

Jakub Kopański
e-mail: J.Kopanski@imio.pw.edu.pl

Projektowanie układów mikrofalowych (PUM)
Projekt

Spis treści

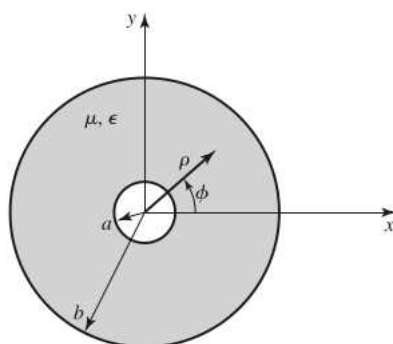
1. Zadanie 1	2
1.1. Treść	2
1.2. Rozwiązanie	2
2. Zadanie 2	4
2.1. Treść	4
2.2. Rozwiązanie	4
2.2.1. Rozwiązanie analityczne	5
2.2.2. Rozwiązanie numeryczne	5

1. Zadanie 1

1.1. Treść

Udowodnić, że powietrzna linia współosiowa o stosunku promieni przewodów zewnętrznego do wewnętrznego równym $\sqrt{\epsilon} = 1.648721271 \dots$ może przenosić falę elektromagnetyczną o największej mocy. Zadana wielkością jest maksymalne natężenie pola elektrycznego, przy którym następuje przebicie elektryczne wypełniającego linię powietrza.

1.2. Rozwiązanie



Rysunek 1.1: Przekrój przez linie współosiową oraz symbole jej parametrów

Współosiową linię transmisyjną pokazano na rysunku 1.1. W treści zadania powiedziano, że mamy doczynienia z linią powietrzną więc $\epsilon = \epsilon_0$ oraz $\mu = \mu_0$. Moc fali przenoszonej przez linię jest równa:

$$P = \oint_S \vec{E}(x, y) \times \vec{H}(x, y) \, ds \quad (1.1)$$

Ponieważ wyrażenia na pole elektryczne i magnetyczne w kartezjańskim układzie współrzędnych byłyby bardzo skomplikowane, należy zmienić układ współrzędnych na polarny:

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \vec{E}(\rho, \phi) \cdot \vec{H}(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi \quad (1.2)$$

Pole elektryczne i magnetyczne mają postać:

$$\vec{E}(\rho) = \frac{U_0 \hat{\rho}}{\rho \ln \frac{b}{a}} \quad (1.3)$$

$$\vec{H}(\phi) = \frac{\vec{E}(\rho) \hat{\phi}}{\eta_0} \quad (1.4)$$

gdzie:

- $\hat{\rho}$ - wektor w kierunku ρ ,
- $\hat{\phi}$ - wektor w kierunku ϕ ,
- $\xi_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ - impedancja falowa linii.

Możemy teraz policzyć moc fali przenoszanej przez linie:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \bar{E}(\rho, \phi) \cdot \bar{H}(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\rho^2 \ln^2 \frac{b}{a}} \rho \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\rho \ln^2 \frac{b}{a}} \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln^2 \frac{b}{a}} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\rho} \, d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln^2 \frac{b}{a}} \int_0^{2\pi} \ln |\rho| \Big|_a^b \, d\phi \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln^2 \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} 1 \, d\phi \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln \frac{b}{a}} \phi \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{2\pi}{\xi_0} \frac{U_0^2}{\ln \frac{b}{a}}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Korzystając z zależności:

$$U_0 = E_{max} \cdot a \ln \frac{b}{a} \tag{1.6}$$

można wyznaczyć moc fali propagującej się w linii w zależności od maksymalnego natężenia pola elektromagnetycznego (E_{max}). Podstawiając 1.6 do 1.5 otrzymujemy się:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2\pi}{\xi_0} \frac{E_{max}^2 \cdot a^2 \ln^2 \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} E_{max}^2 \cdot a^2 \ln \frac{b}{a} \\
&= 2\pi \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{max}^2}_{K} \cdot a^2 \ln \frac{b}{a} \\
&= K \cdot a^2 \ln \frac{b}{a}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

K we wzorze 1.7 jest stałe, zależne tylko od podanego w zadaniu maksymalnego natężenia pola.

Moc fali propagującej się w linii będzie maksymalna gdy pochodna mocy określonej wzorem 1.7 ($\frac{dP(a)}{da}$) będzie równa 0.

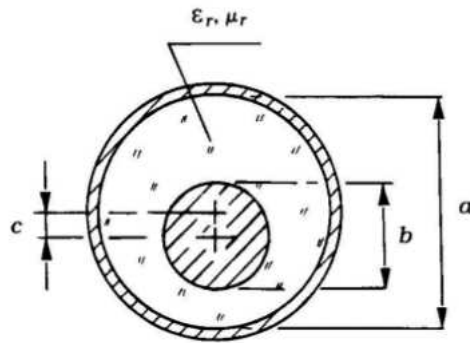
$$\begin{aligned}
\frac{dP(a)}{da} &= K \cdot 2a \ln \frac{b}{a} + K \cdot a^2 \left(-\frac{1}{a}\right) \\
&= Ka \left[2 \ln \frac{b}{a} - 1\right]
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Wyrażenie 1.8 jest równe 0 gdy $2 \ln \frac{b}{a} - 1 = 0$. Co z kolei przekłada się na warunek $\ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, który jest spełniony gdy $\frac{b}{a} = \sqrt{e}$, co należało dowieść.

2. Zadanie 2

2.1. Treść

Dana jest powietrzna linia współosiowa o średnicach przewodów $a = 7 \text{ mm}$ i $b = 3.04 \text{ mm}$, patrz rys. 2.1. O ile należy przesunąć przewód wewnętrzny względem przewodu zewnętrznego ($c = ?$) aby jej impedancja charakterystyczna zmieniła się o 5Ω .



Rysunek 2.1: Linie z przesuniętym przewodem wewnętrznym

2.2. Rozwiązanie

Impedancja linii ekscentrycznej jest określona wzorem:

$$Z_0(x) = 59.952 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (2.1)$$

$$x = \frac{1}{2a} \left(b + \frac{a^2 - 4c^2}{b} \right) \quad (2.2)$$

Dla $c = 0$ mamy:

$$Z_0(x) \Big|_{c=0} = 59.952 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln \frac{a}{b} \quad (2.3)$$

Jest to zależność przybliżona. Dokładny wzór na impedancję linii współosiowej ma postać:

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{a}{b} \quad (2.4)$$

Porównując podane wyżej zależności dla $c = 0$ mamy:

wzór dokładny : 50.0085378279

wzór przybliżony : 50.0031234918

co dają błąd równy 0.01%.

Zadanie można rozwiązać na 2 sposoby: analitycznie i numerycznie. kolejne zadania będzie można rozwiązać już tylko numerycznie więc porównując rozwiązanie analityczne i numeryczne zadania 2 można przetestować zaprogramowaną metodę newtona.

2.2.1. Rozwiązanie analityczne

Równanie z jakie należy rozwiązać to

$$\underbrace{59.952 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}_k = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{a}{b} - 5}_d \quad (2.5)$$

$$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{d}{k} \quad (2.6)$$

Kluczowe jest spostrzeżenie, że $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Biorąc cosinus hiperboliczny obu stron równania mamy

$$\operatorname{ch}(\operatorname{arch}(x)) = \operatorname{ch} \frac{d}{k} \quad (2.7)$$

$$x = \frac{1}{2}(e^{\frac{d}{k}} + e^{-\frac{d}{k}}) \quad (2.8)$$

Otrzymane x należy podstawić do wzoru 2.2. Po kilku przekształceniach otrzymujemy się zależność:

$$c = \sqrt{\left(a^2 - ab 2 \operatorname{ch} \frac{d}{k} + b^2\right)} / 4 \quad (2.9)$$

Podstawiając dane z treści zadania otrzymujemy się przesunięcie $c = 0.882307292061mm$.

2.2.2. Rozwiązanie numeryczne

W celu znalezienia wymaganego przesunięcia, należy znaleźć wartość x przy którym impedancja spełnia warunek:

$$Z_0(x) \Big|_{c=?} = Z_0(x) \Big|_{c=0} - 5 \quad (2.10)$$

$$Z_0(x) \Big|_{c=?} - Z_0(x) \Big|_{c=0} + 5 = 0 \quad (2.11)$$

a następnie znając x wyznaczyć c . Oczywiście stosując rozwiązania numeryczne nie trzeba stosować się do kolejności wyznaczania (tzn. najpierw x a potem c). Dysponując funkcjami wyznaczającymi wartość impedancji można odnaleźć od razu c .

Wynik rozwiązany za pomocą zaprogramowanego algorytmu Newtona-Raphsona wynosi:

$$c_{\text{numeryczne}} = 0.882307221883mm$$

$$c_{\text{analityczne}} = 0.882307292061mm$$

różnica pomiędzy wynikami wynosi $8.12217580519e - 11$, co jest zgodne z przyjętym kryterium zatrzymania pracy algorytmu na poziomie $1e - 10$.