

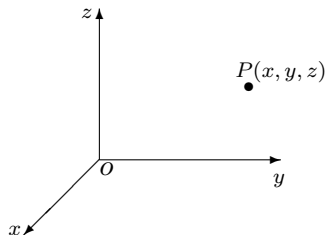
第1章 向量代数、空间中直线与平面

郑州大学数学与统计学院 线性代数教研室

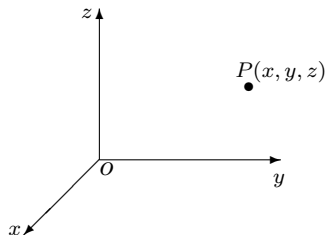
目录

- ① 1.1 空间直角坐标系
- ② 1.2 向量的概念
- ③ 1.3 向量的线性运算
- ④ 1.4 向量的数量积、向量积、混合积
- ⑤ 1.5 向量的坐标
- ⑥ 1.6 平面方程
- ⑦ 1.7 直线方程

空间直角坐标系

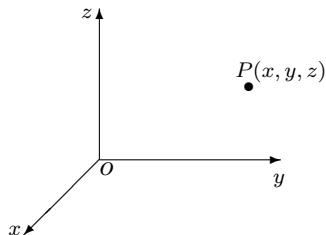


空间直角坐标系



空间中任意一点 P 都对应一个有序三元组 (x, y, z) ，称为 P 的坐标，记为 $P(x, y, z)$ 。

空间直角坐标系



空间中任意一点 P 都对应一个有序三元组 (x, y, z) ，称为 P 的坐标，记为 $P(x, y, z)$ 。

空间中两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的距离为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

向量的概念

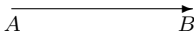
只有大小的量称为**数量**(或**标量**);

既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)。

向量的概念

只有大小的量称为**数量**(或**标量**);

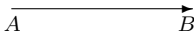
既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)。

向量 \boldsymbol{a} 可以用一个带箭头的有向线段 \overrightarrow{AB} 来表示  \overrightarrow{AB}
 线段 AB 的长度称为向量 \boldsymbol{a} 的**长度**(或**大小**或**模**), 记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

向量的概念

只有大小的量称为**数量**(或**标量**);

既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)。


向量 \boldsymbol{a} 可以用一个带箭头的有向线段 \overrightarrow{AB} 来表示  \overrightarrow{AB}
 线段 AB 的长度称为向量 \boldsymbol{a} 的**长度**(或**大小**或**模**), 记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

特殊向量: **单位向量**(么矢), **零向量** $\mathbf{0}$ (方向不定), **负向量** $-\boldsymbol{a}$.

向量的概念

只有大小的量称为**数量**(或**标量**);

既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)。

向量 \boldsymbol{a} 可以用一个带箭头的有向线段 \overrightarrow{AB} 来表示  线段 AB 的长度称为向量 \boldsymbol{a} 的**长度**(或**大小**或**模**), 记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

特殊向量: **单位向量**(么矢), **零向量** $\mathbf{0}$ (方向不定), **负向量** $-\boldsymbol{a}$.

向量相等: 长度相等且方向相同, 与起点、终点无关。

这里所说的向量都是**自由向量**, 可以平行移动。若一组向量通过平移可以共线(或共面), 则称这组向量**共线**(或**共面**)。

共线向量又称为**平行向量**, 记为 $\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$.

向量的加法、减法

- 向量的加法

- (1) 三角形法则

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

向量的加法、减法

- 向量的加法

- (1) 三角形法则

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

- (2) 平行四边形法则

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

向量的加法、减法

- 向量的加法

- (1) 三角形法则

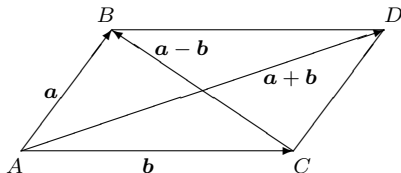
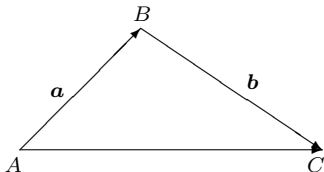
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

- (2) 平行四边形法则

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

- 向量的减法

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$



向量的数乘

实数 λ 与向量 \boldsymbol{a} 的乘积，称为**数乘向量**，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$ ，它的长度为 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$ ，其方向当 $\lambda > 0$ 时与 \boldsymbol{a} 同向；当 $\lambda < 0$ 时与 \boldsymbol{a} 反向。

这种运算称为向量的**数乘运算**或向量的**数量乘法**。

向量的数乘

实数 λ 与向量 \mathbf{a} 的乘积，称为**数乘向量**，记为 $\lambda\mathbf{a}$ ，它的长度为 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$ ，其方向当 $\lambda > 0$ 时与 \mathbf{a} 同向；当 $\lambda < 0$ 时与 \mathbf{a} 反向。

这种运算称为向量的**数乘运算**或向量的**数量乘法**。

一些结论：

- $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0} \iff \lambda = 0 \text{ 或 } \mathbf{a} = \mathbf{0};$
- $\mathbf{a} // \mathbf{b} \iff \mathbf{a} = \lambda\mathbf{b};$
- $1\mathbf{a} = \mathbf{a}, (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a};$
- $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a};$
- $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}.$

向量的数乘

实数 λ 与向量 \mathbf{a} 的乘积，称为**数乘向量**，记为 $\lambda\mathbf{a}$ ，它的长度为 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$ ，其方向当 $\lambda > 0$ 时与 \mathbf{a} 同向；当 $\lambda < 0$ 时与 \mathbf{a} 反向。

这种运算称为向量的**数乘运算**或向量的**数量乘法**。

一些结论：

- $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0} \iff \lambda = 0 \text{ 或 } \mathbf{a} = \mathbf{0};$
- $\mathbf{a} // \mathbf{b} \iff \mathbf{a} = \lambda\mathbf{b};$
- $1\mathbf{a} = \mathbf{a}, (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a};$
- $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a};$
- $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}.$

例 1 设 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ，则 $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ 是唯一与 \mathbf{a} 同方向的单位向量，且 $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{a}_0$ 。

一、数量积

定义 1.1 向量 \boldsymbol{a} 与 \boldsymbol{b} 的数量积(或内积) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 定义为

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle,$$

其中 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ 为 \boldsymbol{a} 与 \boldsymbol{b} 的夹角($0 \leq \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \leq \pi$).

几何意义: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 表示 $|\boldsymbol{a}|$ 乘以另一向量 \boldsymbol{b} 在 \boldsymbol{a} 上的投影 $|\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$.

一、数量积

定义 1.1 向量 \boldsymbol{a} 与 \boldsymbol{b} 的数量积(或内积) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 定义为

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle,$$

其中 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ 为 \boldsymbol{a} 与 \boldsymbol{b} 的夹角($0 \leq \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \leq \pi$).

几何意义: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 表示 $|\boldsymbol{a}|$ 乘以另一向量 \boldsymbol{b} 在 \boldsymbol{a} 上的投影 $|\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$.

一些结论:

- (1) 单位向量 $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0$ 的内积 $\boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{b}_0 = \cos \langle \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0 \rangle$, $\boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b} \rangle$;
- (2) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, 规定零向量 $\mathbf{0}$ 与任意向量都垂直;
- (3) 内积的正负取决于向量夹角是锐角或钝角;
- (4) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

一、数量积

定义 1.1 向量 \boldsymbol{a} 与 \boldsymbol{b} 的数量积(或内积) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 定义为

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle,$$

其中 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ 为 \boldsymbol{a} 与 \boldsymbol{b} 的夹角($0 \leq \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \leq \pi$).

几何意义: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 表示 $|\boldsymbol{a}|$ 乘以另一向量 \boldsymbol{b} 在 \boldsymbol{a} 上的投影 $|\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$.

一些结论:

(1) 单位向量 $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0$ 的内积 $\boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{b}_0 = \cos \langle \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0 \rangle$, $\boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b} \rangle$;

(2) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, 规定零向量 $\mathbf{0}$ 与任意向量都垂直;

(3) 内积的正负取决于向量夹角是锐角或钝角;

(4) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

运算规律:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}, \quad (\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}), \quad \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}.$$

二、向量积

定义 1.2 向量 \boldsymbol{a} 与 \boldsymbol{b} 的向量积(或矢量积) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 定义为
其大小为 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$;
其方向与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都垂直, 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 构成右手系。

二、向量积

定义 1.2 向量 \boldsymbol{a} 与 \boldsymbol{b} 的向量积(或矢量积) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 定义为

其大小为 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$;

其方向与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都垂直, 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 构成右手系。

一些结论:

- (1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 的长度等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为边的平等四边形的面积;
- (2) 若单位向量 \boldsymbol{e} 与 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 同向, 则 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{e}$;
- (3) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$, 规定零向量 $\boldsymbol{0}$ 与任意向量都平行;
- (4) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

二、向量积

定义 1.2 向量 \boldsymbol{a} 与 \boldsymbol{b} 的向量积(或矢量积) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 定义为

其大小为 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$;

其方向与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都垂直, 且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 构成右手系。

一些结论:

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 的长度等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为边的平等四边形的面积;

(2) 若单位向量 \boldsymbol{e} 与 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 同向, 则 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{e}$;

(3) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$, 规定零向量 $\boldsymbol{0}$ 与任意向量都平行;

(4) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

运算规律:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}, \quad (\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}), \quad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}.$$

三、混合积

定义 1.3 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为三个向量, 则称 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的混合积, 记为 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

几何意义: 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 则 $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ 恰是以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为棱的平行六面体的体积, 当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 作成右手系时 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 取正号; 作成左手系里 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 取负号。

三、混合积

定义 1.3 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为三个向量, 则称 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积, 记为 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

几何意义: 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面, 则 $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$ 恰是以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积, 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 作成右手系时 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 取正号; 作成左手系里 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 取负号。

一些结论:

- (1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0 \iff \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面(含共线的特殊情形);
- (2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$;
- (3) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$.

例 3 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为三个不共面的向量, \mathbf{d} 是任意向量, 求实数 λ, μ, γ 使 $\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

例 3 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为三个不共面的向量, \mathbf{d} 是任意向量, 求实数 λ, μ, γ 使 $\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

解 已知存在实数 λ, μ, γ 使 $\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. 两边用 $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ 作内积, 得

$$\begin{aligned}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} &= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) \\&= \lambda(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) \\&= \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).\end{aligned}$$

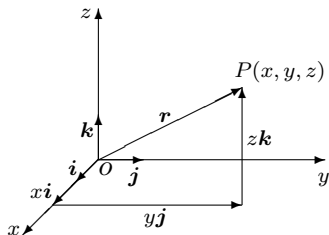
因为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 所以 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$. 从而得

$$\lambda = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}.$$

同理可得

$$\mu = \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad \gamma = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}.$$

一、向量的坐标

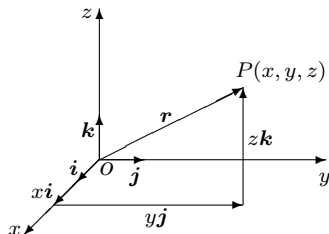


空间中的点集与向量集一一对应，即

$$P \in V_3 \xleftrightarrow{1-1} \overrightarrow{OP}$$

这里，我们称 \overrightarrow{OP} 为 P 点的径向或定位向量。

一、向量的坐标



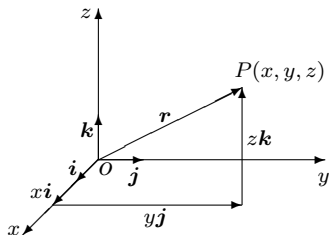
空间中的点集与向量集一一对应，即

$$P \in V_3 \xleftrightarrow{1-1} \overrightarrow{OP}$$

这里，我们称 \overrightarrow{OP} 为 P 点的径向或定位向量。令 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ ，则由三角形法则得

$$\mathbf{r} =$$

一、向量的坐标



空间中的点集与向量集一一对应，即

$$P \in V_3 \xleftrightarrow{1-1} \overrightarrow{OP}$$

这里，我们称 \overrightarrow{OP} 为 P 点的径向或定位向量。令 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ ，则由三角形法则得

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

此时称 P 点的坐标 (x, y, z) 为 \mathbf{r} 的坐标，又称 $x\mathbf{i}, y\mathbf{j}, z\mathbf{k}$ 为 \mathbf{r} 沿 x 轴， y 轴，的分量。因此不加区别地写成 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 。

设 $\overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OP_2} = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2} =$$

设 $\overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OP_2} = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k},$$

因此向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标等于终点坐标减去始点的坐标, 即

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

二、向量的坐标运算

(1) 向量加(减)法的坐标运算

设 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2 =$$

二、向量的坐标运算

(1) 向量加(减)法的坐标运算

设 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2 = (x_1 \pm x_2)\mathbf{i} + (y_1 \pm y_2)\mathbf{j} + (z_1 \pm z_2)\mathbf{k},$$

即 $\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$.

二、向量的坐标运算

(1) 向量加(减)法的坐标运算

设 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2 = (x_1 \pm x_2)\mathbf{i} + (y_1 \pm y_2)\mathbf{j} + (z_1 \pm z_2)\mathbf{k},$$

即 $\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$.

(2) 向量数乘(即数乘向量)的坐标运算

设 $\mathbf{a} = (x, y, z)$, λ 为实数, 则

$$\lambda \mathbf{a} =$$

二、向量的坐标运算

(1) 向量加(减)法的坐标运算

设 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2 = (x_1 \pm x_2)\mathbf{i} + (y_1 \pm y_2)\mathbf{j} + (z_1 \pm z_2)\mathbf{k},$$

即 $\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$.

(2) 向量数乘(即数乘向量)的坐标运算

设 $\mathbf{a} = (x, y, z)$, λ 为实数, 则

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda x)\mathbf{i} + (\lambda y)\mathbf{j} + (\lambda z)\mathbf{k},$$

即 $\lambda \mathbf{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

(3) 数量积的坐标运算

设 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

(3) 数量积的坐标运算

设 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

事实上

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 &= (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \cdot (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) \\ &= x_1x_2\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + x_1y_2\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + x_1z_2\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} \\ &\quad y_1x_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + y_1y_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + y_1z_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \\ &\quad z_1x_2\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + z_1y_2\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + z_1z_2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \end{aligned}$$

(4) 向量积的坐标运算

设 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$

或写成

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

(4) 向量积的坐标运算

设 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$

或写成

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

事实上

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 &= (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \times (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) \\ &= x_1x_2\mathbf{i} \times \mathbf{i} + x_1y_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + x_1z_2\mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ &\quad y_1x_2\mathbf{j} \times \mathbf{i} + y_1y_2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + y_1z_2\mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ &\quad z_1x_2\mathbf{k} \times \mathbf{i} + z_1y_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + z_1z_2\mathbf{k} \times \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

(5) 混合积的坐标运算

设 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{a}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, 则

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(5) 混合积的坐标运算

设 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{a}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, 则

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

事实上

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) &= (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \\ &= (x_1, y_1, z_1) \cdot \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) \\ &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(6) 向量的长度和两向量夹角的坐标表示

设 $\mathbf{a} = (x, y, z)$, 则

$$|\mathbf{a}| =$$

(6) 向量的长度和两向量夹角的坐标表示

设 $\mathbf{a} = (x, y, z)$, 则

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(6) 向量的长度和两向量夹角的坐标表示

设 $\mathbf{a} = (x, y, z)$, 则

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

又设 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则由内积定义知

$$\cos \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle =$$

(6) 向量的长度和两向量夹角的坐标表示

设 $\mathbf{a} = (x, y, z)$, 则

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

又设 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则由内积定义知

$$\cos \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_2|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

(6) 向量的长度和两向量夹角的坐标表示

设 $\mathbf{a} = (x, y, z)$, 则

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

又设 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则由内积定义知

$$\cos \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_2|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

一些结论:

(i) $\mathbf{a}_1 // \mathbf{a}_2$ 当且仅当 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$;

(ii) $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ 当且仅当 $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$;

(iii) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 共面当且仅当 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$.

例4 设向量 $\mathbf{a} = (x, y, z)$ 和 x 轴, y 轴, z 轴正向的夹角分别是 α 、 β 、 γ , 则 α 、 β 、 γ 称为 \mathbf{a} 的**方向角**, 其余弦值 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为 \mathbf{a} 的**方向余弦**, 试证:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

例4 设向量 $\mathbf{a} = (x, y, z)$ 和 x 轴, y 轴, z 轴正向的夹角分别是 α 、 β 、 γ , 则 α 、 β 、 γ 称为 \mathbf{a} 的方向角, 其余弦值 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为 \mathbf{a} 的方向余弦, 试证:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

证明 由 $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 得

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{a} = x, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{a} = y, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = z.$$

又因为

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{i}| |\mathbf{a}| \cos \langle \mathbf{i}, \mathbf{a} \rangle = |\mathbf{a}| \cos \alpha,$$

所以

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\mathbf{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

同理可得

$$\cos \beta = \frac{y}{|\mathbf{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\mathbf{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

平面的点法式方程和一般方程

在空间直角坐标系 $\{O; x, y, z\}$ 中, 设 π 为一个平面, 我们称与 π 垂直的任意非零向量为 π 的**法向量**(或**法矢**)。平面法向量有两种取法, 方向相反。

平面的点法式方程和一般方程

在空间直角坐标系 $\{O; x, y, z\}$ 中, 设 π 为一个平面, 我们称与 π 垂直的任意非零向量为 π 的**法向量**(或**法矢**)。平面法向量有两种取法, 方向相反。

设 π 的法向量为 $\mathbf{n} = (A, B, C)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 π 中的一个固定点, 则点 $P(x, y, z)$ 在 π 内的充要条件是 $\overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n}$ (或 $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$),

平面的点法式方程和一般方程

在空间直角坐标系 $\{O; x, y, z\}$ 中, 设 π 为一个平面, 我们称与 π 垂直的任意非零向量为 π 的**法向量**(或**法矢**)。平面法向量有两种取法, 方向相反。

设 π 的法向量为 $\mathbf{n} = (A, B, C)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 π 中的一个固定点, 则点 $P(x, y, z)$ 在 π 内的充要条件是 $\overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n}$ (或 $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$), 从而得平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

平面的点法式方程和一般方程

在空间直角坐标系 $\{O; x, y, z\}$ 中, 设 π 为一个平面, 我们称与 π 垂直的任意非零向量为 π 的**法向量**(或**法矢**)。平面法向量有两种取法, 方向相反。

设 π 的法向量为 $\mathbf{n} = (A, B, C)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 π 中的一个固定点, 则点 $P(x, y, z)$ 在 π 内的充要条件是 $\overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n}$ (或 $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$), 从而得平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

令 $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, 得平面的一般方程

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

定理 1.1 在空间直角坐标系下, 任何平面都可以表示成一个三元一次方程。

定理 1.1 在空间直角坐标系下, 任何平面都可以表示成一个三元一次方程。

定理 1.2 在空间直角坐标系下, 任何一个三元一次方程都表示一个平面, 且未知量系数组成的非零向量 (A, B, C) 是该平面的一个法向量。

定理 1.2 在空间直角坐标系下, 任何一个三元一次方程都表示一个平面, 且未知量系数组成的非零向量 (A, B, C) 是该平面的一个法向量。

定理 1.2 在空间直角坐标系下, 任何一个三元一次方程都表示一个平面, 且未知量系数组成的非零向量 (A, B, C) 是该平面的一个法向量。

定理 1.2 的证明 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为满足方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的一个点, 即

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

这里 A, B, C 不全为0。设 $P(x, y, z)$ 为满足方程的任意点, 即

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

两式相减, 得

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

即 $\overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n} = (A, B, C)$

因此所有的点 $P(x, y, z)$ 组成一个平面, 且这个平面过点 P_0 , 法向量为 \mathbf{n} .

三点式方程

例 4 设三点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$ 不共线, 证明过这三点的平面方程是

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

三点式方程

例 4 设三点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$ 不共线, 证明过这三点的平面方程是

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

证明 设 $P(x, y, z)$ 是所求平面 π 内任意一点, 显然 $\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ 共面, 即它们的混合积

$$(\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

截距式方程

例 5 求过点 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ 的平面方程, 其中 a, b, c 全不为0.

截距式方程

例 5 求过点 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ 的平面方程, 其中 a, b, c 全不为0.

解 由例4知, 所求平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

从而得 $bc(x-a) + acy + abz = 0$, 即

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

称上式为平面的**截距式方程**, a, b, c 分别称为平面在 x 轴, y 轴, z 轴上的**截距**。

空间中点到平面的距离公式

例 6 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离是

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

空间中点到平面的距离公式

例 6 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离是

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

证明 过 P_0 作 π 的垂线交 π 于点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 则 $\overrightarrow{P_1P_0} // \mathbf{n} = (A, B, C)$, 于是 $\overrightarrow{P_1P_0} = \pm d \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$. 从而有

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 &= \frac{\pm Ad}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ y_0 - y_1 &= \frac{\pm Bd}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ z_0 - z_1 &= \frac{\pm Cd}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

又因为 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ 且 $d \geq 0$, 所以有

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

平面之间的关系

定理 1.3 设 π_1, π_2 为两个平面, 其方程分别为

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

令 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, 则有以下结论:

平面之间的关系

定理 1.3 设 π_1, π_2 为两个平面, 其方程分别为

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

令 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, 则有以下结论:

- (1) π_1 与 π_2 平行 $\iff \mathbf{n}_1$ 与 \mathbf{n}_2 共线;
- (2) π_1 与 π_2 相交 $\iff \mathbf{n}_1$ 与 \mathbf{n}_2 不共线;
- (3) π_1 与 π_2 重合 $\iff \mathbf{n}_1$ 与 \mathbf{n}_2 共线且 π_1 与 π_2 有公共点。

直线的参数方程和点向式方程

在空间直角坐标系 $\{O; x, y, z\}$ 中, 与直线 l 平行的任意非零向量称为直线 l 的方向向量。

直线的参数方程和点向式方程

在空间直角坐标系 $\{O; x, y, z\}$ 中, 与直线 l 平行的任意非零向量称为直线 l 的**方向向量**。

设直线 l 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 其方向向量为 $\boldsymbol{v} = (X, Y, Z) \neq 0$, 则对直线 l 上任意一点 $P(x, y, z)$, 都有 $\overrightarrow{P_0P} // \boldsymbol{v}$, 于是存在实数 t 使 $\overrightarrow{P_0P} = t\boldsymbol{v}$, 即 $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (tX, tY, tZ)$, 由此可得

$$\begin{cases} x = x_0 + tX, \\ y = y_0 + tY, \\ z = z_0 + tZ. \end{cases}$$

此式称为直线的**参数方程**。

直线的参数方程和点向式方程

在空间直角坐标系 $\{O; x, y, z\}$ 中, 与直线 l 平行的任意非零向量称为直线 l 的**方向向量**。

设直线 l 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 其方向向量为 $\boldsymbol{v} = (X, Y, Z) \neq 0$, 则对直线 l 上任意一点 $P(x, y, z)$, 都有 $\overrightarrow{P_0P} // \boldsymbol{v}$, 于是存在实数 t 使 $\overrightarrow{P_0P} = t\boldsymbol{v}$, 即 $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (tX, tY, tZ)$, 由此可得

$$\begin{cases} x = x_0 + tX, \\ y = y_0 + tY, \\ z = z_0 + tZ. \end{cases}$$

此式称为直线的**参数方程**。消去参数 t , 可得

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}.$$

此式称为直线的**点向式方程 (或对称方程)**。

注 直线的点向式方程允许分母中某一个或两个为0的情形。例如当 $X \neq 0, Y = 0, Z \neq 0$ 时, 即

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{Z}.$$

此时理解为

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{X} = \frac{z - z_0}{Z}, \\ y = y_0. \end{cases}$$

注 直线的点向式方程允许分母中某一个或两个为0的情形。例如当 $X \neq 0, Y = 0, Z \neq 0$ 时, 即

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{Z}.$$

此时理解为

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{X} = \frac{z - z_0}{Z}, \\ y = y_0. \end{cases}$$

当 $X \neq 0, Y = Z = 0$ 时, 即

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{0}.$$

此时理解为

$$\begin{cases} y = y_0, \\ z = z_0. \end{cases}$$

直线的一般方程

设 π_1, π_2 是两个相交平面，其方程分别为

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

则它们的交线可表示为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

此式称为直线的**一般方程**。

直线的一般方程

设 π_1, π_2 是两个相交平面，其方程分别为

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

则它们的交线可表示为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

此式称为直线的**一般方程**。此直线的方向向量可以取为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

这里 $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

一般方程与点向式方程之间的相互转化

利用直线的点向式方程很容易得到直线的一般方程。反之，在两平面交线 l 上任取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ，可得到直线 l 的点向式方程

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

直线的两点式方程

例 3 设直线 l 过两个不同点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 求 l 的方程。

直线的两点式方程

例 3 设直线 l 过两个不同点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 求 l 的方程。

解 显然直线的方向向量可取为

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

又因为 l 过点 P_1 , 所以直线 l 的方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

此式称为直线的**两点式方程**。

直线之间的关系

定理 1.4 设 l_1, l_2 为分别过 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的两条直线, 其方程分别为

$$l_1: \frac{x - x_1}{X_1} = \frac{y - y_1}{Y_1} = \frac{z - z_1}{Z_1},$$
$$l_2: \frac{x - x_2}{X_2} = \frac{y - y_2}{Y_2} = \frac{z - z_2}{Z_2},$$

令 $\boldsymbol{v}_1 = (X_1, Y_1, Z_1), \boldsymbol{v}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$, 则有以下结论:

直线之间的关系

定理 1.4 设 l_1, l_2 为分别过 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的两条直线, 其方程分别为

$$l_1: \frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1},$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2},$$

令 $\mathbf{v}_1 = (X_1, Y_1, Z_1), \mathbf{v}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$, 则有以下结论:

(1) l_1 与 l_2 平行 $\iff \mathbf{v}_1$ 与 \mathbf{v}_2 共线;

(2) l_1 与 l_2 重合 $\iff \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \overrightarrow{P_1P_2}$ 三个向量共线;

(3) l_1 与 l_2 相交 $\iff \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 不共线且混合积 $(\overrightarrow{P_1P_2}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$;

(4) l_1 与 l_2 为异面直线 $\iff (\overrightarrow{P_1P_2}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq 0$.

直线与平面的关系

定理 1.5 设直线 l 的方程为 $\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$, 方向向量为 $\boldsymbol{v} = (X, Y, Z) \neq 0$. 又设平面 π 的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$, 法向量为 $\boldsymbol{n} = (A, B, C) \neq 0$. 则有以下结论:

直线与平面的关系

定理 1.5 设直线 l 的方程为 $\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$, 方向向量为 $\boldsymbol{v} = (X, Y, Z) \neq 0$. 又设平面 π 的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$, 法向量为 $\boldsymbol{n} = (A, B, C) \neq 0$. 则有以下结论:

- (1) l 与 π 平行 $\iff AX + BY + CZ = 0$;
- (2) l 在 π 内 $\iff AX + BY + CZ = 0$ 且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$;
- (3) l 与 π 相交 $\iff AX + BY + CZ \neq 0$;
- (4) l 与 π 垂直相交 $\iff \boldsymbol{v}$ 与 \boldsymbol{n} 共线。

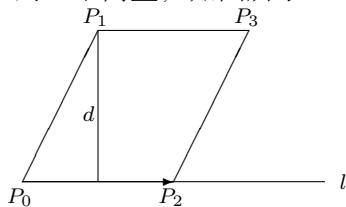
点到直线的距离

定理 1.6 设直线 $l : \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$ 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 方向向量为 $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$. 则点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|\mathbf{v} \times \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\mathbf{v}|}$.

点到直线的距离

定理 1.6 设直线 $l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$ 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 方向向量为 $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$. 则点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|\mathbf{v} \times \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\mathbf{v}|}$.

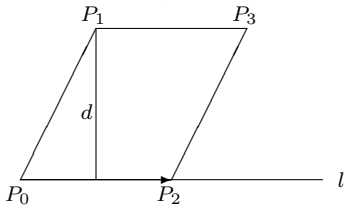
证明 设 $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2}$ 是 l 上的一个向量, 如图所示。



点到直线的距离

定理 1.6 设直线 $l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$ 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 方向向量为 $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$. 则点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|\mathbf{v} \times \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\mathbf{v}|}$.

证明 设 $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2}$ 是 l 上的一个向量, 如图所示。



平行四边形 $P_0P_1P_3P_2$ 的面积为 $S = |\mathbf{v} \times \overrightarrow{P_0P_1}|$. 已知 $S = |\mathbf{v}|d$, 所以有

$$d = \frac{|\mathbf{v} \times \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\mathbf{v}|}.$$

异面直线之间的距离

定理 1.7 两条异面直线 $l_i: \frac{x-x_i}{X_i} = \frac{y-y_i}{Y_i} = \frac{z-z_i}{Z_i}, i = 1, 2$ 之间的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{(P_1P_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|},$$

其中 $P_i(x_i, y_i, z_i), \mathbf{v}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$.

异面直线之间的距离

定理 1.7 两条异面直线 $l_i: \frac{x-x_i}{X_i} = \frac{y-y_i}{Y_i} = \frac{z-z_i}{Z_i}, i = 1, 2$ 之间的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{(P_1P_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|},$$

其中 $P_i(x_i, y_i, z_i), \mathbf{v}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$.

证明 设平面 π 过直线 l_1 , 法向量取为 $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, 则 d 就是 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在法向量 \mathbf{n} 上的投影长度。因此结论成立。

Thanks for your attention!