

Jakub Kopański
e-mail: J.Kopanski@imio.pw.edu.pl

Projektowanie układów mikrofalowych (PUM)
Projekt

Spis treści

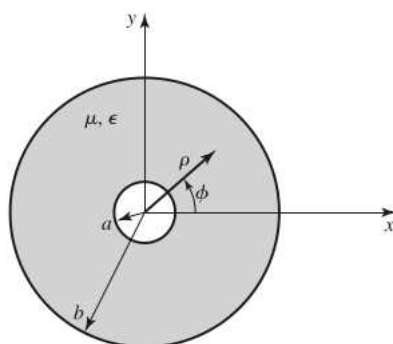
1. Zadanie 1	2
1.1. Treść	2
1.2. Rozwiązanie	2
2. Zadanie 2	4
2.1. Treść	4
2.2. Rozwiązanie	4
2.2.1. Rozwiązanie analityczne	5
2.2.2. Rozwiązanie numeryczne	5
3. Zadanie 3	6
3.1. Treść	6
3.2. Rozwiązanie	6
4. Zadanie 6	8
4.1. Treść	8
4.2. Rozwiązanie	8
4.2.1. Szerokość linii	8
4.2.2. Długość fali	9
Bibliografia	10

1. Zadanie 1

1.1. Treść

Udowodnić, że powietrzna linia współosiowa o stosunku promieni przewodów zewnętrznego do wewnętrznego równym $\sqrt{\epsilon} = 1.648721271 \dots$ może przenosić falę elektromagnetyczną o największej mocy. Zadana wielkością jest maksymalne natężenie pola elektrycznego, przy którym następuje przebicie elektryczne wypełniającego linię powietrza.

1.2. Rozwiązanie



Rysunek 1.1: Przekrój przez linie współosiową oraz symbole jej parametrów

Współosiową linię transmisyjną pokazano na rysunku 1.1. W treści zadania powiedziano, że mamy doczynienia z linią powietrzną więc $\epsilon = \epsilon_0$ oraz $\mu = \mu_0$. Moc fali przenoszonej przez linię jest równa:

$$P = \oint_S \vec{E}(x, y) \times \vec{H}(x, y) \, ds \quad (1.1)$$

Ponieważ wyrażenia na pole elektryczne i magnetyczne w kartezjańskim układzie współrzędnych byłyby bardzo skomplikowane, należy zmienić układ współrzędnych na polarny:

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \vec{E}(\rho, \phi) \cdot \vec{H}(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi \quad (1.2)$$

Pole elektryczne i magnetyczne mają postać:

$$\vec{E}(\rho) = \frac{U_0 \hat{\rho}}{\rho \ln \frac{b}{a}} \quad (1.3)$$

$$\vec{H}(\phi) = \frac{\vec{E}(\rho) \hat{\phi}}{\eta_0} \quad (1.4)$$

gdzie:

- $\hat{\rho}$ - wektor w kierunku ρ ,
- $\hat{\phi}$ - wektor w kierunku ϕ ,
- $\xi_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ - impedancja falowa linii.

Możemy teraz policzyć moc fali przenoszanej przez linie:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \bar{E}(\rho, \phi) \cdot \bar{H}(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\rho^2 \ln^2 \frac{b}{a}} \rho \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\rho \ln^2 \frac{b}{a}} \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln^2 \frac{b}{a}} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\rho} \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln^2 \frac{b}{a}} \int_0^{2\pi} \ln |\rho| \Big|_a^b \, d\phi \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln^2 \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} 1 \, d\phi \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln \frac{b}{a}} \phi \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{2\pi}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln \frac{b}{a}}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Korzystając z zależności:

$$U_0 = E_{max} \cdot a \ln \frac{b}{a} \tag{1.6}$$

można wyznaczyć moc fali propagującej się w linii w zależności od maksymalnego natężenia pola elektromagnetycznego (E_{max}). Podstawiając 1.6 do 1.5 otrzymujemy się:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2\pi}{\xi_0} \frac{E_{max}^2 \cdot a^2 \ln^2 \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} E_{max}^2 \cdot a^2 \ln \frac{b}{a} \\
&= 2\pi \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{max}^2}_{K} \cdot a^2 \ln \frac{b}{a} \\
&= K \cdot a^2 \ln \frac{b}{a}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

K we wzorze 1.7 jest stałe, zależne tylko od podanego w zadaniu maksymalnego natężenia pola.

Moc fali propagującej się w linii będzie maksymalna gdy pochodna mocy określonej wzorem 1.7 ($\frac{dP(a)}{da}$) będzie równa 0.

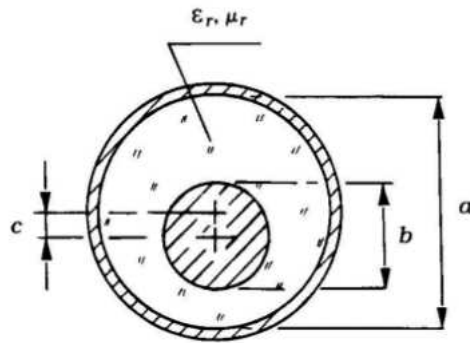
$$\begin{aligned}
\frac{dP(a)}{da} &= K \cdot 2a \ln \frac{b}{a} + K \cdot a^2 \left(-\frac{1}{a}\right) \\
&= Ka \left[2 \ln \frac{b}{a} - 1\right]
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Wyrażenie 1.8 jest równe 0 gdy $2 \ln \frac{b}{a} - 1 = 0$. Co z kolei przekłada się na warunek $\ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, który jest spełniony gdy $\frac{b}{a} = \sqrt{e}$, co należało dowieść.

2. Zadanie 2

2.1. Treść

Dana jest powietrzna linia współosiowa o średnicach przewodów $a = 7 \text{ mm}$ i $b = 3.04 \text{ mm}$, patrz rys. 2.1. O ile należy przesunąć przewód wewnętrzny względem przewodu zewnętrznego ($c = ?$) aby jej impedancja charakterystyczna zmieniła się o 5Ω .



Rysunek 2.1: Linie z przesuniętym przewodem wewnętrznym

2.2. Rozwiązanie

Impedancja linii ekscentrycznej jest określona wzorem:

$$Z_0(x) = 59.952 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (2.1)$$

$$x = \frac{1}{2a} \left(b + \frac{a^2 - 4c^2}{b} \right) \quad (2.2)$$

Dla $c = 0$ mamy:

$$Z_0(x) \Big|_{c=0} = 59.952 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln \frac{a}{b} \quad (2.3)$$

Jest to zależność przybliżona. Dokładny wzór na impedancję linii współosiowej ma postać:

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{a}{b} \quad (2.4)$$

Porównując podane wyżej zależności dla $c = 0$ mamy:

wzór dokładny : 50.0085378279

wzór przybliżony : 50.0031234918

co dają błąd równy 0.01%.

Zadanie można rozwiązać na 2 sposoby: analitycznie i numerycznie. kolejne zadania będzie można rozwiązać już tylko numerycznie więc porównując rozwiązanie analityczne i numeryczne zadania 2 można przetestować zaprogramowaną metodę newtona.

2.2.1. Rozwiązanie analityczne

Równanie z jakie należy rozwiązać to

$$\underbrace{59.952 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}_k = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{a}{b} - 5}_d \quad (2.5)$$

$$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{d}{k} \quad (2.6)$$

Kluczowe jest spostrzeżenie, że $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Biorąc cosinus hiperboliczny obu stron równania mamy

$$\operatorname{ch}(\operatorname{arch}(x)) = \operatorname{ch} \frac{d}{k} \quad (2.7)$$

$$x = \frac{1}{2} (e^{\frac{d}{k}} + e^{-\frac{d}{k}}) \quad (2.8)$$

Otrzymane x należy podstawić do wzoru 2.2. Po kilku przekształceniach otrzymujemy się zależność:

$$c = \sqrt{\left(a^2 - ab 2 \operatorname{ch} \frac{d}{k} + b^2\right)} / 4 \quad (2.9)$$

Podstawiając dane z treści zadania otrzymujemy się przesunięcie $c = 0.882307292061mm$.

2.2.2. Rozwiązanie numeryczne

W celu znalezienia wymaganego przesunięcia, należy znaleźć wartość x przy którym impedancja spełnia warunek:

$$Z_0(x) \Big|_{c=?} = Z_0(x) \Big|_{c=0} - 5 \quad (2.10)$$

$$Z_0(x) \Big|_{c=?} - Z_0(x) \Big|_{c=0} + 5 = 0 \quad (2.11)$$

a następnie znając x wyznaczyć c . Oczywiście stosując rozwiązania numeryczne nie trzeba stosować się do kolejności wyznaczania (tzn. najpierw x a potem c). Dysponując funkcjami wyznaczającymi wartość impedancji można odnaleźć od razu c .

Wynik rozwiązany za pomocą zaprogramowanego algorytmu Newtona-Raphsona wynosi:

$$c_{\text{numeryczne}} = 0.882307221883mm$$

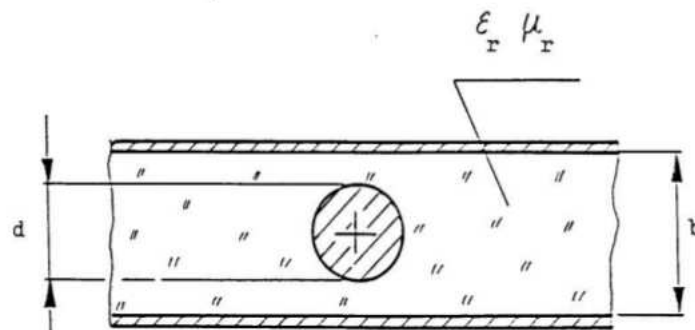
$$c_{\text{analityczne}} = 0.882307292061mm$$

różnica pomiędzy wynikami wynosi $8.12217580519e - 11$, co jest zgodne z przyjętym kryterium zatrzymania pracy algorytmu na poziomie $1e - 10$.

3. Zadanie 3

3.1. Treść

Zaprojektować powietrzną linię cylindryczno-płaską o przekroju poprzecznym jak na rys. 3.1 zakładając, że jej impedancja charakterystyczna jest równa $Z_0 = 30 \Omega$. Odległość pomiędzy równoległymi przewodzącymi płaszczyznami tej linii jest równa $b = 9 \text{ mm}$. O ile zmieni się impedancja charakterystyczna tej linii (zaprojektowanej) po wypełnieniu jej bezstratnym dielektrykiem o $\epsilon_r = 2.04$ i $\mu_r = 1$.



Rysunek 3.1: Linie Cylindryczno płaska

3.2. Rozwiązanie

Impedancja charakterystyczna linii cylindryczno-płaskiej wyraża się wzorem:

$$Z_0\left(\frac{d}{b}\right) = 59.952 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \left(\ln \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{R^4}{30} + 0.014R^8 \right), \quad (3.1)$$

gdzie:

$$R = \frac{\pi d}{4 b} \quad (3.2)$$

$$x = 1 + 2 \operatorname{sh}^2(R) \quad (3.3)$$

$$y = 1 - 2 \sin^2(R) \quad (3.4)$$

Zależność impedancji od wymiarów linii jest znacznie bardziej złożona niż w przypadku linii z zadania 2. Dlatego w tym przypadku nie można znaleźć rozwiązania w sposób analityczny. W celu określenia wymiarów linii należy rozwiązać równanie:

$$Z_0\left(\frac{d}{b}\right) \Big|_{d=9 \text{ mm}} - 30 \Omega = 0 \quad (3.5)$$

Do znalezienia rozwiązania użyto zaprogramowanego poprzednio algorytmu Newtona-Raphsona.

Otrzymano następujące wyniki:

$$d = 8.86216872052 \text{ mm} \quad (3.6)$$

$$Z_0 = 30.0000006344 \text{ } \Omega \quad (3.7)$$

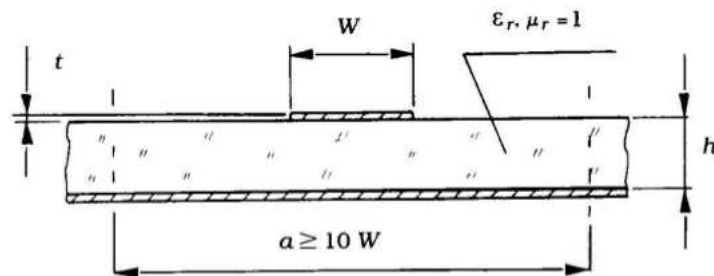
W celu odpowiedzi na drugie pytanie należy policzyć impedancje linii korzystając ze wzoru 3.1. Jednak zamiast $\mu_r = 1$ i $\epsilon_r = 1$, podstawić wartości określone w treści zadania. Uzyskana w ten sposób wartość impedancji wynosi $Z_0 = 42.8485714773 \text{ } \Omega$. Zmieni się ona zatem o $12.8485708429 \text{ } \Omega$.

Zmiana impedancji wynika też bezpośrednio ze wzoru 3.1. Po wstawieniu dielektryka nowa wartość impedancji wyniesie $Z_0 \times \sqrt{\mu_r}$.

4. Zadanie 6

4.1. Treść

Zaprojektować niesymetryczną linię paskową, rys 4.1, o impedancji charakterystycznej $Z_0 = 50 \Omega$. Podłoże linii stanowi dielektryk o $\epsilon_r = 2.56$, $\mu_r = 1$ i grubości $h = 1.4 \text{ mm}$. Obliczenia wykonać, przy założeniu, że grubość przewodu wewnętrznego $t = 0.0035 \text{ mm}$. Obliczyć długość fali w tak zaprojektowanej linii wiedząc, że jej częstotliwość $f = 1.5 \text{ GHz}$.



Rysunek 4.1: Niesymetryczna linia paskowa

4.2. Rozwiązanie

4.2.1. Szerokość linii

Niesymetryczna linia paskowa, ze względu na niezwykle łatwe i tanie wytwarzanie, jest jedną z najpopularniejszych przewodnic falowych. Pomimo swojej popularności ciągle nie są znane analityczne zależności projektowe. Dlatego na potrzeby projektu posłużono się wzorami zawartymi w [1].

Rozwiązanie zadania polega na znalezieniu szerokości paska, jaki będzie tworzył linie o wymaganej impedancji. W tym celu należy numerycznie rozwiązać równanie:

$$Z_0(u, f) - Z_0 = 0 \quad (4.1)$$

gdzie:

Z_0 - wymagana impedancja

$u = \frac{W}{h}$ - stosunek od którego zależy impedancja

f - częstotliwość pracy

Impedancje linii oblicza się wzorem:

$$Z_0(u, f) = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{ef}(f)}} \ln \left[\frac{f(u)}{u} + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{u} \right)^2} \right] \quad (4.2)$$

Pomocnicze równania niezbędne do obliczenia impedancji zawartę są w [1].

Należy zwrócić uwagę na to, że wzór 4.2 jest słuszny w przypadku gdy przewód wewnętrzny jest nieskończenie cienki $t = 0$. Gdy chcemy uwzględnić grubość paska należy od u dla którego równanie 4.1 jest spełnione odjąć poprawkę:

$$\Delta u = \frac{t}{2\pi h} \ln \left(1 + \frac{4eh}{t \operatorname{cth}^2 \sqrt{6.517u}} \right) \left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\epsilon_r - 1}} \right) \quad (4.3)$$

Uwzględniając to wszystko zadanie rozwiązano korzystając z algorytmu Newtona-Raphsona napisanego dla poprzednich zadań. Wartość szerokości paska w dla którego impedancja wynosi 50Ω wynosi $w = 3.90022750273 \text{ mm}$.

4.2.2. Długość fali

Pole elektromagnetyczne w niesymetrycznej linii paskowej rozchodzi się, częściowo poprzez dielektryk a częściowo w powietrzu. Dlatego należy obliczyć efektywną przenikalność dielektryczną:

$$\epsilon_{eff}(u, f) = \frac{\epsilon_{eff}(u, 0) + \epsilon_r p(u, f)}{1 + p(u, f)} \epsilon_{eff}(u, 0) = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{10}{u} \right)^{-a(u) \times b(\epsilon_r)} \quad (4.4)$$

Mając obliczoną efektywną przenikalność elektryczną można obliczyć długość fali rozchodzącej się w linii.

$$\lambda = \frac{c_{osr}}{f} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{eff}} \times f} \quad (4.5)$$

Dla wartości określonych w treści zadania długość fali rozchodzącej się w zaprojektowanej linii wynosi: $\lambda = 13.6746810073 \text{ cm}$.

Bibliografia

- [1] S. Rośliniec, *Liniowe obwody mikrofalowe. Metody Analizy i syntezy*, 1st ed. Warszawa: Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, 1999.