從高斯定律的積分形式出發：

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \;=\; \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{1}$$

考慮一個以點電荷 q 為中心、半徑為 r 的球面作為高斯面。由於對稱性，電場必為徑向，且在球面上大小處處相同：

$$\mathbf{E}(r) = E(r)\,\hat{\mathbf{r}}, \qquad d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}\,dA.$$

因此內積化簡為

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(r)\,dA,$$

並可將 $E(r)$ 提到積分號外：

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(r) \oint_S dA. \tag{2}$$

球面的總面積為

$$\oint_S dA = 4\pi r^2,$$

所以得到

$$E(r)\,(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{3}$$

解出電場大小：

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}. \tag{4}$$

最後加上方向，得點電荷的電場向量式：

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}. \tag{5}$$

1. 球面上的小塊區域

考慮半徑為 R 的球面，球座標 (R, θ, ϕ) 中：- θ 是極角（由 z 軸量下來，$0 \le \theta \le \pi$），- ϕ 是方位角（$0 \le \phi < 2\pi$）。

在球面上，若 θ 增加一小量 $d\theta$，ϕ 增加一小量 $d\phi$，就得到一個「球面矩形」的小區塊。

2. 兩條邊的長度

- **沿 θ 方向**：弧長等於半徑乘以角度差

$$\ell_\theta = R\,d\theta.$$

- **沿 ϕ 方向**：此時圓的有效半徑是 $R\sin\theta$，因此

$$\ell_\phi = (R\sin\theta)\,d\phi.$$

3. 小面積近似

該小區塊的面積近似為兩邊長相乘：

$$dA \approx \ell_\theta \cdot \ell_\phi = (R\,d\theta)\,(R\sin\theta\,d\phi).$$

4. 結果

因此球面面積元素為

$$\boxed{dA = R^2 \sin\theta\,d\theta\,d\phi}.$$

5. 幾何直覺

- R^2：面積必須與半徑平方成正比；
- $\sin\theta$：越靠近極點（$\theta \to 0$ 或 π），緯線的半徑變小，球面「東西方向」的寬度縮短。

幾何推導回顧

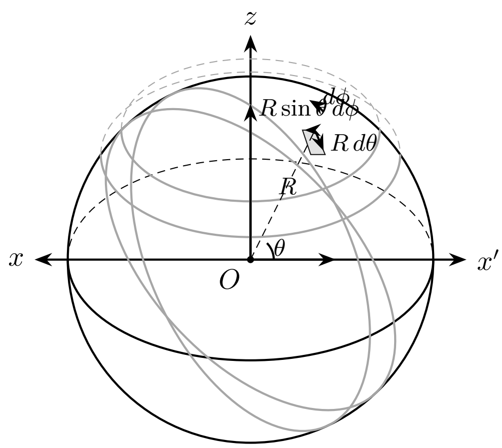
在半徑為 R 的球面上，令極角 θ 與方位角 ϕ 各增量 $d\theta$、$d\phi$，得到一個小「球面矩形」。其兩條邊的弧長為

$$\ell_\theta = R\,d\theta, \qquad \ell_\phi = (R\sin\theta)\,d\phi,$$

故小面積

$$\boxed{dA = R^2 \sin\theta\,d\theta\,d\phi}.$$

TikZ 圖示



1. 梯度 (Gradient)

定義：對純量場 $f(x, y, z)$，

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

型態：結果是一個向量場。

物理意義：指向 f 增加最快的方向，長度等於最大變化率。

例子：溫度場 $T(x, y, z)$ 的梯度 ∇T 指向溫度上升最快的方向。

2. 散度 (Divergence)

定義：對向量場 $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$，

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

型態：結果是一個純量場。

物理意義：描述「場線」在某點的淨湧出量。散度大於零表示該點像「源」，小於零表示像「匯」。

例子：流體速度場 $\mathbf{v}$ 的散度 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ 表示壓縮或膨脹程度。

3. 旋度 (Curl)

定義：對向量場 $\mathbf{A}$，

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

型態：結果是一個向量場。

物理意義：描述場的「旋轉傾向」。向量方向是旋轉軸，大小對應旋轉強度。

例子：流體速度場的旋度對應流體的「渦度」。

4. 拉普拉斯 (Laplacian)

定義：對純量場 f，

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

亦可寫作 $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$。

型態：結果是一個純量場。

物理意義：衡量某點的值與鄰域平均值之差。若 $\nabla^2 f > 0$，表示該點比周圍小；若 $\nabla^2 f < 0$，表示該點比周圍大。

例子：熱傳導方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

說明溫度隨時間擴散。

5. 四者關係總結

- 梯度 ∇f：純量 $\to$ 向量。
- 散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$：向量 $\to$ 純量。
- 旋度 $\nabla \times \mathbf{A}$：向量 $\to$ 向量。
- 拉普拉斯 $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$：純量 $\to$ 純量。

簡短比喻：

- 梯度：哪裡變化最快？（方向 + 大小）
- 散度：有沒有源/匯？（湧出或吸入）
- 旋度：有沒有旋轉？（渦旋強度）
- 拉普拉斯：該點與周圍平均差多少？

1. 定義

在一個正交曲線坐標系 (q_1, q_2, q_3) 中，三個尺度因子定義為

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

這表示：如果只改變 q_i，則在直角坐標中實際的長度變化量為

$$ds_i = h_i \, dq_i.$$

2. 幾何意義

直角坐標 (x, y, z)

$$h_x = h_y = h_z = 1,$$

因此

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

球坐標 (r, θ, ϕ)

- 沿徑向變化：$ds_r = dr \;\Rightarrow\; h_r = 1$。
- 沿極角變化：弧長 $= r\,d\theta \;\Rightarrow\; h_\theta = r$。
- 沿方位角變化：弧長 $= r \sin\theta \, d\phi \;\Rightarrow\; h_\phi = r \sin\theta$。

因此球坐標下有

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin\theta.$$

3. 在向量微積分裡的用途

這些尺度因子允許我們把「梯度、散度、旋度、拉普拉斯」寫成一般公式。例如在任意正交坐標：

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \, \hat{e}_i,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} A_i \right).$$

這就是為什麼「尺度因子」是把直角坐標系公式推廣到球坐標、圓柱坐標的關鍵。

一句話總結

尺度因子 $h_i =$ 在曲線坐標裡，坐標增量 dq_i 對應到的實際物理長度。

1. 散度的定義

對任意向量場 $\mathbf{A}$，在某點的散度定義為

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S},$$

即「單位體積流出通量」的極限。

2. 正交曲線坐標中的尺度因子

設正交曲線坐標為 (q_1, q_2, q_3)，尺度因子分別為 h_1, h_2, h_3，則

$$ds_1 = h_1 \, dq_1, \qquad ds_2 = h_2 \, dq_2, \qquad ds_3 = h_3 \, dq_3.$$

因此，微小體積元素為

$$dV = h_1 h_2 h_3 \; dq_1 dq_2 dq_3.$$

3. 各方向的面積分

- 沿 q_1 方向的兩個面：面積元素為 $h_2h_3\, dq_2dq_3$，外法向沿 $\pm\hat{e}_1$。通量貢獻近似為

$$\left[A_1\big(q_1+\tfrac{dq_1}{2}\big)-A_1\big(q_1-\tfrac{dq_1}{2}\big)\right](h_2h_3\, dq_2dq_3).$$

- 沿 q_2 方向的兩個面：面積元素為 $h_1h_3\, dq_1dq_3$。
- 沿 q_3 方向的兩個面：面積元素為 $h_1h_2\, dq_1dq_2$。

4. 合併並除以體積

將三個方向的通量加總後，再除以體積

$$dV = h_1h_2h_3\ dq_1dq_2dq_3,$$

並令 $dq_i \to 0$，得到散度公式：

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}A_1\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}A_2\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}A_3\right)\right].$$

5. 總結

正交曲線坐標下的散度公式來自：

1. 散度的定義（流出通量 / 體積）。
2. 小體積在曲線坐標下的面積與體積（用尺度因子表示）。
3. 高斯定理取極限，得到一般公式。

1. 基本觀念

拉普拉斯的定義為

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f).$$

因此，只要知道球坐標下的梯度與散度公式，就能逐步推導出來。

2. 正交曲線坐標的散度公式

對一個正交坐標系 (q_1, q_2, q_3)，尺度因子分別是 h_1, h_2, h_3，其散度公式為

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1} A_1\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2} A_2\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3} A_3\right)\right].$$

3. 套用到球坐標

球坐標的尺度因子為

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin\theta.$$

代入上式，對任意向量場 $\mathbf{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi)$，得到

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2 \sin\theta\, A_r\big) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin\theta\, A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r\, A_\phi)\right].$$

4. 令 $\mathbf{A} = \nabla f$

球坐標下的梯度公式為

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\, \hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\, \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\, \hat{e}_\phi.$$

因此，

$$A_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \qquad A_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \qquad A_\phi = \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}.$$

5. 帶回散度公式

將以上分量代回散度公式，整理得

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$

6. 總結

球坐標下的拉普拉斯公式來自以下三步：

1. 從定義 $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$ 出發。
2. 寫出一般正交坐標的梯度與散度公式（含尺度因子）。
3. 套用球坐標的尺度因子 $h_r = 1,\ h_\theta = r,\ h_\phi = r\sin\theta$，化簡得到標準結果。

1. 拉普拉斯的基本定義

在任意坐標系裡，拉普拉斯算子定義為

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f).$$

因此只要能寫出梯度 ∇f，再套用散度公式，就能得到拉普拉斯。

2. 球坐標的度量因子 (scale factors)

球坐標變換為

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

對應的尺度因子為

$$h_r = 1, \qquad h_\theta = r, \qquad h_\phi = r\sin\theta.$$

3. 球坐標下的梯度

一般正交坐標系的梯度為

$$\nabla f = \frac{1}{h_r}\frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{e}_r + \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\hat{e}_\theta + \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\hat{e}_\phi.$$

代入球坐標的尺度因子，得到

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\hat{e}_\phi.$$

4. 球坐標下的散度

一般正交坐標的散度公式為

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{h_r h_\theta h_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h_\theta h_\phi}{h_r}A_r\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h_r h_\phi}{h_\theta}A_\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{h_r h_\theta}{h_\phi}A_\phi\right)\right].$$

代入球坐標的 h_r, h_θ, h_ϕ，並取 $\mathbf{A}=\nabla f$，就能得到 $\nabla^2 f$。

5. 化簡結果

經過代數化簡，最後得到

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}.$$

6. 總結

球坐標下的拉普拉斯公式不是憑空寫出來的，而是直接從

$$\nabla^2 f=\nabla\cdot(\nabla f)$$

加上球坐標的尺度因子

$$h_r=1,\quad h_\theta=r,\quad h_\phi=r\sin\theta$$

推導出來的。

方程式

考慮零階 Bessel 方程：

$$A''(\rho)+\frac{1}{\rho}A'(\rho)+\beta^2A(\rho)=0.$$

1. 改寫形式

乘上 ρ：

$$\rho A''(\rho)+A'(\rho)+\beta^2\rho A(\rho)=0.$$

2. 拉普拉斯變換

設

$$F(s) = \mathcal{L}\{A(\rho)\} = \int_0^\infty e^{-s\rho} A(\rho)\, d\rho.$$

使用性質：

$$\mathcal{L}\{A'\} = sF - A(0), \qquad \mathcal{L}\{A''\} = s^2 F - sA(0) - A'(0),$$

以及

$$\mathcal{L}\{\rho g(\rho)\} = -\frac{d}{ds} G(s).$$

代入可得：

$$-\frac{d}{ds}\big(s^2 F - sA(0) - A'(0)\big) + (sF - A(0)) - \beta^2 F'(s) = 0.$$

3. 化簡為 $F(s)$ 的方程

展開並化簡：

$$(s^2 + \beta^2) F'(s) + sF(s) = 0.$$

4. 解 $F(s)$

這是一階微分方程，解為：

$$F(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2 + \beta^2}}.$$

利用初值定理 $\lim_{s\to\infty} sF(s) = A(0) = C$，得到

$$F(s) = \frac{A(0)}{\sqrt{s^2 + \beta^2}}.$$

5. 反變換

已知變換對：

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{\sqrt{s^2 + \beta^2}} \right\} = J_0(\beta\rho),$$

因此

$$A(\rho) = A(0)\, J_0(\beta\rho).$$

6. 關於第二個解

另一個獨立解 $Y_0(\beta\rho)$ 在 $\rho = 0$ 發散，因此在常規拉普拉斯變換（積分從 0^+ 開始）下無法得到。若要包含它，需用 Frobenius 展開、Hankel 函數或邊界條件在 $\rho > 0$ 的構造。

總結

- 拉普拉斯變換能自然導出正則解 $J_0(\beta\rho)$。
- 發散的解 $Y_0(\beta\rho)$ 不會由拉普拉斯變換給出。
- 對徑向 PDE，更一般的方法是 Hankel (Fourier–Bessel) 變換。

1. 定義

Bessel 函數 $J_\nu(x)$ 是 Bessel 方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

的解之一，其中 ν 為階數 (order)。對於零階 ($\nu = 0$)，方程式為

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0,$$

其解之一即為 $J_0(x)$。

2. 冪級數展開

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.$$

在 $x \to 0$ 附近，

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \cdots$$

3. 積分表示

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)\, d\theta.$$

4. 漸近形式 (大 x 時)

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\bigl(x - \tfrac{\pi}{4}\bigr).$$

5. 物理意義

$J_0(x)$ 在許多具有圓柱對稱的物理問題中自然出現，例如：

- 圓形膜的振動模式；
- 圓柱波導中的電磁波傳播；
- 光學繞射與干涉。

在你的 Laplace 反變換問題中，得到

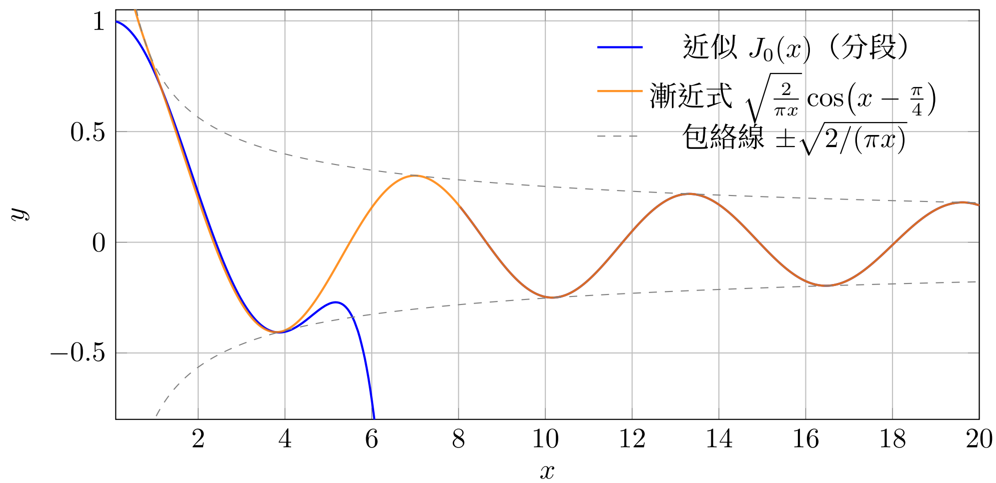
$$f(t) = A(0)\, J_0(\beta t),$$

表示解具有類似柱面波的振盪特性。

6. 圖形

下圖以分段近似繪出 $J_0(x)$ (藍)，並疊上大 x 的漸近式 (橘) 與包絡線 (灰)。

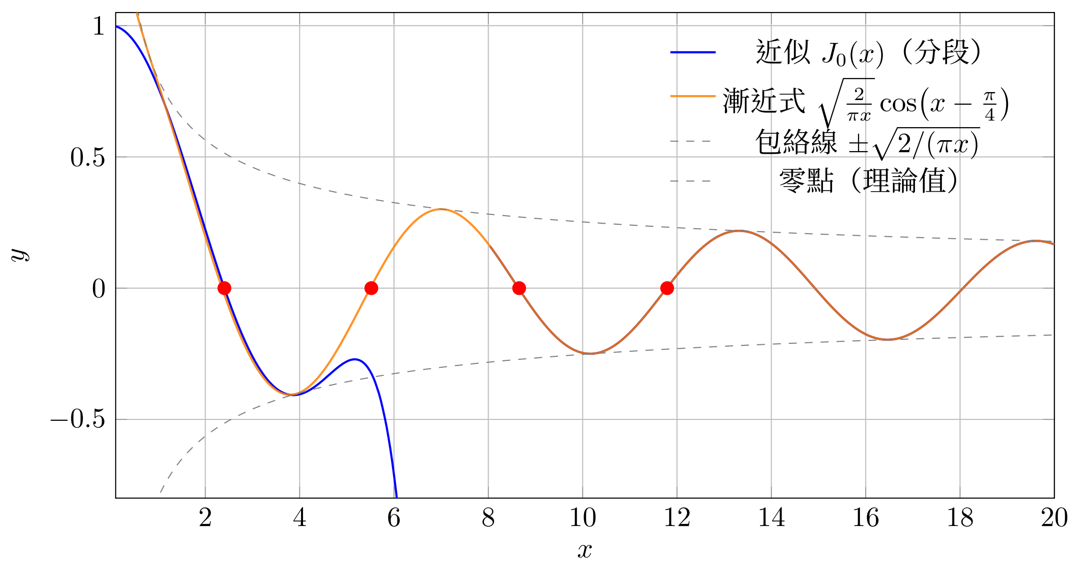
$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \text{envelope } \pm\sqrt{\frac{2}{\pi x}}.$$



註：小 x 用級數；大 x 自動切換漸近式，避免多項式爆衝造成 Dimension too large。

說明

- 藍線：近似的 $J_0(x)$（小 x 級數／大 x 漸近式）。
- 橘線：大 x 漸近式 $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$。
- 灰虛線：包絡線 $\pm\sqrt{2/(\pi x)}$。
- 紅點：前四個零點（理論值）$x \approx 2.4048, 5.5201, 8.6537, 11.7915$。



We start from

$$\mathbf{A} = A_z\,\hat{\mathbf{z}}, \qquad \nabla\times\mathbf{A} \;=\; \nabla\times(A_z\hat{\mathbf{z}}).$$

General Identity. For any scalar field f and vector field $\mathbf{F}$,

$$\nabla\times(f\mathbf{F}) \;=\; (\nabla f)\times\mathbf{F} \;+\; f\,(\nabla\times\mathbf{F}).$$

Apply it here. Let $f = A_z$, $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{z}}$:

$$\nabla\times(A_z\hat{\mathbf{z}}) = (\nabla A_z)\times\hat{\mathbf{z}} + A_z\,(\nabla\times\hat{\mathbf{z}}).$$

Simplify. Since $\hat{\mathbf{z}}$ is constant in space, $\nabla\times\hat{\mathbf{z}} = 0$, and

$$\nabla A_z \;=\; \frac{\partial A_z}{\partial x}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial A_z}{\partial y}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}}.$$

Hence

$$\nabla\times(A_z\hat{\mathbf{z}}) = (\nabla A_z)\times\hat{\mathbf{z}}.$$

Explicit Cartesian computation. Using $\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, we obtain

$$(\nabla A_z)\times\hat{\mathbf{z}} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\times\hat{\mathbf{z}} = \frac{\partial A_z}{\partial y}\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\,\hat{\mathbf{y}}.$$

Final result.

$$\boxed{\nabla\times(A_z\hat{\mathbf{z}}) = \frac{\partial A_z}{\partial y}\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\,\hat{\mathbf{y}}}$$

We consider

$$\mathbf{A} = A_z(r,\phi,z)\,\hat{\mathbf{z}}, \qquad A_r = A_\phi = 0.$$

The curl in cylindrical coordinates (r,ϕ,z) is

$$(\nabla\times\mathbf{A})_r = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial z}\right),$$

$$(\nabla\times\mathbf{A})_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},$$

$$(\nabla\times\mathbf{A})_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right).$$

With $A_r = 0$ and $A_\phi = 0$, these reduce to

$$\nabla\times(A_z\hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + 0\cdot\hat{\mathbf{z}}.$$

—

Special cases:

$$\text{If } A_z = A_z(r): \quad \nabla\times(A_z\hat{\mathbf{z}}) = -\frac{dA_z}{dr}\,\hat{\boldsymbol{\phi}},$$

$$\text{If } A_z = A_z(\phi): \quad \nabla\times(A_z\hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{r}\frac{dA_z}{d\phi}\,\hat{\mathbf{r}},$$

$$\text{If } A_z = A_z(z): \quad \nabla\times(A_z\hat{\mathbf{z}}) = 0.$$

1 Conclusion

We want to show that

$$\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}.$$

—

1. Spherical ↔ Cartesian relations.

In spherical coordinates (r,θ,ϕ) (with θ measured from the z-axis), the unit vectors in terms of Cartesian are

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z},$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z},$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}.$$

—

2. Express $\hat{z}$ as a combination.
Assume

$$\hat{z} = a\,\hat{r} + b\,\hat{\theta}.$$

—

3. Solve for coefficients.
Taking dot products:

$$\hat{z}\cdot\hat{r} = a, \qquad \hat{z}\cdot\hat{\theta} = b.$$

But from the above expansions,

$$\hat{z}\cdot\hat{r} = \cos\theta, \qquad \hat{z}\cdot\hat{\theta} = -\sin\theta.$$

Thus

$$a = \cos\theta, \qquad b = -\sin\theta.$$

—

4. Final result.

$$\boxed{\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}}$$

—

This works because $\hat{z}$ lies in the plane spanned by $\hat{r}$ and $\hat{\theta}$, while $\hat{\phi}$ is perpendicular to that plane.

curl 0

$$(\nabla\times\mathbf{A})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right),$$

$$(\nabla\times\mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right),$$

$$(\nabla\times\mathbf{A})_\phi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right).$$

curl 1

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathbf{e}}_1 & h_2 \hat{\mathbf{e}}_2 & h_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}.$$

curl 2

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}}\,(1) & \hat{\boldsymbol{\theta}}\,(r) & \hat{\boldsymbol{\phi}}\,(r\sin\theta) \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ (1)A_r & (r)A_\theta & (r\sin\theta)A_\phi \end{vmatrix}.$$

2 Computation of $\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta$

We want to compute

$$I = \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta.$$

First, use the substitution

$$\sin^3\theta = \sin\theta\,(1-\cos^2\theta), \qquad u = \cos\theta,\ du = -\sin\theta\, d\theta.$$

Then

$$\int \sin^3\theta\, d\theta = \int \sin\theta(1-\cos^2\theta)\, d\theta = \int -(1-u^2)\, du = \int (u^2-1)\, du.$$

This gives the antiderivative

$$F(\theta) = \frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta.$$

Now evaluate at the bounds:

$$F(\pi) = \frac{(-1)^3}{3} - (-1) = -\tfrac{1}{3} + 1 = \tfrac{2}{3},$$
$$F(0) = \frac{1^3}{3} - 1 = \tfrac{1}{3} - 1 = -\tfrac{2}{3}.$$

Therefore,

$$I = F(\pi) - F(0) = \tfrac{2}{3} - \left(- \tfrac{2}{3} \right) = \tfrac{4}{3}.$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta = \tfrac{4}{3}}$$