

Statystyka z modelami liniowymi

Lista 3 - Przedziały ufności. Testowanie hipotez

Zadanie 1: Wygeneruj n ($n = 50$) obserwacji z rozkładu

(1) $N(\theta, \sigma^2)$. Rozważ przypadki:

(a) $\theta = 0, \sigma = 1$;

(b) $\theta = 0, \sigma = 2$;

(2) $\text{Logist}(\theta, \sigma)$. Rozważ przypadki:

(a) $\theta = 0, \sigma = 1$;

(b) $\theta = 0, \sigma = 2$;

(3) $t(r)$. Rozważ przypadki:

(a) $r = 3$;

(b) $r = 10$;

(c) $r = 20$;

(4) $\text{Laplace}(\theta, \sigma)$. Rozważ przypadki:

(a) $\theta = 0, \sigma = 1$;

(b) $\theta = 0, \sigma = 1/3$.

Na tej podstawie wyznacz przedział ufności na poziomie ufności 0.95

- dla wartości oczekiwanej (wariancja jest znana);
- dla wartości oczekiwanej (wariancja jest nieznana);
- dla wariancji.

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Oszacuj prawdopodobieństwo pokrycia nieznanego parametru przez przedział ufności. Przedyskutuj uzyskane wyniki.

Powtórz eksperyment dla $n = 20$ i $n = 100$. Porównaj i przedyskutuj uzyskane wyniki w zależności od n .

Zadanie 2: Wygeneruj n obserwacji z rozkładu

a) $\beta(\theta, 1)$. Rozważ przypadki $\theta \in \{0.5; 5\}$.

b) $\text{Lognorm}(\theta, \sigma)$. Rozważ przypadki $(\theta, \sigma) \in \{(0; 1); (0; 2)\}$.

Wyznacz $\hat{\theta}_{\text{MLE}}$ wartość estymatora największej wiarygodności oraz asymptotyczny przedział ufności na poziomie ufności 0.95

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Sprawdź jak prawdopodobieństwo pokrycia nieznanego parametru przez przedział ufności zależy od n .

Zadanie 3: Wygeneruj n ($n = 50$) obserwacji z rozkładu $B(1, \theta)$. Na tej podstawie na poziomie ufności 0.95 wyznacz

- a) klasyczny przedział ufności;
- b) przedział ufności Agrestiego-Couli.

Doświadczenie powtórz 10000 razy. Sprawdź jak prawdopodobieństwo pokrycia nieznanego parametru przez przedział ufności zależy od θ .

Powtórz eksperyment dla $n = 20$ i $n = 100$. Porównaj i przedyskutuj uzyskane wyniki w zależności od n .

Zadanie 4: Dla próby z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$ testujemy hipotezę

$$\mathbf{H}_0 : \mu = 0 \quad vs. \quad \mathbf{H}_1 : \mu = \mu_1$$

- a) Wygeneruj n ($n = 50$) obserwacji z rozkładu $N(0, 4)$. Na tej podstawie oblicz p-wartość dla testu Studenta dla sprawdź, jaka hipoteza jest prawdziwa na poziomie istotności 0.05.
- b) Doświadczenie z punktu a) powtórz 10000 razy. Sprawdź, jaki rozkład ma p-wartość na podstawie histogramu i wykresu kwantylowo-kwantylowego. Wyznacz przedział ufności dla prawdopodobieństwa błędu I rodzaju.
- c) Wygeneruj n ($n = 50$) obserwacji z rozkładu $N(0.3, 4)$, na podstawie tej próby oblicz p-wartość i sprawdź, jaka hipoteza jest prawdziwa na poziomie istotności 0.05.
- d) Doświadczenie z punktu c) powtórz 10000 razy. Sprawdź, jaki rozkład ma p-wartość na podstawie histogramu i wykresu kwantylowo-kwantylowego. Wyznacz przedział ufności dla mocy testu.
- e) Pokaż na wykresach, jak moc testu zależy od μ_1 przy fiksovanych n, σ^2 , od n przy fiksovanych μ_1, σ^2 , i od σ^2 przy fiksovanych μ_1, n .