

## (1) 基本天線理論 (Basic Antenna Theory)

### 1.1 天線輻射電磁解 (EM solution of antenna radiation)

天線輻射之電磁場滿足以下之馬克斯威爾方程式(Maxwell's equations)[1,2]：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_T, \quad \vec{J}_T = \vec{J} + \sigma \vec{E}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (4)$$

其中，式(1)為法拉第定律(Faraday's law)，式(2)-(4)分別為安培定律(Ampere's law)、電場高斯定律(electric-field Gauss law)及磁場高斯定律(magnetic-field Gauss law)。 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 、 $\vec{D}$ 及 $\vec{B}$ 分別為電場強度、磁場強度、電通量密度及磁通量密度； $\vec{J}$ 代表天線上之電流密度； $\sigma \vec{E}$ 則代表天線周遭介質中之感應電流( $\sigma$ 為周遭介質之導電率)； $\rho_v$ 為體積電荷密度。而當我們僅考慮正弦波(sinusoidal waves)時<sup>註</sup>，我們可以令 $\vec{E}$ 及 $\vec{B}$ 與 $\exp(j\omega t)$ 之相位項成比例，此時式(1)-(4)可改寫為

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \mu \vec{H}, \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J}_T = j\omega \epsilon \vec{E} + \vec{J}_T, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho_v / \epsilon, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0. \quad (8)$$

上式中 $\mu$ 及 $\epsilon$ 分別為介質之導磁係數(permeability)及介電常數(permittivity)； $\omega=2\pi f$ ， $f$ 為操作頻率。而利用向量場(vector field) $\vec{A}$ 及電位量(electric potential) $\phi$ ，由式(5)-(8)可推導得到

$$\nabla^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}, \quad (9)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\vec{J}, \quad (10)$$

其中

---

<sup>註</sup> 電磁波於射頻及微波範圍的相關頻帶區間見附錄 A.1。

$$\ddot{\mathbf{H}} = \nabla \times \ddot{\mathbf{A}}, \quad (11)$$

$$\ddot{\mathbf{E}} = -\nabla\phi - \mu \frac{\partial \ddot{\mathbf{A}}}{\partial t}. \quad (12)$$

同樣地，當僅考慮正弦波時，式(9)-(10)可改寫為

$$\nabla^2\phi + \beta^2\phi = -\rho_v/\epsilon, \quad (13)$$

$$\nabla^2\ddot{\mathbf{A}} + \beta^2\ddot{\mathbf{A}} = -\ddot{\mathbf{J}}, \quad (14)$$

其中 $\beta$ 為介質中電波傳播常數，表示為

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}. \quad (15)$$

當由式(14)解得向量場 $\ddot{\mathbf{A}}$ 時， $\ddot{\mathbf{H}}$ 可由式(11)得到， $\ddot{\mathbf{E}}$ 可由式(6)得到，亦即天線之輻射場量可以得到。而因為 $\ddot{\mathbf{A}}$ 可表示為

$$\ddot{\mathbf{A}} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}, \quad (16)$$

式(14)可以被分解為3個相同的純量方程式，亦即為

$$\nabla^2 A_x + \beta^2 A_x = -J_x, \quad (17)$$

$$\nabla^2 A_y + \beta^2 A_y = -J_y, \quad (18)$$

$$\nabla^2 A_z + \beta^2 A_z = -J_z. \quad (19)$$

上式中下標 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 代表 $\ddot{\mathbf{A}}$ 及 $\ddot{\mathbf{J}}$ 於 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 方向之分量。當由式(17)-(19)求得向量場 $\ddot{\mathbf{A}}$ 於三個垂直方向的分量， $\ddot{\mathbf{A}}$ 即可得到。

以下我們考慮一個點輻射源(point source)，如何得到其格林函數(Green's function)或其單位脈衝響應(unit impulse response)。而得到一個點輻射源的格林函數，任何電流源之輻射場量即可計算得到。而在一個點輻射源的條件下，式(17)可表示為

$$\nabla^2 A_x + \beta^2 A_x = -\delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad (20)$$

其中 $\delta(x)$ 為Dirac delta function表示為

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad (21)$$

它同時具有下列性質

$$\int \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad (22)$$

在解式(20)時，我們考慮球面座標 $(r, \theta, \phi)$ 。而由於點輻射源並無方向性，因此其輻射場量將具有球面對稱(spherical symmetry)之特性，亦即其場量只會是距離 $r$ 的函數，因此當 $r \rightarrow 0$ 時，我們可以得到

$$\nabla^2 A_x + \beta^2 A_x = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} A_x \right) + \beta^2 A_x = 0. \quad (23)$$

式(23)的通解(general solution)為

$$A_x = C_1 \frac{e^{-j\beta r}}{r} + C_2 \frac{e^{j\beta r}}{r}. \quad (24)$$

其中 $C_1$ 及 $C_2$ 為常數，其值由邊界條件決定。式(24)第一項代表向外傳播之球面波輻射場<sup>註</sup>，第二項則代表向內傳播之球面波輻射場。就數學上而言，第一、二項均可成立，不過在物理上，第二項代表之向內傳播的球面波輻射場並不存在，因此式(24)可化簡為

$$A_x = C_1 \frac{e^{-j\beta r}}{r}. \quad (25)$$

另外，在解 $A_x$ 時，可以用到下列二個邊界條件(boundary conditions)：

$$(1) \text{ 當 } r \text{ 趨近於無窮大時，} A_x \text{ 趨近於 } 0; \quad (26)$$

---

<sup>註</sup>平面波通解為  $C_1 e^{-j\beta x} + C_2 e^{j\beta x}$ ；柱面波通解為  $[C_1 e^{-j\beta \rho} + C_2 e^{j\beta \rho}] \rho^{-1/2}$ 。

(2) 當 $r$ 趨近於0，但不為0時， $A_x$ 為有限值。 (27)

此外，考慮如圖1所示之包含點輻射源的體積積分區間：

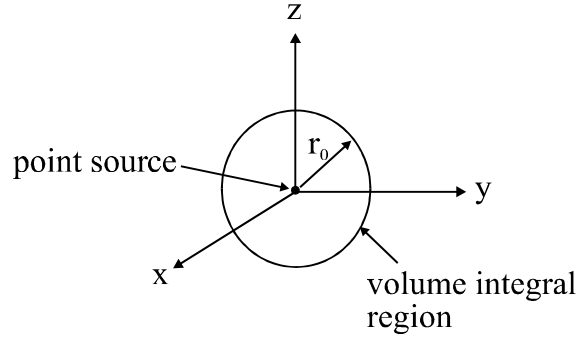


圖1：包圍位於原點之點輻射源的體積積分區間。

我們可以得到

ref (20)

$$\nabla^2 A_x + \beta^2 A_x = -\delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

$$\int_v (\nabla^2 A_x + \beta^2 A_x) dV = -\int_v (\delta(x)\delta(y)\delta(z)) dV = -1. \quad (28)$$

而式(28)左邊第一項為

$$\begin{aligned} \int_v \nabla^2 A_x dV &= \int_s \nabla A_x \cdot d\vec{S} \\ &= \int_s \nabla \left( C_1 \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) \cdot \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( C_1 \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= -4\pi C_1, \quad \text{when } r_0 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (29)$$

至於式(28)左邊第二項為

$$\begin{aligned} \int_v \beta^2 A_x dV &= \beta^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{r_0} C_1 \frac{e^{-j\beta r}}{r} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= 4\pi \beta^2 C_1 \int_0^{r_0} r e^{-j\beta r} dr \\ &= 0, \quad \text{when } r_0 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (30)$$

將式(29)-(30)代入式(28)，我們可以得到

$$C_1 = \frac{1}{4\pi}, \quad (31)$$

亦即，

$$A_x = \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r}. \quad (32)$$

式(32)又稱為自由空間格林函數(free-space Green's function),

而若考慮一電流源，同時其不在原點上時，式(32)需作修正。考慮如圖2所示一電流源位於空間中任一點 $r'$ 處，此時式(32)改寫為

$$A_x = \int \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} J_x(\vec{r}') dV'. \quad (33)$$

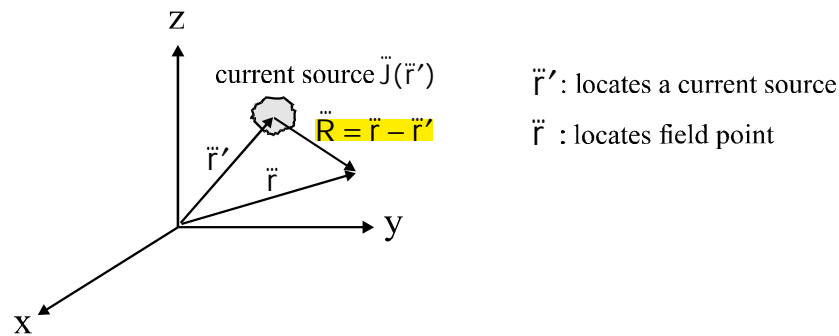


圖2：一電流源位於空間中任一點。

依照上述之推導過程，我們同樣可以得到式(18)及(19)之 $A_y$ 及 $A_z$ 解為

$$A_y = \int \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} J_y(\vec{r}') dV', \quad (34)$$

$$A_z = \int \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} J_z(\vec{r}') dV'. \quad (35)$$

最後，由式(33)-(35)可以得到

$$\vec{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z = \int_{V'} \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} \vec{J}(\vec{r}') dV'. \quad (36)$$

而由式(36)，一電流源的輻射場量  $\ddot{\mathbf{H}}$  及  $\ddot{\mathbf{E}}$  可以分別由下列式子計算得到：

$$\ddot{\mathbf{H}} = \nabla \times \ddot{\mathbf{A}}, \quad (37)$$

$$\ddot{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla \times \ddot{\mathbf{H}} - \ddot{\mathbf{J}})$$

$$\text{or } = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \ddot{\mathbf{H}}. \quad (\text{自由空間中 } \ddot{\mathbf{J}} = 0) \quad (38)$$

## 1.2 理想電偶極天線 (ideal dipole antenna)

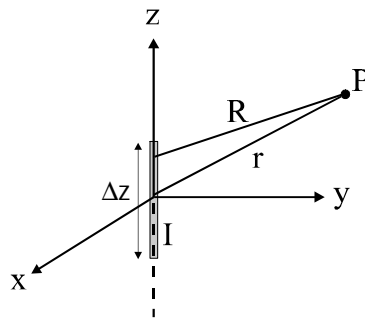


圖3：一理想電偶極天線置於z軸上。

考慮如圖3之理想電偶極天線，其長度( $\Delta z$ )遠小於操作波長( $\lambda$ )，天線上電流為均勻分佈(uniform distribution)，電流大小為I，欲求得此一理想電偶極天線之輻射場量，可利用式(36)之結果，可得

$$\ddot{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{z}} I \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} dz'. \quad (39)$$

而由於 $\Delta z \ll \lambda$ ，圖3中 $R \cong r$ ，因此由式(39)可得

$$\ddot{\mathbf{A}} = A_z \hat{\mathbf{z}} = I \Delta z \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \hat{\mathbf{z}}. \quad (40)$$

再考慮

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{H}} &= \nabla \times \ddot{\mathbf{A}} = \nabla \times (A_z \hat{\mathbf{z}}) \quad \text{only part of z-axis should be in consideration} \\ &= (\nabla A_z) \times \hat{\mathbf{z}} + A_z (\nabla \times \hat{\mathbf{z}}) \end{aligned}$$

$$= (\nabla A_z) \times \hat{z}, \quad (41)$$

我們可以得到

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{H}} &= \nabla \left( \frac{I\Delta z e^{-j\beta r}}{4\pi r} \right) \times \hat{z} \\ &= \frac{I\Delta z}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) \hat{r} \times \hat{z} \\ &= \frac{I\Delta z}{4\pi} \left[ \frac{-j\beta e^{-j\beta r}}{r} - \frac{e^{-j\beta r}}{r^2} \right] \hat{r} \times \hat{z} \\ &= \frac{I\Delta z}{4\pi} \left[ \frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-j\beta r} \sin \theta \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (42)$$

上式計算中利用到

$$\hat{r} \times \hat{z} = \hat{r} \times (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta) = -\hat{\phi} \sin \theta. \quad (43)$$

而電場輻射場量可表示為

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{E}} &= \frac{\nabla \times \ddot{\mathbf{H}}}{j\omega\epsilon} = \frac{I\Delta z}{4\pi} \left[ \frac{j\omega\mu}{r} + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon r^3} \right] e^{-j\beta r} \sin \theta \hat{\theta} \\ &\quad + \frac{I\Delta z}{2\pi} \left[ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon r^3} \right] e^{-j\beta r} \cos \theta \hat{r}. \end{aligned} \quad (44)$$

當考慮 $r$ 很大時，亦即， $\beta r \gg 1$ ，此時，式(42)及(44)可化簡為

$$\ddot{\mathbf{H}} = j\beta \frac{I\Delta z}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta \hat{\phi}, \quad (45)$$

$$\ddot{\mathbf{E}} = j\omega\mu \frac{I\Delta z}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \theta \hat{\theta}. \quad (46)$$

式(45)及(46)為理想電偶極天線之遠場場量(far-zone field)，而由於此兩個場量具有以下之性質：

$$(1) \quad \ddot{\mathbf{E}} \perp \ddot{\mathbf{H}}, \quad (47)$$

$$(2) \quad \frac{E}{H} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (\eta = 377 \, \Omega \text{ in free space}), \quad (48)$$

我們可以了解到理想電偶極天線的遠場輻射電磁波為一球面的橫向電磁波(TEM wave)，此項特性對所有的天線均成立，也就是說任何天線的遠場輻射電磁波均可被視為一球面的橫向電磁波。

另外，我們由式(45)-(46)也可以計算得到理想電偶極天線的時均輻射功率(time-average radiated power)為

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_{\text{sphere}} (\ddot{\mathbf{E}} \times \ddot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{I\Delta z}{4\pi} \right)^2 \omega\mu\beta \int_{\text{sphere}} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} (\hat{\theta} \times \hat{\phi}) \cdot \mathbf{r}^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{I\Delta z}{4\pi} \right)^2 \omega\mu\beta \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{(I\Delta z)^2}{12\pi} \omega\mu\beta. \end{aligned} \quad (49)$$

result contain react power

式(49)的輻射功率為一實數，貢獻到天線輸入阻抗的實部 $R_{in}$ 。而若由式(42)及(44)計算天線的時均輻射功率，我們可以得到虛數的輻射功率，此部份能量代表在天線周遭的儲存能量或電抗性功率(reactive power)，同時貢獻至天線輸入阻抗的虛部 $X_{in}$ 。

### 1.3 輻射場型 (radiation pattern)

**輻射場型**可簡單定義為：一個天線的遠場電場場量的圖型表示。同時並可區分為：

- (1) **E-平面場型**：包含(或平行)天線之平面上的輻射場型；
- (2) **H-平面場型**：垂直天線之平面上的輻射場型。

我們以一個理想電偶極天線為例子。由式(46)的結果可得到



$$E_{\theta} = \frac{j\omega\mu I \Delta z e^{-j\beta r} \sin \theta}{4\pi r}. \quad (50)$$

將式(50)歸一化，可得

$$\frac{|E_{\theta}|}{|E_{\theta}|_{\max}} = |\sin \theta|. \quad (51)$$

式(51)稱為場型函數(pattern function)，其圖型表示如圖4所示，其中可看到E-平面場型為一圓形蝴蝶結形狀，在垂直電偶極天線方向，可得到最大的輻射電場強度，而在天線頂端方向(z軸)，其電場強度為零。同時，E-平面上的半功率束徑寬(HP, half-power beamwidth)為90°。另一方面，H-平面場型為一圓形，亦即在 $\phi$ 的任一方向，電場強度均相同。此項特性亦可由式(51)中看出，此時場型函數並無 $\phi$ 的變化。另外，圖5說明理想電偶極天線的三維輻射場型。

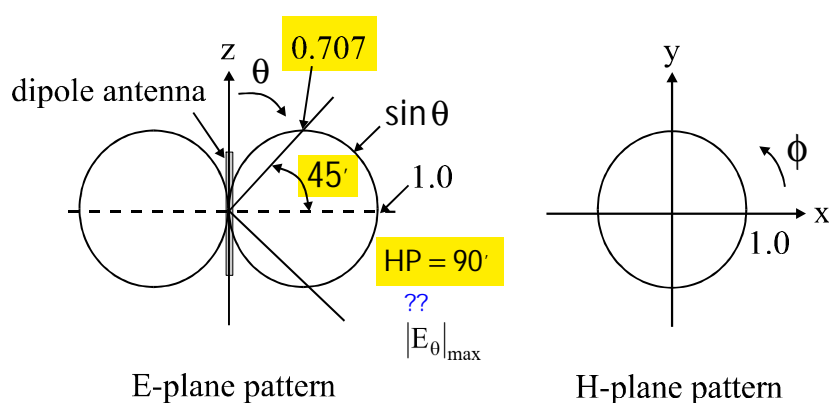


圖4：理想電偶極天線的E-平面及H-平面輻射場型。

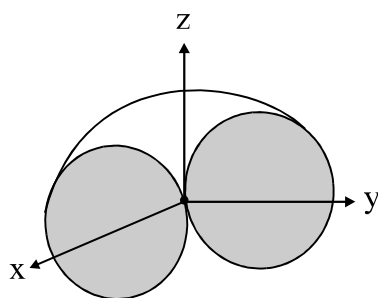


圖5：理想電偶極天線的三維輻射場型。

另外，習慣上，輻射場型均以dB (decibels)值表示。此時電場輻射場型(field pattern)與功率輻射場型(power pattern)相同，因為此時功率場型函數 $P(\theta, \phi)$  (power pattern function)等於電場場型函數 $F(\theta, \phi)$  (field pattern function)，亦即由

$$P(\theta, \phi) = |F(\theta, \phi)|^2. \quad (52)$$

此時，

$$|F(\theta, \phi)|_{\text{dB}} = 20 \log |F(\theta, \phi)|, \quad (53)$$

$$|P(\theta, \phi)|_{\text{dB}} = 10 \log |P(\theta, \phi)| = |F(\theta, \phi)|_{\text{dB}}^2 = 20 \log |F(\theta, \phi)| \quad (54)$$

因此，輻射場型以dB值表示，在實用上較為方便。

圖6所示為一典型的功率輻射場型，其上BWFN (beamwidth between first nulls)代表主輻射束(main or major lobe)於其兩零點之間的束徑寬；而SLL(side lobe level)為旁波瓣(side or minor lobe)與主輻射束強度比值，定義為

$$\text{SLL} = 20 \log |\text{旁波瓣最大強度} / \text{主輻射束最大強度}| \quad (55)$$

另外，依據天線主輻射束的方向垂直或平行於包含天線的平面，天線又區分為：

- (1) 垂向輻射天線(broadside antenna)：天線主輻射束垂直包含天線之平面，如理想電偶極天線、微帶天線等。
- (2) 軸向輻射天線(endfire or backfire antenna)：天線主輻射束平行包含天線之平面，如螺旋天線(helical antenna)等。

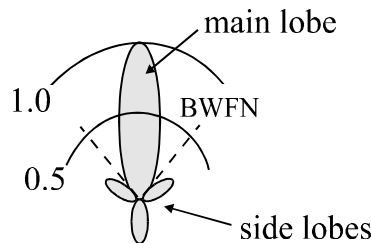


圖6：典型的天線的功率輻射場型。

#### 1.4 實際電偶極天線 (real dipole antenna)

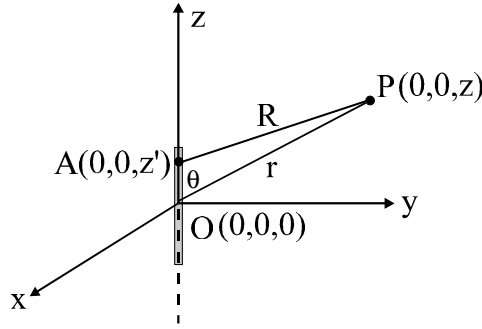


圖7：一個實際電偶極天線。

圖7所示為一個實際電偶極天線。此天線與圖3所示的一個理想電偶極天線主要差異在於此時R不能完全假設等於r。所謂不能完全等於的意思是在式(39)的向量場表示式中分母之距離R仍可假設等於r，不過在分子中相位項 $\exp(-j\beta R)$ 由於是 $2\pi$ 週期的關係，R若假設等於r，對天線長度較長的實際電偶極天線，其產生之誤差將不能忽略之。我們考慮圖7中PAO的三角形，利用餘弦定理(cosine theorem)可得

$$\begin{aligned} R &= [r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta]^{1/2} \\ &= r \left[ 1 + \left( \frac{z'}{r} \right)^2 - \frac{2z'}{r} \cos \theta \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (56)$$

再利用下列展開式

$$(1+x)^{1/2} \cong 1 + \frac{1}{2}x + \frac{(1/2)(-1/2)}{2!}x^2 + \dots, \quad (57)$$

式(56)可展開為

$$\begin{aligned} R &= r \left\{ 1 + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{z'}{r} \right)^2 - \frac{z'}{r} \cos \theta \right] - \frac{1}{8} \left[ \left( \frac{z'}{r} \right)^2 - \frac{2z'}{r} \cos \theta \right]^2 + \dots \right\} \\ &= r \left\{ 1 - \frac{z'}{r} \cos \theta + \left( \frac{z'}{r} \right)^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{\cos^2 \theta}{2} \right] + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\cong r - z' \cos \theta. \quad (58)$$

將式(58)結果代入式(35)中，不過在分母之R仍假設等於r，我們可得

$$A_z = \int I(z') \frac{e^{-j\beta(r-z'\cos\theta)}}{4\pi r} dz' = \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \int I(z') e^{j\beta z' \cos\theta} dz'. \quad (59)$$

而  $\ddot{H}$  場由式(59)代入式(37)，可得

$$\begin{aligned} \ddot{H} &= \nabla \times \ddot{A} = \nabla \times (A_z \hat{z}) \\ &= \nabla \times (-A_z \sin \theta \hat{\theta} + A_z \cos \theta \hat{r}) \\ &= \hat{\phi} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (-r A_z \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (A_z \cos \theta) \right] \\ &= \hat{\phi} \left[ j\beta A_z \sin \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_z \cos \theta) \right] \\ &\cong \hat{\phi} j\beta A_z \sin \theta. \quad (\beta r \gg 1). \end{aligned} \quad (60)$$

因此可得

$$\ddot{E} = \frac{\nabla \times \ddot{H}}{j\omega\epsilon} \cong \hat{\theta} j\omega\mu A_z \sin \theta. \quad (61)$$

注意式(60)-(61)仍為一個球面橫向電磁波。同時由所得結果大幅簡化了  $\ddot{E}$  及  $\ddot{H}$  場的計算。只要向量場  $\ddot{A}$  得到， $\ddot{E}$  及  $\ddot{H}$  即可很快獲得，不必再經由較複雜的微分等等運算。另外，要注意的是式(61)為當電偶極天線置於z軸上時的推導結果，當電偶極天線不在z軸上時， $\ddot{E}$  場應表示為

$$\ddot{E} \cong -j\omega\mu \ddot{A}. \quad (62)$$

式(61)可被視為式(62)的一特別解。當  $\ddot{A} = A_z \hat{z}$  時，利用  $\hat{z} = -\sin \theta \hat{\theta}$  (考慮遠場可忽略  $\hat{r}$  方向分量)，由式(62)可得式(61)。

接下來的問題是，遠場的條件為何？我們定義在式(58)中所忽略掉的最大一項等於  $\lambda/16$  時的距離  $r$  為遠場開始位置。此項定義是要讓式(58)中的誤差少於10%。因此，我們可得

$$\frac{\lambda}{16} = \left[ \frac{r}{2} \left( \frac{z'}{r} \right)^2 \sin^2 \theta \right]_{\max}. \quad (63)$$

假設 $z'=D/2$ ， $D$ 為天線全長，上式可導得

$$r_f = \frac{2D^2}{\lambda}. \quad (64)$$

注意式(64)成立，必須下述二個條件也成立：

$$r_f \gg D, \quad (65)$$

$$r_f \gg \lambda. \quad (66)$$

式(64)-(66)代表遠場位置 $r_f$ 成立的三個條件。而 $r=r_f$ 的位置即為遠場開始位置。

### 練習1.1

考慮如圖7之實際電偶極天線，天線長度為 $L$ ，置於 $z$ 軸上，中心點位於原點，天線上電流均勻分佈，均為 $I_0$ ，計算天線之遠場電場強度。

解：由式(59)，可得

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \int_{-L/2}^{L/2} I_0 e^{j\beta z' \cos \theta} dz' \\ &= \frac{I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \frac{\sin[(\beta L/2) \cos \theta]}{(\beta L/2) \cos \theta}. \end{aligned} \quad (67)$$

所以

$$\ddot{\mathbf{E}} = j\omega\mu A_z \sin \theta \hat{\theta} = \frac{j\omega\mu I_0 L e^{-j\beta r}}{4\pi r} \frac{\sin \theta \sin[(\beta L/2) \cos \theta]}{(\beta L/2) \cos \theta} \hat{\theta}. \quad (68)$$

由練習1.1中得到之 $\ddot{\mathbf{E}}$ 場，其場型函數為

$$F(\theta, \phi) = \frac{|E_\theta|}{|E_\theta|_{\max}} = \left| \sin \theta \times \frac{\sin u}{u} \right|, \quad (69)$$

其中

$$u = \frac{\beta L}{2} \cos \theta.$$

此時，可看出式(69)由兩項組成，分別為 $\sin \theta$ 及 $(\sin u)/u$ 。其中 $\sin \theta$ 由理想電偶極天線之電流分佈所造成，稱為元素項(element factor)，亦指由一無限小之電流元所造成之輻射場型。另一為 $(\sin u)/u$ 則由天線上之電流分佈所造成，稱為場型項(pattern factor)。任何天線之輻射場型均可表示為元素項及場型項兩個函數的乘積。而對於一個理想電偶極天線而言，元素項函數為 $\sin \theta$ ，而場型函數則為1。

### 1.5 指向性及增益 (directivity and gain)

天線指向性的定義為：一天線的輻射能量在某一方向與所有方向平均值之比。而天線增益則定義為：一天線的輻射能量在某一方向與輸入能量平均值之比。兩者均通常以dB值表示。而當天線效率為100%時，天線指向性等於其增益值。若以數學式表示，天線指向性及增益表示為

$$D(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{U_{\text{ave}}}, \quad (70)$$

$$G(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{P_{\text{in}} / 4\pi}, \quad (71)$$

其中，

$$U(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \text{Re}(\ddot{\mathbf{E}} \times \ddot{\mathbf{H}}^*) \cdot \mathbf{r}^2 \hat{\mathbf{r}}. \quad (72)$$

上式中， $U(\theta, \phi)$ 代表天線於空間中某一方向 $(\theta, \phi)$ 每單位空間角(solid angle)的輻射功率；空間角所代表之立體角度如圖8所示<sup>註</sup>。利用空間角的概念，可以讓我們方便得知天線之輻射能量集中於哪個方向或多大的空間角度。同時天線的總輻射功率 $P_r$ 與 $U(\theta, \phi)$ 具有下列的關係式：

$$P_r = \iint U(\theta, \phi) d\Omega = U_m \iint |F(\theta, \phi)|^2 d\Omega = U_m \Omega_A, \quad (73)$$

其中，

$$\Omega_A = \iint |F(\theta, \phi)|^2 d\Omega. \quad (74)$$

<sup>註</sup> 整個自由空間(free space)之空間角為  $4\pi$  square radian。

上式中 $\Omega_A$ 稱為天線輻射束空間角(antenna beam solid angle)代表當 $\Omega_A$ 角度內所有方向的輻射功率均等於該天線最大的輻射功率時，於 $\Omega_A$ 角度內的總輻射能量等於該天線的總輻射能量。因此我們由得到的 $\Omega_A$ 角度可以了解一個天線輻射能量的集中情形。其定義亦可以由圖9說明。

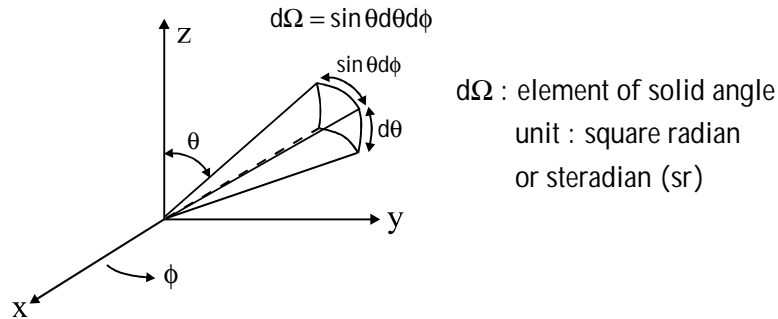


圖8：空間角(solid angle)所代表之立體角度。

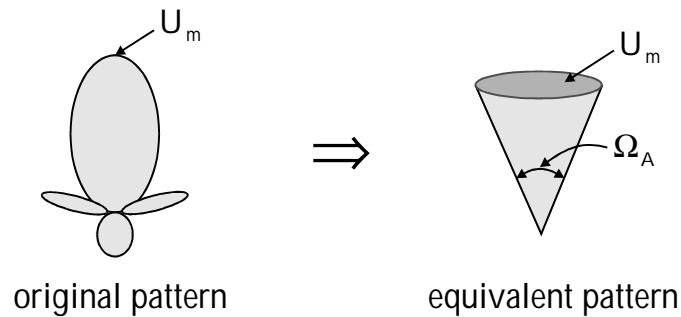


圖9：天線輻射束空間角 $\Omega_A$ 的定義說明。

另外要了解由式(70)-(71)的定義中，可知天線在不同的方位( $\theta, \phi$ )會有不同的指向性及增益值，不過在習慣上，我們一般著重於計算天線最大的指向性及增益值。因此若沒有特別指明，一般指的是天線最大的指向性及增益值，其計算表示式如下所述：

$$D = [D(\theta, \phi)]_{\max} = \frac{U_m}{U_{\text{ave}}} = \frac{P_r / \Omega_A}{P_r / 4\pi} = \frac{4\pi}{\Omega_A}, \quad (75)$$

$$\mathbf{G} = [G(\theta, \phi)]_{\max} = \frac{U_m}{P_{\text{in}} / 4\pi} = \frac{P_r}{P_{\text{in}}} \frac{U_m}{P_r / 4\pi} = \mathbf{eD}. \quad (76)$$

其中 $e$ 為天線效率，定義為 $P_r/P_{in}$ 。當表示為dB值時， $D_{dB}=10\log D$ ， $G_{dB}=10\log G$ 。

### 練習1.2

計算如圖3之理想電偶極天線的(最大)指向性(以dB值表示)。

解：由於已知理想電偶極天線的電場場型函數為 $F(\theta, \phi) = \sin\theta$ ，我們由式(74)可得

$$\Omega_A = \iint \sin^3 \theta \, d\theta d\phi = \frac{8\pi}{3}.$$

將所得 $\Omega_A$ 結果代入式(75)，可得

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = \frac{4\pi}{8\pi/3} = 1.5 = 1.76 \text{ dB}.$$

### 練習1.3

一個天線若其輻射場型只具有一個主輻射束(無旁波瓣)，此時天線之輻射束空間角 $\Omega_A$ 的近似值可以由下式計算得到：

$$\Omega_A \cong \text{HP}_E \text{HP}_H, \quad (77)$$

其中 $\text{HP}_E$ 及 $\text{HP}_H$ 分別為該天線在E-平面及H-平面半功率束徑寬(單位：徑度)，試由式(77)推導出

$$D \cong \frac{41,253}{\text{HP}_E' \text{HP}_H'}. \quad (78)$$

其中 $\text{HP}_E^\circ$ 及 $\text{HP}_H^\circ$ 單位為度(degrees)。

解：將式(77)代入式(75)，再轉換HP之徑度單位為度之單位，我們可得

$$D \cong \frac{4\pi}{\text{HP}_E \text{HP}_H} = \frac{4 \times 3.14159 \times 57.296 \times 57.296}{\text{HP}_E' \text{HP}_H'} = \frac{41,253}{\text{HP}_E' \text{HP}_H'}.$$



## 1.6 相互定理 (reciprocity theorem)

相互定理應用於天線上，主要說明天線的接收及輻射特性是相同的。在本節中，我們將首先對相互定理的通式作一推導，然後對相互定理應用於天線的接收及輻射特性的比較作一說明。圖10所示為兩個獨立的電流源，其遠場輻射場量分別為 $(\ddot{\mathbf{E}}_a, \ddot{\mathbf{H}}_a)$ 及 $(\ddot{\mathbf{E}}_b, \ddot{\mathbf{H}}_b)$ 。對這兩個輻射場量，我們有

$$\boxed{\int_v (\ddot{\mathbf{E}}_b \cdot \ddot{\mathbf{J}}_a) dV = \int_v (\ddot{\mathbf{E}}_a \cdot \ddot{\mathbf{J}}_b) dV} \quad (79)$$

上式即為相互定理的數學表示式，說明兩天線上的電流密度與對方的遠場電場場量內積的體積積分相等。以下我們先行證明式(79)成立。

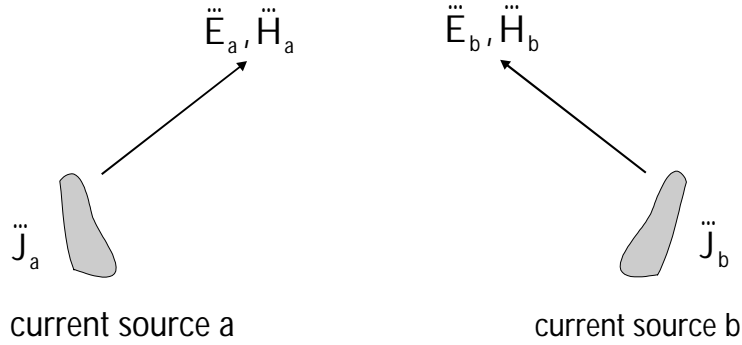


圖10：兩獨立電流源及其遠場輻射場量。

考慮以下方程式：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\ddot{\mathbf{E}}_a \times \ddot{\mathbf{H}}_b - \ddot{\mathbf{E}}_b \times \ddot{\mathbf{H}}_a) &= \ddot{\mathbf{H}}_b \cdot (\nabla \times \ddot{\mathbf{E}}_a) - \ddot{\mathbf{E}}_a \cdot (\nabla \times \ddot{\mathbf{H}}_b) \\ &\quad - \ddot{\mathbf{H}}_a \cdot (\nabla \times \ddot{\mathbf{E}}_b) + \ddot{\mathbf{E}}_b \cdot (\nabla \times \ddot{\mathbf{H}}_a) \end{aligned} \quad (80)$$

上式右項乃利用 $\nabla \cdot (\ddot{\mathbf{A}} \times \ddot{\mathbf{B}}) = \ddot{\mathbf{B}} \cdot (\nabla \times \ddot{\mathbf{A}}) - \ddot{\mathbf{A}} \cdot (\nabla \times \ddot{\mathbf{B}})$ 恒等式得到。接著利用下列法拉第定律及安培定律：

$$\begin{cases} \nabla \times \ddot{\mathbf{E}}_a = -j\omega\mu\ddot{\mathbf{H}}_a \\ \nabla \times \ddot{\mathbf{H}}_a = j\omega\epsilon\ddot{\mathbf{E}}_a + \ddot{\mathbf{J}}_a \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \ddot{\mathbf{E}}_b = -j\omega\mu\ddot{\mathbf{H}}_b \\ \nabla \times \ddot{\mathbf{H}}_b = j\omega\epsilon\ddot{\mathbf{E}}_b + \ddot{\mathbf{J}}_b \end{cases} \quad (81)$$

代入式(80)，我們可得

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot (\ddot{\mathbf{E}}_a \times \ddot{\mathbf{H}}_b - \ddot{\mathbf{E}}_b \times \ddot{\mathbf{H}}_a) \\
&= \ddot{\mathbf{H}}_b \cdot (-j\omega\mu\ddot{\mathbf{H}}_a) - \ddot{\mathbf{E}}_a \cdot (j\omega\epsilon\ddot{\mathbf{E}}_b + \ddot{\mathbf{J}}_b) - \ddot{\mathbf{H}}_a \cdot (-j\omega\mu\ddot{\mathbf{H}}_b) + \ddot{\mathbf{E}}_b \cdot (j\omega\epsilon\ddot{\mathbf{E}}_a + \ddot{\mathbf{J}}_a) \\
&= \ddot{\mathbf{E}}_b \cdot \ddot{\mathbf{J}}_a - \ddot{\mathbf{E}}_a \cdot \ddot{\mathbf{J}}_b.
\end{aligned} \tag{82}$$

再將式(82)兩邊取體積積分，我們有

$$\int_v \nabla \cdot (\ddot{\mathbf{E}}_a \times \ddot{\mathbf{H}}_b - \ddot{\mathbf{E}}_b \times \ddot{\mathbf{H}}_a) dV = \int_v (\ddot{\mathbf{E}}_b \cdot \ddot{\mathbf{J}}_a - \ddot{\mathbf{E}}_a \cdot \ddot{\mathbf{J}}_b) dV. \tag{83}$$

若上式左項為零，則由右項即可得到式(79)-相互定理。在此，我們接著證明式(83)左項為零。首先利用散度定理(divergence theorem)，將體積積分降為面積積分，再考慮對半徑無限大的球體表面作面積積分，此時兩電流源的輻射電場及磁場可以考慮為遠場場量。因此，我們有

$$\begin{aligned}
\int_v \nabla \cdot (\ddot{\mathbf{E}}_a \times \ddot{\mathbf{H}}_b - \ddot{\mathbf{E}}_b \times \ddot{\mathbf{H}}_a) dV &= \int_s (\ddot{\mathbf{E}}_a \times \ddot{\mathbf{H}}_b - \ddot{\mathbf{E}}_b \times \ddot{\mathbf{H}}_a) \cdot d\ddot{\mathbf{S}} \\
&= \int_s [-\eta(\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{H}}_a) \times \ddot{\mathbf{H}}_b] - [-\eta(\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{H}}_b) \times \ddot{\mathbf{H}}_a] \cdot d\ddot{\mathbf{S}} \\
&= \int_s -\eta[\ddot{\mathbf{H}}_a(\ddot{\mathbf{H}}_b \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \hat{\mathbf{r}}(\ddot{\mathbf{H}}_b \cdot \ddot{\mathbf{H}}_a)] + \eta[\ddot{\mathbf{H}}_b(\ddot{\mathbf{H}}_a \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \hat{\mathbf{r}}(\ddot{\mathbf{H}}_a \cdot \ddot{\mathbf{H}}_b)] \cdot d\ddot{\mathbf{S}} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{84}$$

在推導上式中，我們用到了  $(\ddot{\mathbf{B}} \times \ddot{\mathbf{C}}) \times \ddot{\mathbf{A}} = \ddot{\mathbf{C}}(\ddot{\mathbf{A}} \cdot \ddot{\mathbf{B}}) - \ddot{\mathbf{B}}(\ddot{\mathbf{A}} \cdot \ddot{\mathbf{C}})$  的恒等式。而由式(84)，我們可以證明相互定理-式(79)成立。

接著我們將相互定理應用到圖11的一個待測試天線(test antenna)及一個量測天線(probe antenna)，說明天線輻射及接收場型的相互性質。當待測試天線作為一接收天線，而量測天線為一輻射天線時，我們可得

$$\begin{aligned}
\int_{v_a} \ddot{\mathbf{E}}_b \cdot \ddot{\mathbf{J}}_a dv_a &= \int_{\int_A} \ddot{\mathbf{E}}_b \cdot \ddot{\mathbf{J}}_a dad\} = \int_{\int} E_b I_a d\} \\
&= I_a \int_{\int} E_b d\} = I_a V_a^{oc}.
\end{aligned} \tag{85}$$

其中， $V_a^{oc}$  為待測試天線接收到之開路電壓， $I_a$  為待測試天線上的感應電流密度， $v_a$  為待測試天線體積。同樣地，若待測試天線作為一輻射天線，而量測天線為一接收天線時，我們可得

$$\int_{v_b} \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b dv_b = I_b V_b^{oc} . \quad (86)$$

其中， $V_b^{oc}$  為量測天線接收到之開路電壓， $I_b$  為量測天線上的感應電流密度， $v_b$  為量測天線體積。

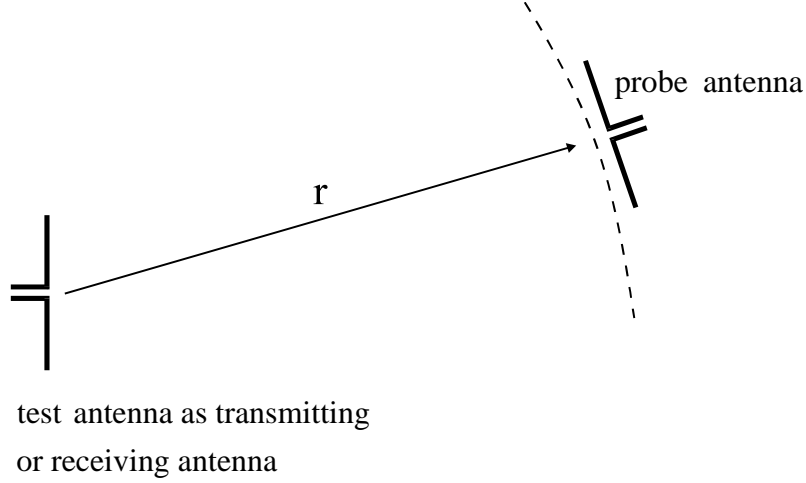


圖11：天線輻射及接收場型的相互性質。

由式(85)-(86)，可得

$$\frac{V_a^{oc}}{I_b} = \frac{V_b^{oc}}{I_a} = Z_m . \quad (87)$$

上式中， $Z_m$ 稱為互阻抗(mutual or transfer impedance)。同時，另外可得

$$V_a^{oc} = Z_m^R(\theta, \phi) I_b . \quad (88)$$

上式為把待測試天線當作接收天線時所得到的結果，而 $Z_m^R(\theta, \phi)$ 代表待測試天線的接收場型。反之，當把待測試天線當作輻射天線時，可得

$$V_b^{oc} = Z_m^T(\theta, \phi) I_a . \quad (89)$$

其中， $Z_m^T(\theta, \phi)$ 代表待測試天線的輻射場型<sup>註</sup>。而由式(87)可知

<sup>註</sup> 天線遠場輻射場型亦可由天線近場量測得到，相關說明見附錄 A.2：天線近場量測理論簡介。

$$Z_m^R(\theta, \phi) = Z_m^T(\theta, \phi) = Z_m. \quad (90)$$

亦即，待測試天線的接收場型與其輻射場型相同。也就是其接收特性與輻射特性相同。此項結論適用於所有天線。因此，我們在分析一個待測試或未知天線的特性時，只要分析其輻射或接收場型之一即可。

### 1.7 天線輻射效率 (antenna radiation efficiency)

天線之輸入阻抗可以表示為 $Z_{in}=R_{in}+jX_{in}$ ，同時可以用圖12的等效電路來表示。其中， $R_{in}$ 為輸入電阻包含輻射電阻 $R_r$ 及歐姆損耗電阻 $R_{ohmic}$ 。輻射電阻為天線之實部輻射功率所貢獻，而歐姆損耗電阻則為天線導體上之熱能損失，至於 $X_{in}$ 為電抗性阻抗，由天線之虛部輻射功率所貢獻。而輻射效率定義為：

$$e = \frac{P_r}{P_{in}} = \frac{I_{in}^2 R_r / 2}{I_{in}^2 (R_r + R_{ohmic}) / 2} = \frac{R_r}{R_r + R_{ohmic}}. \quad (91)$$

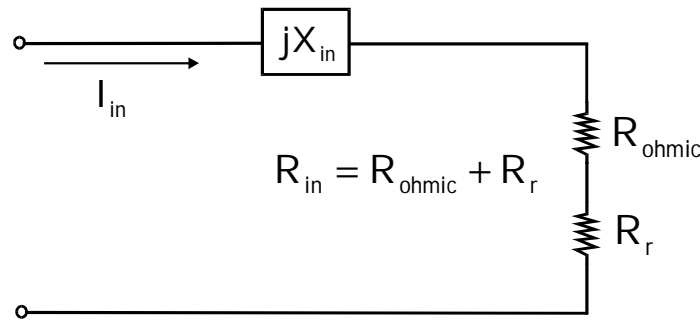


圖12：天線輸入阻抗等效電路。

#### 練習1.4

考慮一理想電偶極天線，操作於10 MHz，其天線長度為10公分，計算此天線之輻射效率。

解：理想電偶極天線的輻射電阻可由下式計算得到[參考式(49)]

$$R_r = \frac{2P_r}{|I_{in}|^2} = \frac{2\omega\mu\beta}{12\pi I^2} (I\Delta z)^2 \cong 80\pi^2 \left( \frac{\Delta z}{\lambda} \right)^2 = 0.0088 \Omega .$$

而歐姆電阻為

$$R_{ohmic} = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta z}{\delta \cdot 2\pi a} = \frac{\Delta z}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{0.1}{2\pi \times 5 \times 10^{-4}} \sqrt{\frac{2\pi \times 10^7 \times 4\pi \times 10^{-7}}{2 \times 5.7 \times 10^7}} = 0.0265 \Omega ,$$

其中， $\delta$ 為天線導體之集膚深度(skin depth)等於 $(2/\omega\mu\sigma)^{1/2}$ ，而天線導體的直徑 $(2a)$ 假設為0.1公分，導體的導電率 $(\sigma)$ 為 $5.7 \times 10^7 (\text{m} \cdot \Omega)^{-1}$ 。最後，輻射效率為

$$e = \frac{R_r}{R_r + R_{ohmic}} = \frac{0.0088}{0.0088 + 0.0265} \cong 0.249 = 24.9\% .$$

由練習1.4亦可以得到：輻射電阻與天線長度平方成正比；而歐姆電阻則僅與天線長度成正比。因此，藉著增加天線的長度，可以有效地增加天線的輻射效率。

### 1.8 天線極性 (antenna polarization)

所謂天線極性指的是天線遠場輻射場或其輻射電磁波於某一傳播方向的極性。天線主輻射束與其旁波瓣的輻射電磁波極性可能不同；而天線同一輻射束內的輻射電磁波極性則大致相同。而由相互定理可知，若入射波具有與天線輻射電磁波相同的極性，則此天線最能有效地接收到此入射波的能量。以下則說明電磁波的三種極性：

- (1) 線性極化(LP, linear polarization)；
- (2) 圓形極化(CP, circular polarization)，又分為右旋(RH)及左旋(LH)圓形極化；
- (3) 橢圓極化(EP, elliptical polarization)，又分為右旋(RH)及左旋(LH)橢圓極化。

以直角座標為例，假設一平面波傳播於 $z$ 軸方向，則此平面波可表示為

$$\ddot{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = (\hat{x}E_x + \hat{y}E_y) e^{j(\omega t - \beta z)} . \quad (92)$$

當 $E_x$ 與 $E_y$ 具有相同的相位時，此平面波為一線性極化波，其電場變化軌跡為一直線，此直線與 $x$ 軸具有一夾角 $\alpha = \tan^{-1}(E_y/E_x)$ ，同時可以由下列數學式表示之：

$$\vec{E}(x, y, z, t) = (\hat{x}|E_x| + \hat{y}|E_y|) e^{j(\omega t - \beta z)}. \quad (93)$$

而當 $E_x$ 與 $E_y$ 具有相同的振幅，且相位相差 $90^\circ$ 時，此平面波為一圓形極化波，其電場變化軌跡為一圓形，可以由下列數學式表示之：

$$\vec{E}(x, y, z, t) = |E_0|(\hat{x} \pm j\hat{y}) e^{j(\omega t - \beta z)}. \quad (94)$$

式(94)中， $(\hat{x} \pm j\hat{y})$ 之正號代表右旋(RH, right-hand)或反時針(CCW, counter clockwise)旋轉情形，而負號代表左旋(LH, left-hand)或順時針(CW, clockwise)旋轉情形。典型的線性極化及圓形極化的電場軌跡圖如圖13所示。

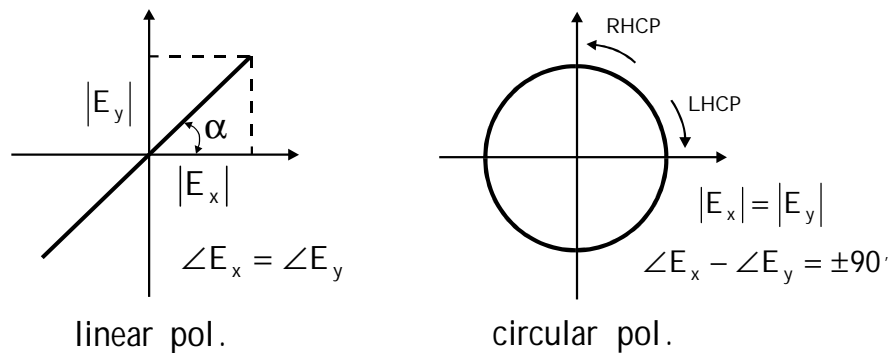


圖13：典型的線性極化及圓形極化的電場軌跡圖。

第三種情況是當 $E_x$ 與 $E_y$ 具有不同的相位但不為 $90^\circ$ ，或 $E_x$ 與 $E_y$ 相位相差 $90^\circ$ 但 $E_x$ 與 $E_y$ 具有不同的振幅，則式(92)之平面波為一橢圓極化波，其電場變化軌跡為一橢圓，其數學表示式可為

$$\vec{E}(x, y, z, t) = (\hat{x}|E_x| + \hat{y}|E_y|e^{j\phi}) e^{j(\omega t - \beta z)}. \quad (95)$$

上式中， $\phi$ 為 $E_x$ 與 $E_y$ 之相位差； $\phi \neq 0$ 。由式(95)另可推導其電場軌跡方程式為

$$\left(\frac{E_x}{|E_x|}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x E_y}{|E_x||E_y|}\right)\cos\varphi + \left(\frac{E_y}{|E_y|}\right)^2 = \sin^2\varphi, \quad (96)$$

其中，

$$E_x = |E_x|\cos\omega t,$$

$$E_y = |E_y|\cos(\omega t - \varphi).$$

注意式(96)為一橢圓方程式，而典型的橢圓極化的電場軌跡圖如圖14所示。圖中軸比(AR, axial ratio)的定義為橢圓長軸與其短軸之比；當AR = 1時代表圓形極化情況，當AR = ∞時為線性極化，其餘情況(AR > 1)則為橢圓極化。

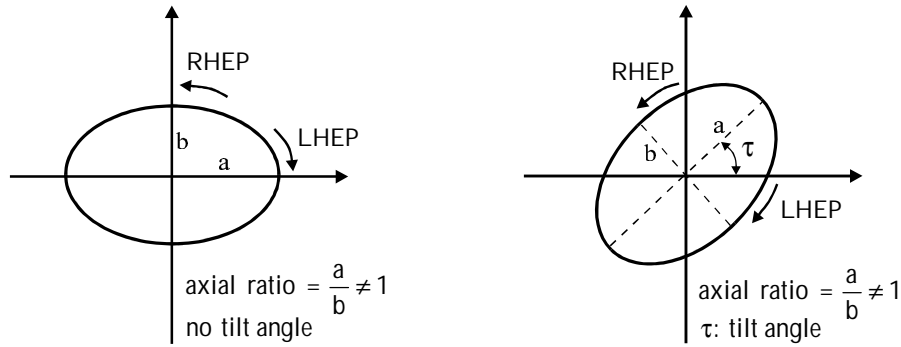


圖14：典型的橢圓極化的電場軌跡圖。

#### 練習1.5

試證任何線性極化波可化為二個旋轉方向相反且振幅相同的圓極化波之和。

解：參考式(93)，一線性極化波(傳播於z軸)可推導為

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z, t) &= (\hat{x}|E_x| + \hat{y}|E_y|)e^{j(\omega t - \beta z)} \\ &= [E_I(\hat{x} - j\hat{y}) + E_{II}(\hat{x} + j\hat{y})]e^{j(\omega t - \beta z)}. \end{aligned} \quad (97)$$

其中，

$$E_I = \frac{|E_x| + j|E_y|}{2}, \quad E_{II} = \frac{|E_x| - j|E_y|}{2}.$$

由於式(97)代表二個旋轉方向相反，振幅相同的圓極化波，故得證。

### 練習1.6

試證任何橢圓極化波可化為二個旋轉方向相反且振幅相同的圓極化波之和。

解：參考式(95)，一橢圓極化波(傳播於z軸方向)可推導為

$$\begin{aligned}\ddot{E}(x, y, z, t) &= (\hat{x}|E_x| + \hat{y}|E_y|e^{j\phi})e^{j(\omega t - \beta z)} \\ &= [E_I(\hat{x} - j\hat{y}) + E_{II}(\hat{x} + j\hat{y})]e^{j(\omega t - \beta z)}.\end{aligned}\quad (98)$$

其中，

$$E_I = \frac{|E_x| + j|E_y|e^{j\phi}}{2}, \quad E_{II} = \frac{|E_x| - j|E_y|e^{j\phi}}{2}.$$

由於式(98)代表二個旋轉方向相反，振幅相同的圓極化波，故得證。

### 練習1.7

兩線性極化波合成為一橢圓極化波問題。有一平面波向觀測者入射而來，此平面波同時可分解為下列兩線性極化波：

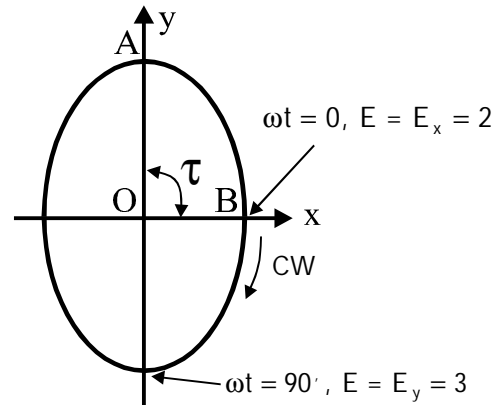
$$E_x = 2\cos\omega t, \quad E_y = 3\cos(\omega t + 90^\circ),$$

試計算此入射平面波之(1)軸比(axial ratio)，(2)傾斜角(tilt angle)，(3)旋轉方向(順時針或反時針方向)。

解：此入射平面波之軌跡如右圖所示。

其中OA及OB分別為軌跡長軸及短軸，等於3及2。而由圖中結果，可得

- (1)軸比 = 軌跡長軸/軌跡短軸 = 1.5，
- (2)傾斜角 = 軌跡長軸與x軸夾角 =  $90^\circ$ ，
- (3)旋轉方向為順時針方向。



### 練習1.8

兩橢圓極化波合成為一圓極化波問題。有一平面波向觀測者入射而來，此平面波同時可分解為下列兩橢圓極化波：



$$\begin{cases} E_{1x} = 6\cos(\omega t + 90^\circ) \\ E_{1y} = 2\cos \omega t \end{cases} \quad \begin{cases} E_{2x} = 3\cos(\omega t - 90^\circ) \\ E_{2y} = \cos \omega t \end{cases}$$

試計算此入射平面波之(1)軸比，(2)傾斜角，(3)旋轉方向。

解：此入射平面波之合成電場為

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = -6\sin \omega t + 3\sin \omega t = -3\sin \omega t ,$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = 2\cos \omega t + \cos \omega t = 3\cos \omega t ,$$

由結果可得

(1)軸比 = 1.0 ,

(2)無傾斜角，

(3)旋轉方向為反時針方向。

### 1.9 天線等效面積 (antenna effective area)

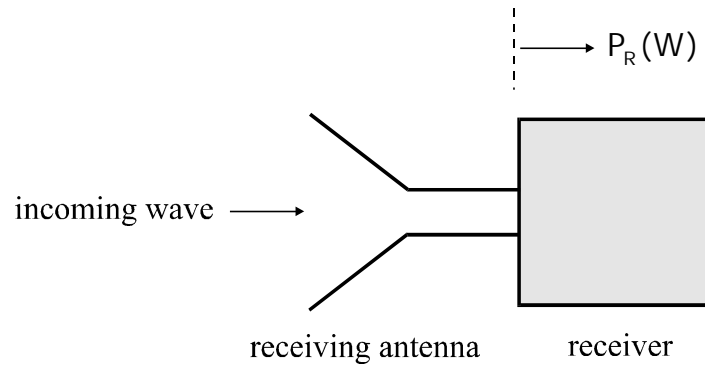


圖15：一系統接收端之入射波能量接收。

考慮圖15之結構，圖中 $P_R(W)$ 為接收天線(receiving antenna)傳送至系統接收端(receiver)的能量，接收天線並阻抗匹配至系統接收端以獲得最大的能量傳遞。我們定義天線最大的等效面積為

$$A_{em} = \frac{P_R}{S_{av}} \quad (m^2) \quad (99)$$

其中， $S_{av}$  為入射波的時均功率密度。當考慮遠場情況時(亦即，入射波可被視為一橫向電磁波)，我們可得

$$S_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] \cdot \hat{r} = \frac{|\vec{E}|^2}{2\eta} = \frac{|E_{rms}|^2}{\eta}. \quad (\text{W/m}^2) \quad (100)$$

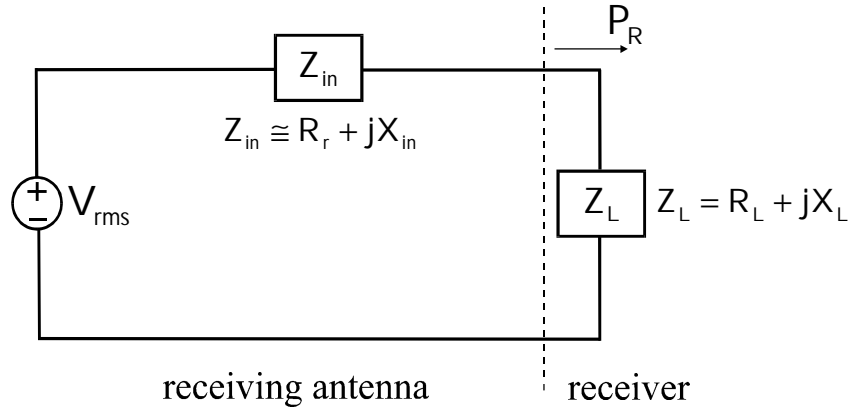


圖16：圖15之等效電路。

接著考慮圖16，當阻抗匹配時，亦即 $R_L = R_r$ 、 $X_L = -X_{in}$ ，此時，系統接收端( $Z_L$ )處之吸收能量為

$$P_R = \frac{V_{rms}^2}{4R_L}. \quad (101)$$

將式(100)-(101)代入式(99)中，可得

$$A_{em} = \frac{P_R}{S_{av}} = \frac{V_{rms}^2 / 4R_L}{E_{rms}^2 / \eta} = \frac{\eta(\Delta z)^2}{4R_r}. \quad (102)$$

上式中， $V_{rms} = E_{rms}\Delta z$ ， $\Delta z$ 為天線長度。若將理想電偶極天線的輻射電阻(練習1.4中表示式)代入式(102)中，可得

$$A_{em} = \frac{\eta(\Delta z)^2}{4[80\pi^2(\Delta z/\lambda)^2]} = \frac{3}{8\pi}\lambda^2 \cong 0.12\lambda^2. \quad (103)$$

上式即為理想電偶極天線的最大等效面積。注意到式(103)與天線的長度無關。另外，我們亦可從式(103)推導出 $A_{em}$ 與天線指向性 $D$ 及輻射束空間角 $\Omega_A$ 的關係。由知道一理想電偶極天線的指向性 $D$ 為1.5，我們有

$$D = \frac{3}{2} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \times \frac{3\lambda^2}{8\pi} = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{em} \quad (104)$$

同時因為 $D = 4\pi/\Omega_A$ ，可得

$$\lambda^2 = A_{em} \Omega_A \quad (105)$$

式(104)-(105)雖然只是利用理想電偶極天線的結果推導得到，不過這兩個式子對所有天線都是成立的。而由式(105)可得，當操作波長固定時，欲增加天線的最大等效面積 $A_{em}$ ，則必須使天線的輻射束空間角 $\Omega_A$ 減少，亦即此時天線的輻射能量必須更集中或其指向性必須增加。由天線的最大等效面積大小，可以讓我們對天線的接收電波或輻射電波效能有較具體的概念。

#### 1.10 電磁波傳輸方程式 (Friis transmission formula)

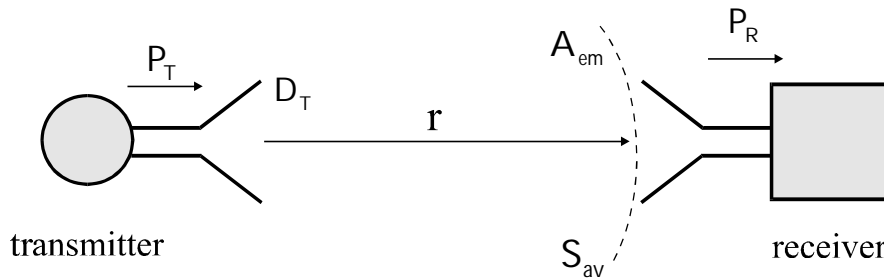


圖17：一個包含發射天線及接收天線的典型通訊系統。

考慮圖17之通訊系統，我們可以推導出發射功率 $P_T$ 與接收功率 $P_R$ 之間的關係式。假設發射天線與接收天線之間距離為 $r$ ，此時接收天線端的入射波功率密度為

$$S_{av} = \frac{D_T P_T}{4\pi r^2} \quad (106)$$

上式假設發射天線將其最大指向性( $D_T$ )方向指向接收天線的方向。此時應用1.9節的結果，接收端接收到之電波能量為

$$P_R = S_{av} A_{emR} = \frac{D_T P_T A_{emR}}{4\pi r^2}. \quad (107)$$

其中 $A_{emR}$ 為接收天線的最大等效面積。而因為

$$A_{emR} = \frac{D_R \lambda^2}{4\pi}, \quad A_{emT} = \frac{D_T \lambda^2}{4\pi}, \quad (108)$$

我們可得

$$P_R = P_T \times \frac{A_{emT} A_{emR}}{r^2 \lambda^2}. \quad (109)$$

式(109)為理想Friis傳輸方程式，其中假設接收天線及發射天線之效率( $e_T, e_R$ )為100%。而當然實際上天線效率不為100%，此時式(109)須修正為

$$P_R = P_T \times \frac{A_{eT} A_{eR}}{r^2 \lambda^2} = P_T \times \frac{G_T G_e \lambda^2}{(4\pi r)^2}. \quad (110)$$

其中， $A_{eR} = e A_{emR}$ ， $A_{eT} = e A_{emT}$ ，而 $G = eD = e A_{em} 4\pi / \lambda^2 = A_e 4\pi / \lambda^2$ 。式(110)為考慮天線效率之Friis傳輸方程式。要注意的是式(109)及(110)的結果乃假設：

- (1) 發射天線端與接收天線端兩者均為阻抗匹配情況；
- (2) 發射天線與接收天線之電波極性相同；
- (3) 發射天線與接收天線彼此均指向其最大增益方向。

#### 1.11 天線等效等向性輻射功率 (EIRP, effective isotropically radiated power)

EIRP乃指觀測者在天線最強輻射方向所能接收到的功率或訊號強度，其值通常以dB值表示，而其數學式為

$$EIRP = P_{in} G_T. \quad (111)$$

其中， $P_{in}$ 為發射天線的輸入功率， $G_T$ 為發射天線的增益。另外由

$$G_T = \frac{U_m}{P_{in} / 4\pi}, \quad (112)$$

可得

$$EIRP = 4\pi U_m. \quad (113)$$

EIRP常見於廣播或通訊系統中，其值可讓我們得到觀測者實際上所能接收到的天線輻射功率。

## 附錄：

### A.1 電磁波頻帶區間

VHF	30-300 MHz	X-band	8-12 GHz
UHF	300-1000 MHz	Ku-band	12-18 GHz
L-band	1-2 GHz	K-band	18-27 GHz
S-band	2-4 GHz	Ka-band	27-40 GHz
C-band	4-8 GHz	Millimeter	40-300 GHz

其他重要頻帶[3]：

ISM (Industrial, Scientific, Medicine) band : 2450±50 MHz; 5725-5850 MHz; 24.125±0.125 GHz 供工、科、醫用設備使用，其它業務須在忍受其干擾之條件下使用。

### A.2 天線近場量測理論簡介

天線輻射場型之量測，一般由直接量測天線遠場場量得到。不過，近年來有許多研究報告指出利用量測天線近場輻射場量[4-8]，可以得到相當準確的遠場輻射場型結果，尤其特別適用於具有低旁波瓣輻射場型之天線量測上。在本附錄中，我們特別對此種天線近場量測理論加以介紹。

#### (1) 天線輻射之近場及遠場區間

天線之輻射場依照其輻射距離之遠近，可分為三個區間(參見圖 A1)：(1)電抗性近場(reactive near-field)，(2)輻射性近場(radiative near-field)，(3)遠場(far-field)。其中，離開待測天線(AUT; antenna under test)1 個波長距離之區間內，輻射電場及磁場一般相位相差九十度，亦即，在此區間內電磁能量並不向外傳播，因此，此區間稱為電抗性近場區間。而在 1 個波長至 $\lambda+2D^2/\lambda$ 之區間(D 為 AUT 長度； $\lambda+2D^2/\lambda$ 為遠場條件之一，加上 1 個波長 $\lambda$ 的條件在於考慮天線長度小於 1 個波長時的情況)，電場及磁場相位幾乎同相，尤其是愈接近 $\lambda+2D^2/\lambda$ 距離時。不過，隨著距離 r 增加，輻射場型亦隨之變化，因此，此區域稱之輻射性近場。近場量測之取樣點平面，即選取在此區間內。而從 $\lambda+2D^2/\lambda$ 開始之區域屬於遠場區

間，此時電場及磁場均隨  $e^{-j\beta r}/r$  而變化，而且其輻射場型不為距離  $r$  之函數。亦即，遠場場型可表示為

$$\ddot{\mathbf{E}}(r, \theta, \phi) = E_0 \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \ddot{\mathbf{F}}(\theta, \phi). \quad (\text{A1})$$

其中， $\beta (= \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0})$  為傳播常數， $F(\theta, \phi)$  為輻射場型函數， $E_0$  為一常數。

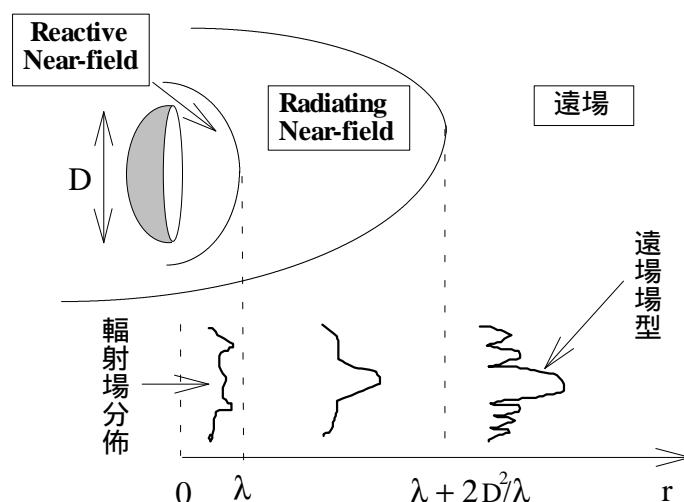


圖 A1：天線輻射近場及遠場區間。

## (2) 天線近場量測方式

天線近場量測方式依照其取樣點平面形狀，亦即依照 AUT 與量測天線 (probe) 之不同相對運動方式，區分為平面、柱面及球面三種[7]。其中，以平面方式較為簡單而常用，而平面方式依照其取樣點所形成之不同格網(grid)形狀(參見圖 A2 A3 A4)，又可區分為平面矩形(planar-rectangular)、平面極座標(planar-polar)及平面雙極座標(planar bi-polar)三種[5]。圖 A2 中所示為平面矩形之量測方式及其取樣點格網。在此種量測方式下，當 AUT 不動時，量測天線沿著直角坐標上下左右線性移動，量測電場值。圖 A3 中所示則為平面極座標量測方式。此種量測方式，AUT 以一固定速度沿著其軸心旋轉，而量測天線則在一固定的水平直線方向左右移動，所得之取樣點如圖中所示。由於量測天線只在某一方向移動，此種量測方式較平面矩形方式必須上下左右移動，具有較小的位置誤差，同時所需空間也較小。圖 A4 中所示為平面雙極座標量測方式。此種量測方式，不僅 AUT 繞著其軸心旋轉，量測天線也繞著其支撐臂軸心旋轉。所有轉動方式均為旋轉式，而無直線式運動。此種量測方式最大的優點是，在一固定的空間下，具有較平面矩形及平面極座標方式更大的有效掃描區域[5]。

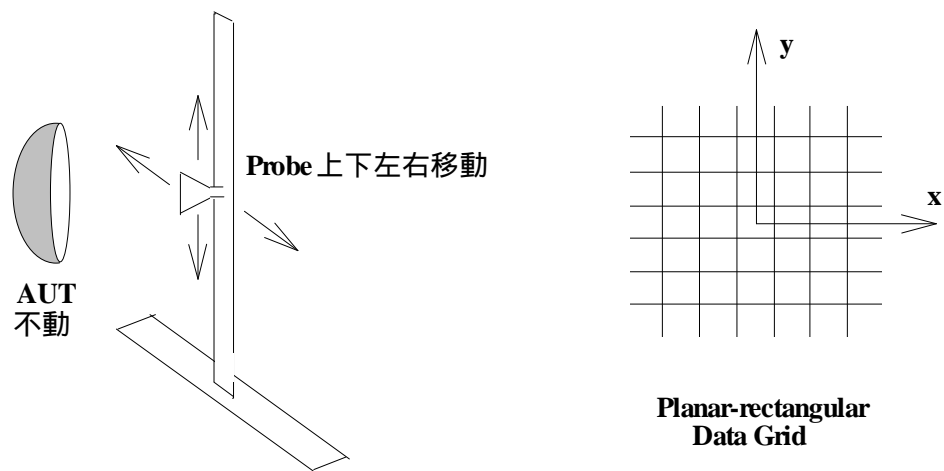


圖 A2：平面矩形量測方式及其取樣典格網形狀。

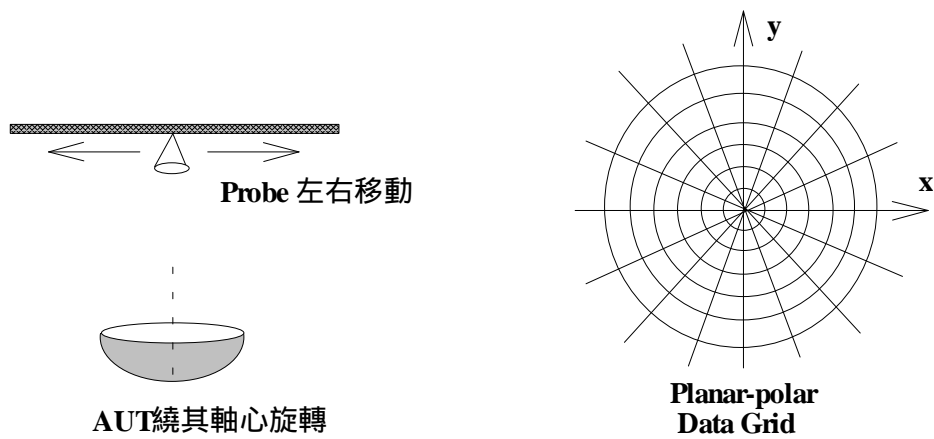


圖 A3：平面極座標量測方式及其取樣點格網形狀。

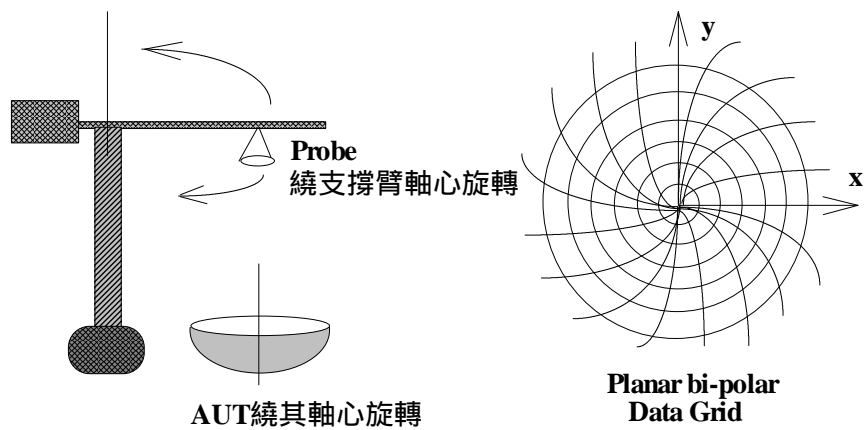


圖 A4：平面雙極座標量測方式及其取樣典格網形狀。

### (3) 等效原理

等效原理說明一天線在外部區間(圖 A5(a)之  $V_{out}$ )之輻射場量計算可以利用一假想之表面等效電流或磁流[1]來計算[圖 A5(b)]。表面等效電流及磁流表示為

$$\vec{J}_s = \vec{h} \times \vec{H}_s, \quad (A2)$$

$$\vec{M}_s = \vec{E}_s \times \vec{h}. \quad (A3)$$

上式中， $\vec{h}$ 為選取平面之垂直向外之單位向量； $\vec{H}_s$ ， $\vec{E}_s$ 則分別為選取平面上天線之輻射磁場及電場值。利用此等效原理，我們只要量測到某一平面之電場或磁場場量，即可由此場量來計算天線之遠場輻射量，這亦是近場量測之基本理論。而依照量測平面之形狀(可為平面、柱面或球面)，目前發展出平面、柱面及球面近場量測技術[見(2)中之說明]。

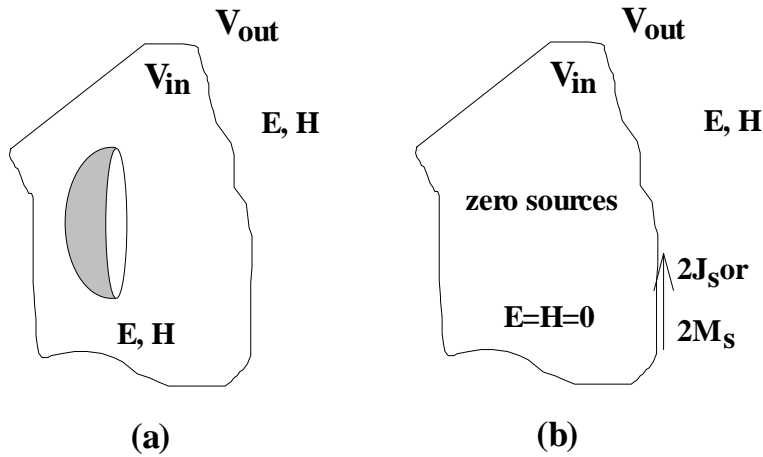


圖 A5：(a)原始結構，(b)利用等效原理得到之結構。

### (4) 近場量測得到之遠場場型準確範圍

以平面矩形量測方式為例，理想上，量測平面選擇為無限大時，可以得到在整個空間範圍均準確的遠場場量結果，亦即， $\theta_s = 90^\circ$  (見圖 A6)。而若是量測平面為有限大，其尺寸為  $L \times L$ ，而 AUT 與量測平面之距離為  $d$ ，此時，我們可以得到遠場場量之準確範圍為  $\theta \leq \theta_s$ ，而  $\theta_s$  表示為

$$\theta_s = \tan^{-1} \left( \frac{L - D}{2d} \right). \quad (A4)$$



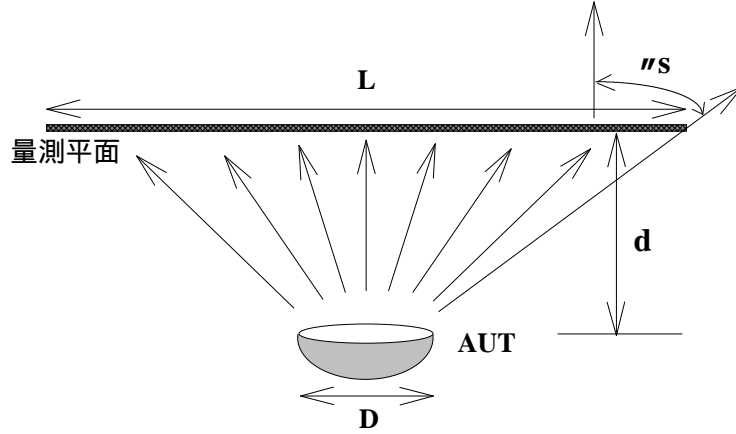


圖 A6：(a)原始結構，(b)利用等效原理得到之結構。

另外要注意的是，因為在量測平面邊緣( $\theta = \theta_s$ )處，AUT 的輻射場量有可能並不為零，而此非零之值，經過快速傅立葉轉換(fast Fourier Transform)後，會造成在得到的遠場場量數值上的小振盪(ripples)。

#### (5) 天線遠場場型計算

在計算天線遠場場量之前，我們必須先得到在近場量測平面上的電場場量。而因為實際上我們只能選取一有限大的量測平面，因此，如何在量測平面上選擇適當的取樣點十分重要。由取樣理論(sampling theorem)[9]：任何一個有限波段(band-limited)為 $\omega_b$  (rad/sec)之訊號，亦即其傅立葉轉換在 $|\omega| > \omega_b$ 均為零，可以由一組均勻取樣點集合[其取樣時間間隔少於 $\pi / \omega_b$  (sec)]來重建之。應用取樣理論到近場量測上，我們可以決定出在近場量測平面上的取樣矩形格網，其最小相鄰間隔距離必須為半波長，亦即 $\Delta x \leq \lambda / 2$ ,  $\Delta y \leq \lambda / 2$ 。在此條件下，由此有限矩形格網得到的取樣點集合可以重建整個無限大量測平面上的近場場量。簡單說明如下：

在近場量測平面上，量測得到的近場場量可表示為

$$\ddot{E}(x, y, z = d) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{A}(k_x, k_y) e^{-jk_z d}] e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (A5)$$

其中,  $d$  為 probe 與 AUT 之距離( $d$  必須大於 1 個波長, 可選擇在 $\lambda \sim \lambda + 2D^2/\lambda$ 之間), 而 $\ddot{A}(k_x, k_y)$ 可表示為

$$\ddot{A}(k_x, k_y) = \frac{e^{jk_z d}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{E}(x, y, z = d) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (A6)$$

而若  $\ddot{A}(k_x, k_y)e^{-jk_z d}$  為一有限波段函數，假設其  $x$  方向波段上限為  $k_{xm}$  (rad/m)， $y$  方向為  $k_{ym}$  (rad/m)，則由取樣理論可知，無限大量測平面上之近場場量值可由相隔  $\Delta x = \pi / k_{xm}$ 、 $\Delta y = \pi / k_{ym}$  之取樣點集合重建之。同時， $k_{xm}$  及  $k_{ym}$  均選擇  $k_{xm} \geq k = 2\pi / \lambda$ ， $k_{ym} \geq k = 2\pi / \lambda$ 。此時，由  $k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2$ ，可以得到  $k_z$  為負虛數值來滿足天線輻射條件，亦即， $\ddot{A}(k_x, k_y)e^{-jk_z d}$  在  $z$  方向快速衰減。再由選取之  $k_{xm}$  及  $k_{ym}$  值，可以得到取樣點相隔距離為

$$\Delta x \leq \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta y \leq \frac{\lambda}{2}. \quad (A7)$$

上式說明平面近場量測之取樣點必須小於半波長。

另外，式(A6)可以用快速傅立葉轉換表示為[5]

$$\ddot{A}(k_x, k_y) \cong \frac{\Delta x \Delta y e^{jk_z d}}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \ddot{E}(n\Delta x, m\Delta y) e^{j(k_x n\Delta x + k_y m\Delta y)}. \quad (A8)$$

其中， $N$ 、 $M$  分別為  $x$  及  $y$  方向之取樣點數目。 $N$ 、 $M$ 、 $\Delta x$  及  $\Delta y$  之決定代表整個取樣或量測平面之大小  $[(N-1)\Delta x \times (M-1)\Delta y]$ 。得到  $\ddot{A}(k_x, k_y)$  後，由等效原理，天線之遠場可由下式計算得到[1,5]

$$\ddot{E}(r, \theta, \phi) = \frac{jk \cos \theta e^{-jkr}}{r} \ddot{A}(k_x, k_y). \quad (A9)$$

其中，

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi,$$

$$k_y = k \sin \theta \sin \phi.$$

在式(A9)中， $[\ddot{A}(k_x, k_y)e^{-jkr} / r] \times \hat{z}$  可被視為在量測平面上由 2 倍等效磁流 ( $\ddot{E}_s \times \hat{z}$ ) 所產生之電場向量電位 (electric vector potential,  $\ddot{F}$ )，而天線遠場則由下式計算：

$$\begin{aligned} \ddot{E} &= -jk \ddot{F} \times \hat{r} \\ &= -jk \frac{e^{-jkr}}{r} (\ddot{A} \times \hat{z}) \times \hat{r} \\ &= -jk \frac{e^{-jkr}}{r} [(\hat{r} \cdot \ddot{A}) \hat{z} - (\hat{r} \cdot \hat{z}) \ddot{A}] \\ &= jk \cos \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \ddot{A}. \end{aligned} \quad (A10)$$

## (6) 近場量測之多重反射誤差

近場量測時之多重反射(multiple reflections)，尤其是在量測天線與 AUT 之間的多重反射，為此種量測方式上最大的誤差來源。其誤差大小，可以在固定的  $x$  或  $y$  量測位置上，變化  $z$  方向 AUT 與量測天線之間的距離，量測其近場場量振幅變化大小而得到(其變化週期為 $\lambda/2$ )。由此測試結果，可以知道所得到的遠場場量數值誤差大小。而若要將誤差降至最低，可以選取幾個不同  $z$  位置之量測平面(最大相鄰距離小於 $\lambda/2$ )進行近場量測，而再以所有平均近場量測值進行快速傅立葉轉換來計算遠場場量值。另外，若量測環境控制得宜(在 AUT、量測天線及其四週加上適當之吸收體)，亦可將此誤差降至最低。

## (7) 結論

近場量測最大的優點在於所需量測空間遠比遠場量測方法要來的小。不過近場量測時，因有量測平面截斷(truncation)誤差、多重反射誤差、量測天線及 AUT 相對運動之位置誤差等誤差源，因此，相關量測參數之選擇極為重要，如此才能獲得較正確的遠場量測數值。

## 參考文獻：

1. W. L. Stutzman and G. A. Thiele, *Antenna Theory and Design*. New York: John Wiley & Sons Inc., 1981.
2. J. D. Kraus, *Antennas*. New York: McGraw-Hill Book Co., 1988.
3. 「中華民國無線電頻率分配表」, 中華民國交通部, 1999.
4. M. H. Francis, A. C. Newell, K. R. Grimm, J. Hoffman and H. E. Schrank, "Comparison of ultralow-sidelobe-antenna far-field patterns using the planar-near-field method and the far-field method," *IEEE Antennas Propagat. Mag.*, vol. 37, pp. 7-15, Dec. 1995.
5. Y. Rahmat-Samii, L. I. Williams, and R. G. Yaccarino, "The UCLA bi-polar planar-near-field antenna measurement and Diagnostics range," *IEEE Antennas Propagat. Mag.*, vol. 37, pp. 16-35, Dec. 1995.
6. P. Petre and T. K. Sarkar, "Planar near-field to far-field transformation using an equivalent magnetic current approach," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 40, pp. 1348-1356, Nov. 1992.
7. D. Sclator, *Near-field Antenna Measurement*. Norwood, MA: Artech House, 1991.
8. A. D. Yaghjian, "An overview of near-field antenna measurements," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 34, pp. 30-45, Jan. 1986.

9. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*. New York: McGraw-Hill Book Co., 1968.