Jakub Kopański e-mail: J.Kopanski@imio.pw.edu.pl

Projektowanie układów mikrofalowych (PUM) Projekt

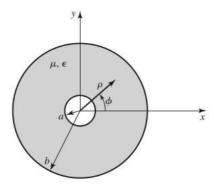
Spis treści

1.	Zadanie 1	2
	1.1. Treść	2
	1.2. Rozwiązanie	2
2.	Zadanie 2	4
	2.1. Treść	4
	2.2. Rozwiązanie	4
	2.2.1. Rozwiązanie analityczne	5
	2.2.2. Rozwiązanie numeryczne	5
3.	Zadanie 3	6
	3.1. Treść	6
	3.2. Rozwiązanie	6
4.	Zadanie 6	8
	4.1. Treść	8
	4.2. Rozwiązanie	8
	4.2.1. Szerokość linii	8
	4.2.2. Długość fali	9
5.	Zadanie 7	10
	5.1. Treść	10
	5.2. Rozwiązanie	10
6.	Zadanie 8	12
	6.1. Treść	12
	6.2. Rozwiązanie	12
7.	Zadanie 9	14
	7.1. Treść	14
	7.2. Rozwiązanie	14
	7.2.1. Dzielnik typu T	14
	7.2.2. Dzielnik typu Π	15
Ri	aliografia	16

1.1. Treść

Udowodnić, że powietrzna linia współosiowa o stosunku promieni przewodów zewnętrznego do wewnętrznego równym $\sqrt{e}=1.648721271\ldots$ może przenosić falę elektromagnetyczną o największej mocy. Zadaną wielkością jest maksymalne natężenie pola elektrycznego, przy którym następuje przebicie elektryczne wypełniającego linię powietrza.

1.2. Rozwiązanie



Rysunek 1.1: Przekrój przez linie współosiową oraz symbole jej parametrów

Współosiową linie transmisyjną pokazano na rysunku 1.1. W treści zadania powiedziano, że mamy doczynienia z linią powietrzną więc $\epsilon = \epsilon_0$ oraz $\mu = \mu_0$. Moc fali przenoszonej przez linie jest równa:

$$P = \oint_{S} \bar{E}(x, y) \times \bar{H}(x, y) \, \mathrm{ds}$$
 (1.1)

Ponieważ wyrażenia na pole elektryczne i magnetyczne w kartezjańskim układzie współrzędnych byłyby bardzo skomplikowane, należy zmienić układ współrzędnych na polarny:

$$P = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \int_{a}^{b} \bar{E}(\rho, \phi) \cdot \bar{H}(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi$$
 (1.2)

Pole elektryczne i magnetyczne mają postać:

$$\bar{E}(\rho) = \frac{U_0 \hat{\rho}}{\rho \ln \frac{b}{a}} \tag{1.3}$$

$$\bar{H}(\phi) = \frac{\bar{E}(\rho)\hat{\phi}}{\eta_0} \tag{1.4}$$

gdzie:

 $\begin{array}{ll} \hat{\rho} & \text{- wersor w kierunku } \rho, \\ \hat{\phi} & \text{- wersor w kierunku } \phi, \\ \xi_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \text{ - impedancja falowa linii.} \end{array}$

Możemy teraz policzyć moc fali przenoszonej przez linie:

$$P = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \int_{a}^{b} \bar{E}(\rho, \phi) \cdot \bar{H}(\rho, \phi) \rho \, d\rho d\phi$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \int_{a}^{b} \frac{1}{\xi_{0}} \frac{U_{0}^{2}}{\rho^{2} \ln^{2} \frac{b}{a}} \rho \, d\rho d\phi$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \int_{a}^{b} \frac{1}{\xi_{0}} \frac{U_{0}^{2}}{\rho \ln^{2} \frac{b}{a}} \, d\rho d\phi$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_{0}} \frac{U_{0}^{2}}{\ln^{2} \frac{b}{a}} \int_{0}^{2\pi} \int_{a}^{b} \frac{1}{\rho} \, d\rho d\phi$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_{0}} \frac{U_{0}^{2}}{\ln^{2} \frac{b}{a}} \int_{0}^{2\pi} \ln |\rho| \, \Big|_{a}^{b} \, d\phi$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_{0}} \frac{U_{0}^{2}}{\ln^{2} \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{a} \int_{0}^{2\pi} 1 \, d\phi$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_{0}} \frac{U_{0}^{2}}{\ln \frac{b}{a}} \phi \, \Big|_{0}^{2\pi}$$

$$= \frac{2\pi}{\xi_{0}} \frac{U_{0}^{2}}{\ln \frac{b}{a}}$$
(1.5)

Korzystając z zależności:

$$U_0 = E_{max} \cdot a \ln \frac{b}{a} \tag{1.6}$$

można wyznaczyć moc fali propagującej się w lini w zależności od maksymalnego natężenia pola elektromagnetycznego (E_{max}) . Podstawuając 1.6 do 1.5 otrzymuję się:

$$P = \frac{2\pi}{\xi_0} \frac{E_{max}^2 \cdot a^2 \ln^2 \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} E_{max}^2 \cdot a^2 \ln \frac{b}{a}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{max}^2 \cdot a^2 \ln \frac{b}{a}$$

$$= K \cdot a^2 \ln \frac{b}{a}$$
(1.7)

K we wzorze 1.7 jest stałe, zależne tylko od podanego w zadaniu maksymalnego natężenia pola.

Moc fali propagującej się w linii będzie maksymalna gdy pochodna mocy określonej wzorem 1.7 $(\frac{dP(a)}{da})$ będzie równa 0.

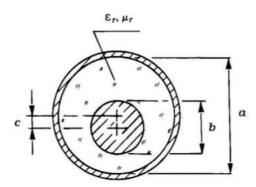
$$\frac{dP(a)}{da} = K \cdot 2a \ln \frac{b}{a} + K \cdot a^2 \left(-\frac{1}{a}\right)$$

$$= Ka\left[2 \ln \frac{b}{a} - 1\right] \tag{1.8}$$

Wyrażenie 1.8 jest równe 0 gdy $2 \ln \frac{b}{a} - 1 = 0$. Co z kolei przekłada się na warunek $\ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, który jest spełniony gdy $\frac{b}{a} = \sqrt{e}$, co należało dowieść.

2.1. Treść

Dana jest powietrzna linia współosiowa o średnicach przewodów a = 7 mm i b = 3.04 mm, patrz rys. 2.1. O ile należy przesunąć przewód wewnętrzny względem przewodu zewnętrznego (c =?) aby jej impedancja charakterystyczna zmieniła się o 5 Ω .



Rysunek 2.1: Linie z przesuniętym przewodem wewnętrznym

2.2. Rozwiązanie

Impedancja linii ekscentrycznej jest określona wzorem:

$$Z_0(x) = 59.952 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$
 (2.1)

$$x = \frac{1}{2a} \left(b + \frac{a^2 - 4c^2}{b} \right) \tag{2.2}$$

Dla c = 0 mamy:

$$Z_0(x) \Big|_{c=0} = 59.952 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln \frac{a}{b}$$
 (2.3)

Jest to zależność przybliżona. Dokładny wzór na impedancje linii współosiowej ma postać:

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{a}{b} \tag{2.4}$$

Porównując podane wyżej zależności dla $\mathbf{c}=0$ mamy:

wzór dokładny : 50.0085378279 wzór przybliżony : 50.0031234918 co daje bład równy 0.01%.

Zadanie można rozwiązać na 2 sposobu: analitycznie i numerycznie. kolejne zadania będzie można rozwiązać już tylko numerycznie więc porównując rozwiązanie analityczne i numeryczne zadania 2 można przetestować zaprogramowaną metodę newtona.

2.2.1. Rozwiązanie analityczne

Równanie z jakie należy rozwiązać to

$$\underbrace{59.952\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}}_{k} \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\ln\frac{a}{b} - 5}_{d} \tag{2.5}$$

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \frac{d}{k} \tag{2.6}$$

Kluczowe jest spostrzeżenie, że arch $x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$. Biorąc cosinus hiperboliczny obu stron równania mamy

$$\operatorname{ch}\left(\operatorname{arch}\left(x\right)\right) = \operatorname{ch}\frac{d}{k}\tag{2.7}$$

$$x = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{d}{k}} + e^{-\frac{d}{k}} \right) \tag{2.8}$$

Otrzymane x należy podstawić do wzoru 2.2. Po kilku przekształceniach otrzymuję się zależność:

$$c = \sqrt{\left(a^2 - ab2 \operatorname{ch} \frac{d}{k} + b^2\right)/4} \tag{2.9}$$

Podstawiając dane z treści zadania otrzymuję się przesunięcie c = 0.882307292061mm.

2.2.2. Rozwiązanie numeryczne

W celu znalezienia wymaganego przesunięcia, należy znaleźć wartość x przy którym impedancja spełnia warunek:

$$Z_0(x)\Big|_{c=2} = Z_0(x)\Big|_{c=0} - 5$$
 (2.10)

$$Z_0(x)\Big|_{c=?} - Z_0(x)\Big|_{c=0} + 5 = 0$$
 (2.11)

a następnie znając x wyznaczyć c. Oczywiście stosując rozwiązania numeryczne nie trzeba stosować się do kolejności wyznaczania (tzn. najpierw x a potem c). Dysponując funkcjami wyznaczającymi wartość impedancji można odnaleźć od razu c.

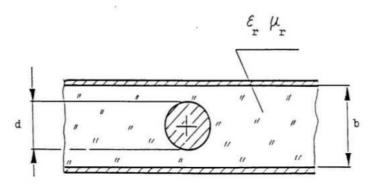
Wynik rozwiązany za pomocą zaprogramowanego algorytmu Newtona-Raphsona wynosi:

 $c_{numeryczne} = 0.882307221883mm$ $c_{analityczne} = 0.882307292061mm$

różnica pomiędzy wynikami wynosi 8.12217580519e-11, co jest zgodne z przyjętym kryterium zatrzymania pracy algorytmu na poziomie 1e-10.

3.1. Treść

Zaprojektować powietrzną linię cylindryczno-płaską o przekroju poprzecznym jak na rys. 3.1 zakładając, że jej impedancja charakterystyczna jest równa $Z_0=30~\Omega$. Odległość pomiędzy równoległymi przewodzącymi płaszczyznami tej linii jest równa b=9~mm. O ile zmieni się impedancja charakterystyczna tej linii (zaprojektowanej) po wypełnieniu jej bezstratnym dielektrykiem o $\epsilon_r=2.04$ i $\mu_r=1$.



Rysunek 3.1: Linie Cyindryczno płaska

3.2. Rozwiązanie

Impedancja charakterystyczna linii cylindryczno-płaskiej wyraża się wzorem:

$$Z_0\left(\frac{d}{b}\right) = 59.952\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}\left(\ln\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x - y}} - \frac{R^4}{30} + 0.014R^8\right),\tag{3.1}$$

gdzie:

$$R = \frac{\pi}{4} \frac{d}{b} \tag{3.2}$$

$$x = 1 + 2\sinh^2(R) \tag{3.3}$$

$$y = 1 - 2\sin^2(R) \tag{3.4}$$

Zależność impedancji od wymiarów linii jest znacznie bardziej złożona niż w przypadku linii z zadania 2. Dlatego w tym przypadku nie można znaleźć rozwiązania w sposób analityczny. W celu określenia wymiarów linii należy rozwiązać równanie:

$$Z_0\left(\frac{d}{b}\right)\Big|_{d=9\ mm} - 30\Omega = 0 \tag{3.5}$$

Do znalezienia rozwiązania użyto zaprogramowanego poprzednio algorytmu Newtona-Raphsona.

Otrzymano następujące wyniki:

$$d = 8.86216872052 \ mm \tag{3.6}$$

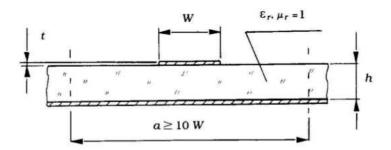
$$Z_0 = 30.0000006344 \ \Omega \tag{3.7}$$

W celu odpowiedzi na drugie pytanie należy policzyć impedancje linii korzystając ze wzoru 3.1. Jednak zamiast $\mu_r=1$ i $\epsilon_r=1$, podstawić wartości określone w treści zadania. Uzyskana w ten sposób wartość impedancji wynosi $Z_0=42.8485714773~\Omega$. Zmieni się ona zatem o 12.8485708429 Ω .

wartość impedancji wynosi $Z_0=42.8485714773~\Omega$. Zmieni się ona zatem o 12.8485708429 Ω . Zmiana impedancji wynika też bezpośrednio ze wzoru 3.1. Po wstawieniu dielektryka nowa wartość impedancji wyniesie $Z_0\times\sqrt{\mu_r}$.

4.1. Treść

Zaprojektować niesymetryczną linię paskową, rys 4.1, o impedancji charakterystycznej $Z_0=50~\Omega$. Podłoże linii stanowi dielektryk o $\epsilon_r=2.56,~\mu_r=1$ i grubości h=1.4~mm. Obliczenia wykonać, przy założeniu, że grubość przewodu wewnętrznego t=0.0035~mm. Obliczyć długość fali w tak zaprojektowanej linii wiedząc, ze jej częstotliwość f=1.5~GHz.



Rysunek 4.1: Nieymetryczna linia paskowa

4.2. Rozwiązanie

4.2.1. Szerokość linii

Niesymetryczna linia paskowa, ze względu na niezwykle łatwe i tanie wytwarzanie, jest jedną z najpopularniejszych prowadnic falowych. Pomimo swojej popularności ciągle nie są znane analityczne zależności projektowe. Dlatego na potrzeby projektu posłużono się wzorami zawartymi w [1].

Rozwiązanie zadania polega na znalezieniu szerokości paska, jaki będzie tworzył linie o wymaganej impedancji. W tym celu należy numerycznie rozwiązanć równanie:

$$Z_0(u,f) - Z_0 = 0 (4.1)$$

gdzie:

 Z_0 - wymagana impedancja

 $u = \frac{W}{h}$ - stosunek od którego zależy impedancja

f - częstotliwość pracy

Impedancje linii oblicza się wzorem:

$$Z_0(u,f) = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{ef}(f)}} \ln \left[\frac{f(u)}{u} + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{u}\right)^2} \right]$$

$$(4.2)$$

Pomocnicze równania niezbędne do obliczenia impedancji zawartę są w [1].

Należy zwrócić uwagę na to, że wzór 4.2 jest słuszny w przypadku gdy przewód wewnętrzny jest nieskończenie cienki t=0. Gdy chcemy uwzględnić grubość paska należy od u dla którego równanie 4.1 jest spełnione odjąć poprawkę:

$$\Delta u = \frac{t}{2\pi h} \ln\left(1 + \frac{4eh}{t \coth^2 \sqrt{6.517u}}\right) \left(1 + \frac{1}{\cot \sqrt{\epsilon_r - 1}}\right) \tag{4.3}$$

Uwzględniając to wszystko zadanie rozwiązano korzystając z algorytmu Newtona-Raphsona napisanego dla poprzednich zadań. Wartość szerokości paska w dla którego impedancja wynosi 50 Ω wynosi w=3.90022750273~mm.

4.2.2. Długość fali

Pole elektromagnetyczne w niesymetrycznej linii paskowej rozchodzi się, częściowo poprzez dielektryk a częściowo w powietrzu. Dlatego należy obliczyć efektywną prznikalność dielektryczną:

$$\epsilon_{eff}(u,f) = \frac{\epsilon_{eff}(u,0) + \epsilon_r p(u,f)}{1 + p(u,f)} \epsilon_{eff}(u,0) \qquad = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{10}{u}\right)^{-a(u) \times b(\epsilon_r)} \tag{4.4}$$

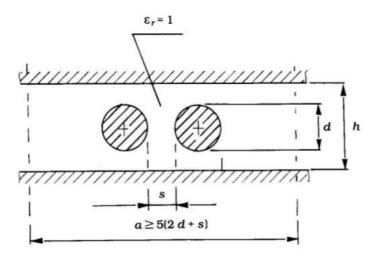
Mając obliczoną efektywną prznikalność elektryczną można obliczyć długość fali rozchodzącej się w linii.

$$\lambda = \frac{c_{osr}}{f} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{eff}} \times f} \tag{4.5}$$

Dla wartości określonych w treści zadania długość fali rozchodzącej się w zaprojektowanej linii wynosi: $\lambda=13.6746810073~cm$.

5.1. Treść

Zaprojektować powietrzne cylindryczno – płaskie linie sprzężone dla następujących danych: Z_{0e} = $60~\Omega,~Z_{0o}=40~\Omega.$ Obliczenia wykonać przy założeniu, że odległość pomiędzy dwoma zewnętrznymi płaszczyznami przewodzącymi jest równa $h=8\ mm,$ rys. 5.1.



Rysunek 5.1: Lnie cylindryczno – płaskie sprzężone

5.2. Rozwiązanie

Impedancje charakterystyczne powietrznych linii cylindryczno – płaskich, przy pobudzeniu synfazowym Z_{0e} i przeciwfazowym Z_{0o} określone są wzorami:

$$Z_{0e}(x,y) = 59.952 \ln \left(\frac{0.523962}{f_1(x)f_2(x,y)f_3(x,y)} \right)$$

$$Z_{0e}(x,y) = 59.952 \ln \left(\frac{0.523962f_3(x,y)}{f_1(x)f_4(x,y)} \right)$$
(5.2)

$$Z_{0o}(x,y) = 59.952 \ln \left(\frac{0.523962 f_3(x,y)}{f_1(x) f_4(x,y)} \right)$$
 (5.2)

gdzie:

 $f_{(1/2/3/4)}$ - funkcje opisane w [1],

 $x=rac{d}{h}$ - stosunek średnicy przewodu do odstępu między płaszczyznami, $y=rac{s}{h}$ - stosunek odstępu między przewodami do odstępu między płaszczyznami.

Projektowanie linii sprowadza się do znalezienia takich x i y dla których spełnione są równiania:

$$V1(x,y) = Z_{0e}(x,y) - Z_{0e} = 0 (5.3)$$

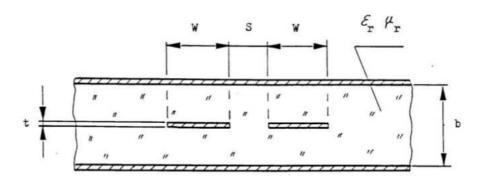
$$V2(x,y) = Z_{0o}(x,y) - Z_{0o} = 0 (5.4)$$

a finalnie s i d.

Implementując metodę Newtona linia spełniająca wymagania postawione w treści zadania ma wymiary: $s=1.97191812203\ mm$ i $d=4.25688390818\ mm$.

6.1. Treść

Zaprojektować symetryczne linie paskowe sprzężone dla następujących danych o przekroju poprzecznym jak na rys. 6.1. Obliczenia wykonać dla $Z_{0e}=60~\Omega,~Z_{0o}=40~\Omega$ przy założeniu, że podłoże linii stanowi dielektryk o $\epsilon_r=2.56,~\mu_r=1$ i grubości b=2.8~mm. W trakcie obliczeń przyjąć, że grubość przewodów wewnętrznych $t\approx 0~mm$.



Rysunek 6.1: Symetryczne linie paskowe

6.2. Rozwiązanie

Impedancje charakterystyczne symetrycznych sprzężonych linii paskowych wynoszą:

$$Z_{0e} = 29.976\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{K'(ke)}{K(ke)}$$

$$\tag{6.1}$$

$$Z_{0o} = 29.976\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{K'(ko)}{K(ko)}$$

$$(6.2)$$

Powyższe wzory są słuszne gdy t << b, co jest spełnione dla $t \approx 0$ określonego w zadaniu. W pierwszym kroku należy wyznaczyć:

$$\frac{K'(ke)}{K(ke)} = Z_{0e}/29.976\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

$$(6.3)$$

$$\frac{K'(ko)}{K(ko)} = Z_{0o}/29.976\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$
 (6.4)

Z ilorazu całek eliptycznych można wyznaczyć moduły k_e i k_o . Następnie obliczamy parametry linii W i S zgodnie ze wzorami:

$$W = \frac{2b}{\pi} \operatorname{arth}(\sqrt{k_e k_o}) \tag{6.5}$$

$$S = \frac{2b}{\pi} \operatorname{arth}\left(\frac{k_e}{k_o}\right) - W \tag{6.6}$$

Dla wartości podanych w treści zadania potrzebne parametry linii to $w=1.95755230148\ mm$ i $s=0.384595243329\ mm.$

7.1. Treść

Zaprojektować tłumik rezystywny typu T o tłumieniu L=10~dB, który włączony pomiędzy linie długie o impedancjach charakterystycznych $Z_{01}=50~\Omega$ i $Z_{02}=60~\Omega$ powinien zapewniać obustronne dopasowanie w nieskończenie szerokim paśmie częstotliwości. Zaprojektować równoważną wersję tego tłumika typu Π .

7.2. Rozwiązanie

W pierwszym kroku należy sprawdzić realizowalność dzielnika. Należy wyznaczyć stosunek impedancji r:

$$r = \left(\frac{Z_{01}}{Z_{02}}\right)^{\pm 1} \tag{7.1}$$

przy czym znak przy wykładniku dobiera się tak, aby: r > 1.

Dla przypadku określonego w treści zadania:

$$r = \frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \frac{60}{50}$$
$$= 1.2$$

Natępnie mozna obliczyć minimalne tłumienie jakie wprowadza dzielnik:

$$L_{min} = 10\log(\sqrt{r} + \sqrt{r-1})\tag{7.2}$$

Podstawiając wartości określone w treści zadania otrzymuję się $L_{min} = 4.33507363245 \ dB$ co jest mniejsze od wymaganego $L = 10 \ dB$. Oznacza to, że tłumik jest realizowalny.

Projekt tłumików zaczyna się od przekształcenia wartości tłumienia z miary decybelowej na liniową:

$$N = 10^{\left(\frac{L}{10}\right)} = 10\tag{7.3}$$

7.2.1. Dzielnik typu T

W celu zaprojektowania tłumika typu T wyznacza się wartości rezystancji zgodnie ze wzorami:

$$R_3 = \frac{2\sqrt{N \times Z_{01} \times Z_{02}}}{N - 1} = 38.490017946 \ \Omega \tag{7.4}$$

$$R_2 = Z_{02} \frac{N+1}{N-1} - R_3 \qquad = 34.8433153874 \ \Omega \tag{7.5}$$

$$R_1 = Z_{01} \frac{N+1}{N-1} - R_3 \qquad = 22.6210931651 \ \Omega \tag{7.6}$$

7.2.2. Dzielnik typu Π

Wcelu zaprojektowania tłumika typu Π wyznacza się wartości rezystancji zgodnie ze wzorami:

$$R_{a} = \frac{(N-1)\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}{2\sqrt{N}} = 77.9422863406 \Omega$$

$$R_{b} = \frac{Z_{01}R_{a}(N-1)}{R_{a}(N+1) - Z_{01}(N-1)} = 86.0997286466 \Omega$$

$$R_{c} = \frac{Z_{02}R_{a}(N-1)}{R_{a}(N+1) - Z_{02}(N-1)} = 132.619585539 \Omega$$

$$(7.7)$$

$$R_b = \frac{Z_{01}R_a(N-1)}{R_a(N+1) - Z_{01}(N-1)} = 86.0997286466 \ \Omega \tag{7.8}$$

$$R_c = \frac{Z_{02}R_a(N-1)}{R_a(N+1) - Z_{02}(N-1)} = 132.619585539 \Omega$$
 (7.9)

Bibliografia

[1] S. Rosłoniec, *Liniowe obwody mikrofalowe. Metody Analizy i syntezy*, 1st ed. Warszawa: Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, 1999.