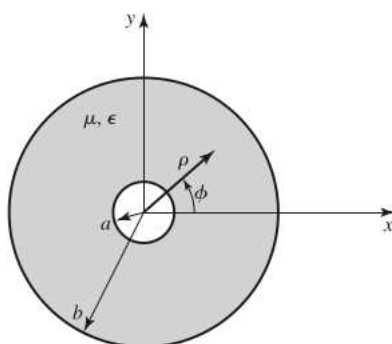


1. Zadanie 1

1.1. Treść

Udowodnić, że powietrzna linia współosiowa o stosunku promieni przewodów zewnętrznego do wewnętrznego równym $\sqrt{\epsilon} = 1.648721271 \dots$ może przenosić falę elektromagnetyczną o największej mocy. Zadana wielkością jest maksymalne natężenie pola elektrycznego, przy którym następuje przebicie elektryczne wypełniającego linię powietrza.

1.2. Rozwiązanie



Rysunek 1.1: Przekrój przez linie współosiową oraz symbole jej parametrów

Współosiową linię transmisyjną pokazano na rysunku 1.1. W treści zadania powiedziano, że mamy do czynienia z linią powietrzną więc $\epsilon = \epsilon_0$ oraz $\mu = \mu_0$. Moc fali przenoszonej przez linię jest równa:

$$P = \oint_S \vec{E}(x, y) \times \vec{H}(x, y) \, ds \quad (1.1)$$

Ponieważ wyrażenia na pole elektryczne i magnetyczne w kartezjańskim układzie współrzędnych byłyby bardzo skomplikowane, należy zmienić układ współrzędnych na polarny:

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \vec{E}(\rho, \phi) \cdot \vec{H}(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi \quad (1.2)$$

Pole elektryczne i magnetyczne mają postać:

$$\vec{E}(\rho) = \frac{U_0 \hat{\rho}}{\rho \ln \frac{b}{a}} \quad (1.3)$$

$$\vec{H}(\phi) = \frac{\vec{E}(\rho) \hat{\phi}}{\eta_0} \quad (1.4)$$

gdzie:

- $\hat{\rho}$ - wektor w kierunku ρ ,
- $\hat{\phi}$ - wektor w kierunku ϕ ,
- $\xi_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ - impedancja falowa linii.

Możemy teraz policzyć moc fali przenoszanej przez linie:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \bar{E}(\rho, \phi) \cdot \bar{H}(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\rho^2 \ln^2 \frac{b}{a}} \rho \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\rho \ln^2 \frac{b}{a}} \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln^2 \frac{b}{a}} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\rho} \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln^2 \frac{b}{a}} \int_0^{2\pi} \ln |\rho| \Big|_a^b \, d\phi \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln^2 \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} 1 \, d\phi \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln \frac{b}{a}} \phi \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{2\pi}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln \frac{b}{a}}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Korzystając z zależności:

$$U_0 = E_{max} \cdot a \ln \frac{b}{a} \tag{1.6}$$

można wyznaczyć moc fali propagującej się w linii w zależności od maksymalnego natężenia pola elektromagnetycznego (E_{max}). Podstawiając 1.6 do 1.5 otrzymujemy się:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2\pi}{\xi_0} \frac{E_{max}^2 \cdot a^2 \ln^2 \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} E_{max}^2 \cdot a^2 \ln \frac{b}{a} \\
&= 2\pi \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{max}^2}_K \cdot a^2 \ln \frac{b}{a} \\
&= K \cdot a^2 \ln \frac{b}{a}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

K we wzorze 1.7 jest stałe, zależne tylko od podanego w zadaniu maksymalnego natężenia pola.

Moc fali propagującej się w linii będzie maksymalna gdy pochodna mocy określonej wzorem 1.7 ($\frac{dP(a)}{da}$) będzie równa 0.

$$\begin{aligned}
\frac{dP(a)}{da} &= K \cdot 2a \ln \frac{b}{a} + K \cdot a^2 \left(-\frac{1}{a}\right) \\
&= Ka \left[2 \ln \frac{b}{a} - 1\right]
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Wyrażenie 1.8 jest równe 0 gdy $2 \ln \frac{b}{a} - 1 = 0$. Co z kolei przekłada się na warunek $\ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, który jest spełniony gdy $\frac{b}{a} = \sqrt{e}$, co należało dowieść.