第0章　预备知识

郑州大学数学与统计学院 线性代数教研室

目录

复数

定义 0.1 设a, b为实数，i为虚数单位满足$\mathrm{i}^2 = -1$，则称$z = a + b\mathrm{i}$为一个**复数**，其中a, b分别为z的**实部**、**虚部**。

复数

定义 0.1 设a,b为实数，i为虚数单位满足$\mathrm{i}^2=-1$，则称$z=a+b\mathrm{i}$为一个**复数**，其中a,b分别为z的**实部**、**虚部**。

复数$z=a+b\mathrm{i}$和$w=c+d\mathrm{i}$的和、差、积、商分别为

复数

定义 0.1 设a,b为实数，i为虚数单位满足$\mathrm{i}^2=-1$，则称$z=a+b\mathrm{i}$为一个**复数**，其中a,b分别为z的**实部**、**虚部**。

复数$z=a+b\mathrm{i}$和$w=c+d\mathrm{i}$的和、差、积、商分别为

$$z\pm w=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i},$$

$$zw=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}.$$

如果$c+d\mathrm{i}\neq 0$，即$c^2+d^2\neq 0$，则

$$\frac{z}{w}$$

复数

定义 0.1 设a, b为实数，i为虚数单位满足$\mathrm{i}^2 = -1$，则称$z = a + b\mathrm{i}$为一个**复数**，其中a, b分别为z的**实部**、**虚部**。

复数$z = a + b\mathrm{i}$和$w = c + d\mathrm{i}$的和、差、积、商分别为

$$z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)\mathrm{i},$$

$$zw = (ac - bd) + (bc + ad)\mathrm{i}.$$

如果$c + d\mathrm{i} \neq 0$，即$c^2 + d^2 \neq 0$，则

$$\frac{z}{w} = \frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = \frac{(a + b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})}{(c + d\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\mathrm{i}}{c^2 + d^2}.$$

根据定义，复数$z=a+b\mathrm{i}$有两种情况：$\begin{cases} b=0, & \text{实数} \\ b\neq 0, & \text{虚数} \end{cases}$，特别地，$a=0, b\neq 0$时称为纯虚数。

共轭复数和模

定义 0.2 复数$z=a+b\mathrm{i}$的**共轭复数**为$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$

共轭复数和模

定义 0.2 复数$z=a+bi$的**共轭复数**为$\bar{z}=a-bi$

共轭复数有如下性质:

$$\bar{\bar{z}}=z,\quad \overline{z\pm w}=\bar{z}\pm\bar{w},\quad \overline{zw}=\bar{z}\bar{w},\quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}\quad (w\neq 0).$$

特别地，z为实数$\Longleftrightarrow\ z=\bar{z}$，　z为纯虚数$\Longleftrightarrow\ z=-\bar{z}$.

共轭复数和模

定义 0.2 复数$z=a+b\mathrm{i}$的**共轭复数**为$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$

共轭复数有如下性质:

$$\bar{\bar{z}}=z,\quad \overline{z\pm w}=\bar{z}\pm\bar{w},\quad \overline{zw}=\bar{z}\bar{w},\quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}\quad (w\neq 0).$$

特别地，z为实数$\Longleftrightarrow\ z=\bar{z}$，　z为纯虚数$\Longleftrightarrow\ z=-\bar{z}$.

定义 0.3 复数$z=a+b\mathrm{i}$的**模**为$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

共轭复数和模

定义 0.2 复数$z = a + b\mathrm{i}$的**共轭复数**为$\bar{z} = a - bi$

共轭复数有如下性质:

$$\bar{\bar{z}} = z,\quad \overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w},\quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w},\quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}\quad (w \neq 0).$$

特别地，z为实数$\Longleftrightarrow\ z = \bar{z}$,　z为纯虚数$\Longleftrightarrow\ z = -\bar{z}$.

定义 0.3 复数$z = a + b\mathrm{i}$的**模**为$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

显然有

$$|z|^2 = z\bar{z},\qquad |\bar{z}| = |z|,$$
$$|zw| = |z||w|,\qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}\quad (w \neq 0),$$
$$|z| - |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|.$$

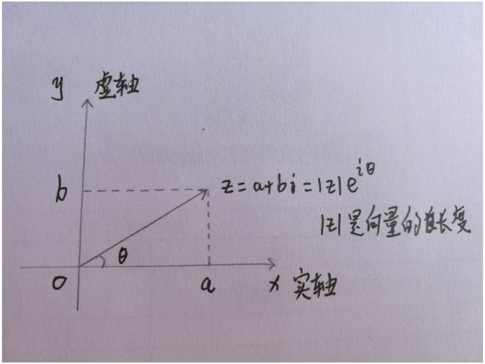
因此模与绝对值相容。

复数的坐标表示

$$z = a+b\mathrm{i} \longleftrightarrow \text{有序实数对}(a,b) \longleftrightarrow \text{坐标平面中的点} \longleftrightarrow \text{向量}$$

复数的坐标表示

$$z = a+bi \longleftrightarrow \text{有序实数对}(a,b) \longleftrightarrow \text{坐标平面中的点} \longleftrightarrow \text{向量}$$



θ称为z的辐角，辐角为θ的单位向量对应的复数记为$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, 则$z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$.

若$z=|z|\mathrm{e}^{i\theta},\ w=|w|\mathrm{e}^{i\phi}$, 则

$$zw$$

若$z=|z|\mathrm{e}^{i\theta}$, $w=|w|\mathrm{e}^{i\phi}$, 则

$$zw=|z|\mathrm{e}^{i\theta}|w|\mathrm{e}^{i\phi}=|z||w|\mathrm{e}^{i(\theta+\phi)}.$$

特别地, $z^n=|z|^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

若$z=|z|\mathrm{e}^{i\theta}$, $w=|w|\mathrm{e}^{i\phi}$, 则

$$zw=|z|\mathrm{e}^{i\theta}|w|\mathrm{e}^{i\phi}=|z||w|\mathrm{e}^{i(\theta+\phi)}.$$

特别地，$z^n=|z|^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

数集的一些记号：
自然数集$\mathbf{N}$, 整数集$\mathbf{Z}$, 有理数集$\mathbf{Q}$, 实数集$\mathbf{R}$, 复数集$\mathbf{C}$.

代数学基本定理

n次复系数多项式一般具有如下形式：

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad a_i \in \mathbf{C}$$

代数学基本定理

n次复系数多项式一般具有如下形式:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad a_i \in \mathbf{C}$$

代数学基本定理 任意一个正次数的复系数多项式都至少有一个复数根。

代数学基本定理

n次复系数多项式一般具有如下形式:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad a_i \in \mathbf{C}$$

代数学基本定理 任意一个正次数的复系数多项式都至少有一个复数根。

推论 设$f(x)$是一个n $(n > 0)$次复系数多项式，则存在复数$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使$f(x) = k(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$，其中$k$为$f(x)$中$x^n$的系数。

数域

定义 0.4 设$P \subseteq \mathbf{C}$, 如果对P中任意两个数作某种运算，其结果仍在P中，则称P对该运算**封闭**。

数域

定义 0.4 设$P \subseteq \mathbf{C}$, 如果对P中任意两个数作某种运算，其结果仍在P中，则称P对该运算**封闭**。

显然，$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$对加、减、乘、除(除数不为0)都是封闭的，$\mathbf{Z}$对加、减、乘运算封闭，但对除法(除数不为0)不封闭。

数域

定义 0.4 设$P \subseteq \mathbf{C}$, 如果对P中任意两个数作某种运算，其结果仍在P中，则称P对该运算**封闭**。

显然，$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$对加、减、乘、除(除数不为0)都是封闭的，$\mathbf{Z}$对加、减、乘运算封闭，但对除法(除数不为0)不封闭。

定义 0.5 设$P \subseteq \mathbf{C}$且$0, 1 \in P$, 如果P对加、减、乘、除(除数不为0)都是封闭的，则称P为一个**数域**。

数域

定义 0.4 设$P \subseteq \mathbf{C}$, 如果对P中任意两个数作某种运算，其结果仍在P中，则称P对该运算**封闭**。

显然，$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$对加、减、乘、除(除数不为0)都是封闭的，$\mathbf{Z}$对加、减、乘运算封闭，但对除法(除数不为0)不封闭。

定义 0.5 设$P \subseteq \mathbf{C}$且$0, 1 \in P$, 如果P对加、减、乘、除(除数不为0)都是封闭的，则称P为一个**数域**。

因此，$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$都是数域，而$\mathbf{Z}$和无理数集不构成数域。

数域

定义 0.4 设$P \subseteq \mathbf{C}$, 如果对P中任意两个数作某种运算，其结果仍在P中，则称P对该运算**封闭**。

显然，$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$对加、减、乘、除(除数不为0)都是封闭的，$\mathbf{Z}$对加、减、乘运算封闭，但对除法(除数不为0)不封闭。

定义 0.5 设$P \subseteq \mathbf{C}$且$0, 1 \in P$, 如果P对加、减、乘、除(除数不为0)都是封闭的，则称P为一个**数域**。

因此，$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$都是数域，而$\mathbf{Z}$和无理数集不构成数域。

例 1 证明$\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$是一个数域。

数域

定义 0.4 设$P \subseteq \mathbf{C}$, 如果对P中任意两个数作某种运算，其结果仍在P中，则称P对该运算**封闭**。

显然，$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$对加、减、乘、除(除数不为0)都是封闭的，$\mathbf{Z}$对加、减、乘运算封闭，但对除法(除数不为0)不封闭。

定义 0.5 设$P \subseteq \mathbf{C}$且$0, 1 \in P$, 如果P对加、减、乘、除(除数不为0)都是封闭的，则称P为一个**数域**。

因此，$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$都是数域，而$\mathbf{Z}$和无理数集不构成数域。

例 1 证明$\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$是一个数域。

证明 显然$0, 1 \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$, 剩下只需表明$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$对加、减、乘、除(除数不为0)都封闭即可。 □

定理 0.1 任意一个数域P都包含有理数域$\mathbf{Q}$, 因此$\mathbf{Q}$是最小的数域。

定理 0.1 任意一个数域P都包含有理数域$\mathbf{Q}$, 因此$\mathbf{Q}$是最小的数域。

证明 首先有$0, 1 \in P$, $\because P$对加法和减法封闭，$\therefore \forall n \in \mathbf{Z}^+$有

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1 \in P, \quad -n = 0 - n \in P.$$

$\therefore \mathbf{Z} \subseteq P$.

定理 0.1 任意一个数域P都包含有理数域$\mathbf{Q}$, 因此$\mathbf{Q}$是最小的数域。

证明 首先有$0,1 \in P$, $\because$ P对加法和减法封闭, $\therefore \forall n \in \mathbf{Z}^+$有

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1 \in P, \quad -n = 0 - n \in P.$$

$\therefore \mathbf{Z} \subseteq P$.

已知有理数a都可以写成$\frac{m}{n}$ $(m, n \in Z, n \neq 0)$的形式, 由P对除法的封闭性可知$a \in P$, 即$\mathbf{Q} \subseteq P$. $\square$

二阶行列式

设

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，其一般解为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

二阶行列式

设

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，其一般解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

引入符号$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式。

二阶行列式

设

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，其一般解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

引入符号$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**。

令

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

于是其解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

三阶行列式

同样在三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

中引入符号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

三阶行列式

同样在三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

中引入符号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**。

并令

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当$D \neq 0$, 则其解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例题

例 1 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= 5, \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11. \end{cases}$$

例题

例 1 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= 5, \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11. \end{cases}$$

例 2 求解

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= -6, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 12. \end{cases}$$

Thanks for your attention!