

Statystyka z modelami liniowymi

Lista 2 - Estymatory największej wiarygodności

Zadanie 1: Wygeneruj n ($n = 50$) obserwacji z rozkładu dwumianowego $\text{Binom}(5, p)$. Rozważ przypadki $p \in \{0.1; 0.3; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9\}$. Na tej podstawie wyznacz wartość estymatora największej wiarygodności wielkości $P(X \geq 3)$, gdzie $X \sim \text{Binom}(5, p)$.

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Porównaj estymatory przy pomocy wykresów. Oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie każdego z estymatorów i porównaj wyniki przy pomocy wykresów. Przedyskutuj uzyskane wyniki w zależności od wyboru parametru p .

Powtórz eksperyment dla $n = 20$ i $n = 100$. Porównaj i przedyskutuj uzyskane wyniki w zależności od n .

Zadanie 2: Wygeneruj n ($n = 50$) obserwacji z rozkładu beta $\beta(\theta, 1)$. Rozważ przypadki $\theta \in \{0.5; 1; 2; 5\}$.

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Na tej podstawie wyznacz wartość estymatora $\widehat{I(\theta)}$ informacji Fishera. Wynik zapamiętaj.

Wygeneruj, niezależnie, n obserwacji z rozkładu $\beta(\theta, 1)$. Wyznacz wartość estymatora największej wiarygodności parametru θ .

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Narysuj wykres pudełkowy, histogram oraz wykres kwantylowo-kwantylowy. Do histogramu dodaj linię gęstości rozkładu asymptotycznego. Użyj zapamiętanego wcześniej wyniku dla estymacji nieznannej wartości $I(\theta)$. Czy rozkład zmiennej losowej $\hat{\theta}$ jest normalny? Odpowiedź uzasadnij.

Powtórz eksperyment dla $n = 20$ i $n = 100$. Porównaj i przedyskutuj uzyskane wyniki w zależności od n .

Zadanie 3: Wygeneruj n ($n = 50$) obserwacji z rozkładu $\text{Logist}(\theta, \sigma)$. Rozważ przypadki:

- (a) $\theta = 0, \sigma = 1$;
- (b) $\theta = 0, \sigma = 2$;
- (c) $\theta = 4, \sigma = 1$;
- (d) $\theta = 4, \sigma = 2$.

Oszacuj wartość estymatora największej wiarygodności parametru θ na podstawie wygenerowanej próby. Rozważ kilka punktów początkowych i wpływ wyboru punktu początkowego na liczbę kroków w algorytmie.

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Porównaj estymatory przy pomocy wykresów pudełkowych. Oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie każdego z estymatorów. Przedyskutuj uzyskane wyniki.

Powtórz eksperyment dla $n = 20$ i $n = 100$. Porównaj i przedyskutuj uzyskane wyniki w zależności od n .

Zadanie 4:

- a) Wygeneruj n ($n = 50$) obserwacji z rozkładu beta $\beta(\theta, 1)$. Rozważ przypadki $\theta \in \{0.5; 1; 2; 5\}$.

Wyznacz $\hat{\theta}_{MLE}$ wartość estymatora największej wiarygodności oraz $\hat{\theta}_{MOM}$ wartość estymatora momentów parametru θ .

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Porównaj estymatory przy pomocy wykresów. Oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie każdego z estymatorów i porównaj wyniki przy pomocy wykresów. Przedyskutuj uzyskane wyniki w zależności od wyboru parametru θ .

Powtórz eksperyment dla $n = 20$ i $n = 100$. Porównaj i przedyskutuj uzyskane wyniki w zależności od n .

- b) Wygeneruj n ($n = 50$) obserwacji z rozkładu lognormalnego $\text{Lognorm}(\theta, \sigma)$. Rozważ przypadki $(\theta, \sigma) \in \{(0; 1); (4; 1); (0; 2); (4; 2)\}$.

Wyznacz $\hat{\theta}_{MLE}$ wartość estymatora największej wiarygodności oraz $\hat{\theta}_{MOM}$ wartość estymatora momentów parametru θ .

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Porównaj estymatory przy pomocy wykresów. Oszacuj wariancję, błąd średniokwadratowy oraz obciążenie każdego z estymatorów i porównaj wyniki przy pomocy wykresów. Przedyskutuj uzyskane wyniki w zależności od wyboru parametru θ .

Powtórz eksperyment dla $n = 20$ i $n = 100$. Porównaj i przedyskutuj uzyskane wyniki w zależności od n .