design of planar antenna

carlos ma

2025 年 9 月 21 日

法拉第電磁感應定律（微分形）

1. 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1}$$

2. 公式拆解

- $\nabla \times \mathbf{E}$ ：電場 $\mathbf{E}$ 的旋度，表示電場是否形成渦旋（環流）。
- $-\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ：磁場 $\mathbf{B}$ 隨時間的變化率，前方的負號代表方向抵抗磁通量的變化。

3. 物理意義

若磁場 $\mathbf{B}$ 在某區域隨時間改變，則該區域會產生一個環形的渦電場 $\mathbf{E}$。這個電場不是由靜電荷產生，而是因為磁場變化而感應出來。負號對應於楞次定律，說明感應電場的方向會抵抗磁通量的改變。

4. 與積分形式的關聯

積分形式為：

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \tag{2}$$

左邊為沿封閉迴路的電場環流（感應電動勢），右邊為穿過該迴路面的磁通量變化率。

5. 實際例子

- **發電機**：線圈在磁場中旋轉，磁通量隨時間變化，產生感應電壓。
- **變壓器**：原線圈中交流電流改變磁場，使次線圈感應出電壓。
- **無線充電**：發射線圈中的交變磁場在接收線圈中產生感應電流。

前提與假設

在**自由空間**（無源、均勻、各向同性）中，電荷密度 $\rho = 0$、電流密度 $\boldsymbol{J} = 0$，介電常數與磁導率為常數 ε_0, μ_0。四大方程式簡化為

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad \text{(高斯定律-電)} \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \text{(高斯定律-磁)} \tag{4}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \text{(法拉第定律)} \tag{5}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \qquad \text{(安培–麥斯威爾)} \tag{6}$$

安培–麥斯威爾定律

1. 微分形式

$$\nabla \times \boldsymbol{B} \;=\; \mu_0 \boldsymbol{J} \;+\; \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{7}$$

- $\nabla \times \boldsymbol{B}$ ：磁場 $\boldsymbol{B}$ 的旋度，代表磁場在空間中是否呈現「環流」分佈。
- $\mu_0 \boldsymbol{J}$ ：傳導電流 $\boldsymbol{J}$ 所貢獻的磁場（安培定律的原始部分）。
- $\mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ ：由隨時間變化的電場（位移電流）所貢獻的磁場。

麥斯威爾在安培定律中補上了「位移電流項」，才使電磁理論自洽，特別是在電容器充放電的情境中。

2. 積分形式

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} \;=\; \mu_0 \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{A} \;+\; \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} \tag{8}$$

- 左邊：沿著邊界迴路的磁場環流。
- 右邊第一項：穿過面積 S 的傳導電流。
- 右邊第二項：面積上電場通量的變化率（位移電流）。

3. 物理意義

磁場的來源不只是真實電流，還包括隨時間變化的電場。

在電容器充電的例子中，雖然極板之間沒有真實電流通過，但變化的電場相當於「虛擬電流」，它同樣會產生磁場。

這樣修正後，能保證電荷守恆（連續性方程）與電磁方程組的數學一致性。

4. 與電磁波的關係

- 法拉第定律：變化的磁場產生電場。
- 安培–麥斯威爾定律：變化的電場產生磁場。

兩者交互作用，導致電磁波可以在自由空間中自我傳遞。

$\mu_0\varepsilon_0$ 的意義

在安培–麥斯威爾定律裡出現的

$$\mu_0\varepsilon_0$$

其實是兩個基本常數的乘積：

1. 定義

- μ_0 ：**真空磁導率** (vacuum permeability，又叫磁常數)。在 SI 制中定義為

$$\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$

（亨利/米）。

- ε_0 ：**真空介電常數** (vacuum permittivity，又叫電常數)。數值為

$$\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

（法/米）。

2. 乘積的意義

它們的乘積出現在電磁波方程中：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

這裡 c 就是真空中的光速。

換句話說，光速其實由電與磁的基本常數決定。這是麥斯威爾電磁理論最重要的發現之一，也說明光是電磁波。

高斯定律（磁）

微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{9}$$

積分形式

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \tag{10}$$

物理意義

沒有磁單極；磁力線不會「起止」，而是形成閉合環。

1 Gauss's law 兩種等價形式

微分形（局部說法）

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{11}$$

在空間中每一點，電場的散度等於該點體電荷密度 ρ 除以真空介電常數 ε_0。散度 > 0 表示電場線在此處湧出（源）；< 0 表示匯入（匯）。

積分形（整體說法）

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV. \tag{12}$$

任一封閉曲面 ∂V 的電通量等於曲面包住的總電荷除以 ε_0。

兩者等價：散度定理

$$\int_V (\nabla\cdot\mathbf{E}) \, dV = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \;\Rightarrow\; \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0. \tag{13}$$

2 物理意義與直觀

- 電荷是電場線的源與匯：正電荷放出、負電荷吸入。
- 電通量衡量穿出曲面的淨場線數量；封閉曲面內淨電荷越大，通量越大。
- 若曲面內淨電荷為 0，總電通量必為 0（但 $\mathbf{E}$ 不必為 0）。

3 與庫侖定律／位勢的關係

靜電下 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$，故 $\mathbf{E} = -\nabla V$。代入微分形得卜松方程

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{14}$$

在無電荷區域為拉普拉斯方程 $\nabla^2 V = 0$。單一點電荷 q 於原點，$\rho = q\delta(\mathbf{r})$，由積分形得

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow\; \mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \, \hat{\mathbf{r}}, \tag{15}$$

即庫侖定律。

4 高對稱範例與高斯面選擇

選高斯面使 $\mathbf{E}$ 在面上（i）大小恆定，（ii）與面法向平行或垂直，（iii）部分通量為 0，以便積分。

(a) 無限大帶電平面（面電荷密度 σ）

取兩端在平面兩側的圓柱（藥罐）作高斯面。側面通量 $=0$，上下兩蓋通量相同：

$$EA+EA=\frac{\sigma A}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow\ E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{16}$$

方向由正電面朝外，與距離無關。

(b) 無限長直線電荷（線密度 λ）

取半徑 r、長度 L 的同軸圓柱。端面通量 $=0$；側面通量 $E(2\pi rL)$：

$$E(2\pi rL)=\frac{\lambda L}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow\ E(r)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{17}$$

(c) 均勻帶電實心球（體密度 ρ，半徑 R）

外部 $r\ge R$：$Q=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$，

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}. \tag{18}$$

內部 $r<R$：$Q(r)=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$，

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(r)}{r^2}=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}. \tag{19}$$

(d) 帶電球殼（表面電荷 σ）

殼外如點電荷：$E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$；殼內 $E=0$。

5 邊界條件與面電荷的跳躍

取穿過界面的極薄 pillbox 作高斯面，可得電場法向分量的跳躍：

$$(\mathbf{E}_{\text{外}}-\mathbf{E}_{\text{內}})\cdot\hat{\mathbf{n}}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \tag{20}$$

其中 σ 為界面上的表面電荷密度，$\hat{\mathbf{n}}$ 由內指向外。(靜電下 $\nabla\times\mathbf{E}=0$，故切向分量連續。)

6 介質中的高斯定律（位移向量 D）

將束縛電荷吸收進極化向量 $\mathbf{P}$，定義

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P},\qquad \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_{\text{free}},\qquad \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{A}=Q_{\text{free}}. \tag{21}$$

各向同性線性介質下 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$（$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$），計算常以「自由電荷」更方便。

7　常見陷阱

- 必須是封閉曲面；開放面不能直接用積分形。
- 通量 $=0$ 不代表 $\mathbf{E}=0$，可能僅是進出相抵。
- 對稱性不足時雖然高斯定律仍成立，但難以直接解出 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$，需改用位勢／卜松方程。
- 單位：$\rho\,[\mathrm{C/m^3}]$，$\varepsilon_0 \approx 8.854\times10^{-12}\ \mathrm{F/m}$；電通量單位 $[\mathrm{V\cdot m}]$ 或 $[\mathrm{N\,m^2/C}]$。

8　解題步驟速記

1. 判斷對稱性（球／柱／平面）。
2. 選高斯面使 $\mathbf{E}$ 易處理（恆定／平行或垂直）。
3. 寫通量 $\displaystyle\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$（多半為 $E\times$ 面積）。
4. 計算包住電荷（體／面／線積分或幾何體積 $\times$ 密度）。
5. 用 $\Phi_E = Q_{\mathrm{encl}}/\varepsilon_0$ 解出 E，並標明方向。

對電場 E 的波動方程

對 (5) 兩側取旋度：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) \;=\; -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B}). \tag{22}$$

使用向量恆等式 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}$，並代入 (3) 與 (6) 得

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \tag{23}$$

$$0-\nabla^2\boldsymbol{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \tag{24}$$

移項可得**電場的波動方程**：

$$\boxed{\nabla^2\boldsymbol{E} \;-\; \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \;=\; 0} \tag{25}$$

對磁場 B 的波動方程

同理，對 (6) 兩側取旋度：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \;=\; \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{E}). \tag{26}$$

使用恆等式並代入 (4) 與 (5)：

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \tag{27}$$

$$0-\nabla^2\boldsymbol{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}. \tag{28}$$

得到**磁場的波動方程**：

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{B} \ - \ \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \ = \ 0} \tag{29}$$

波速與光速的關係

比較 (25) 與 (29) 與標準波動方程 $\nabla^2\boldsymbol{\Psi} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2} = 0$ 可讀出自由空間中的相速度

$$v \ = \ \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \ \equiv \ c, \tag{30}$$

即**光速**。因此光是電磁波，且其速度由 μ_0 與 ε_0 這兩個基本常數決定。

平面波解與 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ 關係（選讀）

設平面波解 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$。代入 (5) 與 (6) 可得

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0 = \omega \boldsymbol{B}_0, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E}_0, \tag{32}$$

並有 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0 = 0$ （橫波）。在自由空間，

$$|\boldsymbol{E}_0| \ = \ c\,|\boldsymbol{B}_0|, \qquad \boldsymbol{E}_0 \perp \boldsymbol{B}_0 \perp \boldsymbol{k}. \tag{33}$$

延伸：介質中的波速

在均勻、各向同性**介質**中，以常數 ε, μ 取代 ε_0, μ_0，同樣推導得到

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \nabla^2 \boldsymbol{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0, \tag{34}$$

波速 $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} = c/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ ，其中 $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$、$\mu_r = \mu/\mu_0$。

4π 核心觀念

立體角（solid angle）以球面面積來定義：

$$\Omega = \frac{A}{r^2}, \qquad [\Omega] = \mathrm{sr}, \tag{35}$$

其中 A 是半徑 r 的球面上一塊對應面積。整個球面的面積為 $4\pi r^2$，因此整個球面對球心所張立體角

$$\Omega_{\text{sphere}} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \ \mathrm{sr}. \tag{36}$$

對於**任意封閉曲面** S，若觀測點 O 位於 S 的內部，則由 O 發出的所有射線都會與 S 相交一次，將 S 做**放射投影**到同心球面上，得到覆蓋整個球面的一張「貼圖」，故其**總立體角**必為 4π。若 O 在 S 外部，射線穿入與穿出相抵，$\Omega_{\text{total}} = 0$。

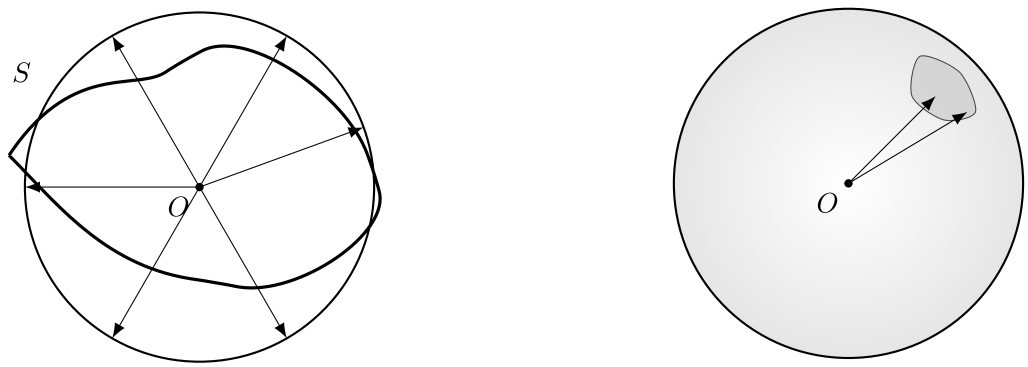
與高斯定律的關係

對點電荷 q，$\mathbf{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$。沿封閉曲面 S 的通量為

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{A}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\oint_S d\Omega}_{=4\pi\ (\text{若 } O \text{ 在 } S \text{ 內})} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \tag{37}$$

其中 $d\Omega \equiv \dfrac{\hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{A}}{r^2}$ 是微小立體角。這正是高斯定律的幾何本質。

圖示：放射投影與 4π



(a) 從 O 做放射投影：S 的外形投到球面上

(b) 球面上的區塊對應 $d\Omega = \frac{dA}{r^2}$，總和為 4π

图 1: 任意封閉曲面 S 由內點 O 看出去，放射投影覆蓋整個球面，$\int d\Omega = 4\pi$.

補充：外部觀測點時為何是 0？

若 O 在 S 外部，沿任意射線穿入與穿出各一次，可將 $d\Omega$ 分為正負兩部分（以外法向為準），積分相互抵消，$\oint_S d\Omega = 0$。這也對應到無電荷包裹時的零通量情形。

Dirac Delta Function in Spherical Coordinates

In Cartesian coordinates, the three-dimensional Dirac delta function is

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z), \tag{38}$$

which satisfies

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r})\,d^3r = f(0,0,0). \tag{39}$$

In spherical coordinates (r,θ,ϕ), the volume element is

$$d^3r = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi. \tag{40}$$

To preserve the defining property of the delta function, we require

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^2}\,\delta(r). \tag{41}$$

Verification

Consider

$$\int f(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r})\,d^3r = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r,\theta,\phi)\,\frac{1}{4\pi r^2}\,\delta(r)\,r^2 \sin\theta\,d\phi\,d\theta\,dr \tag{42}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \delta(r) f(r,\theta,\phi)\,dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\phi. \tag{43}$$

The angular integrals yield

$$\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = 2, \qquad \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi,$$

so the product is 4π. Therefore,

$$\int f(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r})\,d^3r = f(0). \tag{44}$$

Result

Thus, in spherical coordinates,

$$\boxed{\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^2}\,\delta(r)}. \tag{45}$$

For a point charge q at the origin, the charge density is

$$\rho(\mathbf{r}) = q\,\delta(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi r^2}\,\delta(r). \tag{46}$$

Application: Divergence of $\hat{r}/r^2$

A well-known identity in electromagnetism is

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\,\delta(\mathbf{r}), \tag{47}$$

where $\hat{r} = \mathbf{r}/r$ is the radial unit vector.

Proof

For $r > 0$, we can compute in spherical coordinates:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0. \tag{48}$$

Thus the divergence vanishes everywhere except at the origin $r = 0$. To find the contribution at the origin, apply the divergence theorem to a ball of radius R:

$$\int_{|\mathbf{r}|\le R} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) d^3r = \oint_{|\mathbf{r}|=R} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\mathbf{A} \tag{49}$$

$$= \oint_{|\mathbf{r}|=R} \frac{\hat{r}}{R^2} \cdot (R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}) \tag{50}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi \tag{51}$$

$$= 4\pi. \tag{52}$$

Since this holds for any radius R, the divergence must be a distribution concentrated at the origin with total integral 4π. Hence,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi \, \delta(\mathbf{r}). \tag{53}$$