第4章　线性方程组

郑州大学数学与统计学院 线性代数教研室

本章我们将讨论线性方程组

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

的求解方法，判定它是否有解及解的结构三个问题，从根本上解决线性方程组(4.1)解的存在性、数量、结构等问题。习惯上，将(4.1)式称为**一般线性方程组**。若$b_1=b_2=\cdots=b_m=0$，则称该线性方程组为**齐次线性方程组**。

目录

线性方程组的相关概念

定义 4.1 如果一组有序数列$c_1, c_2, \cdots, c_n$分别代替$x_1, x_2, \cdots, x_n$后使得方程组(4.1)中每个方程都成为恒等式，则称有序数组$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$为方程组(4.1)的一个**解**(或**解向量**)。方程组(4.1)的全部解构成的集合叫(4.1)的**解集合**。

我们用矩阵表示线性方程组(4.1)，即

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \tag{4.1}$$

系数矩阵: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$， **未知列向量:** $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$， **常数项列(或常数项列向量):** $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$，

增广矩阵: 分块矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$或$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$。

初等变换

在求解方程组的过程中，对线性方程组所作的变形相当于对增广矩阵作一系列行初等变换。

定义 4.2 对线性方程组的如下三种变形称为线性方程组的**初等变换**：

(1) 交换方程组中两个方程的位置；

(2) 用非零常数去乘某一个方程；

(3) 把一个方程的某个倍数加到另一个方程上去。

定理 4.1 对线性方程组(4.1)作初等变换，所得到的新方程组与原方程(4.1)组同解。

定理 4.1 对线性方程组(4.1)作初等变换，所得到的新方程组与原方程(4.1)组同解。

推论 对线性方程组(4.1)的增广矩阵作行初等变换后所得到的矩阵可以作为一个新的线性方程组的增广矩阵，且新的线性方程组与原来的方程组同解。

定理 4.1 对线性方程组(4.1)作初等变换，所得到的新方程组与原方程(4.1)组同解。

推论 对线性方程组(4.1)的增广矩阵作行初等变换后所得到的矩阵可以作为一个新的线性方程组的增广矩阵，且新的线性方程组与原来的方程组同解。

定理 4.2 任意一个线性方程组都可以通过初等变换化成**阶梯形方程组**(即以阶梯形矩阵作为增广矩阵的线性方程组)。

例 1 解线性方程组

$$
\begin{cases}
3x_1 + x_2 + 6x_3 = 3, \\
x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\
-x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1.
\end{cases}
$$

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+6x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=3, \\ -x_1+2x_2-3x_3=1. \end{cases}$$

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=3, \\ 3x_1+x_2+6x_3=3, \\ -x_1+x_2-2x_3=1. \end{cases}$$

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 = 3, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

线性方程组解的情况

不难看出，如果我们适当调整未知量$x_1,\cdots,x_n$的次序(相当于用一组新的未知量代替原来的未知量，也就是对增广矩阵作交换列的初等变换)，经过初等变换所得到与原线性方程组同解的阶梯形方程组可写成

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n & = & d_1, \\ c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n & = & d_2, \\ & \vdots & \\ c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n & = & d_r, \\ 0 & = & d_{r+1}, \\ 0 & = & 0, \\ & \vdots & \\ 0 & = & 0, \end{array}\right. \tag{4.2}$$

其中$c_{ii}\neq 0,\ i=1,2,\cdots,r,\ r\leq n.$

方程组的解有以下几种情况：

(1) $d_{r+1} \neq 0$时，第$r+1$个方程是矛盾方程，所以方程组(4.2)无解，从而原方程组也无解；

方程组的解有以下几种情况:

(1) $d_{r+1}\neq 0$时，第$r+1$个方程是矛盾方程，所以方程组(4.2)无解，从而原方程组也无解;

(2) $d_{r+1}=0$时，再分两种情况:

(I) 当$r=n$时，方程组(4.2)去掉"0=0"的方程(如果有的话)，得

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n & = & d_1, \\ c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n & = & d_2, \\ & \vdots & \\ c_{nn}x_n & = & d_n. \end{array}\right. \tag{4.3}$$

因为系数矩阵的行列式等于$c_{11}c_{22}\cdots c_{nn}\neq 0$，所以由克拉默法则知方程组(4.3)有唯一解，从而原方程组有唯一解，且可用(4.3)求解。

(II) 当$r<n$时，方程组(4.2)去掉"0=0"的方程(如果有的话)，得

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r=d_1-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n, \\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r=d_2-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r=d_r-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n. \end{cases} \tag{4.4}$$

任意取定$x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$的一组数值$c_{r+1},c_{r+2},\cdots,c_n$，代入(4.4)式后都可以得到$x_1,\cdots,x_r$的一组值$c_1,\cdots,c_r$，从而得到方程组(4.4)的一个解。我们称$x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$为**自由未知量**，它们是可以任意取值的。

因此原方程组(4.1)有无穷多解，解的一般形式可写成

$$\begin{cases} x_1 &= k_1 + k_{1,r+1}c_1 + \cdots + k_{1n}c_{n-r}, \\ x_2 &= k_2 + k_{2,r+1}c_1 + \cdots + k_{2n}c_{n-r}, \\ &\vdots \\ x_r &= k_r + k_{r,r+1}c_1 + \cdots + k_{rn}c_{n-r}, \\ x_{r+1} &= c_1, \\ &\vdots \\ x_n &= c_{n-r}, \end{cases} \tag{4.5}$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$为任意常数，$x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$是$n-r$个自由未知量。上述解的表达式称为方程组(4.1)的**一般解**。

显然，齐次线性方程组总是有解的(至少有一个零解)。由上面的讨论不难得出

定理 4.3 对齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0, \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0, \end{cases}$$

如果方程个数小于未知量的个数(即$m < n$)，那么它有必有非零解。

例 4 解线性方程组

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2-x_3+2x_4 & = & 1, \\ 2x_1+4x_2+x_3+x_4 & = & 5, \\ -x_1-2x_2-2x_3+x_4 & = & -4. \end{array}\right.$$

向量的定义

定义 4.3 由数域P上的n个数所组成的有序数组称为一个n维**向量**。如果有序数组按行表示，则称之为**行向量**；如果有序数组按列表示，则称之为**列向量**。

向量的定义

定义 4.3 由数域P上的n个数所组成的有序数组称为一个n维**向量**。如果有序数组按行表示，则称之为**行向量**；如果有序数组按列表示，则称之为**列向量**。

向量通常用小写希腊字母表示，可以写成

$$\text{行向量 } \boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad \text{或} \quad \text{列向量 } \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

在本书中，除非特别指明，所有向量均指行向量。

例 1 n元线性方程$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$的系数组成一个$n$维向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，添加常数项就组成一个$(n+1)$维向量$(a_1, a_2, \cdots, a_n, b)$.

例 1 n元线性方程$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$的系数组成一个$n$维向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，添加常数项就组成一个$(n+1)$维向量$(a_1,a_2,\cdots,a_n,b)$.

例 2 设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. $\boldsymbol{A}$的每一行都是一个n维行向量，每一列都是一个n 维列向量.

$\boldsymbol{A}$的第i个行向量$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, 第$j$个列向量$\boldsymbol{\beta}_j=\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}$

这样矩阵$\boldsymbol{A}$可写成$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix}$ 或 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$.

例 3 某工厂某月份产品在A,B,C,D四个城市的销售量(a,b,c,d)是一个4维向量；炮弹在空间中飞行的过程中某时刻沿x轴、y轴、z轴方向上的分速度(v_x,v_y,v_z)是一个3维向量；平面、空间中点的坐标分别是2、3维向量。

向量的线性运算

定义 4.4 设n维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 其中$a_i,b_i\in P$(数域)，又设$k\in P$，那么

(1) 向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$**相等**, 记作$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$, 表示$a_i=b_i$，$i=1,2,\cdots,n$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的**和**$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$.

(3) 数k与向量$\boldsymbol{\alpha}$的**数量乘积** (数乘向量)$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$.

(4) **零向量**$\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$. 向量$\boldsymbol{\alpha}$的**负向量**$-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,\cdots,-a_n)$.

(5) 向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的**差**$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$.

类似于矩阵的加法和数量乘法运算，向量的加法和数量乘法也有以下运算规律：

(1) 加法交换律：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) 加法结合律：$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) 零元素性质：$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) 负向量性质：$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$为任意$n$维向量，$k,l$为数域$P$中任意数。

向量空间

定义 4.5 数域P上全体n维向量的集合V对于向量加法和数乘运算是封闭的，所以它构成一个空间，叫做数域P上的n**维向量空间**，记为$V = P^n$.

向量空间

定义 4.5 数域P上全体n维向量的集合V对于向量加法和数乘运算是封闭的，所以它构成一个空间，叫做数域P上的n**维向量空间**，记为$V=P^n$. 特别地，若$P=\boldsymbol{R}$, 则称$\boldsymbol{R}^n$为**实**n**维向量空间**；若$P=\boldsymbol{C}$, 则称$\boldsymbol{C}^n$为**复**n**维向量空间**。

类似地，也可以给出列向量空间及列向量的加法、数乘的定义。

向量空间

定义 4.5 数域P上全体n维向量的集合V对于向量加法和数乘运算是封闭的，所以它构成一个空间，叫做数域P上的n**维向量空间**，记为$V=P^n$. 特别地，若$P=\boldsymbol{R}$, 则称$\boldsymbol{R}^n$为**实**n**维向量空间**；若$P=\boldsymbol{C}$, 则称$\boldsymbol{C}^n$为**复**n**维向量空间**。

类似地, 也可以给出列向量空间及列向量的加法、数乘的定义。

不难看出，解析几何中我们遇到的直线(或平面或空间)中的全体向量，按上述向量加法和数乘分别构成实1(或2或3)维向量空间$\boldsymbol{R}^1$(或$\boldsymbol{R}^2$ 或$\boldsymbol{R}^3$)，我们称之为**几何空间**。因此一般数域P上的n维向量空间的概念可以看成几何空间的推广。

向量的内积

定义 4.6 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$为实$n$维向量空间$\boldsymbol{R}^n$中的任意两个向量，则向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的**内积**$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$定义为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

向量的内积

定义 4.6 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$为实$n$维向量空间$\boldsymbol{R}^n$中的任意两个向量，则向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的**内积**$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$定义为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

类似地，定义实n维列向量空间$\boldsymbol{R}^n$中向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}$.

内积的性质

可以验证向量的内积具有下列性质:

(1) 对称性: $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$;

(2) 可加性: $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta})$,

$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1) + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_2)$;

(3) 齐次性; $(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\beta})$;

(4) 非负性: $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$, 且等号成立的充要条件是$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

向量的长度和欧氏空间

利用内积的非负性，我们可以引入实n维向量的长度的概念。

定义 4.7 我们称$\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$为实$n$维向量$\boldsymbol{\alpha}$的**长度**，记为$|\boldsymbol{\alpha}|$，即$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$.

向量的长度和欧氏空间

利用内积的非负性，我们可以引入实n维向量的长度的概念。

定义 4.7 我们称$\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$为实$n$维向量$\boldsymbol{\alpha}$的**长度**，记为$|\boldsymbol{\alpha}|$，即$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$.

显然，若$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$a_i$为实数，则

$$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

特别地，若$|\boldsymbol{\alpha}|=1$，则称$\boldsymbol{\alpha}$为单位向量。

向量的长度和欧氏空间

利用内积的非负性，我们可以引入实n维向量的长度的概念。

定义 4.7 我们称$\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$为实$n$维向量$\boldsymbol{\alpha}$的**长度**，记为$|\boldsymbol{\alpha}|$，即$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$.

显然，若$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$a_i$为实数，则

$$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

特别地，若$|\boldsymbol{\alpha}|=1$，则称$\boldsymbol{\alpha}$为单位向量。

定义 4.8 在实n维向量空间$\boldsymbol{R}^n$中，如果按上述定义引入内积运算，则称之为一个**n维欧几里得(Euclid)空间**，简称**n维欧氏空间**，也记作$\boldsymbol{R}^n$.

易见，n维欧氏空间$\boldsymbol{R}^n$也是平面，空间解析几何中空间$\boldsymbol{R}^2$，$\boldsymbol{R}^3$的推广。

柯西不等式

柯西(Cauchy)不等式 对n维欧氏空间$\boldsymbol{R}^n$中任意两个n维向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，都有

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\leq|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|,$$

且等号成立当且仅当$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$成比例，即存在实数$k$使$\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$或$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$.

柯西不等式

柯西(Cauchy)不等式 对n维欧氏空间$\boldsymbol{R}^n$中任意两个n维向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，都有
$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \le |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|,$$
且等号成立当且仅当$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$成比例，即存在实数$k$使$\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$或$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$.

证明 如果$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$中有一个为零向量，结论显然成立。下面设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$都不是零向量。令$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}$，$t$为任意实数，则由内积的非负性得$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})\ge 0$，即对任意实数$t$，有
$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})t^2+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})t+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\ge 0.$$
由t的任意性可知判别式$\Delta\le 0$，即
$$4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2-4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\le 0.$$
从而有
$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\le |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|.$$
因此不等式成立。

若等号成立，则判别式$\Delta = 4(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 - 4(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = 0$，从而存在唯一的根$t_0$使得

$$(\boldsymbol{\alpha} + t_0\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} + t_0\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})t_0^2 + 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})t_0 + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = 0.$$

由内积的非负性知$\boldsymbol{\alpha} + t_0\boldsymbol{\beta} = 0$，即$\boldsymbol{\alpha} = -t_0\boldsymbol{\beta}$. □

向量的夹角

设$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{R}^n$为两个非零$n$维向量，规定$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的**夹角**为

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}.$$

向量的夹角

设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in \boldsymbol{R}^n$为两个非零$n$维向量，规定$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的**夹角**为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}.$$

若$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\frac{\pi}{2}$，则称$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$**垂直**，也称$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$**正交**，记为$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$. 我们规定零向量与任何向量都垂直。显然，两个向量垂直的充要条件就是$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$.

子空间

定义 4.9 在n维向量空间P^n中，如果P^n的一个非空子集V对P^n中的加法、数量乘法是封闭的，则称V为P^n的一个**子空间**。

子空间

定义 4.9 在n维向量空间P^n中，如果P^n的一个非空子集V对P^n中的加法、数量乘法是封闭的，则称V为P^n的一个**子空间**。

例 4 齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的全体解构成列向量空间$P^n$的一个非空子集$V$，且$V$对$P^n$中的加法、数量乘法是封闭的，因此$V$作成$P^n$的一个子空间，通常称为齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的**解空间**。

例 5 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$为$P^n$中$s$个向量，令$V_s$为$P^n$中所有形如$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，$k_1, k_2, \cdots, k_s \in P$ 的向量的集合，即

$$V_s = \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s;\ k_1, k_2, \cdots, k_s \in P\}$$

则V_s作成P^n的一个子空间，称为由向量(组)$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$**张成(生成)**的子空间。

例 5 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$为$P^n$中$s$个向量，令$V_s$为$P^n$中所有形如$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，$k_1,k_2,\cdots,k_s\in P$ 的向量的集合，即

$$V_s=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s;\ k_1,k_2,\cdots,k_s\in P\}$$

则V_s作成P^n的一个子空间，称为由向量(组)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$**张成(生成)**的子空间。它是包含 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的最小的子空间，即任意包含向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的子空间都包含由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$张成的子空间。

利用向量加法和数乘的定义，不难得出线性方程组

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &=& b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &=& b_2, \\ &\vdots& \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &=& b_m, \end{array}\right. \tag{4.6}$$

利用向量加法和数乘的定义，不难得出线性方程组

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right. \tag{4.6}$$

的向量表达式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}, \tag{4.7}$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,n), \quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

利用向量加法和数乘的定义，不难得出线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases} \tag{4.6}$$

的向量表达式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}, \tag{4.7}$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

因此判断线性方程组(4.6)是否有解的问题，等价于判定是否存在P中一组数$x_1, x_2, \cdots, x_n$使得(4.7)式成立。

线性表示

定义 4.10 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$都是$P^n$中向量。如果存在数域$P$中的一组数$k_1, k_2, \cdots, k_s$使得$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，则称$\boldsymbol{\beta}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**线性组合**，又称$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ **线性表出**。

称$k_1, k_2, \cdots, k_s$为**组合系数**或**线性表出系数**。

线性表示

定义 4.10 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$都是$P^n$中向量。如果存在数域$P$中的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，则称$\boldsymbol{\beta}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**线性组合**，又称$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性表出**。

称$k_1,k_2,\cdots,k_s$为**组合系数**或**线性表出系数**。

例 1 零向量可由任意向量组线性表出，这是因为对任意向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，都有$\mathbf{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s$.

线性表示

定义 4.10 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$都是$P^n$中向量。如果存在数域$P$中的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，则称$\boldsymbol{\beta}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**线性组合**，又称$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性表出**。

称$k_1,k_2,\cdots,k_s$为**组合系数**或**线性表出系数**。

例 1 零向量可由任意向量组线性表出，这是因为对任意向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，都有$\mathbf{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s$.

例 2 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$为任意向量组，则其中每个$\boldsymbol{\alpha}_i$都可以由原向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出，例如$\boldsymbol{\alpha}_i=0\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\boldsymbol{\alpha}_i+0\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s$, $1\le i\le s$.

例 3 任意一个n维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$都可以由向量组

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0),\ \cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1),$$

线性表出，即$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 我们称向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$为**基本向量组**，它恰好是单位矩阵的行向量组。

向量组等价

定义 4.11 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$为两个向量组。如果每个$\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1\le i\le s)$都可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表出，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可以由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$**线性表出**。

向量组等价

定义 4.11 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$和$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$为两个向量组。如果每个$\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1 \le i \le s)$都可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$线性表出，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$可以由向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$**线性表出**。

如果这两个向量组可以互相线性表出，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$**等价**。

向量组等价

定义 4.11 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$为两个向量组。如果每个$\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1\leq i\leq s)$都可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表出，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可以由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$**线性表出**。

如果这两个向量组可以互相线性表出，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$**等价**。

向量组等价反映了向量组之间的一种关系，它具有下列性质：

(1) 自反性：任意向量组都与自身等价；

(2) 对称性：若向量组(I)与(II)等价，则(II)与(I)等价；

(3) 传递性：若向量组(I)与(II)等价，向量组(II)与(III)等价，则(I)与 (III) 也等价。

向量组等价

定义 4.11 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$和$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$为两个向量组。如果每个$\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1 \leq i \leq s)$都可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$线性表出，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$可以由向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$**线性表出**。

如果这两个向量组可以互相线性表出，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$**等价**。

向量组等价反映了向量组之间的一种关系，它具有下列性质：

(1) 自反性：任意向量组都与自身等价；

(2) 对称性：若向量组(I)与(II)等价，则(II)与(I)等价；

(3) 传递性：若向量组(I)与(II)等价，向量组(II)与(III)等价，则(I)与 (III) 也等价。

利用向量组等价的概念可以把P^n中的向量组进行分类，即把相互等价的向量组归为同一类。

线性相关和线性无关

定义 4.12 给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ $(s \geq 2)$. 如果其中某个向量$\boldsymbol{\alpha}_i$可由其余向量线性表出，即存在数域P中的一组数$k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_s$，使

$$\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ $(s \geq 2)$**线性相关**； 否则，称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ $(s \geq 2)$**线性无关**。

线性相关和线性无关

定义 4.12 给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ $(s \geq 2)$. 如果其中某个向量$\boldsymbol{\alpha}_i$可由其余向量线性表出，即存在数域P中的一组数$k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_s$，使

$$\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ $(s \geq 2)$**线性相关**； 否则，称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ $(s \geq 2)$**线性无关**。

对由一个向量组成的向量组$\{\boldsymbol{\alpha}\}$，规定当$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$时它是线性相关的；当$\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$时是线性无关的。

例 4 任意含有零向量的向量组必然是线性相关的。

例 4 任意含有零向量的向量组必然是线性相关的。

例 5 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(5,4,-1)$是线性相关的，这是因为$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

例 4 任意含有零向量的向量组必然是线性相关的。

例 5 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(5,4,-1)$是线性相关的，这是因为$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

例 6 在几何空间$\boldsymbol{R}^3$中，两个向量构成的向量组线性相关(线性无关)就是它们共线(不共线)，三个向量构成的向量组线性相关(线性无关)就是它们共面(不共面)。

线性相关性的判定

定理 4.4 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$为$P^n$中的一个向量组，则

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关的充要条件是存在$P$中一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充要条件是由等式$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$可以推出$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$.

线性相关性的判定

定理 4.4 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$为$P^n$中的一个向量组，则

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关的充要条件是存在$P$中一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充要条件是由等式$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$可以推出$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$.

利用线性方程组的语言，定理4.4可以改述为

定理 4.4' 列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关(线性无关)的充要条件是关于$k_1, k_2, \cdots, k_s$的齐次线性方程组$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$有非零解(只有零解)。

定理 4.4" 行向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关(线性无关)的充要条件是关于$k_1, k_2, \cdots, k_s$的齐次线性方程组$k_1\boldsymbol{\alpha}_1' + k_2\boldsymbol{\alpha}_2' + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s' = \mathbf{0}$有非零解(只有零解)。

例 7 基本向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是线性无关的。

例 7 基本向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是线性无关的。

例 8 判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,1)$的线性相关性。

例 7 基本向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是线性无关的。

例 8 判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,1)$的线性相关性。

例 9 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则再添上若干个向量得到的新向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ $(t > s)$也线性相关。

例 7 基本向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是线性无关的。

例 8 判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,1)$的线性相关性。

例 9 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则再添上若干个向量得到的新向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ $(t > s)$也线性相关。

例 10 设n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则对每个$\boldsymbol{\alpha}_i$都分别添上$r$个分量所得到的$(n+r)$维向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$也线性无关。

线性表出与线性相关的联系

定理 4.5 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，而再添上一个向量$\boldsymbol{\beta}$所得到的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出，且线性表出系数唯一。

最后，讨论两个向量组线性表出与向量组线性相关之间的联系。

定理 4.6 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$和$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$是两个$n$维向量组，如果

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$可由$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$线性表出；

(2) $s > t$,

则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关。

最后，讨论两个向量组线性表出与向量组线性相关之间的联系。

定理 4.6 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$是两个$n$维向量组，如果

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表出;

(2) $s>t$,

则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关。

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}_i = a_{i1}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{i2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{it}\boldsymbol{\beta}_t, \quad i=1,2,\cdots,s.$ 由定理4.4，要证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，只要证明关于$x_1,\cdots,x_s$的方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1' + x_2\boldsymbol{\alpha}_2' + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s' = \mathbf{0} \tag{4.8}$$

有非零解。代入整理得

$$\begin{aligned}&(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{s1}x_s)\boldsymbol{\beta}_1' + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{s2}x_s)\boldsymbol{\beta}_2'\\ &+\cdots + (a_{1t}x_1 + a_{2t}x_2 + \cdots + a_{st}x_s)\boldsymbol{\beta}_t' = \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

我们考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{s1}x_s & = & 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{s2}x_s & = & 0, \\ & \vdots & \\ a_{1t}x_1 + a_{2t}x_2 + \cdots + a_{st}x_s & = & 0, \end{cases}$$

由于未知量个数s >方程个数t，故有非零解，当然这个解也满足(4.9)，从而也满足(4.8)。这就证明了(4.8)有非零解，所以$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关。 □

我们考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{s1}x_s & = & 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{s2}x_s & = & 0, \\ & \vdots & \\ a_{1t}x_1 + a_{2t}x_2 + \cdots + a_{st}x_s & = & 0, \end{cases}$$

由于未知量个数s >方程个数t，故有非零解，当然这个解也满足(4.9)，从而也满足(4.8)。这就证明了(4.8)有非零解，所以$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关。 □

定理4.6的逆否命题是

定理 4.6' 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$线性表出，且$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$s \leq t$.

推论 1 任意$n+1$个n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$必然线性相关。

推论 1 任意$n+1$个n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$必然线性相关。

推论 2 两个等价的线性无关的向量组所含向量个数相同。

推论 1 任意$n+1$个n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$必然线性相关。

推论 2 两个等价的线性无关的向量组所含向量个数相同。

由推论1知，P^n中线性无关向量组中的向量个数至多为n，再由例7知，P^n中有n个线性无关的向量(例如基本向量组)。设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为P^n中n个线性无关的向量，则由定理4.5知，P^n中每个向量$\boldsymbol{\beta}$都可以唯一地写成

$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n \ (x_i \in P, i = 1, 2, \cdots, n)$$

我们把P^n中任意n个线性无关的向量组成的向量组称为P^n的一个**基**，而把有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为$\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的**坐标**。

可以看出，基的概念可以看成基本向量组的推广。例如，在$\boldsymbol{R}^3$中，如果$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$线性无关，则$\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$构成$\boldsymbol{R}^3$的一个基，且对$\boldsymbol{R}^3$中任意给定向量$\boldsymbol{\delta}$，有唯一的一组实数$x_1, x_2, x_3$使

$$\boldsymbol{\delta} = x_1\boldsymbol{\alpha} + x_2\boldsymbol{\beta} + x_3\boldsymbol{\gamma}$$

于是$\boldsymbol{\delta}$在基$\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$下的坐标为$(x_1, x_2, x_3)$。这样，我们可以用$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$分别代替三维几何空间$\boldsymbol{R}^3$中的向量$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$，类似建立起坐标系$\{O; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$，称为**仿射坐标系**。

小结

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关$\Longleftrightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$有非零解

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关$\Longleftrightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$只有零解

(3) 线性相关的向量组，增加一些向量进去之后，仍然线性相关

(4) 线性无关的向量组，每个向量增加一些分量之后，仍然线性无关

(5) 线性无关的向量组，如果增加一个向量之后线性相关了，则增加的这个向量可由它们线性表出，且线性表出系数唯一

(6) 如果向量个数多的向量组可以由向量个数少的向量组线性表出，则向量个数多的向量组必线性相关

(7) 如果线性无关的向量组可以由另一个向量组线性表出，则线性无关的向量组向量个数不超过那一组

(8) $n+1$个n维向量必线性相关

(9) 等价的线性无关组所含的向量个数相同

极大线性无关组

定义 4.13 设A： $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \cdots$是一个由若干个$n$维向量组成的向量组，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$是$A$的一个部分组，且

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$再添上 A 中任意一个向量$\boldsymbol{\alpha}$得到的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}$线性相关，

则称部分组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$为$A$的一个**极大线性无关组**。

极大线性无关组的充要条件

定理 4.7 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$是$A$的一个部分组，则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$是$A$的一个极大线性无关组的充要条件是:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关;

(2) A 中任意一个向量$\boldsymbol{\alpha}$都可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表出。

极大线性无关组的充要条件

定理 4.7 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$是$A$的一个部分组，则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$是$A$的一个极大线性无关组的充要条件是:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关;

(2) A 中任意一个向量$\boldsymbol{\alpha}$都可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表出。

注 1 条件(2)可换成“$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$与整个向量组$A$等价”。

注 2 一个向量组的任意一个极大线性无关组都与原向量组等价。

极大线性无关组的充要条件

定理 4.7 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$是$A$的一个部分组，则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$是$A$的一个极大线性无关组的充要条件是：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关；

(2) A 中任意一个向量$\boldsymbol{\alpha}$都可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表出。

注 1 条件(2)可换成“$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$与整个向量组$A$等价”。

注 2 一个向量组的任意一个极大线性无关组都与原向量组等价。

所以，向量组A的极大线性无关组是向量个数最多的线性无关部分组，也是与A等价的向量个数最少的部分组。

可以看出，P^n的任意一个基都是P^n的一个极大线性无关组。特别地，基本向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是$P^n$的一个极大线性无关组。

可以看出，P^n的任意一个基都是P^n的一个极大线性无关组。特别地，基本向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是$P^n$的一个极大线性无关组。

利用极大线性无关组也可以定义P^n的子空间V的一个基。定义子空间V的基就是V的极大线性无关组。

极大线性无关组的存在性

定理 4.8 n维向量组A的任意一个线性无关的部分组都可以扩充成A的一个极大线性无关组，从而任意含有非零向量的向量组都有极大线性无关组。

极大线性无关组的存在性

定理 4.8 n维向量组A的任意一个线性无关的部分组都可以扩充成A的一个极大线性无关组，从而任意含有非零向量的向量组都有极大线性无关组。

证明 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \cdots \boldsymbol{\alpha}_s$为$A$的一个线性无关部分组，分两种情况讨论：

(1) 若A中所有向量都可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表出，则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 就是A的极大线性无关组；

(2) 若A中存在一个向量$\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表出，由定理4.5知$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\alpha}_{s+1}$线性无关，然后再对$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\alpha}_{s+1}$重复上面的讨论，如此进行下去。

由于P^n中至多有n个线性无关的向量，因此在限步之后，就可以把$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$扩充为$A$的极大线性无关组。 □

向量组的秩

显然，一个向量组可以有许多极大线性无关组，那么它们之间有什么联系呢?

向量组的秩

显然，一个向量组可以有许多极大线性无关组，那么它们之间有什么联系呢?

例 1 几何空间$\boldsymbol{R}^2$(或$\boldsymbol{R}^3$)中，任意一个基都是极大线性无关组，反之亦然。容易看出，$\boldsymbol{R}^2$(或$\boldsymbol{R}^3$)的任意两个极大线性无关组都是等价的。这个结论具有一般性。

向量组的秩

显然，一个向量组可以有许多极大线性无关组，那么它们之间有什么联系呢?

例 1 几何空间$\boldsymbol{R}^2$(或$\boldsymbol{R}^3$)中，任意一个基都是极大线性无关组，反之亦然。容易看出，$\boldsymbol{R}^2$(或$\boldsymbol{R}^3$)的任意两个极大线性无关组都是等价的。这个结论具有一般性。

定理 4.9 一个向量组的所有极大线性无关组所含向量个数相同。

定义 4.14 一个向量组A的极大线性无关组所含向量的个数称为该向量组的**秩**，记为$r(A)$。若向量组A只含有零向量，则规定A的秩为0.

定义 4.14 一个向量组A的极大线性无关组所含向量的个数称为该向量组的**秩**，记为$r(A)$。若向量组A只含有零向量，则规定A的秩为0.

不难看出，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充要条件是它的秩与向量个数相等；又若向量组A的秩为r，则A中的任意r个线性无关的向量组成的部分组都是A的极大线性无关组。

定义 4.14 一个向量组A的极大线性无关组所含向量的个数称为该向量组的**秩**，记为$r(A)$。若向量组A只含有零向量，则规定A的秩为0.

不难看出，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充要条件是它的秩与向量个数相等；又若向量组A的秩为r，则A中的任意r个线性无关的向量组成的部分组都是A的极大线性无关组。

定理 4.10 等价向量组具有相同的秩。

矩阵的秩

定义 4.15 一个矩阵的行向量组的秩称为该矩阵的**行秩**，它的列向量组的秩称为该矩阵的**列秩**。

矩阵的秩

定义 4.15 一个矩阵的行向量组的秩称为该矩阵的**行秩**，它的列向量组的秩称为该矩阵的**列秩**。

引理 1 对$m \times n$矩阵$\boldsymbol{A}$作一次行(列)初等变换，不改变$\boldsymbol{A}$的行(列)秩。

矩阵的秩

定义 4.15 一个矩阵的行向量组的秩称为该矩阵的**行秩**，它的列向量组的秩称为该矩阵的**列秩**。

引理 1 对$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$作一次行(列)初等变换，不改变$\boldsymbol{A}$的行(列)秩。

引理 2 对$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$作一次行(列)初等变换，不改变$\boldsymbol{A}$的列(行)秩。

引理 2 证明 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$. 由定理3.3知，对$\boldsymbol{A}$作一次行初等变换相当于左乘一个相应的初等矩阵$\boldsymbol{P}$，即得到

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}_n).$$

设$\boldsymbol{A}$的列秩为r，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$为$\boldsymbol{A}$的列向量组的一个极大线性无关组。我们断言，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}_r$是$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组，反之亦然。

引理 2 证明 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$. 由定理3.3知，对$\boldsymbol{A}$作一次行初等变换相当于左乘一个相应的初等矩阵$\boldsymbol{P}$，即得到

$$\boldsymbol{PA}=(\boldsymbol{P\beta}_1,\boldsymbol{P\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{P\beta}_n).$$

设$\boldsymbol{A}$的列秩为r，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$为$\boldsymbol{A}$的列向量组的一个极大线性无关组。我们断言，$\boldsymbol{P\beta}_1,\boldsymbol{P\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{P\beta}_r$是$\boldsymbol{PA}$ 的列向量组的一个极大线性无关组，反之亦然。

事实上，由于初等矩阵$\boldsymbol{P}$可逆，所以

$$\begin{aligned}
& k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r=0 && (4.13)\\
\iff\; & \boldsymbol{P}(k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r)=0 &&\\
\iff\; & k_1\boldsymbol{P\beta}_1+k_2\boldsymbol{P\beta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{P\beta}_r=0 && (4.14)
\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$线性无关的充要条件是$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}_r$线性无关。

利用类似的方法可证明：$\boldsymbol{A}$的列向量组中任意一个向量$\boldsymbol{\beta}_l=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\beta}_r$的充要条件是$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}_l=x_1\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}_r$. 这就证明了上述断言成立。

由上述断言立得行初等变换不改变矩阵的列秩。同理可证列初等变换也不改变矩阵的行秩。 $\square$

结合上面的两个引理，又由矩阵的标准形可知

定理 4.11 任意矩阵$\boldsymbol{A}$的行秩与列秩相等，称之为矩阵$\boldsymbol{A}$的秩，记为$r(\boldsymbol{A})$.

结合上面的两个引理，又由矩阵的标准形可知

定理 4.11 任意矩阵$\boldsymbol{A}$的行秩与列秩相等，称之为矩阵$\boldsymbol{A}$的秩，记为$r(\boldsymbol{A})$.

(1) 利用标准形求矩阵的秩

例 2 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&0&1\\2&0&2&1\\3&0&0&-2\end{bmatrix}$$

的标准形与秩。

(2) 利用初等变换求极大线性无关组

给定列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$，求其极大线性无关组

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s) \xrightarrow{\text{只作行初等变换}} \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s)$$

由引理2的证明知，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$的极大线性无关组与$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的极大线性无关组一一对应，且在行初等变换的过程中列向量之间的线性关系保持保持不变，

例如，若$\boldsymbol{\beta}_s = k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta} + \cdots + k_{s-1}\boldsymbol{\beta}_{s-1}$, 则$\boldsymbol{\alpha}_s = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha} + \cdots + k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$。

(2) 利用初等变换求极大线性无关组

给定列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$，求其极大线性无关组

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s) \xrightarrow{\text{只作行初等变换}} \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s)$$

由引理2的证明知，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$的极大线性无关组与$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots,$ $\boldsymbol{\beta}_s$ 的极大线性无关组一一对应，且在行初等变换的过程中列向量之间的线性关系保持保持不变，

例如，若$\boldsymbol{\beta}_s = k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta} + \cdots + k_{s-1}\boldsymbol{\beta}_{s-1}$, 则$\boldsymbol{\alpha}_s = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha} + \cdots + k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$。

例 3 求$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 3)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, -1, 4)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (3, -4, 11)$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (4, -2, 9)$的一个极大线性无关组，并把其余向量用该极大线性无关组线性表出。

利用秩的概念，可以更精确的描述可逆矩阵和退化矩阵

利用秩的概念，可以更精确的描述可逆矩阵和退化矩阵

定理 4.12 方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$可逆的充要条件是$\boldsymbol{A}$的行向量组(或列向量组)是线性无关的(即$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})=n$).

利用秩的概念，可以更精确的描述可逆矩阵和退化矩阵

定理 4.12 方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$可逆的充要条件是$\boldsymbol{A}$的行向量组(或列向量组)是线性无关的(即$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})=n$).

定理 4.12' 方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$退化的充要条件是$\boldsymbol{A}$的行向量组(或列向量组)是线性相关的(即$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})<n$).

利用秩的概念，可以更精确的描述可逆矩阵和退化矩阵

定理 4.12 方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$可逆的充要条件是$\boldsymbol{A}$的行向量组(或列向量组)是线性无关的(即$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})=n$).

定理 4.12' 方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$退化的充要条件是$\boldsymbol{A}$的行向量组(或列向量组)是线性相关的(即$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})<n$).

定义 4.16 若n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为n，则称$\boldsymbol{A}$为**满秩矩阵**。

k阶子式

定义 4.17 在矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$中任取$k$行$i_1,i_2,\cdots,i_k$及$k$列$j_1,j_2,\cdots,j_k$，位于这$k$行$k$列交叉点上的$k^2$个元素按原来顺序排列成的一个$k$行列式，称为$\boldsymbol{A}$的一个**$k$阶子式**，记为$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$.

k阶子式

定义 4.17 在矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$中任取$k$行$i_1,i_2,\cdots,i_k$及$k$列$j_1,j_2,\cdots,j_k$，位于这$k$行$k$列交叉点上的$k^2$个元素按原来顺序排列成的一个$k$行列式，称为$\boldsymbol{A}$的一个$k$**阶子式**，记为$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$.

例 4 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

求$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$和$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

可以利用k阶子式来描述矩阵的秩

定理 4.13 矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})=r$的充要条件是$\boldsymbol{A}$有非零的r阶子式，且$\boldsymbol{A}$的任意$r+1$阶子式都是零。

可以利用k阶子式来描述矩阵的秩

定理 4.13 矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})=r$的充要条件是$\boldsymbol{A}$有非零的r阶子式，且$\boldsymbol{A}$的任意$r+1$阶子式都是零。

证明 必要性. 由$r(\boldsymbol{A})=r$知，$\boldsymbol{A}$中有r个行向量线性无关，取出来作成一个$r\times n$矩阵$\boldsymbol{A}_1$，则$r(\boldsymbol{A}_1)=r$. 于是$\boldsymbol{A}_1$有r个列向量线性无关，再取出来作成一个$r\times r$ 矩阵$\boldsymbol{A}_2$，则$r(\boldsymbol{A}_2)=r$. 由定理4.12知$|\boldsymbol{A}_2|\neq 0$，因此$|\boldsymbol{A}_2|$就是$\boldsymbol{A}$的一个非零的r阶子式。

可以利用k阶子式来描述矩阵的秩

定理 4.13 矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})=r$的充要条件是$\boldsymbol{A}$有非零的r阶子式，且$\boldsymbol{A}$的任意$r+1$阶子式都是零。

证明 必要性. 由$r(\boldsymbol{A})=r$知，$\boldsymbol{A}$中有r个行向量线性无关，取出来作成一个$r\times n$矩阵$\boldsymbol{A}_1$，则$r(\boldsymbol{A}_1)=r$. 于是$\boldsymbol{A}_1$有r个列向量线性无关，再取出来作成一个$r\times r$ 矩阵$\boldsymbol{A}_2$，则$r(\boldsymbol{A}_2)=r$. 由定理4.12知$|\boldsymbol{A}_2|\neq 0$，因此$|\boldsymbol{A}_2|$就是$\boldsymbol{A}$的一个非零的r阶子式。

如果$\boldsymbol{A}$有一个非零的$r+1$阶子式$|\boldsymbol{A}_3|$，则$\boldsymbol{A}_3$的行向量组线性无关，由4.3节例10知，添加分量得到$\boldsymbol{A}$的$r+1$个n维行向量仍然线性无关。因此$\boldsymbol{A}$中有$r+1$个线性无关的行向量，这是与$r(\boldsymbol{A})=r$矛盾。因此$\boldsymbol{A}$中没有非零的$r+1$阶子式。

充分性. 设$\boldsymbol{A}$有非零的r阶子式，而所有$r+1$阶子式都是零。由行列式展开定理知，$\boldsymbol{A}$的所有大于r阶的子式都是0. 不失一般性，设

$$|\boldsymbol{B}_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

由定理4.12知$r(\boldsymbol{B}_1) = r$.

充分性. 设$\boldsymbol{A}$有非零的r阶子式，而所有$r+1$阶子式都是零。由行列式展开定理知，$\boldsymbol{A}$的所有大于r阶的子式都是0. 不失一般性，设

$$|\boldsymbol{B}_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

由定理4.12知$r(\boldsymbol{B}_1) = r$. 令

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \end{bmatrix}.$$

由4.3节例10知，$\boldsymbol{B}_2$的r个行向量也线性无关，故$r(\boldsymbol{B}_2) = r$.

充分性. 设$\boldsymbol{A}$有非零的r阶子式，而所有$r+1$阶子式都是零。由行列式展开定理知，$\boldsymbol{A}$的所有大于r阶的子式都是0. 不失一般性，设

$$|\boldsymbol{B}_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

由定理4.12知$r(\boldsymbol{B}_1) = r$. 令

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \end{bmatrix}.$$

由4.3节例10知，$\boldsymbol{B}_2$的r个行向量也线性无关，故$r(\boldsymbol{B}_2) = r$.

显然$r(\boldsymbol{A}) \geq r(\boldsymbol{B}_2)$，故$r(\boldsymbol{A}) \geq r$. 如果$r(\boldsymbol{A}) > r$，则由前面已证明的结论知，$\boldsymbol{A}$有大于$r$阶的非零子式，矛盾。故$r(\boldsymbol{A}) = r$. □

例 5 求矩阵$\boldsymbol{A}$的秩:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

例 5 求矩阵$\boldsymbol{A}$的秩：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

例 6 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(4,4,-2)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(2,6,1)$的秩。

定理 4.14 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0, \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & 0, \end{cases}$$

有非零解(只有零解)的充要条件是系数矩阵$\boldsymbol{A}$是退化的(可逆的)。

至此，n阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆的等价说法有

(1) 存在n阶矩阵$\boldsymbol{B}$，使$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$;

(2) $|\boldsymbol{A}|\neq 0$;

(3) $\boldsymbol{A}$是非退化矩阵;

(4) $\boldsymbol{A}$的行(列)向量组线性无关;

(5) $\boldsymbol{A}$是满秩矩阵;

(6) 齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$只有零解;

(7) $\boldsymbol{A}$可以写成一系列初等矩阵的乘积;

(8) $\boldsymbol{A}$的标准形是单位矩阵$\boldsymbol{E}$.

本节我们利用秩来讨论一般线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases}$$

有解的判定定理及解的个数问题。上面方程组的向量形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta},$$

其中$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是系数矩阵的列向量，$\boldsymbol{\beta}$是常数项列向量。

引理 设向量组(I)与向量组(II)的秩相等，且(I)可以由(II)线性表出，则(I)与(II)等价。

引理 设向量组(I)与向量组(II)的秩相等，且(I)可以由(II)线性表出，则(I)与(II)等价。

定理 4.15 线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$有解的充要条件是系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩等于增广矩阵$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$的秩。

引理 设向量组(I)与向量组(II)的秩相等，且(I)可以由(II)线性表出，则(I)与(II)等价。

定理 4.15 线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解的充要条件是系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩等于增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$的秩。

定理 4.16 设线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，增广矩阵为$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，则

(1) 当$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=n$时，方程组有唯一解；

(2) 当$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})<n$时，方程组有无穷多个解；

(3) 当$r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ (这时必有$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})+1$)时，方程组无解。

例 1 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$为m维列向量。如果$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})=m$，则线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$必有解。

例 1 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$为m维列向量。如果$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})=m$，则线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$必有解。

例 2 解方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

齐次线性方程组解的结构

首先讨论齐次线性方程组

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0, \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0, \end{array}\right. \tag{4.18}$$

齐次线性方程组解的结构

首先讨论齐次线性方程组

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & 0, \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & 0, \end{array}\right. \tag{4.18}$$

定义 4.18 齐次线性方程组解空间的一个基(即一个极大线性无关组)称为它的一个**基础解系**。如果齐次线性方程组只有零解，则称它没有基础解系。

齐次线性方程组解的结构

首先讨论齐次线性方程组

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= 0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= 0,\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= 0,\end{aligned}\right. \tag{4.18}$$

定义 4.18 齐次线性方程组解空间的一个基(即一个极大线性无关组)称为它的一个**基础解系**。如果齐次线性方程组只有零解，则称它没有基础解系。

易见，一个齐次线性方程组任意两个基础解系都是等价的。

定理 4.17 设$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵，则齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$有基础解系的充要条件是其系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A}) = r < n$. 这时它的任意一个基础解系有$n - r$个解向量。

定理 4.17 设$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵，则齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$有基础解系的充要条件是其系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A}) = r < n$. 这时它的任意一个基础解系有$n - r$个解向量。

证明 必要性. 当$r(\boldsymbol{A}) = n$时，由定理4.16知$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$有唯一解，即只有零解。这时它没有基础解系。所以，$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$有基础解系的话，必有$r < n$.

定理 4.17 设A是$m \times n$矩阵，则齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$有基础解系的充要条件是其系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A}) = r < n$. 这时它的任意一个基础解系有$n - r$个解向量。

证明 必要性. 当$r(\boldsymbol{A}) = n$时，由定理4.16知$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$有唯一解，即只有零解。这时它没有基础解系。所以，$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$有基础解系的话，必有$r < n$.

充分性. 当$r < n$时由定理4.16知$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$有无穷多解，因而有基础解系。

下设$r < n$. 适当调整未知量次序，$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$可用初等变换化成阶梯形方程组(去掉$0 = 0$):

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n & = & 0, \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n & = & 0, \\ & \vdots & \\ c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n & = & 0, \end{array}\right. \tag{4.19}$$

其中$c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, r$, $r < n$.

进一步作初等变换，并取$x_{r+1}, \cdots, x_n$为自由未知量，令$x_{r+1} = c_1, \cdots, x_n = c_{n-r}$，其中$c_1, \cdots, c_{n-r}$为任意常数，得

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & d_{1,r+1}c_1 + d_{1,r+2}c_2 + \cdots + d_{1n}c_{n-r}, \\ x_2 & = & d_{2,r+1}c_1 + d_{2,r+2}c_2 + \cdots + d_{2n}c_{n-r}, \\ & \vdots & \\ x_r & = & d_{r,r+1}c_1 + d_{r,r+2}c_2 + \cdots + d_{rn}c_{n-r}, \\ x_{r+1} & = & c_1, \\ & \vdots & \\ x_n & = & c_{n-r}, \end{array}\right. \tag{4.20}$$

把(4.20)写成向量形式，得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} d_{1,r+1} \\ \vdots \\ d_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} d_{1,r+2} \\ \vdots \\ d_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{bmatrix} d_{1n} \\ \vdots \\ d_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

由此看出，$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的任意一个解都是向量组

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix} d_{1,r+1} \\ \vdots \\ d_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix} d_{1,r+2} \\ \vdots \\ d_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\begin{bmatrix} d_{1n} \\ \vdots \\ d_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

的线性组合，并且显然它们是线性无关的，因此是解空间的一个基础解系，且有$n-r$个向量。

推论 1 设$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_{n-r}$是方程组$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$的任意一个基础解系，则$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$的全部解可以写成$c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{X}_{n-r}$，其中$c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$为任意常数。

推论 1 设$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_{n-r}$是方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的任意一个基础解系，则$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的全部解可以写成$c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{X}_{n-r}$，其中$c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$为任意常数。

推论 2 设$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵，齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的任意$n - r(\boldsymbol{A})$个线性无关的解向量都构成一个基础解系。

推论 1 设$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_{n-r}$是方程组$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$的任意一个基础解系，则$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$的全部解可以写成$c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{X}_{n-r}$，其中$c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$为任意常数。

推论 2 设$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵，齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$的任意$n - r(\boldsymbol{A})$个线性无关的解向量都构成一个基础解系。

设V为P^n的子空间，称V的极大线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$为$V$的一个基，$s$称为$V$的维数，记$\dim V = s$. 因此，齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$的解空间的维数为$n - r$，其中$r = r(\boldsymbol{A})$.

推论 1 设$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_{n-r}$是方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的任意一个基础解系，则$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的全部解可以写成$c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{X}_{n-r}$，其中$c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$为任意常数。

推论 2 设$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵，齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的任意$n - r(\boldsymbol{A})$个线性无关的解向量都构成一个基础解系。

设V为P^n的子空间，称V的极大线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$为$V$的一个基，$s$称为$V$的维数，记$\dim V = s$. 因此，齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的解空间的维数为$n - r$，其中$r = r(\boldsymbol{A})$.

例 1 求

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \end{cases}$$

的基础解系。

非齐次线性方程组解的结构

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解与$\boldsymbol{AX}=0$的解有密切联系。称齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的**导出线性方程组**，简称**导出组**。

非齐次线性方程组解的结构

$AX = B$的解与$AX = 0$的解有密切联系。称齐次线性方程组$AX = 0$为非齐次线性方程组$AX = B$的**导出线性方程组**，简称**导出组**。

不难看出，方程组$AX = B$与导出组$AX = 0$的解有以下关系：

(1) $AX = B$的任意两个解之差是导出组$AX = 0$的解；

(2) $AX = B$的任意一个解与导出组$AX = 0$的任意一个解之和仍是$AX = B$的解。

非齐次线性方程组解的结构

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解与$\boldsymbol{AX}=0$的解有密切联系。称齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的**导出线性方程组**，简称**导出组**。

不难看出，方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$与导出组$\boldsymbol{AX}=0$的解有以下关系：

(1) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的任意两个解之差是导出组$\boldsymbol{AX}=0$的解；

(2) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的任意一个解与导出组$\boldsymbol{AX}=0$的任意一个解之和仍是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解。

因此有

定理 4.18 设$\boldsymbol{X}_0$为线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的一个特解，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$是导出组$\boldsymbol{AX}=0$的任意一个基础解系，则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解集合为

$$\{\boldsymbol{X}_0+c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{X}_{n-r}|c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}\text{为任意常数}\}.$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 & = & 5, \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -4. \end{cases}$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &=& 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &=& 5, \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 &=& -4. \end{cases}$$

例 3 解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &=& -5, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 &=& -5, \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 &=& -14, \\ 4x_1 - 5x_2 + 9x_3 + 12x_4 &=& -15. \end{cases}$$

例 4 设$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$为非齐次线性方程组，$r(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{X}$为4维列向量。已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)'$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1,1)'$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,3,4)'$都是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解，求该线性方程组的通解。

Thanks for your attention!