design of planar antenna

carlos ma

2025 年 10 月 20 日

(1) 勢函數的波動方程（Lorenz 規範）

由勢的定義

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

配合 Lorenz 規範

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

可得含源波動方程：

$$\nabla^2\Phi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{1}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\,\mathbf{J}. \tag{2}$$

—

(2) 電場的波動方程

從法拉第定律取旋度：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}),$$

利用向量恆等式與高斯定律、安培–麥斯威爾定律，得

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\, \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) + \mu\, \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \tag{3}$$

—

(3) 磁場的波動方程

由安培–麥斯威爾定律取旋度並代入 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$：

$$\nabla^2\mathbf{B} - \mu\varepsilon\, \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\,\mu\, \nabla \times \mathbf{J}. \tag{4}$$

—

(4) 無源情況

若 $\rho = 0,\ \mathbf{J} = 0$，則 (3) 與 (4) 退化為齊次波動方程：

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \nabla^2\mathbf{B} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0,$$

對應到自由空間的電磁波傳播，波速為 $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$。

—

(5) 比較總結

	勢函數波動方程	**場的波動方程**
形式	$\nabla^2\Phi - \mu\varepsilon\,\partial_t^2\Phi = -\rho/\varepsilon$ $\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\,\partial_t^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$	$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\,\partial_t^2\mathbf{E} = \nabla(\rho/\varepsilon) + \mu\partial_t\mathbf{J}$ $\nabla^2\mathbf{B} - \mu\varepsilon\,\partial_t^2\mathbf{B} = -\mu\nabla\times\mathbf{J}$
源項	直接出現 $\rho, \mathbf{J}$	含有 $\nabla\rho,\ \partial_t\mathbf{J},\ \nabla\times\mathbf{J}$
解法便利性	適合用綠函數 $\to$ 得到推遲勢 (retarded potentials)	源項複雜，較難直接求解，通常透過勢間接求解
規範依賴	需要選規範（此處用 Lorenz gauge）	無規範問題，因 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 為物理量
無源極限	變成齊次波動方程，解為平面波/球面波	同樣退化為齊次波動方程，與圖 (2)(3) 相符

頻域形式（$e^{-j\omega t}$ 慣例）

(1) 勢函數的 Helmholtz 方程（Lorenz 規範）

Lorenz 規範在頻域為

$$\nabla\cdot\mathbf{A} \;-\; j\omega\,\mu\varepsilon\,\Phi \;=\; 0.$$

對應的勢方程變為 Helmholtz 形式：

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\,\Phi(\mathbf{r},\omega) = -\,\frac{\rho(\mathbf{r},\omega)}{\varepsilon}, \tag{5}$$

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\,\mathbf{A}(\mathbf{r},\omega) = -\,\mu\,\mathbf{J}(\mathbf{r},\omega), \tag{6}$$

其中

$$k^2 \;=\; \omega^2\,\mu\,\varepsilon.$$

若介質有電導率 σ，常以

$$\varepsilon_c \;=\; \varepsilon \;-\; \frac{j\sigma}{\omega}$$

取代 ε，則 $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon_c$（衰減與相位同時包含在 k 中）。

(2) 電場的頻域波動方程（含源的一般式）

由時間域式 $\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\,\partial_t^2\mathbf{E} = \nabla(\rho/\varepsilon) + \mu\,\partial_t\mathbf{J}$ 代入 $\partial_t \to -j\omega$ 可得

$$\boxed{\left(\nabla^2 + k^2\right)\mathbf{E} \;=\; \nabla\!\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) \;-\; j\omega\,\mu\,\mathbf{J}}. \tag{7}$$

(3) 磁場的頻域波動方程（含源的一般式）

由時間域式 $\nabla^2\mathbf{B} - \mu\varepsilon\,\partial_t^2\mathbf{B} = -\,\mu\,\nabla\times\mathbf{J}$ 得到

$$\boxed{\left(\nabla^2 + k^2\right)\mathbf{B} \;=\; -\,\mu\,\nabla\times\mathbf{J}}. \tag{8}$$

(4) 頻域的麥斯威爾方程與連續性方程（供對照）

在 $e^{-j\omega t}$ 慣例下，

$$\begin{aligned} &\nabla\times\mathbf{E} = \;+j\omega\,\mathbf{B}, && \nabla\cdot\mathbf{B} = 0,\\ &\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} \;-\; j\omega\,\mathbf{D}, && \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho,\\ &\text{連續性：}\quad \nabla\cdot\mathbf{J} = j\omega\,\rho. && \end{aligned}$$

(5) 無源與均勻介質的特例

若 $\rho = \mathbf{J} = 0$，則 (7), (8) 退化為

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\mathbf{E} = 0, \qquad \left(\nabla^2 + k^2\right)\mathbf{B} = 0,$$

為標準的 Helmholtz 方程。平面波解滿足 $\mathbf{E},\mathbf{H} \propto e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, 其中 $|\mathbf{k}| = k$，相速度 $v_p = \omega/k = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$。

推導

從麥斯威爾方程與向量勢定義出發：

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{9}$$

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}. \tag{10}$$

將 (10) 代入 (9)：

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\,\frac{\partial}{\partial t}\big(\nabla\times\mathbf{A}\big) \;\;\Longrightarrow\;\; \nabla\times\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}.$$

因為 $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$ 的向量場 $\mathbf{F}$ 可寫成某純量函數的負梯度（在單連通區域）：

$$\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\,\nabla\Phi,$$

故得到

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}}$$

這一式將電場分解為 靜電部分 $(-\nabla\Phi)$ 與 感應部分 $(-\partial_t\mathbf{A})$。

規範自由度（Gauge Freedom）

勢函數不是唯一的。對任意標量函數 $\chi(\mathbf{r}, t)$，變換

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \qquad \Phi' = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

可保持 $\mathbf{E}$ 與 $\mathbf{B}$ 不變（容易驗證 $\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B}$，且 $\mathbf{E}' = -\nabla\Phi' - \partial_t \mathbf{A}' = \mathbf{E}$）。常見選擇如 Lorenz 規範 $\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\varepsilon\, \partial_t \Phi = 0$ 或 Coulomb 規範 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$，用來簡化方程的耦合。

直觀註解

$-\nabla\Phi$ 來自電荷分佈（靜電勢），$-\partial_t \mathbf{A}$ 對應隨時間變化的磁場所誘發的感應電場（法拉第定律）。二者共同構成一般情況下的電場。

1. 數學上的角色

定義：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

因為 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$，必定存在這樣的向量勢 $\mathbf{A}$。

再引入純量勢 Φ，我們也能寫出

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

因此 $(\Phi, \mathbf{A})$ 是場的「勢函數」，能把四個麥斯威爾方程壓縮成兩個波動方程。

2. 在經典電磁學的物理意義

在大多數情況下，$\mathbf{A}$ 被視為「方便的中介」，因為 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 才是直接可測量的量。

然而 $\mathbf{A}$ 仍有直觀的物理詮釋：

在靜態情況下（$\partial_t \mathbf{A} = 0$），$\mathbf{A}$ 對應於電流分佈的「分佈型磁效應」。例如：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3 r',$$

這形式與電勢

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3 r'$$

十分相似。

換句話說，$\mathbf{A}$ 是「磁場的勢函數」，與電流分佈直接相連。

向量勢與電流分佈的直接相連

1. 向量勢的波動方程

在 Lorenz 規範下，向量勢 $\mathbf{A}$ 滿足

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}. \tag{11}$$

右邊的源項就是電流密度 $\mathbf{J}$ 本身，沒有再經過任何空間或時間導數。
因此 $\mathbf{A}$ 可以直接由電流分佈給出推遲勢解：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}\Big(\mathbf{r}',\, t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\Big)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3 r', \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}. \tag{12}$$

—

2. 場的波動方程比較

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla\Big(\frac{\rho}{\varepsilon}\Big) + \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \tag{13}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu\, \nabla \times \mathbf{J}. \tag{14}$$

這裡電場 $\mathbf{E}$ 與磁場 $\mathbf{B}$ 的源項包含了 $\nabla\rho$、$\partial_t \mathbf{J}$、$\nabla \times \mathbf{J}$ 等導數，因此不是單純的 $\rho, \mathbf{J}$。
—

3. 比較表

	向量勢 $\mathbf{A}$	**電場/磁場 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$**
波動方程右邊的源	$-\mu \mathbf{J}$（電流本身）	$\nabla\rho,\ \partial_t \mathbf{J},\ \nabla \times \mathbf{J}$ 等導數
與電流的關係	直接相連：知道 $\mathbf{J}$，即可積分得 $\mathbf{A}$	間接相連：需要經過導數或時間變化才能得到源項
解法便利性	可直接用格林函數求推遲勢 (retarded potentials)	通常透過勢來解，再由 $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_t \mathbf{A}$、$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 還原

—

4. 意義

所謂「**直接相連**」就是指：

> 在數學上，$\mathbf{A}$ 的源項就是電流密度 $\mathbf{J}$，沒有額外的導數。因此 $\mathbf{A}$ 能夠以一個簡單的推遲積分形式直接由電流分佈決定。相對地，$\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 的波動方程則包含 $\rho, \mathbf{J}$ 的導數，與源之間的關係較為間接。

1. 方程回顧

徑向對稱下（$A_x = A_x(r)$），Helmholtz 方程化為

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dA_x}{dr}\right) + \beta^2 A_x = 0. \tag{15}$$

2. 消去一階項的代換

令

$$A_x(r) = \frac{u(r)}{r}.$$

代入 (15) 並化簡可得

$$\frac{1}{r}\Big(u'' + \beta^2 u\Big) = 0 \implies u'' + \beta^2 u = 0.$$

3. 求解 $u(r)$ 與還原 $A_x(r)$

常係數二階常微分方程 $u'' + \beta^2 u = 0$ 的通解為

$$u(r) = C_1 e^{-j\beta r} + C_2 e^{+j\beta r}.$$

故

$$\boxed{A_x(r) = \frac{C_1 e^{-j\beta r}}{r} + \frac{C_2 e^{+j\beta r}}{r}}.$$

4. 物理解讀與常見邊界條件

- $e^{-j\beta r}/r$：向外傳播的球面波（輻射場），振幅隨 $1/r$ 衰減。
- $e^{+j\beta r}/r$：向內傳播的球面波（收斂波）。
- **Sommerfeld 輻射條件**（只允許外傳波）時，取 $C_2 = 0$，得

$$A_x(r) = \frac{C\, e^{-j\beta r}}{r}.$$

- 在原點 $r \to 0$ 的正則性：$1/r$ 型解在 $r = 0$ 發散，表示此通解適用於源外區域（$r > 0$）；若含源需改用格林函數或分段解並配合匹配條件。

1. 從柱坐標下的亥姆霍茲方程開始

在柱坐標 (ρ, ϕ, z) 中，假設場量只依賴徑向 ρ，則亥姆霍茲方程

$$\nabla^2 A + \beta^2 A = 0$$

化為

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dA}{d\rho}\right) + \beta^2 A = 0.$$

這就是零階貝索方程 (Bessel equation of order 0)。

2. 方程形式

展開得

$$\frac{d^2A}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dA}{d\rho}+\beta^2A=0,$$

這正是零階 Bessel 方程：

$$A''(\rho)+\frac{1}{\rho}A'(\rho)+\beta^2A(\rho)=0.$$

3. 一般解：Bessel 函數

一般解可寫成

$$A(\rho)=C_1J_0(\beta\rho)+C_2Y_0(\beta\rho),$$

其中 J_0, Y_0 分別是零階第一、二類 Bessel 函數。

4. 漸近形式（大 ρ 時）

當 $\rho\to\infty$，Bessel 函數的漸近式為

$$J_0(\beta\rho)\sim\sqrt{\tfrac{2}{\pi\beta\rho}}\cos\bigl(\beta\rho-\tfrac{\pi}{4}\bigr),$$

$$Y_0(\beta\rho)\sim\sqrt{\tfrac{2}{\pi\beta\rho}}\sin\bigl(\beta\rho-\tfrac{\pi}{4}\bigr).$$

把正弦、餘弦組合成指數形式，可得

$$A(\rho)\sim\rho^{-1/2}\Bigl[C_1e^{-j\beta\rho}+C_2e^{j\beta\rho}\Bigr].$$

5. 物理意義

- $e^{-j\beta\rho}$：向外傳播的柱面波。
- $e^{+j\beta\rho}$：向內傳播的柱面波。
- $\rho^{-1/2}$：振幅衰減因子。
  對比球面波是 $1/r$ 衰減（能量分散在球面上），柱面波能量分散在圓柱曲面上，故衰減為 $1/\sqrt{\rho}$。

總結

柱面波的「通解」最嚴謹的形式是

$$A(\rho)=C_1J_0(\beta\rho)+C_2Y_0(\beta\rho).$$

在遠場近似（大 ρ），Bessel 函數漸近式化為 $\rho^{-1/2}$ 乘上指數波，這就得到

$$A(\rho)\sim\rho^{-1/2}\Bigl(C_1e^{-j\beta\rho}+C_2e^{j\beta\rho}\Bigr).$$

1 ideal dipole

We have

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}.$$

For a Hertzian dipole, the magnetic field is

$$\mathbf{H} = \frac{I\Delta z}{4\pi} \left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\beta r} \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Since only H_ϕ is nonzero, the curl in spherical coordinates yields

$$E_r = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{2\cos\theta}{r} H_\phi = \frac{\eta I\Delta z}{4\pi} e^{-jkr} \, 2\cos\theta \left(\frac{1}{r^2} - \frac{j}{kr^3} \right),$$

$$E_\theta = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \big(r H_\phi \big) = \frac{\eta I\Delta z}{4\pi} e^{-jkr} \sin\theta \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{j}{kr^3} \right),$$

$$E_\phi = 0,$$

where $k = \beta$ and

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \qquad \frac{1}{j\omega\varepsilon} = \frac{\eta}{jk}.$$

—

Far-field approximation ($kr \gg 1$):

$$\mathbf{E} \approx \frac{\eta I\Delta z}{4\pi} \frac{jk \, e^{-jkr}}{r} \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

$$\mathbf{H} \approx \frac{I\Delta z}{4\pi} \frac{jk \, e^{-jkr}}{r} \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{\phi}},$$

with

$$\mathbf{E} = \eta \, \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{H}.$$

Induction vs. Radiation Fields

1. Induction (Near Field)

- **Region:** Very close to the source ($r \ll \lambda$).
- **Field behavior:** Fields are mainly *reactive*, i.e. energy is stored in the electric and magnetic fields but not radiated away.
  - **E** and **H** are generally out of phase.
  - Energy oscillates back and forth between source and field, similar to inductors/capacitors.
- **Dominant component:**
  - Magnetic field dominates near small current loops.
  - Electric field dominates near short dipoles.
- **Power flow:** No net power carried away, mostly local energy storage.

2. Radiation (Far Field)

- **Region:** Far from the source ($r \gg \lambda$).
- **Field behavior:** Fields are *radiative*, i.e. traveling waves.
  - $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ are in phase and mutually perpendicular:
$$\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \hat{r}.$$
  - They form a transverse electromagnetic (TEM) wave.
- **Dominant component:** Both $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ contribute equally, related by the wave impedance of free space:
$$\frac{E}{H} = 377\ \Omega.$$
- **Power flow:** Real power is carried away from the source, spreading out as radiation.

3. Transition Zone (Fresnel Region)

- **Region:** Intermediate distances ($r \sim \lambda$).
- **Behavior:** Mixture of reactive (induction) and radiative characteristics.
- **Applications:** Important in antenna measurement and radar.

Summary

Induction field: near, reactive, energy stored.

Radiation field: far, propagating, energy carried away.

餘弦定理推導

考慮任意三角形 ABC，三邊分別為 a, b, c，其中角 C 為夾在邊 a 與 b 之間的角。為了方便推導，我們將三角形放置於座標平面上：

$$A(0,0), \quad B(b,0), \quad C(x,y)$$

則三邊長為：

$$AB = b, \quad AC = \sqrt{x^2+y^2} = a, \quad BC = \sqrt{(x-b)^2+y^2} = c.$$

—

1. 由向量定義出發

向量：

$$\overrightarrow{CA} = (-x, -y), \quad \overrightarrow{CB} = (b - x, -y)$$

根據餘弦定義：

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = ab\cos C$$

計算內積：

$$(-x)(b - x) + (-y)(-y) = x^2 + y^2 - bx$$

因此：

$$ab\cos C = x^2 + y^2 - bx$$

—

2. 由幾何關係求 c^2

邊 c 的平方為：

$$c^2 = (x - b)^2 + y^2 = x^2 - 2bx + b^2 + y^2$$

代入 $x^2 + y^2 = a^2$：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$$

又由幾何關係可得 $x = a\cos C$，因此：

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

—

3. 幾何意義

- 當 $C = 90^\circ$ 時，$\cos C = 0$，得 $c^2 = a^2 + b^2$，即畢氏定理。
- 當 $C < 90^\circ$ 時，$\cos C > 0$，故 $c^2 < a^2 + b^2$。
- 當 $C > 90^\circ$ 時，$\cos C < 0$，故 $c^2 > a^2 + b^2$。

Taylor Series

若函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 附近具有各階導數，則其泰勒展開式為：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

其中 $f^{(n)}(a)$ 表示函數在 $x = a$ 處的第 n 階導數。

—

Maclaurin 展開（$a = 0$）

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

常見函數的泰勒展開

Far-Field Approximation of R Using Taylor (Binomial) Expansion

Step 1. Start from the exact expression

根據幾何關係：

$$R = \sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz'\cos\theta}$$

我們希望在遠場條件 $z' \ll r$ 下，將 R 展開成可近似的形式。

—

Step 2. Factor out r^2

$$R = r\sqrt{1 + \left(\frac{z'}{r}\right)^2 - 2\frac{z'}{r}\cos\theta}$$

定義一個小量：

$$x = \left(\frac{z'}{r}\right)^2 - 2\frac{z'}{r}\cos\theta$$

則：

$$R = r(1 + x)^{1/2}$$

—

Step 3. Expand using the Taylor (binomial) series

根據二項式展開式：

$$(1 + x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$$

代入得：

$$R = r\left[1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots\right]$$

—

Step 4. Substitute $x = \left(\frac{z'}{r}\right)^2 - 2\frac{z'}{r}\cos\theta$

$$\begin{aligned}
R &= r\left\{1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{z'}{r}\right)^2 - 2\frac{z'}{r}\cos\theta\right] - \frac{1}{8}\left[\left(\frac{z'}{r}\right)^2 - 2\frac{z'}{r}\cos\theta\right]^2 + \cdots\right\} \\
&= r\left\{1 - \frac{z'}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{z'}{r}\right)^2 - \frac{1}{8}\left[\left(\frac{z'}{r}\right)^2 - 2\frac{z'}{r}\cos\theta\right]^2 + \cdots\right\}
\end{aligned}$$

—

Step 5. Simplify higher-order terms

展開並重新整理可得：

$$R = r\left\{1 - \frac{z'}{r}\cos\theta + \left(\frac{z'}{r}\right)^2\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos^2\theta}{2}\right] + \cdots\right\}$$

—

Step 6. Far-field approximation

由於 $z'/r \ll 1$，高階項 $(z'/r)^2$ 可忽略，故：

$$\boxed{R \approx r - z'\cos\theta}$$

—

Step 7. Physical interpretation

- r：觀察點與原點的距離。
- $z'\cos\theta$：天線上微小電流元相對於觀察方向的距離修正量。

因此，在計算輻射場的相位項（例如 e^{-jkR}）時，可保留主要的相位變化項：

$$e^{-jkR} \approx e^{-jkr}e^{+jkz'\cos\theta}.$$

這使得有限偶極天線的積分推導大幅簡化。

從三維電流密度積分到偶極線電流積分的推導

由磁向量位的定義式：

$$A_z = \int \frac{J_z(\mathbf{r}')\, e^{-j\beta R}}{4\pi R}\, dV',$$

其中

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz'\cos\theta}.$$

—

(1) 假設為細長偶極天線

對於一條沿 z 軸的細長導線 (半徑遠小於波長)，電流僅沿 z 方向流動，且分佈於 $(x', y') = (0, 0)$。因此電流密度可寫為：

$$J_z(\mathbf{r}') = I(z')\,\delta(x')\,\delta(y'),$$

其中 $I(z')$ 為導線上的總電流，$\delta(\cdot)$ 為 Dirac delta 函數。

—

(2) 將三維體積積分簡化為一維線積分

因為 $dV' = dx'\,dy'\,dz'$，代入上式得：

$$A_z = \int \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} I(z')\,\delta(x')\,\delta(y')\,dx'\,dy'\,dz'.$$

對 x'、y' 積分：

$$\int \delta(x')\,dx' = 1, \quad \int \delta(y')\,dy' = 1,$$

留下 z' 的積分：

$$A_z = \int \frac{I(z')\,e^{-j\beta R}}{4\pi R}\,dz'.$$

—

(3) 遠場近似：$R \approx r - z' \cos\theta$

在觀察點距離遠大於天線長度時 $(r \gg z')$，可令

$$R \approx r - z' \cos\theta.$$

此外，分母的 R 變化極小，因此可在分母中直接以 r 取代：

$$\frac{e^{-j\beta R}}{R} \approx \frac{e^{-j\beta(r - z'\cos\theta)}}{r} = \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{j\beta z' \cos\theta}.$$

—

(4) 代回積分式

$$A_z = \int \frac{I(z')\,e^{-j\beta(r - z'\cos\theta)}}{4\pi r}\,dz' = \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \int I(z')\,e^{j\beta z' \cos\theta}\,dz'.$$

—

(5) 物理意義

- $I(z')$：導線上的電流分佈。
- $\dfrac{e^{-j\beta r}}{4\pi r}$：由原點至觀察點的共同相位與球面衰減項。
- $e^{j\beta z' \cos\theta}$：天線上不同位置 z' 對應的相位差。

因此整個積分

$$\int I(z')e^{j\beta z' \cos\theta}dz'$$

描述了電流分佈的「空間傅立葉變換」，決定了天線的方向性與輻射場型。

—

$$\boxed{A_z = \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r}\int I(z')e^{j\beta z' \cos\theta}dz'.}$$