intents could offer interesting finding in performance comparison.

# POROVNÁNÍ VÝKONOSTI RELAČNÍ DATABÁZE MS SQL A OBJEKTOVÉ DATABÁZE DB4O

KONTAKTNÍ ÚDAJE:

Ing. Marek Musil  
Vysoká škola polytechnická Jihlava  
katedra technických studií  
Tolstého 16  
586 01 Jihlava  
E-mail: marek.musil@vspj.cz



## ABSTRAKT

Objektové databáze jsou používány jako dobrá volba pro uložení rozsáhlých a strukturovaných dat. Byly upřednostňovány po celá desetiletí a během mnoha let. Nicméně se změnami v IT se od tradičních databází začalo upouštět. Not only SQL databáze (takzvané "NoSQL") jsou v současné době preferovány a nasazovány k uložení nestrukturovaných rozsáhlých dat jako obrázky, videa, dokumenty, atp. Toto řešení pravděpodobně najde své uplatnění v mnoha oblastech. Z pohledu rychlosti a velikosti zůstává výkon vysoký. Výkon, stejně jako vývojářský pohled, je zásadní. Z toho důvodu jsme se rozhodli udělat jednoduchý experiment výkonnosti.

Tento článek se zabývá srovnáním výkonnosti dvou databází, tradiční relační database MS SQL a objektově-orientované database db4o, reprezentantem NoSQL database. Měření je provedeno v prostředí .NET s využitím

dostupných komponent. Je založeno na vykonání jednoduchých databázových operací (select, insert, update, delete) nad jednou tabulkou ve smyslu měření času provedení. Tento článek prezentuje přehled vlastností výše zmiňovaných databází, uvažovaný plán testování a nástroje .NET použité k vytvoření testovací aplikace. První výsledky srovnání výkonosti jsou prezentovány a diskutovány.

## KLÍČOVÁ SLOVA:

.NET, C#, db4o, MS SQL, NoSQL,  
objektově-orientovaná databáze,  
výkonnost, relační databáze



# LOGOS POLYTECHNIKOS

---

---

Odborný recenzovaný časopis Vysoké školy polytechnické Jihlava, který svým obsahem reflektuje zaměření studijních programů VŠPJ. Tematicky je zaměřen do oblastí společenskovědních a technických.

Časopis vychází 4x ročně

Náklad 60 výtisků

**Šéfredaktor:** doc. Dr. Ing. Jan Voráček, CSc.

**Odpovědný redaktor tohoto čísla:**

doc. Ing. Zbyněk Bureš, Ph.D.

**Editor:** Mgr. Alena Šetková (komunikace s autory a recenzenty)

**Technické zpracování:** Lukáš Mikula

**Web editor:** Mgr. Alena Šetková

**Redakční rada:**

doc. PhDr. Ladislav Benyovszky, CSc., prof. PhDr. Ivan Blecha, CSc.,

doc. Mgr. Ing. Martin Dlouhý, Dr., prof. Ing. Tomáš Dostál, DrSc., Ing. Jiří Dušek, Ph.D.,  
Ing. Veronika Hedija, Ph.D. , doc. PhDr. Martin Hemelík, CSc., prof. RNDr. Ivan Holoubek,  
CSc., Mgr. Petr Chládek, Ph.D., prof. PhDr. Ivo Jirásek, Ph.D., prof. Ing. Bohumil Minařík,  
CSc., doc. PhDr. Ján Pavlík, doc. PhDr. Karel PSTRUŽINA, CSc., prof. MUDr. Aleš Roztočil,  
CSc., prof. Ing. Jan Váchal, CSc., doc. Ing. Libor Žídek, Ph.D.

**Pokyny pro autory** a deklarovaná forma příspěvků jsou dostupné na

<https://www.vspj.cz/tvurci-cinnost-a-projekty/casopisy-vspj/logos-polytechnikos>

**Zasílání příspěvků**

Redakce přijímá příspěvky v českém, slovenském a anglickém jazyce elektronicky  
na adresu [logos@vspj.cz](mailto:logos@vspj.cz)

**Adresa redakce:**

Vysoká škola polytechnická Jihlava, Tolstého 16, 586 01 Jihlava

**Distribuce:** časopis je dostupný v elektronické podobě na webových stránkách VŠPJ.

V omezeném množství jej lze vyžádat zdarma na adresu redakce.

Výtiskl: AMAPRINT-Kerndl s.r.o., Třebíč

Vydání: prosinec 2015

© Vysoká škola polytechnická Jihlava

**ISSN 1804-3682**

Registrace MK ČR E 19390

**RECENZENTI ČÍSLA 4/2015  
(DO ELEKTRONICKÉHO VYDÁNÍ DOPLNĚNO 15. 3. 2016)**

prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc. (Univerzita Palackého v Olomouci)  
Ing. Mgr. Jiří Barilla, CSc. (Univerzita Jana Evangelisty Purkyně)  
Ing. Jiří Egermaier, Ph.D. (Západočeská univerzita v Plzni)  
Ing. Pavel Haluza, Ph.D. (Mendelova univerzita v Brně)  
RNDr. Anna Hejlová, Ph.D. (Česká zemědělská univerzita v Praze)  
doc. RNDr. Zdeněk Karpíšek, CSc. (Vysoké učení technické v Brně)  
RNDr. Petr Kubera, Ph.D. (Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem)  
Ing. Petr Nováček (České vysoké učení technické v Praze)  
prof. Ing. Ladislav Pejša, DrSc. (Česká zemědělská univerzita v Praze)  
doc. Ing. Dr. Jiří Rybička (Mendelova univerzita v Brně)  
prof. RNDr. Ing. Jiří Šťastný, CSc. (Vysoké učení technické v Brně)  
PhDr. Tamara Váňová (Masarykova univerzita v Brně)  
PhDr. Renata Vystrčilová, Ph.D. (Univerzita Palackého v Olomouci)  
RNDr. Libor Žák, Ph.D. (Vysoké učení technické v Brně)