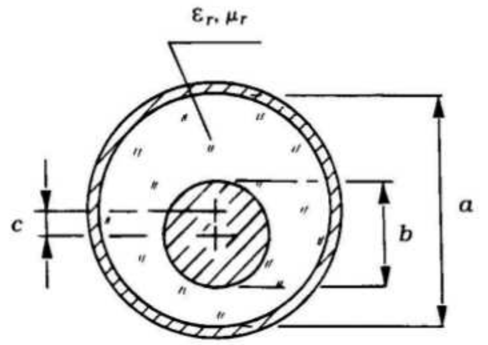
1. Zadanie 2

1.1. Treść

Dana jest powietrzna linia współosiowa o średnicach przewodów a = 7 mm i b = 3.04 mm, patrz rys. 1.1. O ile należy przesunąć przewód wewnętrzny względem przewodu zewnętrznego (c =?) aby jej impedancja charakterystyczna zmieniła się o 5 Ω.



Rysunek 1.1: Linie z przesuniętym przewodem wewnętrznym

1.2. Rozwiązanie

Impedancja linii ekscentrycznej jest określona wzorem:

$$Z_0(x) = 59.952\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \tag{1.1}$$

$$x = \frac{1}{2a}\left(b + \frac{a^2 - 4c^2}{b}\right) \tag{1.2}$$

Dla c = 0 mamy:

$$Z_0(x)\Big|_{c=0} = 59.952\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}\ln\frac{a}{b} \tag{1.3}$$

Jest to zależność przybliżona. Dokładny wzór na impedancje linii współosiowej ma postać:

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\ln\frac{a}{b} \tag{1.4}$$

Porównując podane wyżej zależności dla c = 0 mamy:
wzór dokładny : 50.0085378279
wzór przybliżony : 50.0031234918
co daję błąd równy 0.01%.

Zadanie można rozwiązać na 2 sposobu: analitycznie i numerycznie. kolejne zadania będzie można rozwiązać już tylko numerycznie więc porównując rozwiązanie analityczne i numeryczne zadania 1 można przetestować zaprogramowaną metodę newtona.

1.2.1. Rozwiązanie analityczne

Równanie z jakie należy rozwiązać to

$$\underbrace{59.952\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}}_{k}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\ln\frac{a}{b}-5}_{d} \tag{1.5}$$

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{d}{k} \tag{1.6}$$

Kluczowe jest spostrzeżenie, że $\operatorname{arch} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Biorąc cosinus hiperboliczny obu stron równania mamy

$$\operatorname{ch}\left(\operatorname{arch}\left(x\right)\right)=\operatorname{ch}\frac{d}{k} \tag{1.7}$$

$$x=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{d}{k}}+e^{-\frac{d}{k}}\right) \tag{1.8}$$

Otrzymane x należy podstawić do wzoru 1.2. Po kilku przekształceniach otrzymuję się zależność:

$$c=\sqrt{\left(a^2-ab2\operatorname{ch}\frac{d}{k}+b^2\right)\Big/4} \tag{1.9}$$

Podstawiając dane z treści zadania otrzymuję się przesunięcie $c=0.882307292061mm$.

1.2.2. Rozwiązanie numeryczne

W celu znalezienia wymaganego przesunięcia, należy znaleźć wartość x przy którym impedancja spełnia warunek:

$$Z_0(x)\Big|_{c=?}=Z_0(x)\Big|_{c=0}-5 \tag{1.10}$$

$$Z_0(x)\Big|_{c=?}-Z_0(x)\Big|_{c=0}+5=0 \tag{1.11}$$

a następnie znając x wyznaczyć c. Oczywiście stosując rozwiązania numeryczne nie trzeba stosować się do kolejności wyznaczania (tzn. najpierw x a potem c). Dysponując funkcjami wyznaczającymi wartość impedancji można odnaleźć od razu c.

Wynik rozwiązany za pomocą zaprogramowanego algorytmu Newtona-Raphsona wynosi:

$$c_{numeryczne}=0.882307221883mm$$
$$c_{analityczne}=0.882307292061mm$$

różnica pomiędzy wynikami wynosi $8.12217580519e-11$, co jest zgodne z przyjętym kryterium zatrzymania pracy algorytmu na poziomie $1e-10$.