Mathematik für Agrarwissenschaften

Der kleine Leitfaden

Prof. Dr. Jochen Kruppa-Scheetz

2024-06-25

Inhaltsverzeichnis

Willkommen

> *"Mir wird applaudiert, weil mich jeder versteht, und Ihnen, weil Sie niemand versteht." — Charlie Chaplin zu Albert Einstein*

Auf den folgenden Seiten wirst du nochmal die Grundlagen der Mathematik wiederholen und lernen. Wir lagern hier die Inhalte die sehr mathematisch sind von den angewandten, statistischen Themen aus. Das heißt, du findest hier sehr viel Mathematik und auch Rechenbeispiele. Es wird aber R Code geben - siehe den R Code als den Taschenrechnercode. Das hat den einfachen Grund, das wir eben dann doch mal die Grundlagen in der Mathematik wiederholen müssen. Es kann aber auch sein, dass du gar nicht so viel Mathematik später brauchst - oder wiederkommst, weil du nochmal nachschauen willst, wie du eine Teilstückfläche berechnest. Wir auch immer, hier findest du die Mathematikteile aus meinen Vorlesungen.

Im Weiteren findest du meine gesammelten Klausurfragen für alle Module auf GitHub unter folgendem Link: gesammelten Klausurfragen auf GitHub oder auf ILIAS im entsprechenden Modul "Mathematik und Statistik". Die Klausurfragen zu den einzelnen Vorlesungen innerhalb eines Moduls werden in den entsprechenden Übungen behandelt. Zusätzlich gibt es ein Archiv, das alle bisherigen Klausuren über alle Studiengänge hinweg enthält. Dieses Archiv findest du hier: Archive aller bisherigen Klausuren. In der

Playlist der Fragen & Antworten findest du nochmal alle Antworten zu den Klausurfragen *kurz* besprochen.

https://youtu.be/m2ZatnQUY0A

Kontakt

Noch Fragen? Wie erreichst du mich? Am einfachsten über die gute, alte E-Mail. Bitte beachte, dass gerade kurz vor den Prüfungen ich mehr E-Mails kriege. Leider kann es dann einen Tick dauern. Einfach an j.kruppa@hs-osnabrueck.de schreiben. Du findest hier auch eine kurze Formulierungshilfe.

> E-Mailvorlage mit beispielhafter Anrede
>
> Hallo Herr Kruppa,
> … ich belege gerade Ihr Modul `Modulname` und hätte eine Bitte/Frage/Anregung…
> … ich benötige Hilfe bei der Planung/Auswertung meiner Bachelorarbeit…
> Mit freundlichen Grüßen
> M. Muster

Teil I.

Von Maßzahlen, Flächen und Volumen

Letzte Änderung am 28. September 2023 um 16:30:14

In dem folgenden Kapitel zu den Maßzahlen von Einheiten sowie der Fläche und dem Volumen wollen wir uns einmal mit den Grundlagen der Berechungen beschäftigen. Wir brauchen diese Werkzeuge um zu bestimmen, wie groß ein Teilstück sein soll oder aber wenn wir wissen wollen, wie viel Torf wir bestellen müssen.

Im ersten Abschnitt schauen wir uns einmal Flächenmaße und Volumenmaße an. Wie sind die Abkürzungen für die entsprechenden Maßzahlen und wie lauten die Abkürzungen für sehr große oder sehr kleine Zahlen.

Dann schauen wir noch einmal auf die Flächen und Umfänge von gängigen geometrischen Objekten. Welche Eigenschaften hat das Quadrat, das Rechteck und der Kreis? Wir merken uns hier natürlich nur die wichtigsten Formeln, den Rest kannst du dann immer mal wieder nachschlagen.

Am Ende wollen wir dann die Flächen noch ins Volumen bringen. Hier rechnen wir dann das Volumne eines Würfels oder eines Quaders aus. Häufig brauchen wir diese Informationen, wenn wir berechnen wollen, wie viel Torf wir brauchen oder wie viel Volumen an Futter verbraucht wird bzw. eingekauft werden muss.

1. Maßeinheiten, Flächenmaße und Volumenmaße

Letzte Änderung am 24. June 2024 um 17:28:49

1.1. Maßeinheiten

Wozu brauchen wir Maßeinheiten? Zum einen wollen wir nicht immer so große Zahlen schreiben oder aber sehr kleine Zahlen. Die ganzen Nullen machen dann doch den Text sehr unübersichtlich. Aus diesem Grund gibt es mehrere Arten der Kurzschreibweise um Zahlen in einer kürzeren Form darzustellen. In der folgenden Tabelle 1.1 sind einem die sehr großen Zahlen bis 10^{12} einmal dargestellt.

Tabelle 1.1.: Große Zahlen mit vielen Nullen mit den jeweiligen Abkürzungen und Schreibweisen.

Buchstabe	Präfix	Wissenschaftlich	Wissenschaftlich in R	Zahl
T	Tera-	10^{12}	1e+12	1 000 000 000 000
G	Giga-	10^{9}	1e+9	1 000 000 000
M	Mega-	10^{6}	1e+6	1 000 000
k	Kilo-	10^{3}	1e+3	1 000
h	Hekto-	10^{2}	1e+2	100

Nachdem wir einmal die ganz großen Zahlen dargestellt haben, wollen wir uns in der Tabelle 1.2 nochmal die ganz kleinen Zahlen einmal anschauen. Besonders die schreibweise mit dem `e` werden wir dann wiederholt in R sehen.

Tabelle 1.2.: Sehr kleine Zahlen mit vielen Nullen mit den jeweiligen Abkürzungen und Schreibweisen.

Buchstabe	Präfix	Wissenschaftlich	Wissenschaftlich in R	Zahl
d	Dezi-	10^{-1}	1e-1	0.1
c	Zenti-	10^{-2}	1e-2	0.01
m	Milli-	10^{-3}	1e-3	0.001
μ	Mikro-	10^{-6}	1e-6	0.000 001
n	Nano-	10^{-9}	1e-9	0.000 000 001
p	Pico-	10^{-12}	1e-12	0.000 000 000 001

Wieviele Nullen sollen es sein?

Du kannst dir merken, dass bei positiven Hochzahlen, die Hochzahl die Anzahl an Nullen angibt. So ist eben 1e+2 eine 1 mit zwei Nullen, also Hundert. Eine 10^3 ist eine Eins mit drei Nullen, also Tausend.
Bei den negativen Hochzahlen, siehst du immer eine Null weniger, als die Hochzahl angibt. So ist 1e-2 eben 0.01 und damit nur eine Null vor der Eins. Ebenso ist dann 10^{-4} dann 0.0001 also eine Eins mit drei Nullen.

Wenn dir unklar ist, wie denn eine Zahl mit dem `e` aussehen würde, kannst du die Funktion `format()` mit der Option `scientific = FALSE` nutzen. Damit schaltest du die exponentielle Schreibweise in R aus.

```r
format(1.8e+7, scientific = FALSE)
```

```
[1] "18000000"
```

```r
format(1.2e-4, scientific = FALSE)
```

```
[1] "0.00012"
```

Viele Taschenrechner haben auch die Möglichkeit das `e` umzurechnen. Meistens sind wir dann aber in R und da können wir dann die obige Funktion schnell nutzen.

1.2. Flächenmaße

In der Tabelle 1.3 sehen wir nochmal die Umrechnung von gängigen Flächenmaßen. Dem einen oder anderen mag der Hektar *ha* geläufig sein, für alle anderen hier nochmal die Flächen zum nachschlagen. Das Ar *ar* ist in unterschiedlicher Verwendung, aber hier mit zu Vollständigkeit aufgeführt.

Tabelle 1.3.: Umrechnung von gängigen Flächenmaßen.

km^2	ha	ar	m^2
1	100	10 000	1 000 000
	1	100	10 000
		1	100

1.3. Volumenmaße

Die Tabelle 1.4 zeigt die Umrechnungen von Volumenmaßen. Häufig benötigen wir verschiedene Volumen bei der Abfüllung von Dünger oder aber auch anderer Flüssigkeiten. Die Bewässerung und auch die Kühlung wird über Volumen geregelt. Auch ist es wichtig zu wisen, wie denn die Idee des *Liters* mit den m^3 zusammenhängt.

Tabelle 1.4.: Umrechnung von gängigen Volumenmaßen.

Liter	hl	l	dl	cl	ml
$1m^3$	10	1 000	10 000	100 000	1 000 000
	1	100	1 000	10 000	100 000
		10	100	1 000	10 000
$1dm^3$		1	10	100	1 000
			1	10	100
				1	10

Liter	hl	l	dl	cl	ml
$1cm^3$					1
		$1000cm^3$	$100cm^3$	$10cm^3$	$1cm^3$

1.4. Prozent, Promille und ppm

Abschließend schauen wir uns in der Tabelle 1.5 nochmal die Umrechnungen von Prozent und Promille an. Das Prinzip nutzen wir dann häufig zur Abschätzung von anderen Flächen oder Volumen, wenn wir nicht die exakte Änderung kennen sondern eben nur die Prozentuale.

Tabelle 1.5.: Umrechnung von Prozenten und Anteilen.

			Ein Zuckerwürfel in
1 Prozent ist 1 Teil von hundert Teilen	10 Gramm pro Kilogramm	$10g/kg$	0.27 Litern, ca. 2 Tassen
1 Promille ist 1 Teil von Tausend Teilen	1 Gramm pro Kilogramm	$1g/kg$	2.7 Litern, ca. 3.5 Flaschen Wein
1 ppm (part per million) ist 1 Teil von 1 Million Teilen	1 Milligramm pro Kilogramm	$0.001g/kg$	2 700 Litern, ca. einem Tanklaster

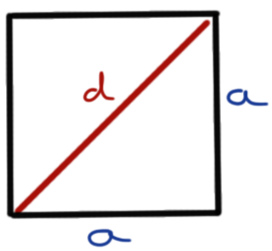
2. Flächenberechung

Letzte Änderung am 01. November 2023 um 11:14:57

Im Folgenden wollen wir einmal die Flächen (F oder auch A) und die Umfänge U von geometrischen Objekten bestimmen. Wir gehen hierfür die gängigsten geometrischen Formen einmal durch. Du musst dir dann raussuchen, was zu deiner Fragestellung dann am besten passt.

2.1. Quadrat

Im Folgenden sehen wir die Abbildung eines Quadrats.



Wir berechnen die Fläche F eines Quadrats mir folgender Formel.

$$F = a \cdot a = a^2$$

Den Umfang eines Quadrats U können wir dann wie folgt berechnen.

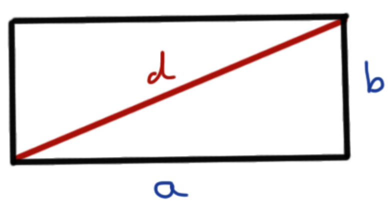
$$U = 4 \cdot a$$

Die Diagonale d eines Quadrates ergibt sich dann wie folgt.

$$d = a\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot a^2}$$

2.2. Rechteck

Das Rechteck ist ja ein Quadrat wo jemand gegengetreten hat. Eigentlich tritt ja das Quadrat nie so in der reinen Form auf, eigentlich haben wir immer Rechtecke vorliegen. Selten sind Tische oder Stallbuchten quadratisch.



Wir berechnen die Fläche F eines Rechtecks mir folgender Formel.

$$F = a \cdot b$$

Den Umfang eines Rechtecks U können wir dann wie folgt berechnen.

$$U = 2 \cdot a + 2 \cdot b = a(a + b)$$

Die Diagonale d eines Rechtecks ergibt sich dann wie folgt.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

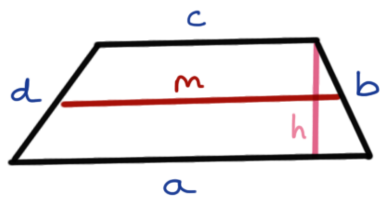
Beachte auch folgenden Zusammenhang für das Rechteck:

$$a = \frac{F}{b} = \frac{U - 2b}{2}$$

$$b = \frac{F}{a} = \frac{U - 2a}{2}$$

2.3. Trapez

Das Trapez ist ein Rechteck mit definitiv unterschiedlich langen Zeiten bzw. so unterschiedlich langen Seiten, dass wir nicht mehr von einem Rechteck ausgehen können. Viele Felder folgen einem Trapez oder einem Rechteck.



Wir berechnen die Fläche F eines Trapez mir folgender Formel.

Beachte auch folgenden Zusammenhang für das Trapez:

$$a = \frac{2F}{h} - b$$

$$b = \frac{2F}{h} - a$$

$$c = U - (a + b + d)$$

$$d = U - (a + b + c)$$

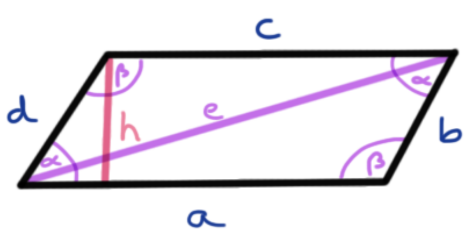
$$F = m \cdot h = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Den Umfang eines Trapez U können wir dann wie folgt berechnen.

$$U = a + b + c + d$$

2.4. Parallelogramm

Ein Parallelogramm ist ein gekipptes Rechteck. Auch hier haben wir die Anwendung eher auf landwirtschaftlichen Versuchsfeldern.



Wir berechnen die Fläche F eines Parallelogramms mir folgender Formel.

Beachte auch folgenden Zusammenhang für das Parallelogramm:

$$a = \frac{2F}{h}$$

$$b = \frac{U - 2a}{2}$$

$$F = a \cdot h$$

Den Umfang eines Trapez U können wir dann wie folgt berechnen.

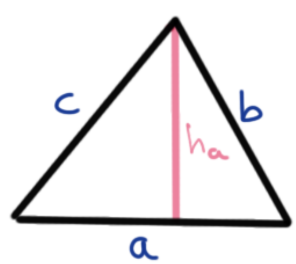
$$U = 2(a + b)$$

Die Diagonale e ist durch folgende Formel gegeben. Wir benötigen die Strecke e bei der Berechnung eines Kräfteparallelogramms.

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\beta)}$$
$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\alpha)}$$

2.5. Dreieck

Auch hier kommt es dann auf die Anwendung an. Teilendstücke können einem Dreick folgen. Sonst kommt das Dreick dann doch eher seltener vor.



Wir berechnen die Fläche F eines Dreiecks mir folgender Formel.

$$F = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

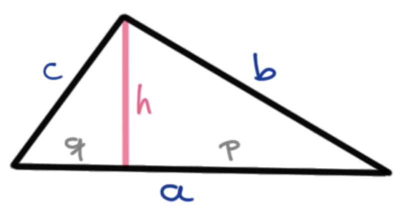
Den Umfang eines Dreiecks U können wir dann wie folgt berechnen.

$$U = a + b + c$$

Die Höhe des Dreiecks an der Seite h_a lässt sich dann wie folgt ausrechnen.

$$h_a = \frac{2 \cdot F}{a}$$

Wenn wir Glück haben, dann haben wir ein Dreieck mit einem rechten Winkel vorliegen, dann rechnen sich einige der Seiten etwas anders.



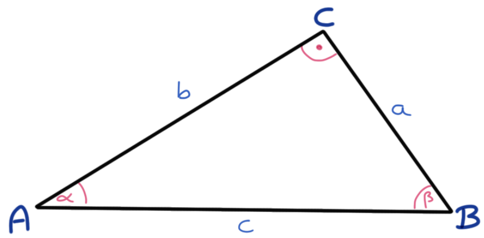
Bei einem rechtwinkligen Dreieck gilt dann folgender sehr bekannter Zusammenhang.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Daraus ergeben sich dann auch folgende Umformungen.

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - b^2 \\ b^2 &= c^2 - a^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 \\ h^2 &= b^2 - q^2 \\ h^2 &= a^2 - p^2 \end{aligned}$$

Im Weiteren wollen wir uns nochmal die Winkel ein einem rechtwinkligen Dreieck anschauen und wie dort die Seitenlängen mit den Winkeln zusammenhängen.



In unserem Fall liegt der rechte Winkel bei der Ecke C, somit berechnet sich die gegenüberliegende Seite c nach folgenden Formeln. Erst einmal mit der Betrachtung des Winkels α.

$$c = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\cos(\alpha)}$$

Wir immer gibt es auch auf Wikipedia eine gute Übersicht über das rechtwinklige Dreieck.

Sowie im Weiteren nach der Formel, wenn wir den Winkel β betrachten.

$$c = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\cos(\beta)}$$

Wenn wir uns die Katheten a und b berechnen wollen, dann gelten die folgenden Formeln für die Kathete a.

$$a = c \cdot \sin(\alpha) = c \cdot \cos(\beta), a = b \cdot \tan(\alpha) = b \cdot \cot(\beta)$$

Die Kathete b können wir dann ebenfalls berechnen.

$$b = c \cdot \cos(\alpha) = c \cdot \sin(\beta), b = a \cdot \cot(\alpha) = a \cdot \tan(\beta)$$

Für ein beliebiges Dreieck mit unterschiedlichen Winkeln gibt es eine Menge an Berechnungsmöglichkeiten. Hier bietet dann wieder die Wikipedia eine Übersicht über alle Kongruenzsätze eines Dreiecks. Ich werde hier nicht nochmal die Wikipedia kopieren sondern dann in den entsprechenden Inhalten auf die Sätze eingehen.

Einmal tan, sin und cos für den Winkel α

Hier nochmal in einem rechtwinkeligen Dreieck die Winkelzusammenhänge für den Winkel α. Du musst dann für den Winkel β eben die Seiten entsprechend der Katheten und Hypotenuse anpassen.

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$$

2.6. Kreis

Zum Abschlus schauen wir uns nochmal den Kreis an. Hier kommt natürlich dann die Kreiszahl π mit 3.14 zum Einsatz.

Wir berechnen die Fläche F eines Kreises mir folgender Formel.

$$F = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

Den Umfang eines Kreises U können wir dann wie folgt berechnen.

$$U = 2r \cdot \pi = \frac{d \cdot \pi}{4 \cdot F}$$

Die Diagonale d eines Kreises ergibt sich dann wie folgt.

$$d = 2r$$

Und der Radius r hängt dann wie folgt um Umfang U ab.

$$r = \frac{U}{2 \cdot \pi}$$

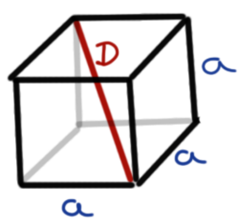
3. Volumenberechung

Letzte Änderung am 28. September 2023 um 16:30:14

In diesem Abschnitt wollen wir einmal das Volumen V, sowie die Oberfläche O und die Grundfläche G von verschiedenen geometrischen Objekten berechnen. Wie so oft musst du dir überlegen, was bei deinem Objekt jetzt die Grundfläche ist. Aber das ist dann meist im konkreten Fall sehr klar.

3.1. Würfel

Im Folgenden sehen wir einmal einen Würfel abgebildet.



Das Volumen V eines Würfels berechnet sich dann wie folgt.

$$V = a^3$$

Die Oberfläche O eines Würfels wird dann wie folgt bestimmt.

$$O = 6 \cdot a^2$$

Die Grundfläche G berechnet sich dann nach der folgenden Formel.

$$G = a^2$$

Wenn wir an der Diagonalen D interessiert sind, nutzen wir dann folgende Formel.

$$D = a\sqrt{3}$$

3.2. Kugel

Das Volumen V einer Kugel berechnet sich dann wie folgt.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Die Oberfläche O einer Kugel wird dann wie folgt bestimmt.

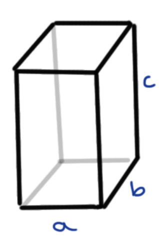
$$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Der Umfang U ergibt sich dann durch folgende Formel

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

3.3. Rechteckige Säule

Die rechteckige Säule entspricht dem Quadrat als Grundfläche. Meistens nutzen wir die Säule für die Berechnung von Luftvolumen. Wenn wir an dem Volumen eines Raumes interssiert sind, dann bietet sich die rechteckige Säule an.



Das Volumen V einer rechteckigen Säule berechnet sich dann wie folgt.

$$V = G \cdot h = a \cdot b \cdot c$$

Die Oberfläche O einer rechteckigen Säule wird dann wie folgt bestimmt.

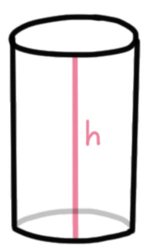
$$O = 2ab + 2ac + 2bc$$

Die Grundfläche G berechnet sich dann nach der folgenden Formel.

$$G = a \cdot b = \frac{V}{h}$$

3.4. Zylinder

Der Zylinder bietet sich an für die Berechnung von Inhalten, da meistens dann die Töpfe oder die Silos einem Zylinder folgen. Wir haben also Töpfe als ganz kleine Zylinder oder eben Silos als riesige Zylinder.



Das Volumen V eines Zylinders berechnet sich dann wie folgt.

$$V = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Beachte auch folgenden Zusammenhang für den Zylinder:

$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$$

Die Oberfläche O eines Zylinders wird dann wie folgt bestimmt.

$$O = 2 \cdot G + 2r \cdot \pi \cdot h$$

Die Grundfläche G berechnet sich dann nach der folgenden Formel.

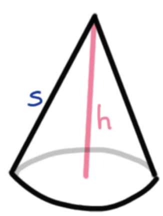
$$G = r^2 \cdot \pi$$

Die Höhe h des Zylinders können wir dann wie folgt bestimmen.

$$h = \frac{V}{G} = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$$

3.5. Kegel

Der Kegel ist ein Kreis mit einem Hut auf und kann deshalb eventuell für die Berechnungen von Volumen unter einem Netz genutzt werden. In der Praxis ist die Anwendung eher von spezieller Natur.



Das Volumen V eines Kegels berechnet sich dann wie folgt.

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot r^2 \cdot \pi$$

Die Oberfläche O eines Kegels wird dann wie folgt bestimmt.

$$O = r^2 \cdot \pi \cdot s$$

Die Grundfläche G berechnet sich dann nach der folgenden Formel.

Beachte auch folgenden Zusammenhang für den Kegel:

$$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi \cdot h}}$$

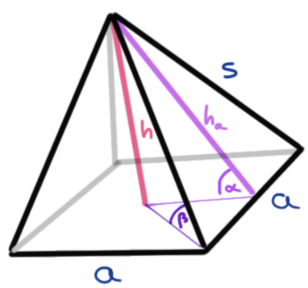
$$h = \sqrt{s^2 - r^2}$$

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$G = r^2 \cdot \pi$$

3.6. Pyramide

Die Pyramide ist im Prinzip ein Kegel auf einer quadratischen Grundfläche. So häufig nutzen wir die Pyramide nicht in der praktischen Anwendung, aber wir können an der Pyramide gut rumrechnen und uns nochmal mit den Winkelsätzen beschäftigen.



Das Volumen V einer Pyramide berechnet sich dann wie folgt.

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot a^2$$

Die Mantelfläche M einer Pyramide errechnet sich dann folgendermaßen.

$$M = 2 \cdot a \cdot h_a$$

Die Oberfläche O einer Pyramide wird dann wie folgt bestimmt.

$$O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$$

Die Grundfläche G berechnet sich dann nach der folgenden Formel.

$$G = a^2$$

Die Höhe h einer Pyramide lässt sich wie folgt berechnen.

$$h = \sqrt{h_a^2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Oder aber über die Neigung der Seitenfläche α durch Umstellung der Formel nach h.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{a/2}\right)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{a/2}$$

$$h = \tan(\alpha) \cdot a/2$$

Die Diagonale durch die Mitte der Grundfläche können wir wie folgt berechnen.

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} \cdot a$$

Dann ergibt sich der Winkel β am der Seitenspitze der Pyramide wie folgt.

$$\beta = \arctan\left(\frac{h}{d/2}\right)$$

Teil II.

Von Vektoren und Matrizen

Letzte Änderung am 28. September 2023 um 16:30:14

In dem folgenden Kapitel wollen wir uns einmal mit Berechnungen mit Vektoren in Kapitel 4 beschäftigen. Das Kapitel ist eher kurz und dient nur der Erinnerung, was sind eigentlich Vektoren. Wir nutzen den Begriff häufig in der R Programmierung und wir wollen hier nochmal auf ein paar mathematische Eigenschaften eingehen.

Wichtiger ist in dem Sinne die Berechnungen mit Matrizen in Kapitel 5. Wir schauen uns hier nochmal die gängigen Rechenoperationen mit Matrizen an. Wir erschlagen aber nicht alles sondern schauen uns nur ausgewählte Aspekte einmal an. Wir brauchen Teile von den Berechnungen mit Matrizen später in der multiplen linearen Regression in der Statistik.

4. Berechnungen mit Vektoren

Letzte Änderung am 28. September 2023 um 16:30:14

In diesem Kapitel wollen wir uns kurz mit Vektoren beschäftigen. Wir nutzen hier den Begriff Vektor als eine Ansammlung von Zahlen, die wir in einem Vektor ablegen. Wenn wir mehrere Vektoren zusammenkleben, dann erhalten wir eine Matrix.

4.1. Grundlagen Vektoren

Im Folgenden sehen wir einmal den Vektor A der drei Zahlen enthält. Wenn wir einen Vektor horizontal schreiben wollen, dann setzen wir immer noch ein "Hoch T" für transponiert an die Klammer am Ende des Vektors. Eigentlich wird ein Vektor nämlich vertikal dargestellt.

$$A = (3, 5, 1)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es gibt dann natürlich auch noch besondere Vektoren. Vektoren der Länge 1 heißen Einheitsvektoren oder normierte Vektoren. Hat ein Vektor die Länge 0, so handelt es sich um den Nullvektor. Beide Arten von Vektoren kommen in der Anwendung nicht vor. Wenn wir nichts vorliegen haben, dann brauchen wir auch keinen Vektor. Und eine einzelne Beobachtung bruachen wir nicht in einem Vektor speichern.

Wenn wir zwei Vektoren addieren wollen, dann addieren wir jedes paarweise Element in den beiden Vektoren.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

Schauen wir uns den Zusammenhang einmal als Zahlenbeispiel an.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+8 \\ -1+1 \\ 5+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir können die Berechnung auch einfach in R durchführen. Da wir in R nicht vertikal schreiben können sind alle Vektoren immer horizontal. Wir können über die Funktion `t()` einen Vektor transponieren, wenn wir das wollen würden.

```
A <- c(2, -1, 5)
B <- c(8, 1, -3)

A + B
```

```
[1] 10  0  2
```

Wenn wir einen Vektor mit einer Zahl multiplizieren, dann multiplizieren wir jeden Wert des Vektors mit der Zahl.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Auch hier einmal die Anwendung in R.

```
A <- c(1, 3, 4)

2 * A
```

```
[1] 2 6 8
```

In R haben wir noch die Möglichkeit einen Vektor mit Namen zu versehen. Diese Möglichkeit brauchst du ab und an mal. Es ist ganz nett sich zu vergewissern, was die Zahl in einem Vektor eigentlich aussagen soll.

```r
A <- c(2, -1, 5)
names(A) <- c("A", "B", "C")

A
```

```
 A  B  C 
 2 -1  5 
```

5. Berechnungen mit Matrizen

Letzte Änderung am 28. September 2023 um 16:30:14

5.1. Grundlagen Matrizen

Wir nutzen Matrizen vor allem wenn es um zwei Dinge in der Statistik geht.

Du findest dann hinter diesem Link auch Mathehilfe zu Vektor, Matrizen und Co.. Du kannst auf der Seite mal stöbern, ob du da was findest was dir hilft.

1) Korrelationsmtarix oder die verwandte Varianz/Covarianzmatrix. In beiden steht die Streuung der Variablen in den Daten untereinander.
2) Modellmatrix, wenn wir ein Modell aufbauen und verstehen wollen wie sich die Variablen in x auf das Outcome y auswirken.

Allgemein gesprochen bestehen Matrizen aus m Zeilen und n Spalten, weshalb sie auch (m,n)-Matrizen genannt werden. Die Dimension einer einzelnen Matrix mit m Zeilen und n Spalten ist $m \times n$. Hier musst du nochmal aufpassen, das n steht hier nicht für die Anzahl an Beobachtungen. Ja, es kann übereinstimmen, aber hier ist es einfach nur die Zahl für die Dimension der Matrix.

Wichtig ist, dass wir uns hier auf Teilaspekte der Matrixrechnung konzentrieren. Es gibt natürlich noch viel mehr, aber hier schauen wir uns das Basiswissen an, was du dann in den Statistikteilen benötigst oder aber als Grundlage für andere Fächer.

Wir schreiben also für die Matrix A die Matrix wie folgt auf.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Neben der Darstellung mit den runden Klammern, gibt es auch noch die Darstellung mit den eckigen Klammern. Beide Arten sind im Prinzip nutzbar. Es macht keinen großen Unterschied von der mathematischen Seite. Wir wollen hier aber die runden Klammern nutzen um nicht später uns in R zu verwirren.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Im Prinzip haben wir damit eine Matrix zusammen. Schauen wir noch schnell, wie wir eine Matrix in R aufbauen. Wir nutzen die Option `byrow = TRUE` um der Funktion `matrix()` mitzuteilen, dass wir die Matrix zeilenweise auffüllen wollen. Einzelne Werte in einer Matrix können wir mit den eckigen Klammern `[]` ansprechen. Daher für die Mathematik die runden Klammern.

```r
matrix(c(3, 5, 6,
         3, 8, 1), byrow = TRUE, nrow = 2)
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    5    6
[2,]    3    8    1
```

Schauen wir uns nun verschiedene Matrizen an, die in dem mathematischen Maße besonders sind, dass diese Matrizen einen eigenen Namen erhalten haben.

5.2. Einheitsmatrix

Die Einheitsmatrix A_E besteht nur aus 0'en auf der Nebendiagonalen und 1'sen auf der Diagonalen. Damit ist die Matrix der Standard in vielen statistischen Verfahren, wenn wir keine besondere Varianzstruktur annehmen.

$$A_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3. Diagonalmatrix

Die Diagnoalmatrix A_D besteht nur aus 0'en auf der Nebendiagonalen und beliebigen Werten auf der Diagonalen. Häufig sind die Werte in der Statistik auf der Diagonalen die Varianzen. Wenn die Variablen *nicht* miteinander korrelieren, dann sind die Nebendiagonalen 0.

$$A_D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Eine klassische Varian/Covarianzmatrix würde wie folgt aussehen. Wir bauen uns einen Datensatz mit den Noten von 5 Schülern über die Fächer Statistik, Informatik und Mathematik. Die Funktion `cov()` gibt uns die Varianz/Covarianzmatrix wieder.

```
points_tbl <- tibble(statistic = c(84, 82, 81, 89, 73),
                     programing = c(85, 82, 72, 77, 63),
                     math = c(97, 92, 93, 91, 88))
points_tbl %>% cov()
```

```
           statistic programing  math
statistic      33.70      36.45  9.55
programing     36.45      75.70 23.05
math            9.55      23.05 10.70
```

Wie wir auch schnell überprüfen können, sind auf der Diagonalen die Varianzen von den jeweiligen Fächern zu finden. In der Nebendiagonalen finden sich die Covarianzen. Also die Varianzen für das *gemeinsame* Variieren zwischen den Fächern und den fünf Schülern.

```r
points_tbl %>%
  summarise(var(statistic), var(programing), var(math))
```

```
# A tibble: 1 x 3
  `var(statistic)` `var(programing)` `var(math)`
             <dbl>             <dbl>       <dbl>
1             33.7              75.7        10.7
```

Wir können uns dann auch die passende Korrelationmatrix mit der Funktion `cor()` ausgeben lassen. wir skalieren dadurch die Varianz/Covarianzmatrix auf eine Diagonalen mit nur 1'sen und der Korrelation in den Nebendiagonalen. Die Korrelationsmatrix ist an der Diagonalen gespiegelt.

```r
points_tbl %>% cor()
```

```
           statistic programing      math
statistic  1.0000000  0.7216633 0.5029173
programing 0.7216633  1.0000000 0.8098994
math       0.5029173  0.8098994 1.0000000
```

5.4. Stochastische Matrix

Eine stochastische Matrix A_S enthält nur Zahlen zwischen 0 und 1. Damit besteht eine stochastische Matrix aus Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeiten addieren sich *entweder* über die Zeilen oder über die Spalten zu 1 auf. In selten Fällem kann es auch sein, dass sich die Zeilen und Spalten auf 1 aufaddieren.

$$A_S = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

5.5. Vom linearen Gleichungssystem zur Matrix

Eine Stärke von Matrizen in der Statistik ist, dass wir mit der Matrix auch Gleichungssysteme darstellen können. Damit können wir in der linearen Regression auch komplexere Modelle sauber darstellen. Im Folgenden siehst du drei Gleichungen.

$$\begin{aligned}
-2x_1 + 4x_2 + 1x_3 &= 0\\
1x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 15\\
5x_1 + 3x_2 + 1x_3 &= 88
\end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen können wir auch in drei Matrizen übersetzen. Wir brauchen einmal eine Matrix in der die Zahlen stehen, die vor dem x_1 bis x_3 stehen würden. Dann ein Vektor mit den Abkürzungen nach den Zahlen, also x_1, x_2 und x_3. Abschließend noch der Vektor mit den Ergebnissen. Wie du sehen kannst, multiplizieren wir die erste Matrix mit dem ersten Vektor und erhalten den Ergebnisvektor.

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 15\\ 88 \end{pmatrix}$$

Du kannst in den Abschnitt Kapitel 5.8 springen um dir einmal an einem weiteren Beispiel die Matrixmultiplikation anzuschauen.

5.6. Zwei Matrizen addieren

Wenn wir zwei Matrizen A und B haben, die die gleiche Dimension haben, dann können wir die beiden Matrizen einfach addieren.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Im Folgenden sehen wir einmal die Addition der beiden Matrizen.

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

In R geht es ebenfalls einfach die beiden Matrizen zu addieren.

```
A <- matrix(c(2, 3, 6, 7), ncol = 2)
A
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    2    6
[2,]    3    7
```

```
B <- matrix(c(0, 5, 4, 1), ncol = 2)
B
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    0    4
[2,]    5    1
```

```
A + B
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    2   10
[2,]    8    8
```

Wir nutzen die Addition relativ selten. Häufiger werden wir eine Matrix mit einer Zahl oder einem Vektor multiplizieren.

5.7. Eine Matrix mit einer Zahl multiplizieren

Wenn wir eine eine Matrix A mit einer Zahl r oder auch Skalar genannt multiplizieren dann multiplizieren wir jeden einzelnen Wert der Matrix mit dieser Zahl.

$$r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 3 \cdot r & 2 \cdot r \\ 4 \cdot r & 6 \cdot r \end{pmatrix}$$

Auch hier lässt sich der Zusammenhang einfach in R nachvollziehen. Wir bauen uns wieder die Matrix A und multiplizieren die Matrix A mit dem Skalar $r = 4$.

```
A <- matrix(c(3, 2, 4, 6), byrow = TRUE,  ncol = 2)
A
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    3    2
[2,]    4    6
```

```
4 * A
```

```
     [,1] [,2]
[1,]   12    8
[2,]   16   24
```

Neben der Multiplikation mit einer Zahl brauchen wir häufiger die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor.

5.8. Eine Matrix mit einem Vektor multiplizieren

Wenn wir eine Matrix mit einem Vektor multiplizieren wollen, dann müssen die Matrix und der Vektor zueinander passen. In unseren Fällen, wie wir häufig betrachten muss die Matrix die Anzahl an Spalten haben die der Länge des Vektors enspricht. In unseren Beispiel haben wir drei Spalten und somit muss der Vektor auch eine Länge von drei Einträgen haben.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wii können das Beispiel auch wieder in R nachvollziehen. In R gibt es keine Funktion mit Namen `vector`. Die Funktion `c()` erschafft einen Vektor. Wenn wir Matrizen oder Vektoren miteinander multipizieren wollen und anschließend aufaddieren, dann müssen wir den Operator `%*%` nutzen.

```
A <- matrix(c(4, 3, 2,
              1, 0, 3), byrow = 2, ncol = 3)
A
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    4    3    2
[2,]    1    0    3
```

```
B <- c(2, 0, 1)
B
```

```
[1] 2 0 1
```

```
A %*% B
```

```
     [,1]
[1,]   10
[2,]    5
```

Am Ende kommt das Ergebnis raus, was wir auch erwartet haben.

Teil III.

Von mathematischen Funktionen

Letzte Änderung am 28. September 2023 um 16:30:14

In den folgenden Kapiteln wollen wir uns einmal die Grundlagen von mathematischen Funktionen anschauen. Dabei legen wir in dem Kapitel 9 den Fokus auf lineare und exponentielle Funktionen. Wir werden hier nicht so sehr in die Tiefe gehen, sondern nur die wichtigsten Aspekte einmal beleuchten. Es gibt sehr viel Litertaur zu dem Thema, wir halten die Sache hier relativ kurz. In dem folgenden Kapitel 7 gehen wir dann genau so kurz auf die Differential- und Integralrechnung sowie die Lösung von quadratischen Gleichungen ein.

6. Lineare und exponentielle Funktion

Letzte Änderung am 28. September 2023 um 16:30:14

In diesem Kapitel werden wir uns einmal mit den wichtigsten mathematischen Funktionen in der Anwendung beschäftigen. Wir schauen uns dabei die am meisten genutzten und am häufigsten vorkommenden Funktionen an. Daher fangen wir mit der linearen Funktion an, die uns dann in der Statistik sehr lange begleiten wird. Darüber hinaus schauen wir auch einmal auf die exponentielle Funktion, die in der Form uns später das ein oder andere Mal in der Analyse von echten Daten über den Weg läuft.

6.1. Genutzte R Pakete

Wir wollen folgende R Pakete in diesem Kapitel nutzen. Zum einen brauchen wir das R Paket `tidyverse` um uns die Daten zu bauen, die wir dann mit dem R Paket `ggplot` visualisieren wollen. Das R Paket `ggplot` ist schon in dem R Paket `tidyverse` mit enthalten.

```
pacman::p_load(tidyverse, magrittr)
cbbPalette <- c("#000000", "#E69F00", "#56B4E9", "#009E73",
                "#F0E442", "#0072B2", "#D55E00", "#CC79A7")
```

6.2. Lineare Funktion

Wiederholen wir einmal die klassische lineare Funktion. Die lineare Funktion wird durch zwei Parameter bestimmt. Einmal die Steigung m sowie der y-Achsenabschnitt b. Wenn also x um

1 ansteigt, dann ändert sich y um den Wert von m. Die Gerade schneidet die y-Achse an dem y-Wert von b_0.

$$f(x) = mx + b_0$$

In der Abbildung 6.1 sehen wir die lineare Funktion $f(x) = 1.5 \cdot x + 5$ einmal als Gerade dargestellt. Hier wird nochmal schnell klar, was die Parameter der Geradengleichung aussagen. Die Gerade passiert die y-Achse bei einem Wert von 5. Wenn wir von $x = 0$ zu $x = 5$ gehen, dann steigt die Gerade von $y = 5$ auf $y = 12.5$. Damit ist dann die Steigung $m = \frac{12.5-5}{5} = 1.5$. Eigentlich realtiv einfach und *straight forward*.

```
tibble(x = 0:10,
       y = 1.5 * x + 5) %>%
  ggplot(aes(x, y)) +
  theme_radar() +
  ylim(0, NA) +
  geom_path() +
  geom_point()
```

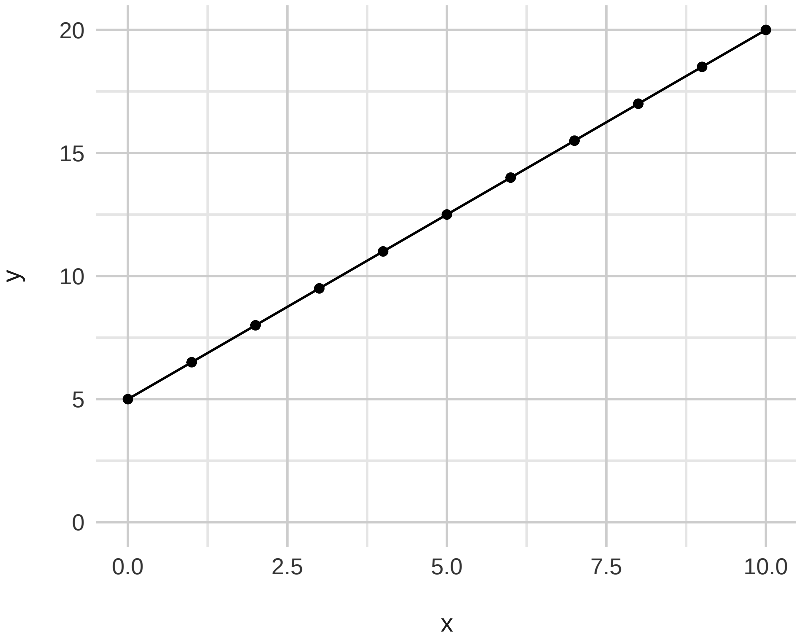


Abbildung 6.1.: Eine einfache lineare Funktion mit der Steigung $m = 1.5$ und dem y-Achsenabschnitt $b_0 = 5$.

6.3. Exponentialfunktion

In diesem Abschnitt schauen wir uns die verschiedenen Arten der Exponentialfunktion an. Zum einen den exponentiellen Anstieg, den exponentiellen Abfall sowie die Sättigungsfunktion. Alle drei Arten der Exponentialfunktion haben in der Biologie ihren Platz und daher sollten wir die Grundlagen kennen.

Auf der Wikipedia Seite finden sich Beispiele für das exponentielle Wachstum.

6.3.1. Exponentieller Anstieg

Die Exponentialfunktion ist eine sehr wichtige biologische Funktion. Wir können mit der Exponentialfunktion zum Beispiel Wachstum oder aber Zerfall. Deshalb hier einmal die grundlegende Formel für die Exponentialfunktion.

$$f(x) = b_0 + a \cdot b_1^{c \cdot x + d}$$

Wir haben hier wieder den y-Achsenabschnitt b_0. Dann einen Multiplikator a für die *eigentliche* Exponentialfunktion. Der wichtigste Parameter ist hierbei dann das b_1 oder die Basis. Wir haben dann noch den Exponenten, der meistens nur ein x sein kann oder wiederum eine lineare Funktion. Wir konzentrieren uns hier eher auf die einfachen Exponentialfunktion.

In der folgenden Gleichung sehen wir die Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$ mit der Basis 2 und dem Exponenten x.

$$f(x) = 2^x$$

Wir können uns dann einmal die Daten erschaffen.

```
exp_tbl <- tibble(x = 0:10,
                  y = 2^x)
exp_tbl %>% print(n = Inf)
```

```
# A tibble: 11 x 2
       x     y
   <int> <dbl>
 1     0     1
 2     1     2
 3     2     4
 4     3     8
 5     4    16
 6     5    32
 7     6    64
 8     7   128
 9     8   256
10     9   512
11    10  1024
```

In der Abbildung 6.2 sehen wir die Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$ einmal dargestellt.

```
exp_tbl %>%
  ggplot(aes(x, y)) +
  theme_radar() +
  geom_path() +
  geom_point()
```

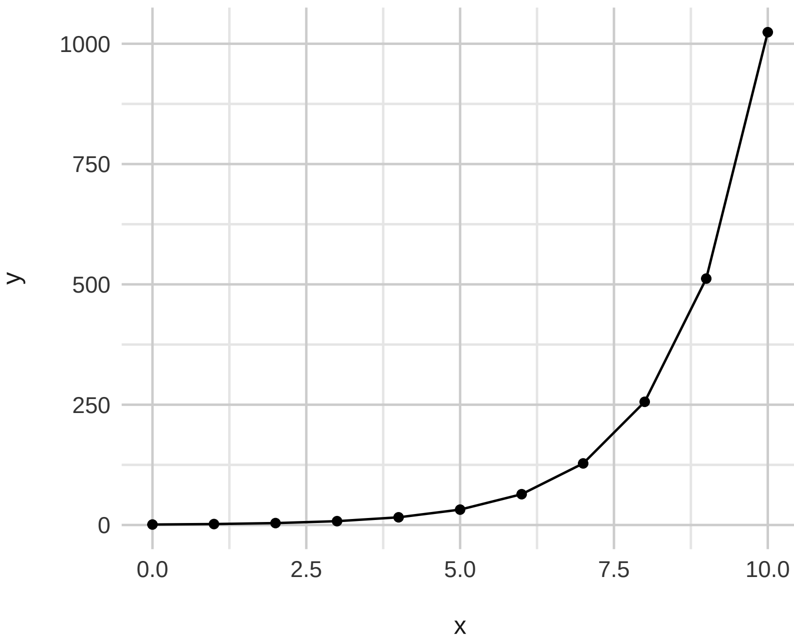


Abbildung 6.2.: Die einfache Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$.

Häufig brauchen wir aber nicht die Information von y und haben das x gegeben, sondern genau andersherum. Wir haben ein y gegeben und wollen dafür das x ausrechnen. Für die Exponentialfunktion ist die Umkehrfunktion der Logarithmus $\log()$. Nehmen wir folgende Exponentialfunktion einmal an.

$$8 = 2^x$$

Wir wollen jetzt die Funktion nach x auflösen und nutzen dafür den Logarithmus. Wir haben eine Basis von 2 also nutzen wir den $\log_2$ von 8 um den Exponenten x zu erhalten.

$$\log_2(8) = 3$$

Manchmal rechnen wir mit einer recht großen Basis oder aber der Taschenrechner hat die Funktion für einen Logarithmus einer beliebigen Basis nicht implementiert. Daher können wir folgende Rechenoperation nutzen.

$$\log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

Das ganze einmal als Beispiel für die Basis 12 mit dem Logarithmus $\log_{12}$.

$$\log_{12}(50) = \frac{\log(50)}{\log(12)} = \frac{3.91}{2.48} = 1.58$$

Häufig wollen wir nicht nur den Wert für einen Exponenten rechnen, also den Wert für $f(x) = 2^5$, sondern die Summe aller $x = 1, ..., 5$. Wir wollen also folgende Rechnung durchführen.

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63$$

Dafür können wir die folgende Formel nutzen. Wir setzen dann für b_1 die Basis ein und für N den Exponenten bis zu dem wir einschließlich aufsummieren wollen.

$$\sum_{n=0}^{N} b_1^n = \frac{b_1^{N+1} - 1}{b_1 - 1}$$

Das ganz können wir dann einmal ausfüllen. Die Basis b_1 ist dann 2 und wir wollen bis zum fünften Exponenten aufsummieren. Daher ist dann $N = 5$.

$$\sum_{n=0}^{5} 2^n = \frac{2^{5+1} - 1}{2 - 1} = 63$$

Und einmal die Überprüfung in R Code. Der R Code sieht dann immer etwas wilder aus, da wir natürlich nicht eine Formel direkt in R eingeben können. Mit den Leerzeichen wird es eventuell dann etwas übersichtlicher.

```
(2^(5+1) - 1)/(2 - 1)
```

```
[1] 63
```

Wir können uns auch die Werte vom aufsummierten y auch einmal für jedes x berechnen lassen. Und nicht nur für $x = 5$, wie wir es eben gerade gemacht haben. Daher stelle ich hier nochmal die Berechnung als Tabelle dar. In der Spalte `cumsum_y` findet sich das aufsummierte y.

```
exp_tbl %<>%
  mutate(cumsum_y = (2^(x+1)-1)/(2-1))
exp_tbl
```

```
# A tibble: 11 x 3
       x     y cumsum_y
   <int> <dbl>    <dbl>
 1     0     1        1
 2     1     2        3
 3     2     4        7
 4     3     8       15
 5     4    16       31
 6     5    32       63
 7     6    64      127
 8     7   128      255
 9     8   256      511
10     9   512     1023
11    10  1024     2047
```

Nachdem wir dann die Datentabelle haben, können wir die Funktion auch einmal abbilden. In der Abbildung 6.3 siehst du die exponentielle Funktion für $f(x) = 2^x$.

```r
exp_tbl %>%
  ggplot(aes(x, cumsum_y)) +
  theme_radar() +
  geom_path() +
  geom_point()
```

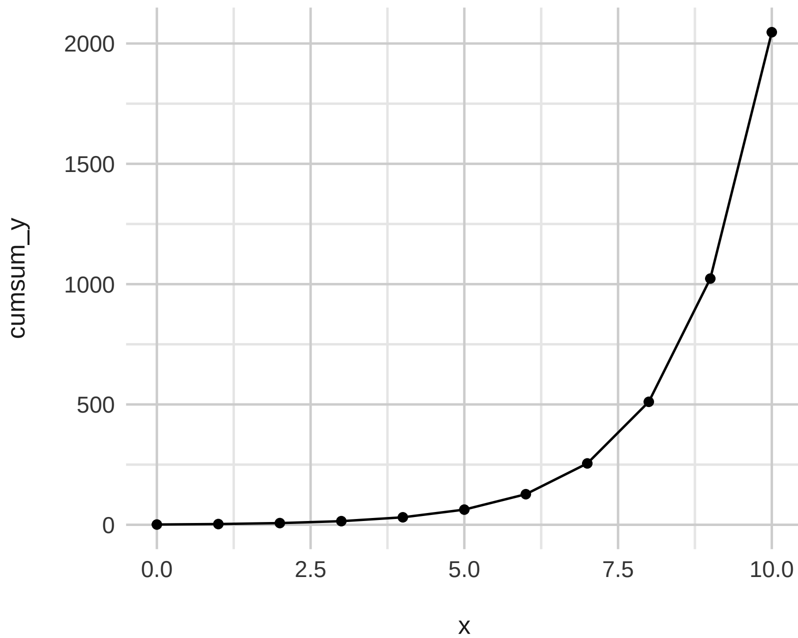


Abbildung 6.3.: Exponentielle Funktion für $f(x) = 2^x$

Es kann vorkommen, dass wir uns nicht nur *einen* exponentiellen Anstieg anschauen, sondern gleich mehrere. Oder anders ausgedrückt, wir haben noch einen Faktor a vor unserer exponentiellen Funktion in der Form $f(x) = a \cdot r^n$. In dem Fall berechnen wir die Summe wie folgt.

$$\sum_{n=0}^{N} a \cdot r^n = a \left(\frac{r^{N+1} - 1}{r - 1} \right)$$

6.3.2. Halbwertszeit

Neben dem klassischen exponentiellen Wachstum gibt es noch den exponentiellen Abfall. Daher verringert sich unser ursprünglicher Wert exponentiell bis nichts mehr von "übrig" ist. Der Klassiker ist hier die Halbwertszeit. Wir haben also eine Menge N_0 von einem radioaktiven Material als Startmenge. Dann wollen wir wissen, wie viel radioaktives Material liegt nach der Zeit t noch vor. Wir berechnen daher die Menge $N(t)$. Dafür brauchen wir dann noch die Halbwertszeit $t_{1/2}$ als Konstante für jedes radioaktive Material. Damit ist dann folgende Formel gegeben.

$$N(t) = N_0 \cdot \frac{1}{2}^{\frac{t}{t_{1/2}}}$$

In der Abbildung 6.4 sehen wir dann die exponentielle Funktion für den Zerfall eines radioaktiven Nukleotids mit $f(x) = 100 \cdot \frac{1}{2}^{\frac{t}{3.5}}$.

```
tibble(t = 0:30,
       y = 100 * 1/2^(t/3.5)) %>%
  ggplot(aes(t, y)) +
  theme_radar() +
  geom_path() +
  geom_point()
```

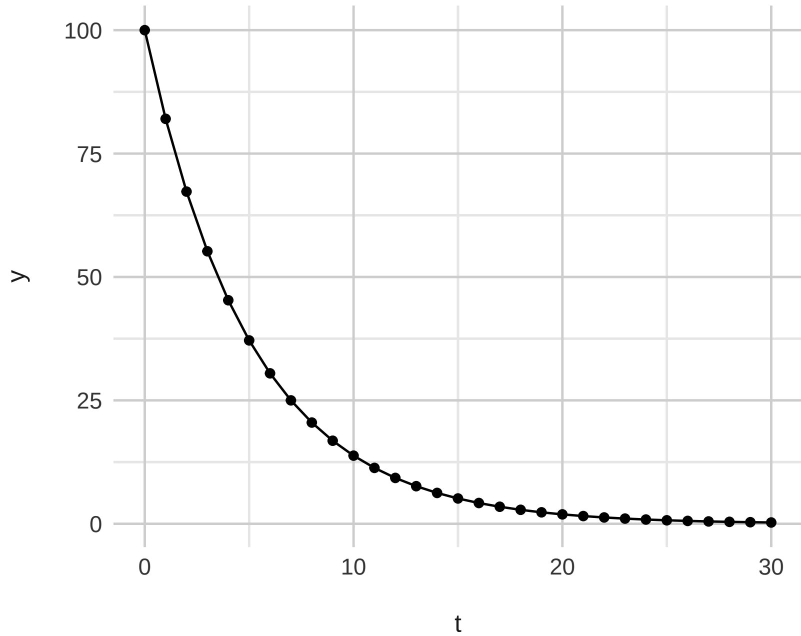


Abbildung 6.4.: Exponentielle Funktion für den exponentiellen Zerfall eines radioaktiven Nukleotids.

6.3.3. Sättigungsfunktion

Jedes biologisches Wachstum folgt einer Sättigungsfunktion auch wenn wir als erstes annehmen würden, es handelt sich um ein unbegrenztes exponentielles Wachstum. Hier wollen wir nicht in die Diskussion verfallen, ob es auch ein unbegrenztes ökonomisches Wachstum gibt oder nicht. Das Schneeballsystem sei hier nur warnend erwähnt.

Die Sättigungsfunktion hat ein Maximum b_0 welches die Funktion nie erreicht. Von diesem Maximum b_0 wird dann immer ein Term abgezogen. Dieser Term hat am Anfang einen recht großes Wert und wird mit größeren x-Werten immer kleiner. Daher nähert sich dann die Funktion dem Wert von b_0 an.

$$f(x) = b_0 - a \cdot b_1^{-c \cdot x + d}$$

Im Folgenden sehen wir einmal eine Gleichung einer Sättigungsfunktion als Beispiel. Die Funktion wird nie den maximalen

Wert von 6 erreichen. Mit steigendem x wird jedoch der Malusterm immer kleiner, so dass sich die Werte dann 6 annähern.

$$f(x) = 6 - 1.5 \cdot 2^{-\frac{1}{4} \cdot x + 2}$$

In der Abbildung 6.5 sehen wir den Zusammenhang nochmal visualisiert. Häufig führen biologische Wachstumsprozesse zu einer ähnlichen Sättigungsfunktion. Als weiteres Beispiel sei hier auch die Enzymekinetik mit der Michaelis-Menten-Gleichung berechnen.

```
tibble(x = 0:30,
       y = 6 - 1.5 * 2^(-1/4*x + 2)) %>%
  ggplot(aes(x, y)) +
  theme_radar() +
  geom_hline(yintercept = 6, color = cbbPalette[2]) +
  geom_path() +
  geom_point()
```

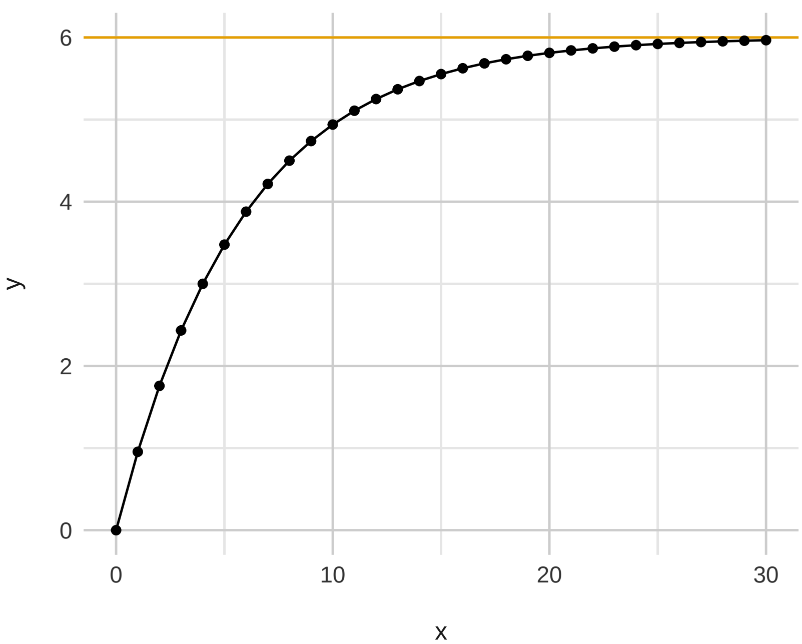


Abbildung 6.5.: Exponentielle Funktion für eine Sättigung.

7. Differential- und Integralrechnung

Letzte Änderung am 04. October 2023 um 18:33:11

Wie immer gilt, wir schauen uns hier nur einen kleinen Teilabriss der Thematik an. Auch bei der hier betrachteten Differentialrechnung geht es um die Anwendung der ersten Ableitung $f'(x)$. Es geht also um die Betrachtung von Extremwertproblemen. In dem Fall der Integralrechnung wollen wir die Stammfunktion $F(x)$ nutzen um die Fläche unter einer Kurve zu berechnen.

Tabelle von Ableitungs- und Stammfunktionen

7.1. Differentialrechnung

Die Ableitung kennst du ja noch aus der Schule und wir wollen hier auch die Ableitung nur nutzen um Extremwertprobleme zu lösen. Das heißt, dass wir die erste Ablitung $f'(x)$ gleich Null setzen und dann Lösen. Wir du dann die Gleichugn $f'(x) = 0$ im quadratischen Fall löst, kannst du weiter unten im Kapitel nachlesen.

Da wir wirklich keien allzu großen Probleme mit den Ableitungen lösen, reicht es, wenn du die gängigen Regeln der ersten Ableitung kennst. Im Folgenden leiten wir einmal eine quadratische Gleichung ab.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x + 3 \\ f'(x) &= 2x + 4 \end{aligned}$$

Das ganze geht auch eine Nummer komplexer und etwas detaillierter aufgeschrieben.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 7x^3 + 5x^2 + 6x + 2 \\
f'(x) &= 3 \cdot 7x^{3-1} + 2 \cdot 5x^{2-1} + 1 \cdot 6x^{1-1} \\
&= 21x^2 + 10x + 6
\end{aligned}
$$

7.2. Integralrechnung

Für die Integralrechnung, also die Berechung der Fläche unter der Kurve, benötigen wir die Aufleitung der Funktion $f(x$. Die Aufleitung wird auch Stammfunktion $F(x)$ genannt. Bei der Stamfunktion musst du immer beachten, dass die Ableitung wieder zu der ursprünglichen Funktion $f(x)$ führt. Einmal ein Beispiel für die Stammfunktion.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 4x + 3 \\
F(x) &= \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot 4x^2 + 3x
\end{aligned}
$$

Das ganze geht auch eine Nummer komplexer und etwas detaillierter aufgeschrieben.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 7x^3 + 5x^2 + 6x + 2 \\
F(x) &= \frac{1}{4} \cdot 7x^{3+1} + \frac{1}{3} \cdot 5x^{2+1} + \frac{1}{2} \cdot 6x^{1+1} + 2x^{0+1} \\
&= \frac{7}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + 2x
\end{aligned}
$$

Wenn due jetzt die Stammfunktion $F(x)$ ableitest, dann kommt wieder die Funktion $f(x)$ heraus.

7.3. Quadratische Gleichung lösen

Bei den Extremwertproblemen ensteht meist eine quadratische Gleichung, die wir dann gleich Null setzen müssen. Um eine quadratische Gleichugn zu lösen, können wir auf zwei Ansätze zurückgreifen. Einmal die a-b-c-Formel oder die p-q-Formel. Welche der beiden Formeln du nutzt, ist eigentlich egal. Am

Ende kannst du jede Gleichung vom a-b-c-Format in das p-q-Format überführen indem du die Gleichung durch a teilst.

Mehr zu quadratischen Gleichungen gibt es dann auch auf Wikipeda.

7.3.1. a-b-c-Formel

Die a-b-c-Formel wird auch Mitternachtsformel genannt und ist die allgemeine Lösung einer quadratischen Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$. Die a-b-c-Formel ist dann wie folgt.

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Und einmal ein Beispiel.

$$\begin{aligned} 26 &= 5x^2 + 4x \\ 5x^2 + 4x - 26 &= 0 \end{aligned}$$

Dann setzen wir alles einmal ein.

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-26)}}{2 \cdot 5} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - (-520)}}{10} \\ &= \frac{-4 \pm 23.15}{10} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann eine Lösung für $x_{1,2}$ wie folgt.

$$x_1 = 1.92;\ x_2 = -2.72$$

7.3.2. p-q-Formel

Wenn wir ein $a = 1$ vorleigen haben, dann spricht man auch von der Normalform der quadratischen Gleichung. Bei Vorliegen der Normalform $x^2 + px + q = 0$ lauten die Lösungen nach der p-q-Formel wie folgt.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Und einmal ein Beispiel.

$$\begin{aligned}
26 &= 5x^2 + 4x \\
5x^2 + 4x - 26 &= 0 \\
x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{26}{5} &= 0 \\
x^2 + 0.8x - 5.2 &= 0
\end{aligned}$$

Dann setzen wir alles einmal ein.

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{0.8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0.8}{2}\right)^2 - (-5.2)} \\
&= -0.4 \pm \sqrt{0.4^2 + 5.2} \\
&= -0.4 \pm \sqrt{5.36} \\
&= -0.4 \pm 2.32
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann eine Lösung für $x_{1,2}$ wie folgt.

$$x_1 = 1.92;\ x_2 = -2.72$$

Teil IV.

Von Wahrscheinlichkeiten

Letzte Änderung am 28. September 2023 um 16:30:14

> *“In keinem anderen Zweig der Mathematik ist es für Experten so leicht, sich zu vertun wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.” — Martin Gardner*

In den folgenden zwei kurzen Abschnitten wollen wir uns nochmal mit der Wahrscheinlichkeit beschäftigen. Wir gehen nochmal die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch. Dabei wiederholen wir das Baumdiagramm und gehen auf bedingte Wahrscheinlichkeiten ein.

Am Ende betrachten wir dann nochmal kurz Wahrscheinlichkeitsverteilungen, da wir die Idee der Wahrscheinlichkeitsverteilung noch später in der Statistik brauchen. Auch hier haben wir dann nur einen kurzen Abriss und Verteifen dann in späteren statistsichen Modulen.

8. Berechnungen mit Wahrscheinlichkeiten

Letzte Änderung am 28. September 2023 um 16:30:14

> *"Die wichtigsten Fragen des Lebens sind in der Tat größtenteils nur Wahrscheinlichkeitsprobleme." — Pierre-Simon Laplace*

In diesem Abschnitt wollen wir uns nochmal die Grundlagen der Wahrscheinlcihkeitsrechnung vergegenwertigen. Vieles davon ist schon bekannt und dient der Auffrischung. Wir brauchen Wahrscheinlichkeiten und deren Berechnungen später in der direkten Anwendung in der Statistik. Wir konzentrieren uns hier zu Anfang auf den laplaceschen Wahrscheinlichkeitbegriff und werden noch andere in der Statistik kennen lernen. Zum Anfang soll aber der klassische laplacesche Wahrscheinlichkeitbegriff ausreichen.

Eigentlich habe ich in diesem sehr kurzen Leitfaden zur Mathematik nur eine echte Literaturempfehlung im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das ist das Buch Odds & Ends von Jonathan Weisberg. Das tolle Buch von Jonathan Weisberg ist online zu finden. Ein schönes Buch über Wahrscheinlichkeiten. Ich habe teilweise Beispiele aus dem Buch verwendet und darüber hinaus finde ich es sehr spannend zu lesen.

Odds & Ends

Introducing Probability & Decision with a Visual Emphasis

8.1. Laplacescher Wahrscheinlichkeitbegriff

Wenn du also eine Münze wirfst, dann erhältst du zufällig Kopf oder Zahl. Leider weißt du vorher nicht, auf welcher Seite die Münze landen wird. Wir können aber berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit Pr für ein Ergebnis Kopf oder Zahl ist. Mit dem Bestimmen einer Eintrittswahrscheinlichkeit eines Ereignisses beschäftigt sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir beginnen mit einem einstufigen Zufallsexperiment.

Einstufiges Zufallsexperiment Wir haben den Versuch nur einmal durchgeführt hast. Zum Beispiel wurde die Münze nur einmal geworfen. Der Würfel wurde nur einmal gerollt.

Wenn wir mit Wahrscheinlichkeiten rechen, dann ermitteln wir also die Wahrscheinlichkeiten Pr für ein bestimmtes Ereignis A in einem Zufallsexperiment. Im Folgenden siehst du die Schreibweise für die Wahrscheinlichkeit Pr für das Ereignis A.

Wahrscheinlichkeit

$$Pr(A) = 0.6$$

Ereignis

Die Wahrscheinlichkeit $Pr(A)$ für das Auftreten des Ereignisses A ist 0.6. Hierbei ist wichtig, dass wir immer eine Wahrscheinlichkeit auf ein Ereignis beziehen. Ohne ein Ereignis ist eine Wahrscheinlichkeit nicht zu interpretieren.

Ereignis Ein Ereignis definieren wir selber. Zum Beispiel sind $E_1 = \{\text{die Zahl ist größer als } 3\}$ und $E_2 = \{\text{die Zahl ist gleich } 6\}$ Ereignisse. Je nach Ergebnis des Würfels wird entscheiden, ob das Ereignis eingetreten ist oder nicht.

Neben dem Ereignis A gibt es noch das Gegenereignis $\bar{A}$ oder A'. Das Gegenereignis tritt ein, wenn das eigentlich Ereignis nicht passiert ist. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis $Pr(\bar{A})$ in dem wir 1 minus der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A rechnen.

Gegenereignis

Wahrscheinlichkeit

$$Pr(\bar{A}) = 1 - Pr(A) = 0.4$$

Ereignis

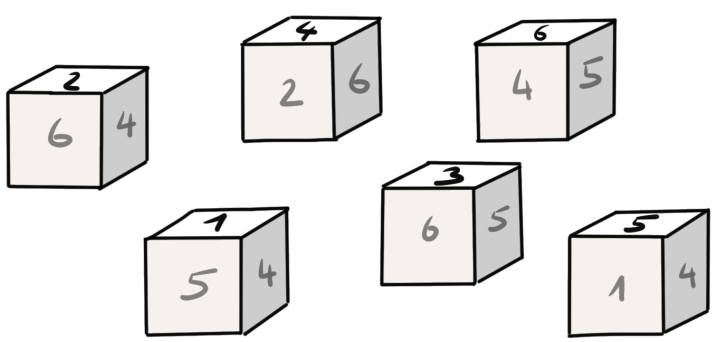
Für das Werfen einer Münze wäre das Ereignis $A = \{Kopf\}$ gleich 0.5. Das Gegenereignis $\bar{A} = \{Zahl\}$ wäre dann $1 - Pr(A)$ und somit auch 0.5. Hier haben wir es aber mit einer 'fairen' Münze in unserem Zufallsexperiment zu tun.

Fair Wir nutzen den begriff 'fair' für ein Objekt, wenn die Wahrscheinlichkeit für da Eintreten eines Ereignisses durch das Objekt über alle Ereignisse gleich ist. Bei einem idealen, 'fairen' Würfel hat wegen der Symmetrie jede der sechs Seiten von vornherein die gleiche Wahrscheinlichkeit, nach dem Wurf oben zu liegen.

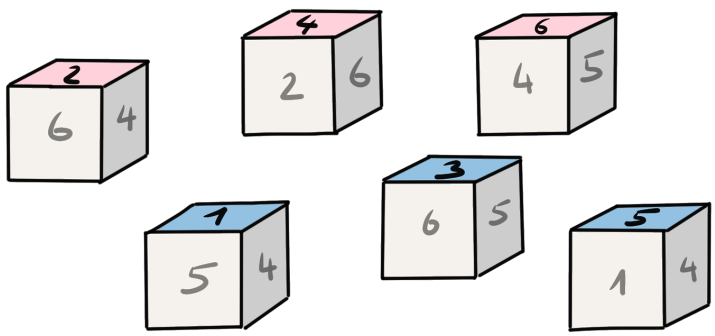
Bei einer Münze ist die Sachlage ja relativ einfach. Im Folgenden sehen wir einmal die Ergebnismenge eines sechseitigen Würfels oder 1W6 genauer an. Bei einem Würfel haben wir ja mehrere Möglichkeiten ein Ereignis zu definieren.

Ergebnis oder Ergebnismenge Alles was bei einem Zufallsexperiment herauskommen kann. Ein sechsseitiger Würfel hat somit die Ergebnismenge $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Bei einem sechseitigen Würfel können die Zahlen von eins bis sechs oben liegen.

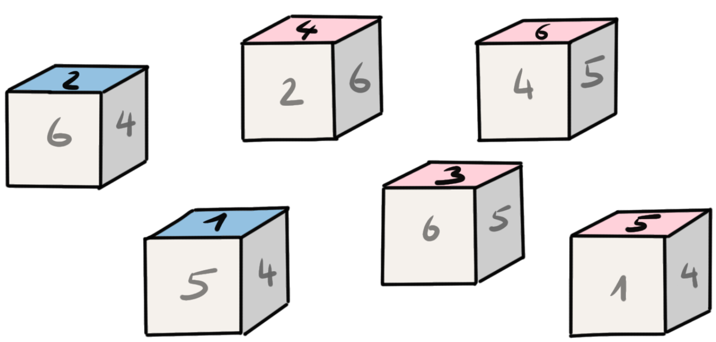


Jede der Zahlen hat eine Vorabwahrscheinlichkeit oder auch A-priori-Wahrscheinlichkeit für das Auftreten nach einem Wurf von $1/6$ oder $0.1\overline{6}$. Betrachten wir jetzt einmal verschiedene mögliche Ereignisse. Fangen wir mit dem Ereignis $E_1 = \{\text{die Zahl ist gerade}\}$ an.



Wir teilen nun die Anzahl der betrachteten Ergebnisse durch die Anzahl aller möglichen Ergebnisse. Wir erkennen, dass wir mit $2, 4$ und 6 drei Ergebnisse haben, die eine gerade Zahl darstellen. Insgesamt hat der Würfel sechs Seiten, so dass wir sechs mögliche Ergebnisse haben. Somit ist die Wahrscheinlichkeit $Pr(E_1) = 0.5$. Die Gegenwahrscheinlichkeit $\bar{E}_1 = \{\text{die Zahl ist nicht gerade}\}$ ist somit auch 0.5.

Als asbschließendes Abeispiel noch das Ereignis $E_2 = \{\text{die Zahl ist größer gleich 3}\}$.



Hier haben wir dann eine Wahrscheinlichkeit $Pr(E_2) = \frac{4}{6} = 0.6\overline{6}$ vorliegen. Wir haben vier Ergebnisse, die größer sind als gleich drei, von insgesamt sechs möglichen Ergebnissen.

Wir können diese Gedankenspiele auch mit anderen Würfeltypen oder Münzen durchspielen. Auch lässt sich hier sehr gut die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn und die Niete darstellen. In der Summe müssen sich die beiden Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse auf Eins summieren. Häufig ist aber so, dass wir nicht nur ein einstufiges Zufallsexperiment haben, sondern uns häufig fragen, wie ist die Wahrscheinlichkeit für A, wenn schon B eingetreten ist.

8.2. Baumdiagramme und Pfadregeln

In einem Baumdiagramm verbinden wir zwei einstufige Zufallsexperimente in ein zweistufiges oder eben auch mehrstufiges Zufallsexperiment. Wir nutzen dafür das Baumdiagramm zur Visualisierung sowie die Pfadregeln zum Lösen der Wahrscheinlichkeitsrechnungen.

Zweistufiges Zufallsexperiment Wir führen den Versuch nun zweimal durch. Zum Beispiel wurde die Münze nur zweimal geworfen und wir wollen die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $E_3 = \{\text{Kopf}, \text{Kopf}\}$ bestimmen.

Zusätzlich schauen wir uns auch noch die Vierfeldertafel an, die als Tabelle das Baumdiagramm für abhängige Ereignisse repräsentiert.

Abhängige Ereignisse Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses A hängt von dem *vorherigen* Eintreten des Ereignisses B ab.

Schauen wir uns in Abbildung 8.2 einmal einen theoretischen Wahrscheinlichkeitsbaum an. Wir schreiben hier erstmal nur die Ereignisse A und B auf. Danach betrachten wir einmal die Sachlage an einem Beispiel für unabhängige Ereignisse und einmal für abhängige Ereignisse.

- Bei einem Baumdiagramm gibt es einen Startpunkt. Der Startpunkt wird auch Wurzel (eng. *root*) genannt oder aber auch als Ausgangspunkt bezeichnet. Wie immer gibt es für den gleichen Sachverhalt verschiedene Begrifflichkeiten.

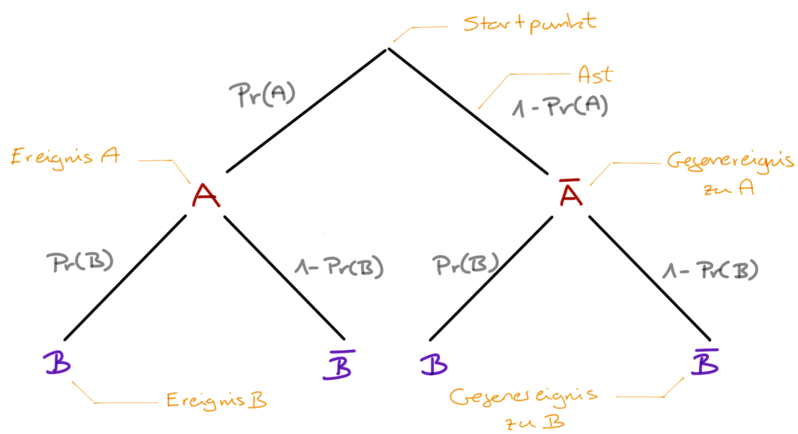


Abbildung 8.1.: Schematische Abbilung eines Wahrscheinlichkeitsbaum mit den Ereignissen A und B sowie deren Gegenereignis $\bar{A}$ und $\bar{B}$.

- Von dem Startpunkt gehen so viele Äste ab, wie es in der ersten Stufe deines Zufallsexperiments Ereignisse gibt. Das Ereignis schreibst Du an das Ende des jeweiligen Astes. Meistens haben wir es mit einem Ereignis A und dem Gegenereignis $\bar{A}$ zu tun.
- Das Ende jeden Astes stellt einen neuen Verzweigungspunkt dar, von dem alle in der nächsten Stufe möglichen Ereignisse abgehen. Dort kannst du die jeweiligen Zwischenergebnisse eintragen. Analog funktioniert das für alle weiteren Stufen. Meistens haben wir aber nur die Verkettung von zwei Ereignissen.
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse auf einer Ebene des Baumdiagramms addiert sich zu 1 auf. Daher ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und dem Gegenereignis $\bar{A}$ gleich 1.
- Der Weg vom Startpunkt bis zu einem der Enden wird als Pfad bezeichnet. Am Ende eines Pfades steht das Endergebnis und somit stellt das Ende auch keinen Verzweigungspunkt mehr dar.
- Jeder Pfad beschreibt ein Ereignis des gesamten mehrstufigen Zufallsexperiments. Jeder Verzweigungspunkt ein Zwischenereignis.

8.2.1. Unabhängiger Zufallsversuch

Wir werfen eine faire Münze zweimal und erhalten folgendes Baumdiagramm. Darüber hinaus gehen wir davon aus, dass wir es mit einem unabhängigen Zufallsexperiment zu tun haben.

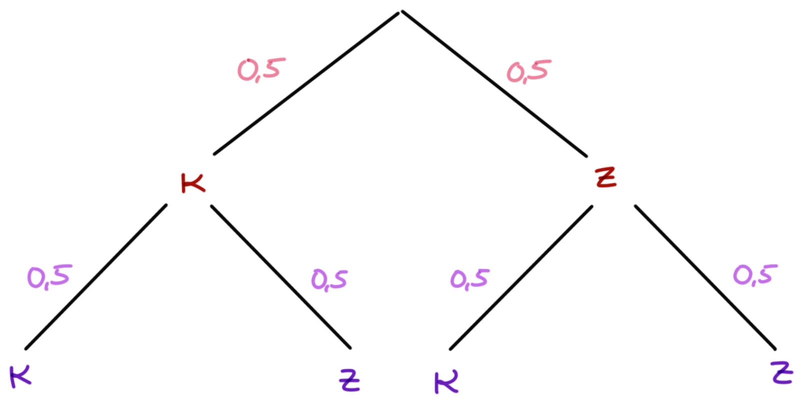


Abbildung 8.2.

Die beiden Münzwürfe beeinflussen sich nicht. Wir sind an den Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis $E_3 = \{(\text{Kopf, Kopf})\}$ und $E_4 = \{(\text{Kopf, Zahl}), (\text{Zahl, Kopf})\}$ interessiert. Wir wollen also im Ereignis E_3 die Wahrscheinlichkeit für zweimal Kopf hintereinander bestimmen und bei dem Ereignis E_4 die Wahrscheinlichkeit für Kopf und Zahl, wobei die Reihenfolge unerheblich ist.

Multiplikationsregel (UND-Regel) Sind zwei Ereignisse A und B unabhängig voneinander, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass beide zusammen auftreten: $Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B)$ Die Wahrscheinlichkeit, dass A und B zusammen auftreten ist $Pr(A)$ mal $Pr(B)$. Es wird zweimal hintereinander mit einem Würfel geworfen.

Wenn wir also die Wahrscheinlichkeit $Pr(E_3)$ bestimmen wollen, dann müssen wir die Wahscheinlichkeiten $Pr(\text{Kopf})$ aus dem ersten Wurf mit der Wahrscheinlichkeit für $Pr(\text{Kopf})$ multiplizieren. Da wir eine faire Münze vorliegen haben, ist die Wahrscheinlichkeit für $Pr(E_3) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$.

Additionsregel (ODER-Regel) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zufallsereignis eines von mehreren Resultaten liefert, ist die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten dieser Resultate. Es werden die Wahrscheinlichkeiten am Ende der Pfade addiert.

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_4 berechnen. Dafür brauchen wir die Pfadwahrscheinlichkeiten für Pr(Kopf, Zahl) sowie Pr(Zahl, Kopf). In unserem Baumdiagramm können wir die Zahlen direkt am Ende der beiden Pfade ablesen. Die Wahrscheinlichkeiten sind jeweils Pr(Kopf, Zahl) = 0.25 sowie Pr(Zahl, Kopf) = 0.25. Jetzt addieren wir noch beide Wahrscheinlichkeiten auf und erhalten eine Wahrscheinlichkeit für $Pr(E_4)$ von 0.5.

In der Mengenschreibweise können wir die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis zweimal Kopf wie folgt schreiben. Das $\cap$ steht dabei für das logische *UND*.

$$\begin{aligned} Pr(Kopf \cap Kopf) &= Pr(Kopf) \times Pr(Kopf) \\ &= 1/2 \times 1/2 \\ &= 1/4 \end{aligned}$$

8.2.2. Abhängiger Zufallsversuch

Soweit haben wir uns einen unabhängigen Zufallsversuch angeschaut. Der zweite Münzwurf war unabhängig vom ersten Münzwurf. Oder der erste Münzwurf beeinflusst nicht den zweiten Münzwurf. Im Folgenden wollen wir uns ein abhängiges Zufallsexperiment anschauen. Wenn das Ereignis A oder das Gegenereignis $\bar{A}$ auftritt, dann tritt das Ereignis B und das Gegenereignis $\bar{B}$ nicht unabhängig voneinander auf. Das Ereignis A tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.3 auf. Somit tritt das Gegenereignis $\bar{A}$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.7 auf. Im Weiteren tritt das Ereignis B abhängig vom Auftreten von A oder $\bar{A}$ mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit auf. Im folgenden Baumdiagramm ist der Zusammenhang visualisiert.

Bedingte Wahrscheinlichkeit Wir schreiben $Pr(B \mid A)$, wenn wir die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B bestimmen wolln unter der Bedingung das A schon eingetreten ist.

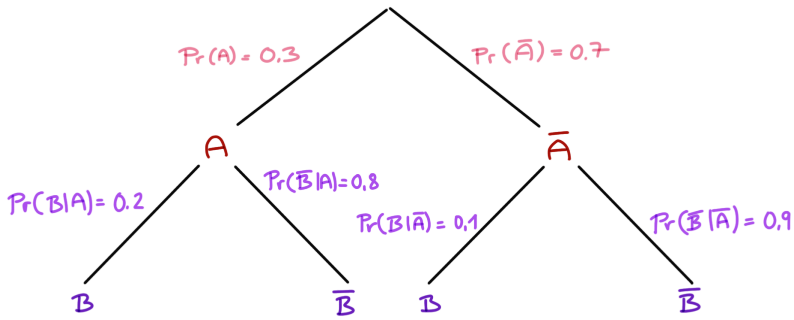


Abbildung 8.3.

Die Wahrscheinlichkeiten am Ende der Pfade berechnet sich wie gewohnt mit der Multiplikationsregel. Wir können so die Wahrscheinlichkeit für $Pr(A \cap B)$ für den ersten Pfad und die folgenden Pfade berechnen.

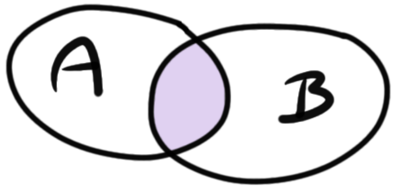
$$Pr(A \cap B) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$$
$$Pr(A \cap \bar{B}) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$$
$$Pr(\bar{A} \cap B) = 0.7 \cdot 0.1 = 0.07$$
$$Pr(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.7 \cdot 0.9 = 0.63$$

Wenn dir die Schreibweise mit dem Bogen $\cap$ ungewohnt ist, dann kannst du dir das Baumdiagramm auch als eine Kreuztabelle vorstellen. Wir tragen in die Felder immer den Wert ein, bei dem der Spaltenwert und der Zeilenwert gilt. Im ersten Feld gilt A aus der ersten Zeile und B aus der ersten Spalte.

	B	$\bar{\mathbf{B}}$	Summe
A	$Pr(A \cap B) =$ 0.06	$Pr(A \cap \bar{B}) =$ 0.24	**0.30**
$\bar{\mathbf{A}}$	$Pr(\bar{A} \cap B) =$ 0.07	$Pr(\bar{A} \cap \bar{B}) =$ 0.63	**0.70**
Summe	**0.13**	**0.87**	1.00

In der Kreuztabelle kannst du dann auch einfach die Wahrscheinlichkeiten für $Pr(B)$ und $Pr(\bar{B})$ unabhängig von dem Ereignis A und $\bar{A}$ durch summieren bestimmen. In den Zeilensummen findest du die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A und $\bar{A}$ mit $Pr(A) = 0.3$ und $Pr(\bar{A}) = 0.7$ wieder. In den Spaltensummen stehen dann die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten für für $Pr(B)$ und $Pr(\bar{B})$ mit $Pr(B) = 0.13$ und $Pr(\bar{B}) = 0.87$.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $Pr(B \mid A)$ können wir uns auch als Fläche*anteil* vorstellen. Im Folgenden haben wir die Ereignisse A und B, die sich überschneiden. In der lila Fläche finden die Ereignisse A und B statt. Wir schreiben hier $A \cap B$.



Wenn A gilt, wie wahrscheinlich sind wir dann in der lila Fläche, also gilt $A \cap B$? Das können wir dann einfach über den Anteil der Fläche $A \cap B$ an der Fläche A berechnen. Das wiederum ist nichts anderes als die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass B gilt, wenn A wahr ist.

$$Pr(B \mid A) = \frac{Pr(A \cap B)}{P(A)}$$

Somit haben wir hier auf drei Arten uns nochmal vor Augen geführt, was eine bedingte Wahrscheinlicheit für das Eintreten eines Ereignisses bedeutet.

8.3. Satz von Bayes

Im vorherigen Abschnitt haben wir uns mit der Frage beschäftigt, wie wir die bedingte Wahrscheinlichkeit $Pr(A \mid B)$ berechnen. Was ist aber, wenn wir an der bedingten Wahrscheinlichkeit für $Pr(B \mid A)$ interessiert sind? Hier hilft uns der Satz von Bayes weiter, der die Umformung von bedingten Wahrscheinlichkeiten ermöglicht.

Der Satz von Bayes ist wie folgt definiert. Für zwei Ereignisse A und B mit der Eintrittswahrscheinlichkeit $Pr(B) > 0$ lässt sich die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist, durch die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist, errechnen:

Siehe auch folgendes Beispiel aus Odds & Ends von Jonathan Weisberg zu verschiedenfarbigen Taxis.

$$Pr(A \mid B) = \frac{Pr(B \mid A) \cdot Pr(A)}{Pr(B)}$$

mit

- $Pr(A \mid B)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist,
- $Pr(B \mid A)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist,
- $Pr(A)$ ist die a-priori-Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A und
- $Pr(B)$ ist die a-priori-Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B.

Es ist wichtig zu merken, dass im Zähler immer die Wahrscheinlichkeit von der bedingten Wahrscheinlichkeit steht. Wir haben hier im Zähler $Pr(B \mid A)$ also müssen wir hier mit $Pr(A)$ multiplizieren und die Wahrscheinlichkeit $Pr(B)$ kommt in den Zähler. Dann das ganze einmal an unserem Beispiel von oben durchgerechnet.

$$\begin{aligned} Pr(A \mid B) &= \frac{Pr(B \mid A) \cdot Pr(A)}{Pr(B)} \\ &= \frac{0.2 \cdot 0.3}{0.13} \\ &= 0.46 \end{aligned}$$

Wir nennen die bedingte Wahrscheinlichkeit von $Pr(A \mid B)$ auch die inverse Wahrscheinlichkeit von $Pr(B \mid A)$.

8.4. Mengenschreibweise

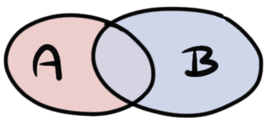
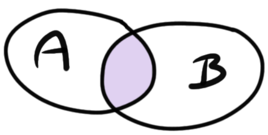
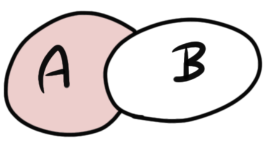
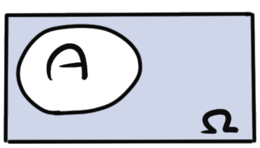
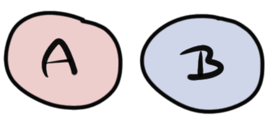
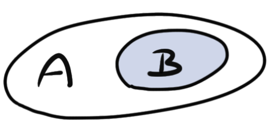
Im Folgenden sehen wir nochmal als Wiederholung verschiedene Mengenschreibweisen.

		Mengenschreibweise	**Typ**
$[a, b]$	$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	geschlossen
$]a, b[$	(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	offen
$[a, b[$	$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	halboffen / rechtsoffen
$]a, b]$	$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	halboffen / linksoffen

8.5. Logische Operatoren

In Tabelle 8.3 nochmal die Zusammenfassung von Menge, mathematischer Mengenschreibweise sowie deren Bedeutung.

Tabelle 8.3.: Zusammenfassung von Menge und mathematischer Mengenschreibweise

Abbildung		Bedeutung
	$A \cup B$	A tritt ein oder B tritt ein
	$A \cap B$	A tritt ein und B tritt ein
	$A \quad B$	A tritt ein, aber B tritt nicht ein
	$\bar{A} = \Omega \quad A$	A tritt nicht ein
	$A \cup B$	Entweder A ein oder B tritt ein oder keins von beiden
	$B \subset A$	B ist Teilmenge von A

9. Verteilungen von Wahrscheinlichkeiten

Letzte Änderung am 24. June 2024 um 11:44:13

Wir werden uns in der Statistikvorlesung noch vertieft mit Verteilungen beschäftigen. Deshalb hier nur ein kurzer Abriss und die Konzentration auf die Normalverteilung. Im Folgenden einmal die Formel für die Normalverteilung.

$$f(y \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < y < \infty$$

Die Formel sieht ganz schön wild aus, aber wir müssen mit der Formel selber nicht arbeiten. Wir wenden die Normalverteilung höchstens in der Generierung von Daten an. Sonst nutzen wir die Eigenschaften der Normalverteilung für die Analyse von Daten.

9.1. Genutzte R Pakete

Wir wollen folgende R Pakete in diesem Kapitel nutzen. Zum einen brauchen wir das R Paket `tidyverse` um uns die Daten zu bauen, die wir dann mit dem R Paket `ggplot` visualisieren wollen. Das R Paket `ggplot` ist schon in dem R Paket `tidyverse` mit enthalten.

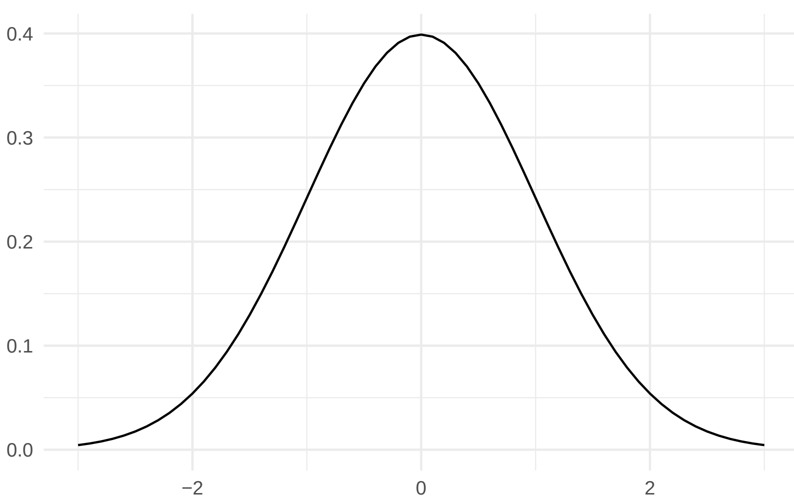
```
pacman::p_load(tidyverse, magrittr, ggfortify)
cbbPalette <- c("#000000", "#E69F00", "#56B4E9", "#009E73",
                "#F0E442", "#0072B2", "#D55E00", "#CC79A7")
```

9.2. Dichtefunktion

Die Funktion `dnorm()` gibt den Wert der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (eng. *probability density function*, abk. *PDF*) der Normalverteilung bei einer bestimmten Zufallsvariablen x, einem Populationsmittelwert μ und einer Populationsstandardabweichung σ zurück.

Wir schauen uns hier einmal die Standardnormalvertielung an. Als eine Standardnormalverteilung bezeichnet man eine Normalverteilung mit einem Mittelwert von 0 und einer Varianz bzw. Standardabweichung von 1. Wir können uns einmal die Normalverteilung mit der Funktion `ggdistribution()` anschauen. Wir nehmen dafür die Werte auf der x-Achse von -3 bis 3 in 0.1 Schritten. Dafür können wir die Funktion `seq()` nutzen. Wir erhalten die typische Glockenkurve einer Normalverteilung.

```
ggdistribution(dnorm, seq(-3, 3, 0.1), mean = 0, sd = 1) +
  theme_minimal()
```



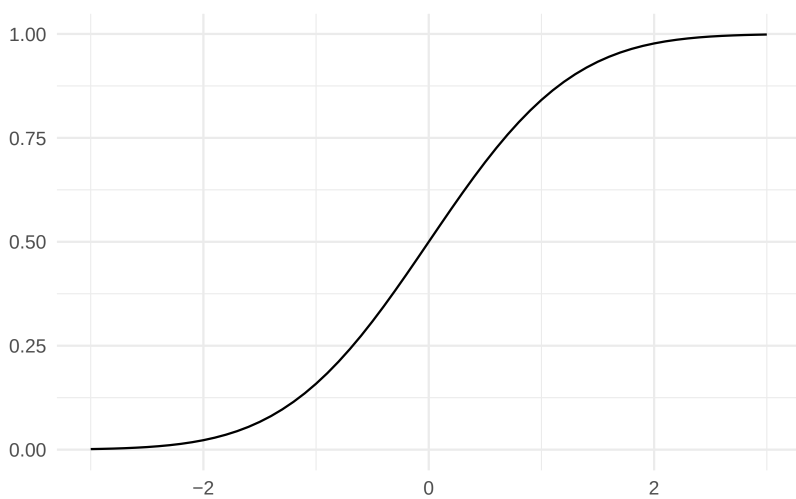
9.3. Kumulative Dichtefunktion

Wenn wir die kumulierte Fläche *links* von einem Wert auf der x-Achse bestimmen wollen, dann nehmen wir die Funktion `pnorm()`. Die Funktion `pnorm()` gibt den Wert der kumulativen Dichtefunktion (eng. *cumulative distribution function*, abk. *cdf*) der Normalverteilung bei einer bestimmten Zufallsvariablen q, einem Populationsmittel μ und einer Populationsstandardabweichung σ zurück.

In der Standardnormalverteilung ist die Fläche unter der Kurve gleich 1. Daher kannst du dir die Fläche unter der Kurve auch als eine Wahrscheinlichkeit vorstellen. Mit der Idee Wahrscheinlichkeit gleich Fläche kannst du dir dann auch merken, dass die Funktion *pnorm*() die Fläche berechnet. Das *p* steht dann für *probability*.

Hier dann auch einmal die Funktion für die x-Werte von -3 bis 3 in 0.1 Schritten. Du kannst gut erkennen wie sich die Fläche dann auf 1 aufaddiert. Auch macht es vollkommen Sinn, dass wir bei einem x-Wert von 0 die Hälfte der Fläche erreicht haben. Immerhin definiert der Mittelwert die Mitte der Normalverteilung, so dass wir dann auch erwarten, dass die Hälfte der Fläche bei dem x-Wert gleich dem Mittelwert erreicht ist.

```r
ggdistribution(pnorm, seq(-3, 3, 0.1), mean = 0, sd = 1) +
  theme_minimal()
```



Wir können jetzt mit der Funktion rechnen und ein paar beispielhafte Fragen beantworten. Angenommen, die Größe der Männer an einer bestimmten Schule ist normalverteilt mit einem Mittelwert von $\mu = 180cm$ und einer Standardabweichung von $\sigma = 14cm$. Wie viel Prozent der Männer an dieser Schule sind **größer** als $195cm$?

```
pnorm(195, mean = 180, sd = 14, lower.tail = FALSE)
```

```
[1] 0.1419884
```

Angenommen, das Gewicht einer bestimmten Otterart ist normalverteilt mit einem Mittelwert von $\mu = 60kg$ und einer Standardabweichung von $\sigma = 10kg$. Wie viel Prozent dieser Otterart wiegen **mindestens** $65kg$? Hier kannst du mindestens auch als **kleiner** lesen.

```
pnorm(65, mean = 60, sd = 10, lower.tail = TRUE)
```

```
[1] 0.6914625
```

Angenommen, die Höhe der Sonnenblumen in einer bestimmten Region Niedersachsens ist normalverteilt mit einem Mittelwert von $\mu = 250cm$ und einer Standardabweichung von $\sigma = 12cm$. Wie viel Prozent der Pflanzen in dieser Region sind $200cm$ bis $220cm$ groß?

```
pnorm(260, mean = 250, sd = 12) - pnorm(240, mean = 250, sd = 12)
```

```
[1] 0.5953432
```

In dem letzten Fall haben wir einfach die Differenz zwischen zwei Normalverteilungen gebildet.

9.4. Inverse kumulativen Dichtefunktion

Einfach ausgedrückt, kannst du `qnorm()` verwenden, um herauszufinden zu welcher Fläche welcher Wert auf der x-Achse gehört. Du willst also nicht wissen, wie *wahrscheinlich* ein Wert für x ist, sondern gegeben einer Wahrscheinlichkeit den Wert von x haben. Ich habe dir hier ein paar Beispiele mitgebracht. Wir setzen also in die Funktion `qnorm()` die Fläche unter der Kurve ein, bei einer Standardnormalverteilung eben eine Wahrscheinlichkeit, und der erhalten den x-Wert wieder.

```
qnorm(0.95, mean = 0, sd = 1) %>% round(2)
```

```
[1] 1.64
```

```
qnorm(0.975, mean = 0, sd = 1) %>% round(2)
```

```
[1] 1.96
```

```
qnorm(0.99, mean = 0, sd = 1) %>% round(2)
```

```
[1] 2.33
```

9.5. Visualisierung von `pnorm()` und `qnorm()`

In der Abbildung 9.1 sehen wir den Zusammenhang zwischen der Funktion `pnorm(q = 1.96)` und der Funktion `qnorm(p = 0.975)` einmal visualisiert. Manchmal ist es daann doch recht verwirrend, was die beiden Funktion dann machen. Deshalb einmal hier der R Code für eine Standardnormalverteilung. Wenn du kein `mean` oder `sd` in den Funktionen angibst, ist der Standardwert (eng. *default*) der einer Standardnormalverteilung.

```
pnorm(q = 1.96) %>% round(3)
```

```
[1] 0.975
```

```
qnorm(p = 0.975) %>% round(2)
```

```
[1] 1.96
```

```r
qnorm(p = 0.025, lower.tail = FALSE) %>% round(2)
```

```
[1] 1.96
```

In der Abbildung 9.1 sehen wir den Wert aus der Funktion `pnorm(q = 1.96)` mit 0.975 als blaue Fläche unter der Kurve dargestellt. Den Wert für die Fläche auf der x-Achse mit 1.96 ergibt dann die Funktion `qnorm(p = 0.975) %>% round(2)`.

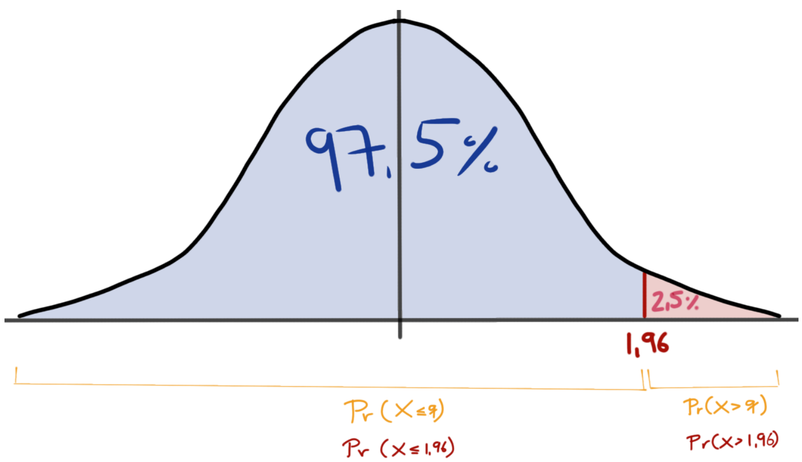


Abbildung 9.1.: Der Zusammenhang von `pnorm()` und `qnorm` einmal an einer Standardnormalverteilung visualisiert.

Teil V.

Von Zinsen

Letzte Änderung am 01. January 2024 um 20:35:59

Zinsen und Zinseszinsen sind grundlegende Konzepte der Finanzwelt, die eine zentrale Rolle bei der Bewertung von Investitionen, Krediten und finanziellen Entscheidungen spielen. Zinsen beziehen sich auf die Gebühr, die für die Nutzung von Geldmittel gezahlt wird. Sie können sowohl für geliehenes Geld (Kreditzinsen) als auch für angelegtes Kapital (Anlagezinsen) relevant sein.

Der Zinseszins ist ein weiteres wichtiges Prinzip, das besagt, dass nicht nur der ursprüngliche Betrag Zinsen generiert, sondern auch die bereits aufgelaufenen Zinsen. Mit anderen Worten, der Zinseszins ermöglicht es, dass Zinsen auf die Zinsen addiert werden, was zu exponentiellem Wachstum führen kann.

Die Berücksichtigung von Zinsen und Zinseszinsen ist entscheidend, um langfristige finanzielle Auswirkungen zu verstehen und strategische Entscheidungen im Bereich der Geldanlage oder Schuldenaufnahme zu treffen. Diese Konzepte spielen eine Schlüsselrolle in der Welt der persönlichen Finanzen, Investitionen, Wirtschaft und Banking.

10. Berechnungen mit Zinsen

Letzte Änderung am 01. January 2024 um 20:35:02

> *"Compound interest is the eighth wonder of the world. He who understands it, earns it … he who doesn't … pays it." — Albert Einstein*

Das folgende Kapitel basiert auf der Zinsrechnung auf Wikipedia. Ich habe hier die teile, die wir dann in der Vorlesung brauchen rausgesucht und angepasst. Deshalb habe ich auch die Notation der Wikipediaseite beibehalten, dann kannst du dort noch mal tiefer Einsteigen, solltest du noch mehr Zinsrechnung in anderen Modulen brauchen. Wir nutzen hier die Grundlagen der Zinsrechnung. Für alle Abschnitte ergibt sich daher eine Notation, die ich hier nochmal vorstelle.

- *Anfangskapital*: K_0 (Kapital nach 0 Jahren), das Geld mit dem wir starten. Oder den Kredit, den wir bei der Bank aufnehmen.
- *Endkapital*: K_n (Kapital nach n Jahren), unser Zielbetrag. Wieviel Geld erhalten wir nach den Zinsen und der Laufzeit? Welchen Kredit müssen wir am Ende abbezahlen?
- *Laufzeit (ganze Jahre)*: n Eingabe in Jahren, die Laufzeit unseres Spar- oder Kreditvertrags in Jahren.
- *Zinssatz in Prozent*: p (pro Zinsperiode), die eigentlichen Zinsen, die wir pro Laufzeit erhalten also zum Beispiel 6% Zinsen pro Jahr.
- *Zinssatz als Dezimalangabe*: $i = \frac{p}{100}$ (pro Zinsperiode), wenn wir unsere Zinsen nicht in Prozent sondern in einer Dezimalzahl angeben. Also statt 6% Zinsen eben 0.06 Zinsen.
- *Zinssatz als Zinsfaktor*: $q = 1 + i = 1 + \frac{p}{100}$ (pro Zinsperiode), wenn wir unsere Zinsen als einen Faktor übersetzen um zukünftige Beträge zu berechnen. In unserem Beispiel ist der Faktor $q = 1.06$.

Leider ist hier wieder eine Doppelbelegung von verschiedenen Buchstaben und Symbolen. Aber das lässt sich dann leider nicht vermeiden. Wenn ich hier die Buchstaben ändere, dann kommst du später ins Straucheln. Auch für mich ist es immer anstrgend sich alles neu für einen Bereich zu merken.

10.1. Jährliche Verzinsung

Beginnen wir mit der jährlichen Verzinsung. Bei Krediten und Spareinlagen ist die jährliche Verzinsung ja der Standard. Deshalb einmal die lineare Variante ohne die Zinseszins und dann einmal die exponentielle Verzinsung mit dem Zinseszins.

10.1.1. Einfache Zinsen ohne Zinseszinsen (lineare Verzinsung)

Fangen wir einmal mit der einfachen Formel für lineare Zinsen ohne Zinseszinsen an. Wir wollen wissen wie viel K_n wir aus K_0 mit einem Zinssatz i über n Jahre erhalten.

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

Machen wir das Ganze einmal mit einem Beispiel. Wir haben ein Startkapital von 1.000 EUR, welches zu einem Zinssatz von 5 Prozent über 2 Jahre angelegt wird. Bei einfacher Verzinsung ergäbe sich ein damit ein Endkapital wie folgt. Wir wollen also unser Endkapital K_2 nach zwei Jahren wissen.

$$K_2 = 1000 \text{ EUR} \cdot (1 + 2 \cdot 0.05) = 1100 \text{ EUR}$$

Damit kommen wir recht schnell und intuitiv auf unsere 1100 EUR. Problem ist nur, so wird nicht verzinst. Wir leben in einer Welt des Zinseszins, wie Einstein schon in dem Eingangszitat so schön formuliert hat.

10.1.2. Zinseszinsrechnung (exponentielle Verzinsung)

Wenn wir den Zinseszins mit berücksichtigen, dann ändert sich die Formel leicht. Wir haben jetzt eine Exponentialfunktion. Wir müssen also nur etwas anders rechnen. Das Setting ist wiederum das Gleiche, wir rechnen wieder mit einem Startkapital von 1.000 EUR, welches zu einem Zinssatz von 5 Prozent über 2 Jahre angelegt wird.

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot q^n$$

Dann einmal rein mit den Informationen in die Formel und schon erhalten wir unser Endkapitel nach zwei Jahren mit Zinseszins. Hier können wir uns aussuchen, ob wir mit der i-Formel oder der q-Formel rechnen.

$$K_2 = \overbrace{1000 \text{ EUR} \cdot (1+0.05)^2}^{K_0 \cdot (1+i)^n} = \underbrace{1000 \text{ EUR} \cdot (1.05)^2}_{K_0 \cdot q^n} = 1102.50 \text{ EUR}$$

Der Betrag ist natürlich hier mit 2.5 EUR sehr klein. Das macht sich aber bei größeren Beträgen und vorallem längeren Laufzeiten sehr stark bemerkbar! Deshalb schauen wir uns auch gleich einmal die 72er-Regel an.

10.2. 72er-Regel

Die 72er-Regel ist eigentlich eine wunberbare Regel, die es sehr schön erlaubt einmal abzuschätzen, wie gut sich eine Wertanlage lohnt. Die 72er-Regel beschreibt die Zeit t (in Jahren), in der sich eine Kapitalanlage mit Zinssatz i (pro Jahr) verdoppelt. Damit können wir für die 72-Regel wie folgt schreiben. Dabei bezeichnet p die Zinsen in Prozent.

$$t \approx \frac{72}{100 \cdot i} = \frac{72}{p} \text{ Jahre}$$

Wir können die Formel auch benutzen, um abzuschätzen, welche Prozentsatz p benötigt wird, um ein Kapital in vorgegebener Zeit t zu verdoppeln.

$$p \approx \frac{72 \text{ Jahre}}{t}$$

Damit kommen wir aucn schon zu dem Beispiel. In welcher Zeit t wird sich eine Wertanlage, der zu einem Prozentsatz von $p = 8$ (8 Prozent pro Jahr) angelegt ist, verdoppeln?

$$t = \frac{72}{p} \text{ Jahre} = \frac{72}{8} \text{ Jahre} = 9 \text{ Jahre}$$

Welche Zinsen in Prozent p (pro Jahr) benötigen wir, um ein Kapital im Zeitraum $t = 12$ Jahre zu verdoppeln?

$$p = \frac{72 \text{ Jahre}}{t} = \frac{72 \text{ Jahre}}{12 \text{ Jahre}} = 6 \text{ Jahre}$$

Die 72er-Regel können wir nicht nur auf die Zinsrechnung, sondern auf jede Art exponentiellen Wachstums anwenden. Beispielsweise beträgt die Generationszeit, also die Zeitspanne, in der sich eine Mikrobenpopulation verdoppelt, bei einer stündlichen Wachstumsrate von 4% ungefähr $\frac{72}{4} = 18$ Stunden.

10.3. Unterjährige Verzinsung

Manchmal haben wir das Problem, dass eine Wertanlage oder ein Kredit nicht ganzjährig läuft. Dann müssen wir mit unterjähriger Verzinsung rechnen. Bei unterjährig verzinslichen Anlagen erfolgt die Zinsgutschrift mehrmals im Jahr oder aber der Kredit läuft nur eine bestimmte Anzahl an Monaten. Der Zeitraum der Verzinsung ist also kleiner als ein Jahr. Üblich sind beispielsweise Zeiträume von:

- einem halben Jahr,
- einem Quartal oder
- einem Monat oder
- tageweise bei Restmonaten.

Die Anzahl der Zinsperioden im Jahr wird in Formeln durch das Symbol m ausgedrückt. Bei quartalsweiser Verzinsung wäre m zum Beispiel 4 also 4 Quartale pro Jahr. Oftmals wird daher ein sogenannter *nomineller Jahreszinssatz* (i_{nom}) angegeben. Der relative Periodenzinssatz i_{rel} beträgt dann:

$$i_{\text{rel}} = \frac{i_{\text{nom}}}{m}$$

Wir werden uns die Sachlage dann einmal an ein paar Beispielen anschauen, dann werden die Zusammenhänge dann auch meist klarer.

10.3.1. Einfache Verzinsung (linear)

Fangen wir wieder mit einem linearen Zusammenhang an. Wir haben das Endkapital $K_{n,k}$ nach n Jahren mit je m Zinsperioden sowie k weiteren unterjährigen Zinsperioden vorliegen. Damit gilt dann die folgende Formel für das Endkapital.

$$K_{\text{n,k}} = K_0 \cdot (1 + [n \cdot m + k] \cdot i_{\text{rel}})$$

Dabei stellt $n \cdot m + k$ die Gesamtzahl von Zinsperioden nach n Jahren und k Perioden dar. Schauen wir uns das einmal mit einem Zahlenbeispiel an. Ein Kapital von 1.000 EUR wird bei monatlicher Verzinsung ($m = 12$) zu einem nominellen Jahreszinssatz von 6 Prozent angelegt. Der relative Prozentsatz i_{rel} beträgt daher 0.5%. Nach 2 Jahren und 4 Monaten ergibt sich mit einfachen Zinsen ein Endkapital von 1140 EUR.

$$K_{2,4} = 1000\ \text{EUR}\cdot(1+[2\cdot12+4]\cdot0.005) = 1000\ \text{EUR}\cdot1140 = 1140\ \text{EUR}$$

Die Rechnung ist dabei relativ geradeaus. Du musst eben nur schauen, dass du die Jahre und Monate richtig berücksichtigst.

10.3.2. Verzinsung mit Zinseszinsen (exponentiell)

Die lineare Betrachtung macht eigentlich keinen tieferen Sinn. Wir arbeiten eigentlich nur mit dem Zinseszins. Hier haben wir das Endkapital $K_{n,k}$ nach n Jahren mit je m Zinsperioden sowie k weiteren unterjährigen Zinsperioden vorliegen. Die Laufzeit in Zinsperioden berechnet sich also analog zur einfachen Zinsrechnung wieder zu $n \cdot m + k$. Damit gilt dann folgende Formel für das exponentielle Wachstum der Anlage.

$$K_{\mathrm{n,k}} = K_0 \cdot (1 + i_{\mathrm{rel}})^{n \cdot m + k}$$

Zusätzlich zum *relativen* und *nominellen* Zinssatz lässt sich beim Zinseszinsfall der *effektive Jahres*zinssatz i_{eff} bestimmen, bei dem eine einmalige jährliche Verzinsung zu eben diesem Zinssatz dasselbe Ergebnis liefert wie eine mehrmalige unterjährige Verzinsung zum *relativen* Zinssatz. Wir berechnen dann den effektiven Jahreszins wie folgt.

$$i_{\mathrm{eff}} = \left(1 + \frac{i_{\mathrm{nom}}}{m}\right)^m - 1$$

Auch hier einmal ein Beispiel. Ein Kapital von 1.000 EUR wird wie oben angelegt ($m = 12$; $i_{\mathrm{nom}} = 6\%$; $i_{\mathrm{rel}} = \frac{0.06}{12} = 0.005$. Nach 2 Jahren und 4 Monaten und damit 28-maliger exponentieller Verzinsung mit dem relativen Periodenzinssatz i_{rel} beträgt das Kapital inkl. der Zinseszinsen dann 1149.87 EUR.

$$K_{2,4} = 1000 \text{ EUR} \cdot (1 + 0.005)^{2 \cdot 12 + 4} \approx 1149.87 \text{ EUR}$$

Dasselbe Resultat erhielte man aber auch, wenn man von vornherein mit dem effektiven Jahreszinssatz rechnen würde.

$$i_{\mathrm{eff}} = \left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12} - 1 \approx 0.061678 \approx 6.1678\%$$

Dann ändert sich die Formel nur leicht und wir erhalten aber das gleiche Ergebnis.

$$K_{2,4} = 1000 \text{ EUR} \cdot (1 + 0.061678)^{\frac{28}{12}} \approx 1149.87 \text{ EUR}$$

Teil VI.

Abspann

Letzte Änderung am 25. June 2024 um 13:52:24

> *“Kein Buch kann jemals fertig sein. Während wir daran arbeiten, lernen wir gerade genug, um es in dem Moment unfertig zu finden, in dem wir uns von ihm lösen.” — Karl Popper*

Kein Buch kann je fertig gestellt werden, auch dieses kurze Buch hier über die “Mathematik in den Agrawissenschaften” nicht. Ich bin aber soweit, das Buch als fertig zu empfinden an diesem sonnigen, beliebigen Montagmittag. Es hat alles was du und ich brauchen um eine Mathematikvorlesung zu gestalten. Am Ende ist es dann doch eine gute Referenz zum nachschlagen geworden. Möge dir das Buch von Nutzen sein. Mmir hat es Spaß gemacht zu schreiben.

– Osnabrück im Juni 2024