Jakub Kopański
e-mail: J.Kopanski@imio.pw.edu.pl

Projektowanie układów mikrofalowych (PUM)
Projekt

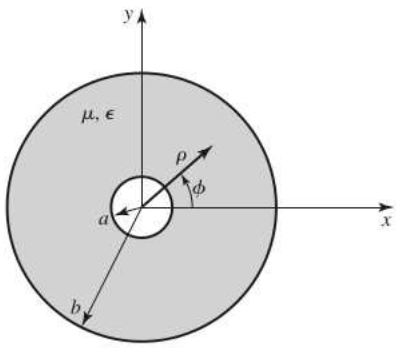
Spis treści

1. Zadanie 1

1.1. Treść

Udowodnić, że powietrzna linia współosiowa o stosunku promieni przewodów zewnętrznego do wewnętrznego równym $\sqrt{e} = 1.648721271\ldots$ może przenosić falę elektromagnetyczną o największej mocy. Zadaną wielkością jest maksymalne natężenie pola elektrycznego, przy którym następuje przebicie elektryczne wypełniającego linię powietrza.

1.2. Rozwiązanie



Rysunek 1.1: Przekrój przez linie współosiową oraz symbole jej parametrów

Współosiową linie transmisyjną pokazano na rysunku 1.1. W treści zadania powiedziano, że mamy doczynienia z linią powietrzną więc $\epsilon = \epsilon_0$ oraz $\mu = \mu_0$. Moc fali przenoszonej przez linie jest równa:

$$P = \oint_S \bar{E}(x,y) \times \bar{H}(x,y)\ \mathrm{ds} \tag{1.1}$$

Ponieważ wyrażenia na pole elektryczne i magnetyczne w kartezjańskim układzie współrzędnych byłyby bardzo skomplikowane, należy zmienić układ współrzędnych na polarny:

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^b \bar{E}(\rho,\phi)\cdot\bar{H}(\rho,\phi)\rho\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \tag{1.2}$$

Pole elektryczne i magnetyczne mają postać:

$$\bar{E}(\rho) = \frac{U_0\hat{\rho}}{\rho\ln\frac{b}{a}} \tag{1.3}$$

$$\bar{H}(\phi) = \frac{\bar{E}(\rho)\hat{\phi}}{\eta_0} \tag{1.4}$$

gdzie:

$\hat{\rho}$ - wersor w kierunko ρ,
$\hat{\phi}$ - wersor w kierunku ϕ,
$\xi_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ - impedancja falowa linii.

Możemy teraz policzyć moc fali przenoszonej przez linie:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^b \bar{E}(\rho,\phi)\cdot\bar{H}(\rho,\phi)\rho\, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^b \frac{1}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\rho^2\ln^2\frac{b}{a}}\rho\, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^b \frac{1}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\rho\ln^2\frac{b}{a}}\, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\ln^2\frac{b}{a}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^b \frac{1}{\rho}\, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\ln^2\frac{b}{a}}\int\limits_0^{2\pi} \ln|\rho|\Big|_a^b\, \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\ln^2\frac{b}{a}}\ln\frac{b}{a}\int\limits_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\ln\frac{b}{a}}\phi\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{2\pi}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\ln\frac{b}{a}}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Korzystając z zależności:

$$
U_0 = E_{max}\cdot a\ln\frac{b}{a} \tag{1.6}
$$

można wyznaczyć moc fali propagującej się w lini w zależności od maksymalnego natężenia pola elektromagnetycznego (E_{max}). Podstawuając 1.6 do 1.5 otrzymuję się:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{2\pi}{\xi_0}\frac{E_{max}^2\cdot a^2\ln^2\frac{b}{a}}{\ln\frac{b}{a}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}E_{max}^2\cdot a^2\ln\frac{b}{a} \\
&= \underbrace{2\pi\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_{max}^2}_{K}\cdot a^2\ln\frac{b}{a} \\
&= K\cdot a^2\ln\frac{b}{a}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

K we wzorze 1.7 jest stałe, zależne tylko od podanego w zadaniu maksymalnego natężenia pola.

Moc fali propagującej się w linii będzie maksymalna gdy pochodna mocy określonej wzorem 1.7 ($\frac{\mathrm{dP(a)}}{\mathrm{da}}$) będzie równa 0.

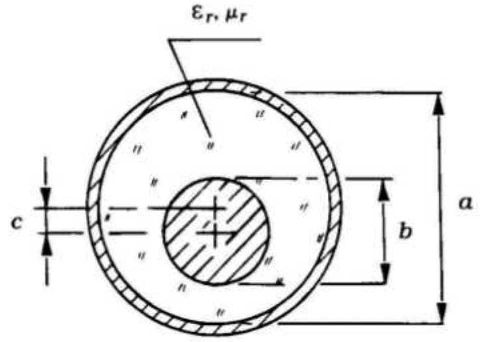
$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{dP(a)}}{\mathrm{da}} &= K\cdot 2a\ln\frac{b}{a} + K\cdot a^2(-\frac{1}{a}) \\
&= Ka[2\ln\frac{b}{a} - 1]
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Wyrażenie 1.8 jest równe 0 gdy $2\ln\frac{b}{a} - 1 = 0$. Co z kolei przekłada się na warunek $\ln\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, który jest spełniony gdy $\frac{b}{a} = \sqrt{\mathrm{e}}$, co należało dowieść.

2. Zadanie 2

2.1. Treść

Dana jest powietrzna linia współosiowa o średnicach przewodów a = 7 mm i b = 3.04 mm, patrz rys. 2.1. O ile należy przesunąć przewód wewnętrzny względem przewodu zewnętrznego (c =?) aby jej impedancja charakterystyczna zmieniła się o 5 Ω.



Rysunek 2.1: Linie z przesuniętym przewodem wewnętrznym

2.2. Rozwiązanie

Impedancja linii ekscentrycznej jest określona wzorem:

$$Z_0(x) = 59.952\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \tag{2.1}$$

$$x = \frac{1}{2a}\left(b + \frac{a^2 - 4c^2}{b}\right) \tag{2.2}$$

Dla c = 0 mamy:

$$Z_0(x)\Big|_{c=0} = 59.952\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln\frac{a}{b} \tag{2.3}$$

Jest to zależność przybliżona. Dokładny wzór na impedancje linii współosiowej ma postać:

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\frac{a}{b} \tag{2.4}$$

Porównując podane wyżej zależności dla c = 0 mamy:
wzór dokładny : 50.0085378279
wzór przybliżony : 50.0031234918
co daję błąd równy 0.01%.

Zadanie można rozwiązać na 2 sposobu: analitycznie i numerycznie. kolejne zadania będzie można rozwiązać już tylko numerycznie więc porównując rozwiązanie analityczne i numeryczne zadania 2 można przetestować zaprogramowaną metodę newtona.

2.2.1. Rozwiązanie analityczne

Równanie z jakie należy rozwiązać to

$$\underbrace{59.952\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}}_{k} \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\ln\frac{a}{b}-5}_{d} \tag{2.5}$$

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \frac{d}{k} \tag{2.6}$$

Kluczowe jest spostrzeżenie, że $\operatorname{arch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Biorąc cosinus hiperboliczny obu stron równania mamy

$$\operatorname{ch}\left(\operatorname{arch}\left(x\right)\right) = \operatorname{ch}\frac{d}{k} \tag{2.7}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{d}{k}} + e^{-\frac{d}{k}}\right) \tag{2.8}$$

Otrzymane x należy podstawić do wzoru 2.2. Po kilku przekształceniach otrzymuję się zależność:

$$c = \sqrt{\left(a^2 - ab2\operatorname{ch}\frac{d}{k} + b^2\right)\Big/4} \tag{2.9}$$

Podstawiając dane z treści zadania otrzymuję się przesunięcie $c = 0.882307292061mm$.

2.2.2. Rozwiązanie numeryczne

W celu znalezienia wymaganego przesunięcia, należy znaleźć wartość x przy którym impedancja spełnia warunek:

$$Z_0(x)\Big|_{c=?} = Z_0(x)\Big|_{c=0} - 5 \tag{2.10}$$

$$Z_0(x)\Big|_{c=?} - Z_0(x)\Big|_{c=0} + 5 = 0 \tag{2.11}$$

a następnie znając x wyznaczyć c. Oczywiście stosując rozwiązania numeryczne nie trzeba stosować się do kolejności wyznaczania (tzn. najpierw x a potem c). Dysponując funkcjami wyznaczającymi wartość impedancji można odnaleźć od razu c.

Wynik rozwiązany za pomocą zaprogramowanego algorytmu Newtona-Raphsona wynosi:

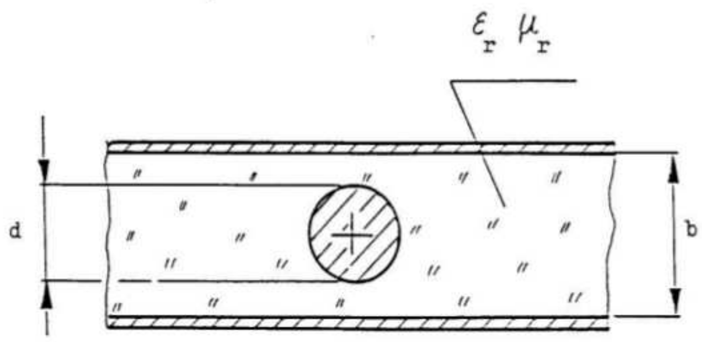
$$c_{numeryczne} = 0.882307221883mm$$
$$c_{analityczne} = 0.882307292061mm$$

różnica pomiędzy wynikami wynosi $8.12217580519e-11$, co jest zgodne z przyjętym kryterium zatrzymania pracy algorytmu na poziomie $1e-10$.

3. Zadanie 3

3.1. Treść

Zaprojektować powietrzną linię cylindryczno–płaską o przekroju poprzecznym jak na rys. 3.1 zakładając, że jej impedancja charakterystyczna jest równa $Z_0 = 30\ \Omega$. Odległość pomiędzy równoległymi przewodzącymi płaszczyznami tej linii jest równa $b = 9\ mm$. O ile zmieni się impedancja charakterystyczna tej linii (zaprojektowanej) po wypełnieniu jej bezstratnym dielektrykiem o $\epsilon_r = 2.04$ i $\mu_r = 1$.



Rysunek 3.1: Linie Cyindryczno płaska

3.2. Rozwiązanie

Impedancja charakterystyczna linii cylindryczno-płaskiej wyraża się wzorem:

$$Z_0\Big(\frac{d}{b}\Big) = 59.952\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}\Big(\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}} - \frac{R^4}{30} + 0.014R^8\Big), \tag{3.1}$$

gdzie:

$$R = \frac{\pi}{4}\frac{d}{b} \tag{3.2}$$

$$x = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2\,(R) \tag{3.3}$$

$$y = 1 - 2\sin^2(R) \tag{3.4}$$

Zależność impedancji od wymiarów linii jest znacznie bardziej złożona niż w przypadku linii z zadania 2. Dlatego w tym przypadku nie można znaleźć rozwiązania w sposób analityczny. W celu określenia wymiarów linii należy rozwiązać równanie:

$$Z_0\Big(\frac{d}{b}\Big)\Big|_{d=9\ mm} - 30\Omega = 0 \tag{3.5}$$

Do znalezienia rozwiązania użyto zaprogramowanego poprzednio algorytmu Newtona-Raphsona.

Otrzymano następujące wyniki:

$$d = 8.86216872052\ mm \tag{3.6}$$
$$Z_0 = 30.0000006344\ \Omega \tag{3.7}$$

W celu odpowiedzi na drugie pytanie należy policzyć impedancje linii korzystając ze wzoru 3.1. Jednak zamiast $\mu_r = 1$ i $\epsilon_r = 1$, podstawić wartości określone w treści zadania. Uzyskana w ten sposób wartość impedancji wynosi $Z_0 = 42.8485714773\ \Omega$. Zmieni się ona zatem o $12.8485708429\ \Omega$.

Zmiana impedancji wynika też bezpośrednio ze wzoru 3.1. Po wstawieniu dielektryka nowa wartość impedancji wyniesie $Z_0 \times \sqrt{\mu_r}$.