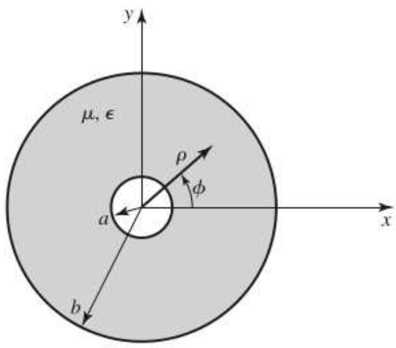
1. Zadanie 1

1.1. Treść

Udowodnić, że powietrzna linia współosiowa o stosunku promieni przewodów zewnętrznego do wewnętrznego równym $\sqrt{e} = 1.648721271\ldots$ może przenosić falę elektromagnetyczną o największej mocy. Zadaną wielkością jest maksymalne natężenie pola elektrycznego, przy którym następuje przebicie elektryczne wypełniającego linię powietrza.

1.2. Rozwiązanie



Rysunek 1.1: Przekrój przez linie współosiową oraz symbole jej parametrów

Współosiową linie transmisyjną pokazano na rysunku 1.1. W treści zadania powiedziano, że mamy doczynienia z linią powietrzną więc $\epsilon = \epsilon_0$ oraz $\mu = \mu_0$. Moc fali przenoszonej przez linie jest równa:

$$P = \oint_S \bar{E}(x,y) \times \bar{H}(x,y)\, \mathrm{ds} \tag{1.1}$$

Ponieważ wyrażenia na pole elektryczne i magnetyczne w kartezjańskim układzie współrzędnych byłyby bardzo skomplikowane, należy zmienić układ współrzędnych na polarny:

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \bar{E}(\rho,\phi) \cdot \bar{H}(\rho,\phi) \rho\, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \tag{1.2}$$

Pole elektryczne i magnetyczne mają postać:

$$\bar{E}(\rho) = \frac{U_0 \hat{\rho}}{\rho \ln \frac{b}{a}} \tag{1.3}$$

$$\bar{H}(\phi) = \frac{\bar{E}(\rho)\hat{\phi}}{\eta_0} \tag{1.4}$$

gdzie:

$\hat{\rho}$	- wersor w kierunko ρ,
$\hat{\phi}$	- wersor w kierunku ϕ,
$\xi_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$	- impedancja falowa linii.

Możemy teraz policzyć moc fali przenoszonej przez linie:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^b \bar{E}(\rho,\phi)\cdot\bar{H}(\rho,\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^b \frac{1}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\rho^2\ln^2\frac{b}{a}}\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^b \frac{1}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\rho\ln^2\frac{b}{a}}\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\ln^2\frac{b}{a}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^b \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\ln^2\frac{b}{a}}\int\limits_0^{2\pi} \ln|\rho|\,\Big|_a^b\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\ln^2\frac{b}{a}}\ln\frac{b}{a}\int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\ln\frac{b}{a}}\phi\,\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{2\pi}{\xi_0}\frac{U_0^2}{\ln\frac{b}{a}}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Korzystając z zależności:

$$
U_0 = E_{max}\cdot a\ln\frac{b}{a}
\tag{1.6}
$$

można wyznaczyć moc fali propagującej się w lini w zależności od maksymalnego natężenia pola elektromagnetycznego (E_{max}). Podstawuając 1.6 do 1.5 otrzymuję się:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{2\pi}{\xi_0}\frac{E_{max}^2\cdot a^2\ln^2\frac{b}{a}}{\ln\frac{b}{a}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}E_{max}^2\cdot a^2\ln\frac{b}{a} \\
&= \underbrace{2\pi\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_{max}^2}_{K}\cdot a^2\ln\frac{b}{a} \\
&= K\cdot a^2\ln\frac{b}{a}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

K we wzorze 1.7 jest stałe, zależne tylko od podanego w zadaniu maksymalnego natężenia pola.

Moc fali propagującej się w linii będzie maksymalna gdy pochodna mocy określonej wzorem 1.7 ($\frac{\mathrm{dP(a)}}{\mathrm{da}}$) będzie równa 0.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{dP(a)}}{\mathrm{da}} &= K\cdot 2a\ln\frac{b}{a} + K\cdot a^2(-\frac{1}{a}) \\
&= Ka[2\ln\frac{b}{a} - 1]
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Wyrażenie 1.8 jest równe 0 gdy $2\ln\frac{b}{a} - 1 = 0$. Co z kolei przekłada się na warunek $\ln\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, który jest spełniony gdy $\frac{b}{a} = \sqrt{\mathrm{e}}$, co należało dowieść.