Self-Injection-Locked (SIL) Oscillator Analysis

carlos ma

2025 年 9 月 12 日

Unwrap 的概念與必要性

1. 為什什麼需要「unwrap」？

當我們用

$$\hat{\theta} = \mathrm{atan2}(Q, I)$$

估相位時，輸出只會落在主值範圍 $(-\pi, \pi]$。

例如真實相位隨著時間連續增加：

$$0 \ \rightarrow \ \pi \ \rightarrow \ 2\pi \ \rightarrow \ 3\pi \ \ldots$$

而 atan2 會輸出：

$$0 \ \rightarrow \ \pi \ \rightarrow \ -\pi \ \rightarrow \ 0 \ \ldots$$

因此曲線會「跳回去」，呈現鋸齒狀斷裂。在雷達或干涉儀位移量測時，這會使得「位移」看起來來回震盪，而不是單調增加。

2. Unwrap 的原理

Unwrap 的核心概念是檢查相鄰樣本的差異：

- 如果相位跳超過 $+\pi$，判斷這其實是跨過 $+2\pi$，於是把它減掉 2π。
- 如果相位跳低於 $-\pi$，判斷是跨過 -2π，於是把它加回 2π。

如此，每次跨過邊界，都補上 $\pm 2\pi$，讓相位曲線恢復成連續。

3. 公式與演算法

假設

$$\phi[k] = \mathrm{atan2}(Q[k], I[k]) \quad \in (-\pi, \pi]$$

為主值範圍的相位。

Unwrap 後的新相位 $\Phi[k]$ 定義為：

$$\Phi[k] = \Phi[k-1] + \Delta\phi[k]$$

其中

$$\Delta\phi[k] = \phi[k] - \phi[k-1].$$

若 $\Delta\phi[k] > \pi$，則

$$\Delta\phi[k] := \Delta\phi[k] - 2\pi.$$

若 $\Delta\phi[k] < -\pi$，則

$$\Delta\phi[k] := \Delta\phi[k] + 2\pi.$$

如此即可消除跳躍，得到連續相位。

4. 例子：位移量測

在單站雷達裡，相位與位移的關係為：

$$\theta(t) = \frac{4\pi}{\lambda}\, x(t).$$

若 $x(t)$ 線性增加，則 $\theta(t)$ 會隨時間不斷增加。

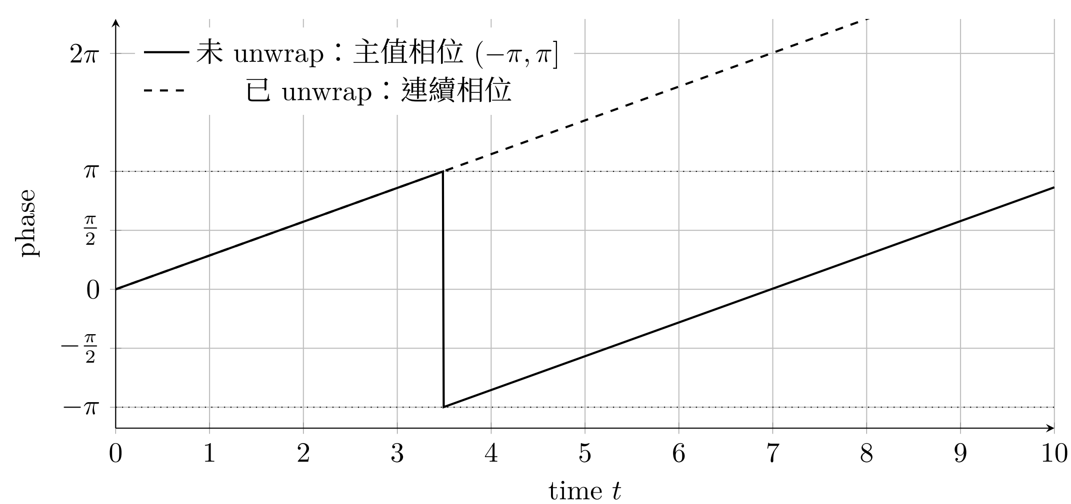
- 沒有 Unwrap：相位會在 $(-\pi, \pi]$ 間來回跳動，像鋸齒波。
- 有 Unwrap：相位曲線會一路單調上升，可直接換算成真實位移。

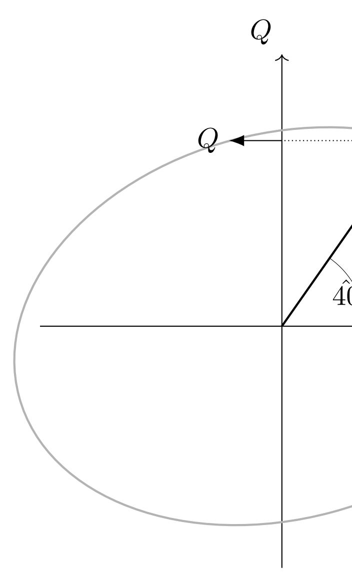
5. 總結

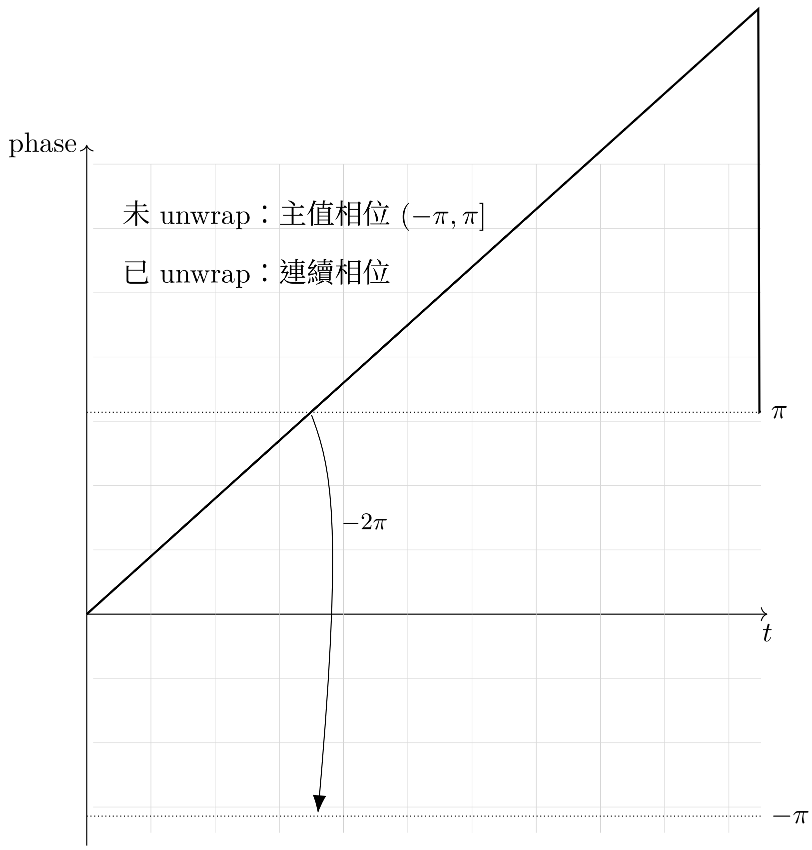
$$\text{atan2} \;\rightarrow\; \text{只給主值相位（有限範圍）},$$

$$\text{unwrap} \;\rightarrow\; \text{補上跨越的整數倍 } 2\pi\text{，得到連續相位}.$$

在 QSIL 或 FMCW 雷達中，這是把「週期相位 $\rightarrow$ 連續位移」的關鍵步驟。







I/Q 相位估計與 Null Point 問題

超重點

用 I/Q 估相位時，正確做法是

$$\hat{\theta} = \operatorname{atan2}(Q, I)$$

而不是單純的 $\arctan(I/Q)$。因為 $\operatorname{atan2}(Q, I)$ 同時考慮分子與分母的符號，能正確判斷象限，避免除以零的奇點，才真正「無死區」。

1) 訊號模型

QSIL（或一般正交檢波）將回授訊號投影到正交基底：

$$I = A\cos\theta, \quad Q = A\sin\theta$$

其中 θ 是欲量測的相位（例如位移造成的相位差），A 為幅度。

2) 單一路徑為何有 Null Point

若只看單一路徑（例如 $I = \cos\theta$），輸出對相位的靈敏度：

$$\frac{dI}{d\theta} = -\sin\theta$$

在 $\theta = 0, \pm\pi, \ldots$ 都為零，表示此處對相位變化無感，形成死區。若用 $Q = \sin\theta$，則在 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \ldots$ 失靈。

3) I/Q 合起來就沒有死區

將 (I, Q) 視為複數向量 $Ae^{j\theta}$ 的笛卡兒座標。利用

$$\hat{\theta} = \operatorname{atan2}(Q, I)$$

計算相位，並分析其對真實相位 θ 的微分：

$$dI = -A\sin\theta\, d\theta, \quad dQ = A\cos\theta\, d\theta$$

$$d\hat{\theta} = \frac{I\, dQ - Q\, dI}{I^2 + Q^2} = \frac{A^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\theta}{A^2} = d\theta$$

因此：

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = 1$$

此結果與 θ、A 無關，表示靈敏度在所有相位都相同，不存在死區。唯一例外是 $A = 0$（訊號消失）。

4) 為何不是 $\arctan(I/Q)$

$$\arctan\left(\frac{I}{Q}\right) = \arctan(\cot\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$$

此方法存在象限判斷問題，且在 $Q = 0$ 時會發散。相比之下，$\operatorname{atan2}(Q, I)$：

- 正確判斷象限，避免 π 誤差。
- 在 $I = 0$ 或 $Q = 0$ 附近仍穩定。
- 給出 $(-\pi, \pi]$ 的主值，相位可再用 unwrap 延展。

5) 與 QSIL 的關係

QSIL 會將 $\hat{\theta} = \operatorname{atan2}(Q, I)$ 餵回注入鎖定迴路，作為誤差信號。透過 $\sin\hat{\theta}, \cos\hat{\theta}$ 轉換為兩路注入控制，使振盪器相位往 $-\hat{\theta}$ 調整，讓合成環路相位趨近 0。由於 $\hat{\theta}$ 對真相位的增益恆為 1、無死區，整個迴路的誤差信號在全相位範圍保持線性，因此可穩定鎖定並輸出與位移/速度成正比的量測。

例如連續波位移量測：

$$\theta = \frac{4\pi}{\lambda} x$$

（單站雷達；來回路徑），估計得到 $\hat{\theta}$ 後：

$$\hat{x} = \frac{\lambda}{4\pi} \operatorname{unwrap}(\hat{\theta})$$

若僅用單一路徑（$\cos\theta$），在 $\theta \approx 0$ 時即陷入死區；I/Q 方式則不會。

6) 實作注意

- **DC 偏移**：先對 I/Q 去 DC，避免偏差。
- **增益/相位不平衡**：I/Q 失衡會造成橢圓軌跡，可做 2×2 線性校正拉回圓形，再用 atan2。
- **相位展延 (unwrap)**：atan2 輸出 $(-\pi, \pi]$，需 unwrap 以跨越多個 2π。
- **雜訊/幅度變化**：監測 $\hat{A} = \sqrt{I^2 + Q^2}$ 作為 SNR；在太小時降低增益或凍結估計。
- **硬體實現**：常用 CORDIC 演算法實作 atan2，延遲固定、資源省。

一句話總結

$$\text{單路徑：} I = \cos\theta \text{ 或} Q = \sin\theta \;\Rightarrow\; \frac{d}{d\theta} = 0 \text{ 於某些點，存在死區}$$

$$\text{I/Q：} (I, Q) = (A\cos\theta, A\sin\theta),\; \hat{\theta} = \mathrm{atan2}(Q, I) \;\Rightarrow\; \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = 1 \text{ 全域線性、無死區}$$

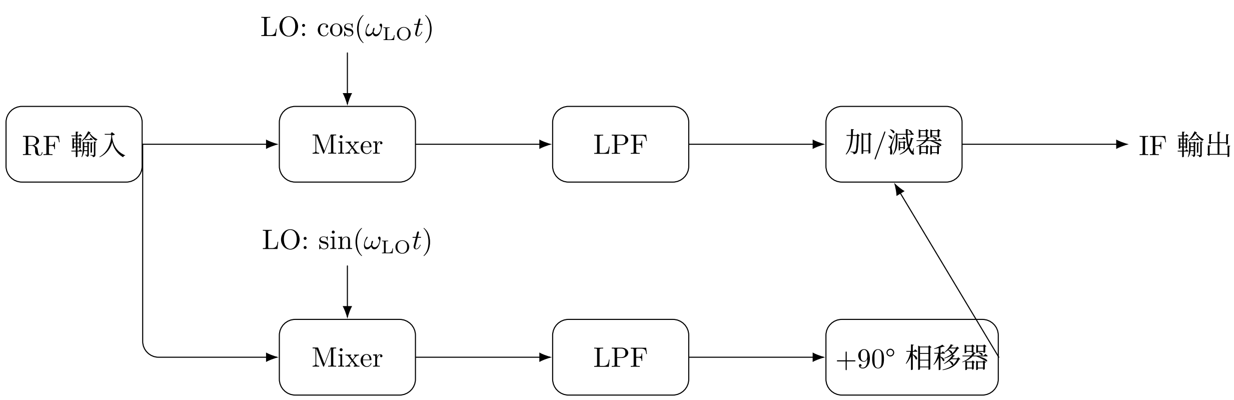
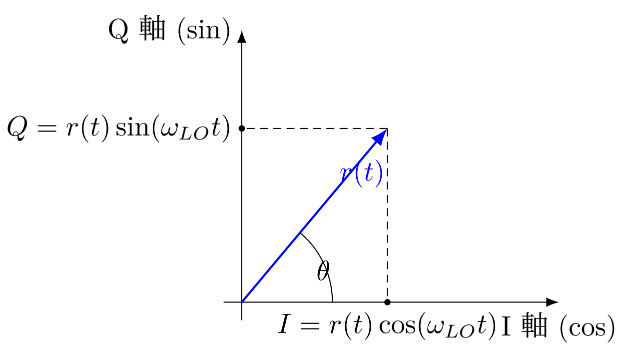


图 1: **Hartley 鏡像頻率抑制接收機架構**（Block diagram of a Hartley image-reject receiver）。RF 同時與兩路正交 LO 相乘產生 I/Q，經低通後，對 Q 路加上 $+90^\circ$ 相移，再與 I 路進行加/減組合以抵消鏡像分量並保留目標分量。其中 $\cos(\omega_{\mathrm{LO}} t)$ 是本地振盪器（LO）的同相分量 (I-branch)，$\sin(\omega_{\mathrm{LO}} t)$ 是正交分量 (Q-branch)，兩者相差 90°。



Hartley 架構與鏡像抑制原理

1. 鏡像頻率問題

在超外差接收機中，RF 輸入信號可寫成

$$r(t) = s(t) + i(t) = Se^{j\omega_s t} + Ie^{j\omega_i t}$$

其中 $s(t)$ 為欲接收的目標分量，$i(t)$ 為鏡像分量。

本地振盪器 (LO) 提供正交分量

$$\cos(\omega_{LO}t), \qquad \sin(\omega_{LO}t)$$

經過 I/Q 混頻與低通濾波器 (LPF) 後得到：

$$I(t) = \Re\{r(t)e^{-j\omega_{LO}t}\}, \qquad Q(t) = \Im\{r(t)e^{-j\omega_{LO}t}\}$$

因此可得複基帶表示：

$$I(t) + jQ(t) \approx Se^{j(\omega_s-\omega_{LO})t} + Ie^{j(\omega_i-\omega_{LO})t}$$

—

2. 鏡像分量的特性

目標分量與鏡像分量在複平面上的關係互為共軛：

$$\text{欲接收分量} \sim e^{+j\Delta\omega t}, \qquad \text{鏡像分量} \sim e^{-j\Delta\omega t}$$

也就是說，目標分量相位方向為「正轉」，鏡像分量則為「反轉」。

—

3. Hartley 架構處理方式

Hartley 架構在 Q 路加入一個 +90° 相移器，然後將 I 與移相後的 Q 進行加/減組合：

$$y(t) = I(t) \pm Q'(t), \qquad Q'(t) = Q(t)\ \text{相移} + 90^\circ$$

其效果為：

- 欲接收分量：I 路與相移後的 Q 路相位一致，合成後加強（保留）。
- 鏡像分量：I 路與相移後的 Q 路相位正好相反，合成後相消（抑制）。

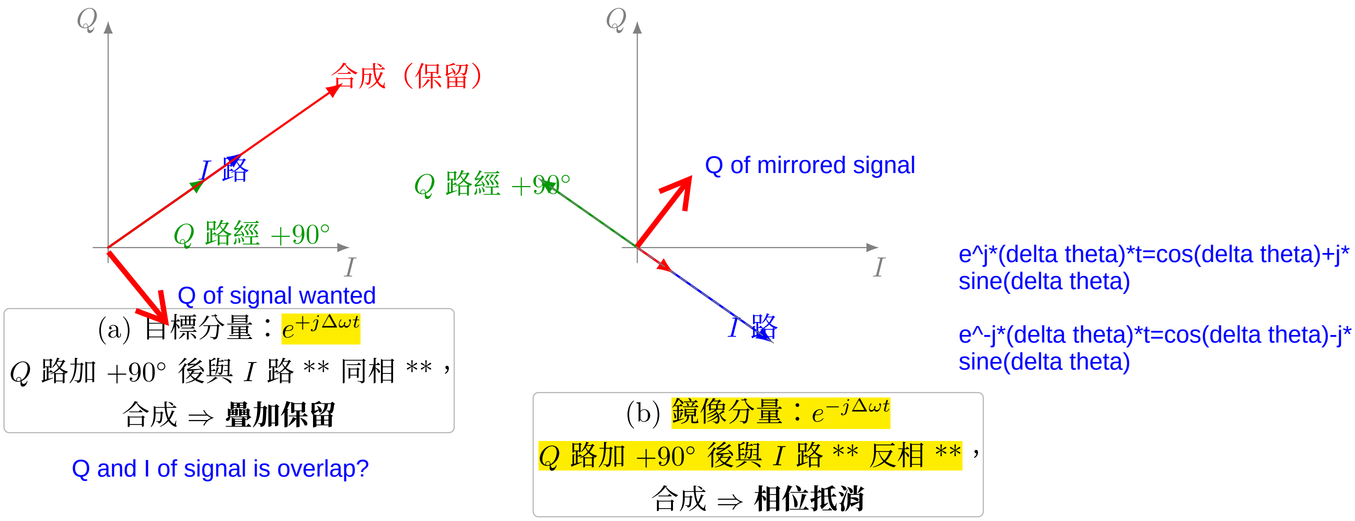
—

4. 結論

Hartley 架構利用 I/Q 正交信號的相位關係，使得

$$\text{欲接收分量} \Rightarrow \text{疊加保留},$$
$$\text{鏡像分量} \Rightarrow \text{相位抵消}.$$

因此達成全數位或類比電路層面的鏡像頻率抑制，而不需要極高 Q 值的 RF 前置濾波器。



I/Q 下變頻與鏡像分量的來源

1. 把 RF 信號寫成複數形式

假設天線收到兩個分量：

- 目標訊號：頻率 ω_s，複數 phasor 振幅 S
- 鏡像分量：頻率 ω_i，振幅 I i,I=image or mirrored

則可寫成：

$$r(t) = s(t) + i(t) = Se^{j\omega_s t} + Ie^{j\omega_i t}$$

其中 $e^{j\omega t}$ 是複數形式的正弦波。

2. 本地振盪器 (LO)

LO 提供正交兩路：

$$\cos(\omega_{LO}t), \qquad \sin(\omega_{LO}t)$$

這兩個其實就是：

$$\cos(\omega_{LO}t) = \Re\{e^{j\omega_{LO}t}\}, \qquad \sin(\omega_{LO}t) = \Im\{e^{j\omega_{LO}t}\}$$

3. 混頻的數學形式

在 I/Q 解調裡，可以把「與 LO 相乘」等價於「乘上 $e^{-j\omega_{LO}t}$，再取實部/虛部」：

$$I(t) = \Re\{\, r(t)e^{-j\omega_{LO}t}\}, \qquad Q(t) = \Im\{\, r(t)e^{-j\omega_{LO}t}\}$$

4. 展開來看

代入 $r(t) = Se^{j\omega_s t} + Ie^{j\omega_i t}$：

$$r(t)e^{-j\omega_{LO}t} = Se^{j(\omega_s-\omega_{LO})t} + Ie^{j(\omega_i-\omega_{LO})t}$$

因此，複基帶表示為：

$$I(t) + jQ(t) \;\approx\; Se^{j(\omega_s-\omega_{LO})t} \;+\; Ie^{j(\omega_i-\omega_{LO})t}$$

5. 為什麼說「一項是目標，一項是鏡像」?

- 第一項：$Se^{j(\omega_s-\omega_{LO})t} \to$ 這是欲接收的訊號，因為它的頻率正好是 IF：$\omega_{IF} = \omega_s - \omega_{LO}$。
- 第二項：$Ie^{j(\omega_i-\omega_{LO})t} \to$ 這是鏡像分量，雖然原頻率是 ω_i，但混頻後也落到 IF 頻帶。

6. 簡單理解

1. RF 信號 = 「好訊號」$e^{j\omega_s t}$ + 「鏡像」$e^{j\omega_i t}$。
2. 混頻 = 乘上 $e^{-j\omega_{LO}t}$，等效於「往下搬移 $-\omega_{LO}$」。
3. 所以兩個分量同時被搬到中頻 (IF)。
4. 一個是目標，一個是多出來的影像 (image)。
5. Hartley 架構利用 I/Q + 90° 相移，使鏡像抵消。

結論

經過 I/Q 下變頻後，輸出的複數訊號同時包含了

$$\text{目標的中頻分量} \;+\; \text{鏡像的中頻分量}$$

Hartley 架構的任務，就是透過相位處理把鏡像分量消除。

為什麼實際接收時會同時出現目標訊號與鏡像分量

1. 超外差接收機的混頻原理

RF 輸入信號頻率 f_{RF} 經過本地振盪器 (LO) 頻率 f_{LO} 混頻後，會同時產生兩個分量：

$$f_{IF} = |f_{RF} - f_{LO}|, \qquad f_{SUM} = f_{RF} + f_{LO}$$

其中，f_{IF} 為中頻 (Intermediate Frequency)，而高頻的和頻 f_{SUM} 通常經由濾波器濾除。

2. 鏡像頻率的來源

數學上，若我們希望得到某一個中頻 f_{IF}，則有兩種不同的 RF 頻率都會被轉換到相同的 IF：

$$\begin{aligned}\text{高邊注入 (high-side)}: &\quad f_{RF} = f_{LO} + f_{IF}\\ \text{低邊注入 (low-side)}: &\quad f_{RF} = f_{LO} - f_{IF}\end{aligned}$$

因此，除了「目標訊號」之外，還會有另一個對稱頻率的訊號也落在同樣的 IF 上，這個不需要的訊號就稱為 **鏡像分量 (image frequency)**。

3. 為什麼實際上會出現鏡像

因為實際的無線電環境中，RF 頻譜並不只有單一信號：若在「鏡像頻率」

$$f_{IM} = f_{LO} \pm f_{IF}$$

的地方，剛好存在其他電台訊號、雜訊或干擾，混頻器會同時把它們轉換到 IF 頻帶，與目標訊號疊加，造成失真或干擾。

4. 解決方法

- **RF 前置濾波器**：在混頻之前，使用高 Q 值的濾波器只通過欲接收的頻段，抑制鏡像分量。
- **I/Q 解調（Hartley 或 Weaver 架構）**：利用正交訊號與 90° 相移，將鏡像分量在相位上抵消。

5. 結論

因此，實際接收時會同時觀測到目標訊號與鏡像分量，是因為對於任意一個 IF，數學上必然存在兩個對稱的 RF 頻率能被轉換到該 IF；若鏡像頻率上存在能量，則會被「白白搬移」到 IF 頻帶，造成干擾。

I/Q 軸是否在旋轉？

在超外差或直接變頻接收機中，本地振盪器 (LO) 會產生兩個正交波形：

$$\cos(\omega_{\mathrm{LO}} t), \qquad \sin(\omega_{\mathrm{LO}} t).$$

接收端將射頻訊號 $r(t)$ 同時與這兩個波形相乘，經過低通濾波後即可得到 I 與 Q 分量。

電路/實作觀點

在電路實作的角度來看：

- I 軸對應於與 $\cos(\omega_{\mathrm{LO}} t)$ 相乘的通道；
- Q 軸對應於與 $\sin(\omega_{\mathrm{LO}} t)$ 相乘的通道。

因此 I 與 Q 軸實際上是「固定的兩條路徑」，並不隨時間旋轉。

數學/訊號空間觀點

若將 RF 訊號表示為

$$r(t) = Ae^{j\omega_{\mathrm{RF}} t},$$

它在複平面上等效為一個以角速度 ω_{RF} 旋轉的向量。

接收端將其與 LO 相乘：

$$r(t) \cdot e^{-j\omega_{\mathrm{LO}} t} = Ae^{j(\omega_{\mathrm{RF}} - \omega_{\mathrm{LO}})t},$$

數學上等價於「切換到一個以 ω_{LO} 旋轉的參考座標系」。在這個新座標下，訊號只剩下差頻 $\omega_{\mathrm{RF}} - \omega_{\mathrm{LO}}$ 的旋轉速度。

統一理解

- **硬體觀點**：I/Q 軸是固定不動的（cos 與 sin 通道）。
- **數學觀點**：I/Q 軸等效於跟 LO 一起旋轉，使得訊號頻率「慢下來」。

換句話說，兩種觀點並不矛盾，只是「到底是訊號在轉，還是軸在轉」的語言描述不同而已。