# Raport z listy 3

Jakub Kowalczyk

## Zadanie 1

### 1. Pokrycie dla wartości oczekiwanej (Znana Wariancja)

| Rozkład | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|
| Laplace (a) | 0.9495 | 0.9466 | 0.9493 |
| Laplace (b) | 0.9449 | 0.9506 | 0.9531 |
| Logistic (a) | 0.9472 | 0.9501 | 0.9481 |
| Logistic (b) | 0.9494 | 0.9492 | 0.9549 |
| Normal (a) | 0.9488 | 0.9500 | 0.9486 |
| Normal (b) | 0.9489 | 0.9486 | 0.9488 |
| Student-t (a) | 0.9547 | 0.9536 | 0.9523 |
| Student-t (b) | 0.9523 | 0.9520 | 0.9517 |
| Student-t (c) | 0.9509 | 0.9500 | 0.9476 |

### 2. Pokrycie dla wartości oczekiwanej (Nieznana Wariancja)

| Rozkład | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|
| Laplace (a) | 0.9519 | 0.9473 | 0.9469 |
| Laplace (b) | 0.9512 | 0.9479 | 0.9535 |
| Logistic (a) | 0.9508 | 0.9510 | 0.9474 |
| Logistic (b) | 0.9502 | 0.9510 | 0.9546 |
| Normal (a) | 0.9468 | 0.9504 | 0.9506 |
| Normal (b) | 0.9490 | 0.9456 | 0.9503 |
| Student-t (a) | 0.9601 | 0.9531 | 0.9506 |
| Student-t (b) | 0.9531 | 0.9534 | 0.9526 |
| Student-t (c) | 0.9484 | 0.9490 | 0.9495 |

### 3. Pokrycie dla wariancji

| Rozkład | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|
| Laplace (a) | 0.8204 | 0.7967 | 0.7904 |
| Laplace (b) | 0.8201 | 0.8006 | 0.7896 |
| Logistic (a) | 0.8984 | 0.8956 | 0.8787 |
| Logistic (b) | 0.8941 | 0.8851 | 0.8857 |
| Normal (a) | 0.9492 | 0.9488 | 0.9516 |
| Normal (b) | 0.9486 | 0.9530 | 0.9489 |
| Student-t (a) | 0.6661 | 0.5660 | 0.4947 |

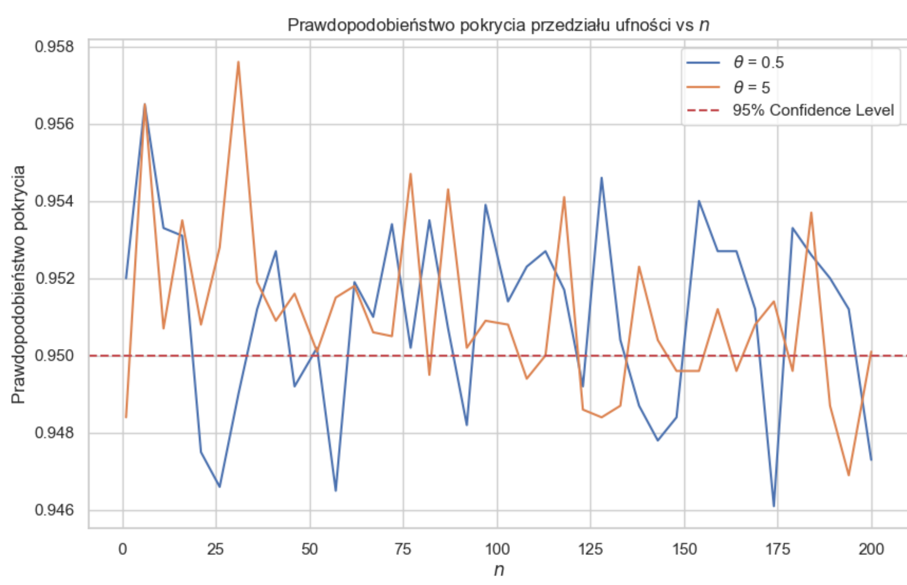
| Rozkład | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|
| Student-t (b) | 0.9076 | 0.8993 | 0.8956 |
| Student-t (c) | 0.9316 | 0.9297 | 0.9295 |

**Komentarz:**

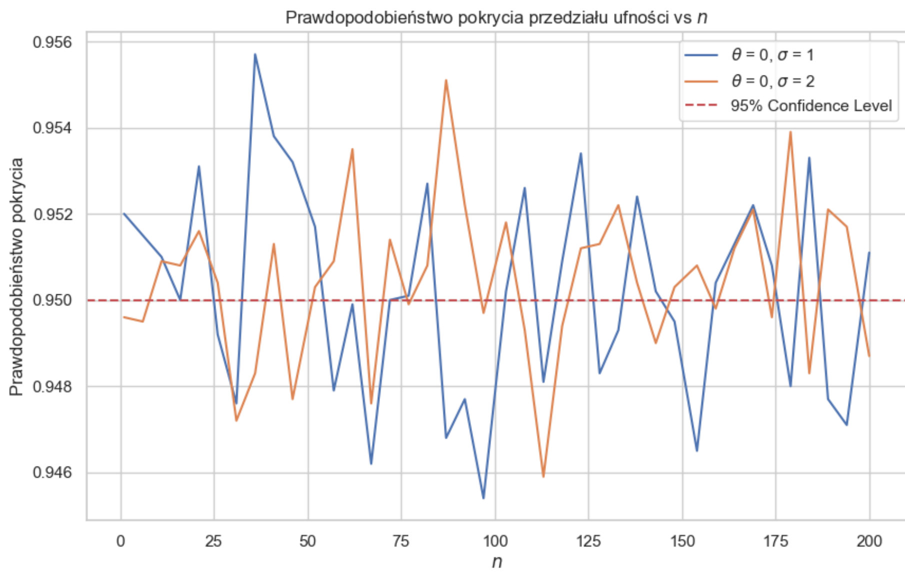
- Estymacja przedziałowa średniej jest odporna na naruszenie założenia o normalności rozkładu. Mimo że generowaliśmy dane z rozkładów innych niż normalny, prawdopodobieństwo pokrycia dla średniej i tak jest blisko 0.95 (dla rozkładu normalnego oczywiście też). Jest to zgodne z tym, czego spodziewamy się na podstawie CTG.
- To, czy znamy wariancję czy nie za bardzo nie wpływa na obserwowane wyniki, ponieważ nawet dla $n = 20$ próba jest już dostatecznie duża.
- Estymacja przedziałowa wariancji nie jest odporna na odstępstwa od normalności, ponieważ dla rozkładów Laplace'a, Logistycznego i t-Studenta mamy większe ogony. Z tego powodu powstają nam outliery, które wpływają znacząco na wyliczanie estymatora wariancji, co wpływa na oszacowanie prawdopodobieństwa pokrycia parametru przez przedział ufności.

## Zadanie 2

**a)** $\beta(\theta, 1)$



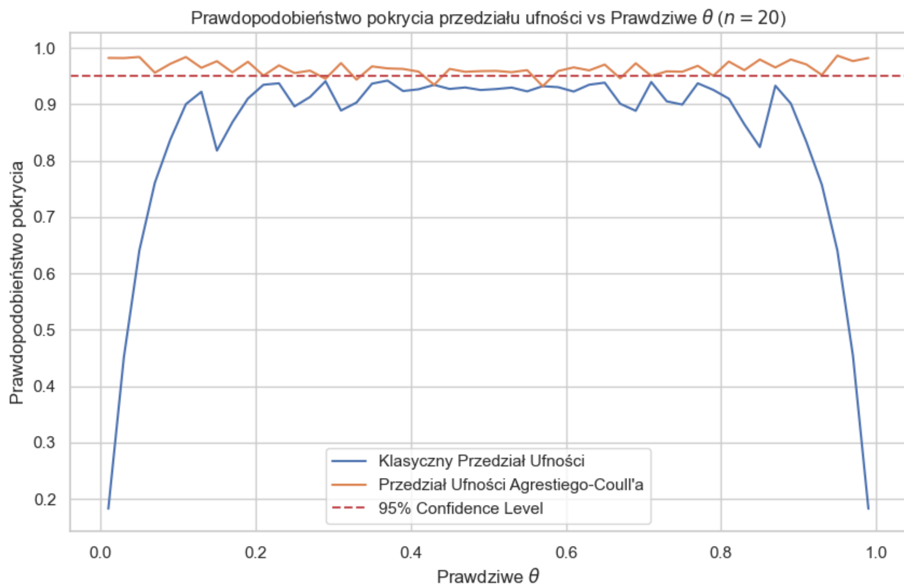

**b)** $Lognorm(\theta, \sigma)$



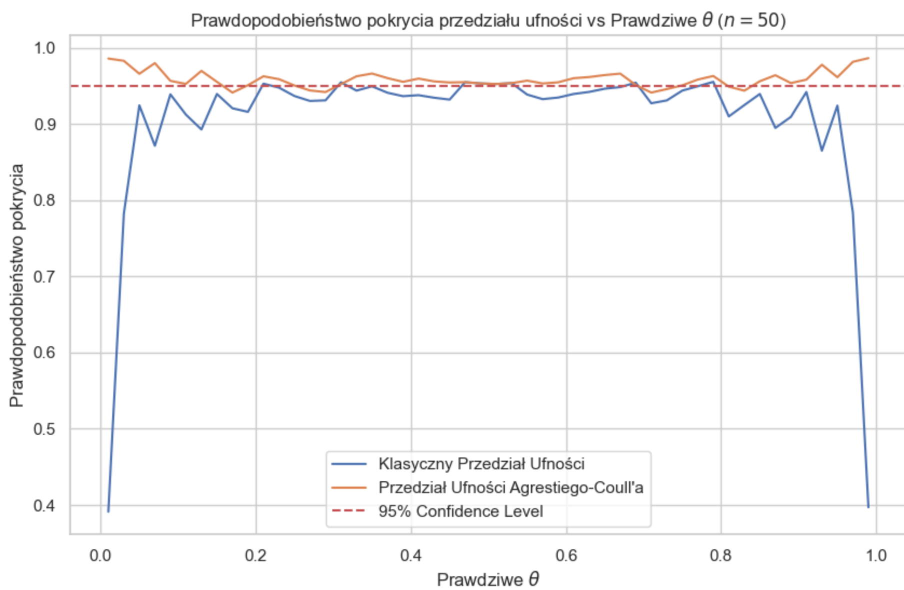

**Komentarz:**

- Estymatory MLE dla obu rozkładów posiadają własność asymptotycznej normalności. Dla dużych rozmiarów próby $n$, prawdopodobieństwo pokrycia nieznanego parametru $\theta$ przez skonstruowany przedział ufności oscyluje coraz dokładniej wokół oczekiwanego poziomu ufności 0.95.
- Zmiana parametrów rozkładu w obu przypadkach nie wpływa na tę własność.

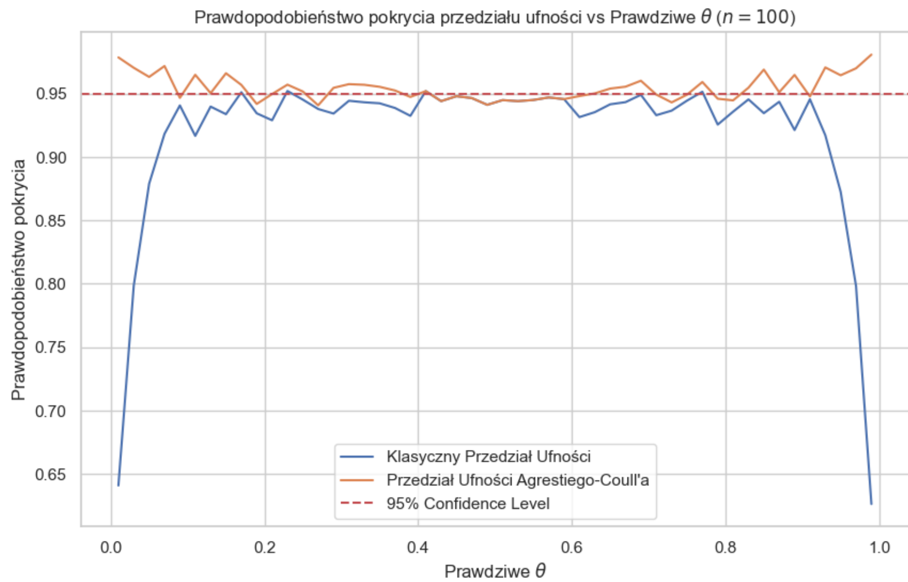
## Zadanie 3



Prawdopodobieństwo pokrycia przedziału ufności vs Prawdziwe $\theta$ ($n = 20$)
Prawdopodobieństwo pokrycia
Prawdziwe $\theta$
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Klasyczny Przedział Ufności
Przedział Ufności Agrestiego-Coull'a
95% Confidence Level

Prawdopodobieństwo pokrycia przedziału ufności vs Prawdziwe $\theta$ ($n = 50$)
Prawdopodobieństwo pokrycia
Prawdziwe $\theta$
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Klasyczny Przedział Ufności
Przedział Ufności Agrestiego-Coull'a
95% Confidence Level

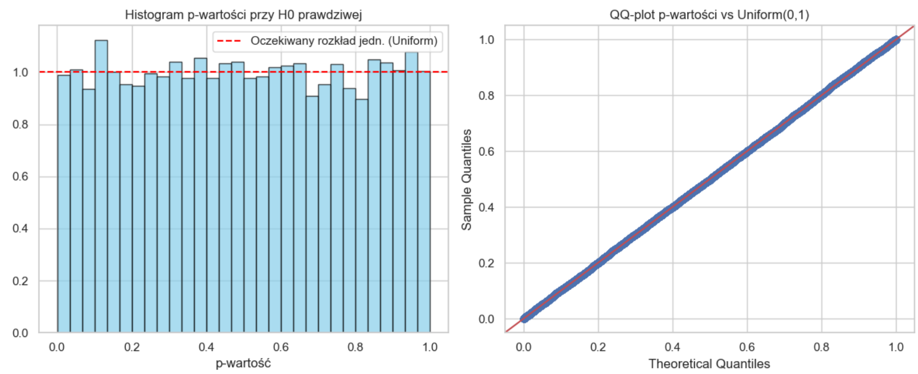



**Komentarz:**

- Klasyczny przedział ufności nie radzi sobie dla prawdziwej wartości $\theta$ blisko 0 lub blisko 1. W takich wypadkach próba ma często same porażki lub same sukcesy, co powoduje, że przedział ufności jest bardzo mały. W takim wypadku prawdziwe teta często leży poza przedziałem.
- Metoda Agrestiego-Coulla dodaje sztucznie dwa sukcesy i dwie porażki. Ma to małe znaczenie w przypadku, gdzie $\theta$ nie osiąga skrajnych wartości, notomiast na końcach wykresu widać znaczną poprawę. Wynika to z faktu, że mamy mniej zdegenerowanych przypadków, gdzie otrzymujemy praktycznie same sukcesy lub praktycznie same porażki.
- Wraz ze wzrostem rozmiaru próby $n$ różnica między dwoma metodami jest coraz mniejsza, co jest spodziewane.

## Zadanie 4

**a)** Przy pojedyńczej próbie uzyskałem p-wartość = 0.7288, a zatem mamy brak podstaw do odrzucenia $H_0$.



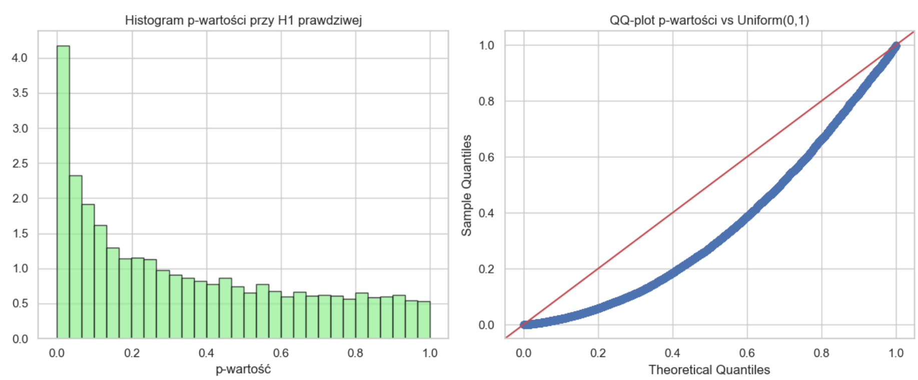

**b)**

P-wartości są rozłożone jednostajnie. Jeśli $H_0$ jest prawdziwa, to każda p-wartość jest tak samo prawdopodobna.

Obliczenia dla 10000 symulacji:

- Empiryczny błąd I rodzaju: 0.0491
- 95% Przedział ufności: [0.0449, 0.0533]

**c)** Przy pojedyńczej próbie uzyskałem p-wartość = 0.0283, a zatem odrzucamy H0

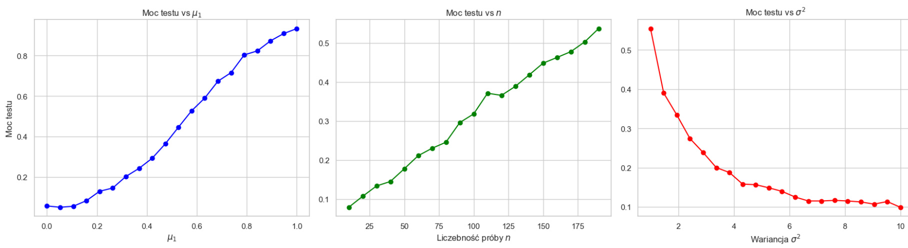



**d)**

Histogram jest mocno przechylony w lewą stronę, co oznacza, że nasz test często wykrywa odstępstwo od 0.

Obliczenia dla 10000 symulacji:

- Empiryczna moc testu: 0.1812
- 95% Przedział ufności dla mocy: [0.1737, 0.1887]




**e)**

- Moc vs $\mu_1$ - Im bardziej $\mu_1$ różni się od zera, tym łatwiej wykryć to w teście, dlatego moc rośnie.
- Moc vs $n$ - Im więcej danych, tym precyzyjniej estymujemy, więc łatwiej odrzucić fałszywą hipotezę zerową, dlatego moc rośnie.
- Moc vs $\sigma^2$ - Im większy szum danych, tym trudniej zauważyć przesunięcie średniej o 0.3, dlatego moc spada.