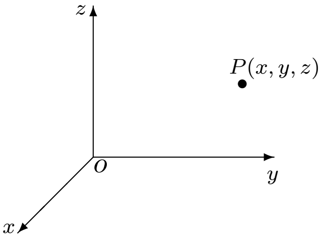
第1章 向量代数、空间中直线与平面

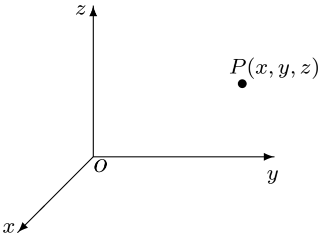
郑州大学数学与统计学院 线性代数教研室

目录

空间直角坐标系

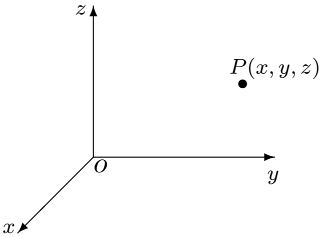


空间直角坐标系



空间中任意一点P都对应一个有序三元组(x, y, z)，称为P的**坐标**，记为$P(x, y, z)$.

空间直角坐标系



空间中任意一点P都对应一个有序三元组(x,y,z)，称为P的**坐标**，记为$P(x,y,z)$.

空间中两点$P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

向量的概念

只有大小的量称为**数量**(或**标量**);

既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)。

向量的概念

只有大小的量称为**数量**(或**标量**);

既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)。

向量$\boldsymbol{a}$可以用一个带箭头的有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示 $A \longrightarrow B$

线段AB的长度称为向量a的**长度**(或**大小**或**模**),记为$|\boldsymbol{a}|$或$|\overrightarrow{AB}|$.

向量的概念

只有大小的量称为**数量(或标量)**;

既有大小又有方向的量称为**向量(或矢量)**。

向量$\boldsymbol{a}$可以用一个带箭头的有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示 $A \longrightarrow B$

线段AB的长度称为向量a的**长度(或大小或模)**，记为$|\boldsymbol{a}|$或$|\overrightarrow{AB}|$.

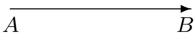
特殊向量：**单位向量(幺矢)**，**零向量$\mathbf{0}$**(方向不定)，**负向量$-\boldsymbol{a}$**.

向量的概念

只有大小的量称为**数量**(或**标量**);

既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)。

向量$\boldsymbol{a}$可以用一个带箭头的有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示



线段AB的长度称为向量a的**长度**(或**大小**或**模**), 记为$|\boldsymbol{a}|$或$|\overrightarrow{AB}|$.

特殊向量: **单位向量(幺矢)**, **零向量0**(方向不定), **负向量$-\boldsymbol{a}$**.

向量**相等**: 长度相等且方向相同, 与起点、终点无关。

这里所说的向量都是**自由向量**, 可以平行移动。若一组向量通过平移可以共线(或共面), 则称这组向量**共线(或共面)**。

共线向量又称为**平行向量**, 记为$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$.

向量的加法、减法

- 向量的加法

  (1) 三角形法则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

向量的加法、减法

- 向量的加法

  (1) 三角形法则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

  (2) 平行四边形法则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.$$

向量的加法、减法

- 向量的加法

(1) 三角形法则

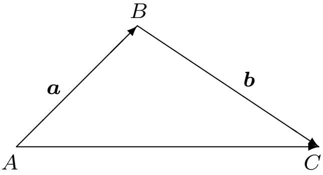
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

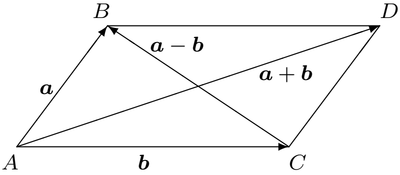
(2) 平行四边形法则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.$$

- 向量的减法

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$





向量的数乘

实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的乘积，称为**数乘向量**，记为$\lambda\boldsymbol{a}$，它的长度为$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$，其方向当$\lambda > 0$时与$\boldsymbol{a}$同向；当$\lambda < 0$时与$\boldsymbol{a}$反向。

这种运算称为向量的**数乘运算**或向量的**数量乘法**。

向量的数乘

实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的乘积，称为**数乘向量**，记为$\lambda\boldsymbol{a}$，它的长度为$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$，其方向当$\lambda > 0$时与$\boldsymbol{a}$同向；当$\lambda < 0$时与$\boldsymbol{a}$ 反向。

这种运算称为向量的**数乘运算**或向量的**数量乘法**。

一些结论：

- $\lambda\boldsymbol{a} = 0 \iff \lambda = 0$或$\boldsymbol{a} = 0$;
- $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$;
- $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$;
- $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;
- $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$, $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$.

向量的数乘

实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的乘积，称为**数乘向量**，记为$\lambda\boldsymbol{a}$，它的长度为$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$，其方向当$\lambda > 0$时与$\boldsymbol{a}$同向；当$\lambda < 0$时与$\boldsymbol{a}$ 反向。

这种运算称为向量的**数乘运算**或向量的**数量乘法**。

一些结论：

- $\lambda\boldsymbol{a} = 0 \iff \lambda = 0$或$\boldsymbol{a} = 0$;
- $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$;
- $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$;
- $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;
- $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$, $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$.

例 1 设$\boldsymbol{a} \neq 0$，则$\boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$是唯一与$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量，且$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0$.

一、数量积

定义 1.1 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**数量积**(或**内积**) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,$$

其中$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$(0\le\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\le\pi)$.

几何意义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$表示$|\boldsymbol{a}|$乘以另一向量$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

一、数量积

定义 1.1 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**数量积(或内积)** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,$$

其中$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角($0\leq\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leq\pi$).

几何意义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$表示$|\boldsymbol{a}|$乘以另一向量$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

一些结论:

(1) 单位向量$\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{b}_0$的内积$\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}_0=\cos\langle\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{b}_0\rangle$, $\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{b}\rangle$;

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\iff\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 规定零向量$\mathbf{0}$与任意向量都垂直;

(3) 内积的正负取决于向量夹角是锐角或钝角;

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

一、数量积

定义 1.1 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积(或内积) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,$$

其中$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$(0\le\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\le\pi)$.

几何意义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$表示$|\boldsymbol{a}|$乘以另一向量$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

一些结论：

(1) 单位向量$\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{b}_0$的内积$\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}_0=\cos\langle\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{b}_0\rangle$, $\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{b}\rangle$;

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\iff\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 规定零向量$\mathbf{0}$与任意向量都垂直;

(3) 内积的正负取决于向量夹角是锐角或钝角;

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

运算规律：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a},\quad(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),\quad\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

二、向量积

定义 1.2 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**向量积**(或**矢量积**) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 定义为

其大小为 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$;

其方向与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都垂直，且与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 构成右手系。

二、向量积

定义 1.2 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**向量积**(或**矢量积**) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 定义为

其大小为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$;

其方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直，且与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 构成右手系。

一些结论:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的长度等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平等四边形的面积;

(2) 若单位向量$\boldsymbol{e}$与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$同向，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\boldsymbol{e}$;

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$, 规定零向量$\mathbf{0}$与任意向量都平行;

(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = 0$.

二、向量积

定义 1.2 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**向量积**(或**矢量积**) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 定义为

其大小为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$;

其方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直，且与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 构成右手系。

一些结论:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的长度等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平等四边形的面积;

(2) 若单位向量$\boldsymbol{e}$与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$同向，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\boldsymbol{e}$;

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0 \iff \boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$, 规定零向量$\mathbf{0}$与任意向量都平行;

(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0.$

运算规律:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},\quad (\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}.$$

三、混合积

定义 1.3 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为三个向量，则称$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的**混合积**，记为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

几何意义：若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面，则$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$恰是以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积，当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$作成右手系时$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$取正号；作成左手系里$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$取负号。

三、混合积

定义 1.3 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为三个向量，则称$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的**混合积**，记为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

几何意义：若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面，则$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$恰是以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积，当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$作成右手系时$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$取正号；作成左手系里$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$取负号。

一些结论：

(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0 \iff \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面(含共线的特殊情形);

(2) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$;

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

例 3 设$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$为三个不共面的向量，$\boldsymbol{d}$是任意向量，求实数$\lambda, \mu, \gamma$使$\boldsymbol{d} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c}$.

例 3 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为三个不共面的向量，$\boldsymbol{d}$是任意向量，求实数$\lambda,\mu,\gamma$使$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$.

解 已知存在实数λ,μ,γ使$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$. 两边用$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$作内积，得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{d} &= (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c})\\ &= \lambda(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\\ &= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

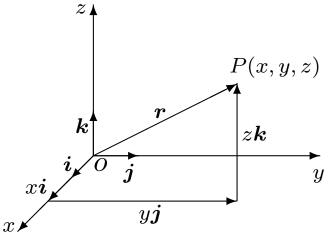
因为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面，所以$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\neq 0$. 从而得

$$\lambda=\frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}.$$

同理可得

$$\mu=\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},\quad \gamma=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}.$$

一、向量的坐标

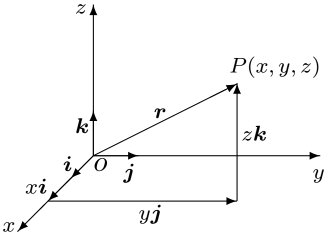


空间中的点集与向量集一一对应，即

$$P \in V_3 \xleftrightarrow{1-1} \overrightarrow{OP}$$

这里，我们称$\overrightarrow{OP}$为P点的**径向或定位向量**。

一、向量的坐标



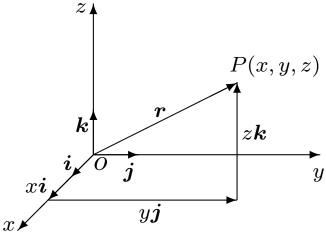
空间中的点集与向量集一一对应，即

$$P \in V_3 \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \overrightarrow{OP}$$

这里，我们称$\overrightarrow{OP}$为P点的**径向或定位向量**。令$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$，则由三角形法则得

$$\boldsymbol{r} =$$

一、向量的坐标



空间中的点集与向量集一一对应，即

$$P \in V_3 \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \overrightarrow{OP}$$

这里，我们称$\overrightarrow{OP}$为P点的**径向或定位向量**。 令$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$，则由三角形法则得

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

此时称P点的坐标(x, y, z)为$\boldsymbol{r}$的**坐标**，又称$x\boldsymbol{i}, y\boldsymbol{j}, z\boldsymbol{k}$为$\boldsymbol{r}$沿$x$轴，$y$轴，的**分量**。因此不加区别地写成$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

设$\overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1, z_1)$，$\overrightarrow{OP_2} = (x_2, y_2, z_2)$，则

$$\overrightarrow{P_1P_2} =$$

设$\overrightarrow{OP_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{OP_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

因此向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标等于终点坐标减去始点的坐标，即

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

二、向量的坐标运算

(1) 向量加(减)法的坐标运算

设$\boldsymbol{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}_1 \pm \boldsymbol{a}_2 =$$

二、向量的坐标运算

(1) 向量加(减)法的坐标运算

设$\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$, 则

$$\boldsymbol{a}_1\pm\boldsymbol{a}_2=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k},$$

即$\boldsymbol{a}_1\pm\boldsymbol{a}_2=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$.

二、向量的坐标运算

(1) 向量加(减)法的坐标运算

设$\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}_1\pm\boldsymbol{a}_2=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k},$$

即$\boldsymbol{a}_1\pm\boldsymbol{a}_2=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$.

(2) 向量数乘(即数乘向量)的坐标运算

设$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，λ为实数，则

$$\lambda\boldsymbol{a}=$$

二、向量的坐标运算

(1) 向量加(减)法的坐标运算

设$\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}_1\pm\boldsymbol{a}_2=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k},$$

即$\boldsymbol{a}_1\pm\boldsymbol{a}_2=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$.

(2) 向量数乘(即数乘向量)的坐标运算

设$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，λ为实数，则

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x)\boldsymbol{i}+(\lambda y)\boldsymbol{j}+(\lambda z)\boldsymbol{k},$$

即$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$.

(3) 数量积的坐标运算

设$\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

(3) 数量积的坐标运算

设$\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

事实上

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 &= (x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\ &= x_1x_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_1z_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\ &\quad y_1x_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+y_1z_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\ &\quad z_1x_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+z_1y_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+z_1z_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\ &= x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.\end{aligned}$$

(4) 向量积的坐标运算

设$\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right),$$

或写成

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

(4) 向量积的坐标运算

设$\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right),$$

或写成

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

事实上

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2 &= (x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\ &= x_1x_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+x_1z_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}\\ &\quad y_1x_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+y_1z_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\ &\quad z_1x_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+z_1y_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+z_1z_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

(5) 混合积的坐标运算

设$\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{a}_3=(x_3,y_3,z_3)$，则

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(5) 混合积的坐标运算

设$\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{a}_3=(x_3,y_3,z_3)$，则

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

事实上

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3) &= (\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)\cdot\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\\ &= (x_1,y_1,z_1)\cdot\left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\right)\\ &= x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

(6) 向量的长度和两向量夹角的坐标表示

设$\boldsymbol{a} = (x, y, z)$, 则

$$|\boldsymbol{a}| =$$

(6) 向量的长度和两向量夹角的坐标表示

设$\boldsymbol{a} = (x, y, z)$, 则

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(6) 向量的长度和两向量夹角的坐标表示

设$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$, 则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

又设$\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则由内积定义知

$$\cos\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle=$$

(6) 向量的长度和两向量夹角的坐标表示

设$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$, 则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

又设$\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则由内积定义知

$$\cos\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

(6) 向量的长度和两向量夹角的坐标表示

设$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$, 则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

又设$\boldsymbol{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$, 则由内积定义知

$$\cos\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

一些结论:

(i) $\boldsymbol{a}_1//\boldsymbol{a}_2$当且仅当$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$;

(ii) $\boldsymbol{a}_1\perp\boldsymbol{a}_2$当且仅当$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$;

(iii) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$共面当且仅当$\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=0.$

例4 设向量$\boldsymbol{a} = (x, y, z)$和$x$轴，$y$轴，$z$轴正向的夹角分别是$\alpha$、$\beta$、$\gamma$，则$\alpha$、$\beta$、$\gamma$称为$\boldsymbol{a}$的**方向角**，其余弦值$\cos\alpha, \cos\beta$, $\cos\gamma$称为$\boldsymbol{a}$的**方向余弦**，试证：

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

例4 设向量$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$和x轴，y轴，z轴正向的夹角分别是α、β、γ，则α、β、γ称为$\boldsymbol{a}$的**方向角**，其余弦值$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$称为$\boldsymbol{a}$的**方向余弦**，试证：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

证明 由$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，得

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{a}=x,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{a}=y,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}=z.$$

又因为

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{i},\boldsymbol{a}\rangle=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,$$

所以

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

同理可得

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\qquad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

平面的点法式方程和一般方程

在空间直角坐标系$\{O;x,y,z\}$中，设π为一个平面，我们称与π垂直的任意非零向量为π的**法向量(或法矢)**。平面法向量有两种取法，方向相反。

平面的点法式方程和一般方程

在空间直角坐标系$\{O;x,y,z\}$中，设π为一个平面，我们称与π垂直的任意非零向量为π的**法向量(或法矢)**。平面法向量有两种取法，方向相反。

设π的法向量为$\boldsymbol{n} = (A,B,C)$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$是π中的一个固定点，则点$P(x,y,z)$在π内的充要条件是$\overrightarrow{P_0P}\perp\boldsymbol{n}$ (或$\overrightarrow{P_0P}\cdot\boldsymbol{n} = 0$)，

平面的点法式方程和一般方程

在空间直角坐标系$\{O;x,y,z\}$中，设π为一个平面，我们称与π垂直的任意非零向量为π的**法向量(或法矢)**。平面法向量有两种取法，方向相反。

设π的法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$是π中的一个固定点，则点$P(x,y,z)$在π内的充要条件是$\overrightarrow{P_0P}\perp\boldsymbol{n}$ (或$\overrightarrow{P_0P}\cdot\boldsymbol{n}=0$)，从而得**平面的点法式方程**

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

平面的点法式方程和一般方程

在空间直角坐标系$\{O;x,y,z\}$中，设π为一个平面，我们称与π垂直的任意非零向量为π的**法向量(或法矢)**。平面法向量有两种取法，方向相反。

设π的法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$是π中的一个固定点，则点$P(x,y,z)$在π内的充要条件是$\overrightarrow{P_0P}\perp\boldsymbol{n}$ (或$\overrightarrow{P_0P}\cdot\boldsymbol{n}=0$)，从而得**平面的点法式方程**

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

令$D=-Ax_0-By_0-Cz_0$，得**平面的一般方程**

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

定理 1.1 在空间直角坐标系下，任何平面都可以表示成一个三元一次方程。

定理 1.1 在空间直角坐标系下，任何平面都可以表示成一个三元一次方程。

定理 1.2 在空间直角坐标系下，任何一个三元一次方程都表示一个平面，且未知量系数组成的非零向量(A, B, C)是该平面的一个法向量。

定理 1.2 在空间直角坐标系下，任何一个三元一次方程都表示一个平面，且未知量系数组成的非零向量(A, B, C)是该平面的一个法向量。

定理 1.2 在空间直角坐标系下，任何一个三元一次方程都表示一个平面，且未知量系数组成的非零向量(A,B,C)是该平面的一个法向量。

定理 1.2 的证明 设$P_0(x_0,y_0,z_0)$为满足方程$Ax+By+Cz+D=0$的一个点， 即

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

这里A,B,C不全为0。设$P(x,y,z)$为满足方程的任意点， 即

$$Ax+By+Cz+D=0$$

两式相减，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

即$\overrightarrow{P_0P}\perp \boldsymbol{n}=(A,B,C)$

因此所有的点$P(x,y,z)$组成一个平面，且这个平面过点P_0，法向量为$\boldsymbol{n}$.

三点式方程

例 4 设三点$P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2),P_3(x_3,y_3,z_3)$不共线，证明过这三点的平面方程是

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

三点式方程

例 4 设三点$P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2),P_3(x_3,y_3,z_3)$不共线，证明过这三点的平面方程是

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

证明 设$P(x,y,z)$是所求平面π内任意一点，显然$\overrightarrow{P_1P},\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3}$共面，即它们的混合积

$$(\overrightarrow{P_1P},\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3})=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

截距式方程

例 5 求过点$(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$的平面方程，其中a,b,c全不为0.

截距式方程

例 5 求过点$(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$的平面方程，其中a,b,c全不为0.

解 由例4知，所求平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

从而得$bc(x-a)+acy+abz=0$，即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

称上式为平面的**截距式方程**，a,b,c分别称为平面在x轴，y轴，z轴上的**截距**。

空间中点到平面的距离公式

例 6 点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面π： $Ax+By+Cz+D=0$的距离是

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

空间中点到平面的距离公式

例 6 点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面π： $Ax+By+Cz+D=0$的距离是

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

证明 过P_0作π的垂线交π于点$P_1(x_1,y_1,z_1)$，则$\overrightarrow{P_1P_0}//\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，于是$\overrightarrow{P_1P_0}=\pm d\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$. 从而有

$$\begin{aligned} x_0-x_1 &= \frac{\pm Ad}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ y_0-y_1 &= \frac{\pm Bd}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ z_0-z_1 &= \frac{\pm Cd}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}$$

又因为$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$且$d\geq 0$，所以有

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

平面之间的关系

定理 1.3 设π_1,π_2为两个平面，其方程分别为

$$\begin{aligned}\pi_1:\ & A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ \pi_2:\ & A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{aligned}$$

令$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，则有以下结论:

平面之间的关系

定理 1.3 设π_1, π_2为两个平面，其方程分别为

$$\begin{aligned}\pi_1:\ & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\\ \pi_2:\ & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\end{aligned}$$

令$\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, 则有以下结论:

(1) π_1与π_2平行 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$共线;

(2) π_1与π_2相交 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$不共线;

(3) π_1与π_2重合 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$共线且π_1与π_2有公共点。

直线的参数方程和点向式方程

在空间直角坐标系$\{O; x, y, z\}$中，与直线l平行的任意非零向量称为直线l的**方向向量**。

直线的参数方程和点向式方程

在空间直角坐标系$\{O;x,y,z\}$中，与直线l平行的任意非零向量称为直线l的**方向向量**。

设直线l过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，其方向向量为$\boldsymbol{v}=(X,Y,Z)\neq 0$，则对直线$l$上任意一点$P(x,y,z)$，都有$\overrightarrow{P_0P}//\boldsymbol{v}$，于是存在实数$t$使$\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{v}$，即$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=(tX,tY,tZ)$，由此可得

$$\begin{cases} x=x_0+tX, \\ y=y_0+tY, \\ z=z_0+tZ. \end{cases}$$

此式称为直线的**参数方程**。

直线的参数方程和点向式方程

在空间直角坐标系$\{O;x,y,z\}$中，与直线l平行的任意非零向量称为直线l的**方向向量**。

设直线l过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，其方向向量为$\boldsymbol{v}=(X,Y,Z)\neq 0$，则对直线$l$上任意一点$P(x,y,z)$，都有$\overrightarrow{P_0P}//\boldsymbol{v}$，于是存在实数$t$使$\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{v}$，即$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=(tX,tY,tZ)$，由此可得

$$\begin{cases} x=x_0+tX, \\ y=y_0+tY, \\ z=z_0+tZ. \end{cases}$$

此式称为直线的**参数方程**。消去参数t，可得

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}.$$

此式称为直线的**点向式方程 (或对称方程)**。

注 直线的点向式方程允许分母中某一个或两个为0的情形。例如当$X \neq 0, Y = 0, Z \neq 0$时，即

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{Z}.$$

此时理解为

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{X} = \frac{z - z_0}{Z}, \\ y = y_0. \end{cases}$$

注 直线的点向式方程允许分母中某一个或两个为0的情形。例如当$X \neq 0, Y = 0, Z \neq 0$时，即

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{Z}.$$

此时理解为

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{X} = \frac{z-z_0}{Z}, \\ y = y_0. \end{cases}$$

当$X \neq 0, Y = Z = 0$时，即

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{0}.$$

此时理解为

$$\begin{cases} y = y_0, \\ z = z_0. \end{cases}$$

直线的一般方程

设π_1,π_2是两个相交平面，其方程分别为

$$\begin{aligned}\pi_1:\ \ A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ \pi_2:\ \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0,\end{aligned}$$

则它们的交线可表示为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

此式称为直线的**一般方程**。

直线的一般方程

设π_1, π_2是两个相交平面，其方程分别为

$$\begin{aligned} \pi_1: \ & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2: \ & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned}$$

则它们的交线可表示为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

此式称为直线的**一般方程**。此直线的方向向量可以取为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

这里$\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$，$\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

一般方程与点向式方程之间的相互转化

利用直线的点向式方程很容易得到直线的一般方程。反之，在两平面交线l上任取一点$P_0(x_0, y_0, z_0)$，可得到直线l的点向式方程

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

直线的两点式方程

例 3 设直线l过两个不同点$P_1(x_1, y_1, z_1)$和$P_2(x_2, y_2, z_2)$，求l的方程。

直线的两点式方程

例 3 设直线l过两个不同点$P_1(x_1, y_1, z_1)$和$P_2(x_2, y_2, z_2)$，求l的方程。

解 显然直线的方向向量可取为

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

又因为l过点P_1，所以直线l的方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

此式称为直线的**两点式方程**。

直线之间的关系

定理 1.4 设l_1, l_2为分别过$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$的两条直线，其方程分别为

$$l_1: \frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1},$$
$$l_2: \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2},$$

令$\boldsymbol{v}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$，$\boldsymbol{v}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$，则有以下结论:

直线之间的关系

定理 1.4 设l_1, l_2为分别过$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$的两条直线，其方程分别为

$$l_1: \frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1},$$
$$l_2: \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2},$$

令$\boldsymbol{v}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$，$\boldsymbol{v}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$，则有以下结论:

(1) l_1与l_2平行 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1$与$\boldsymbol{v}_2$共线;

(2) l_1与l_2重合 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \overrightarrow{P_1P_2}$三个向量共线;

(3) l_1与l_2相交 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$不共线且混合积$(\overrightarrow{P_1P_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = 0$;

(4) l_1与l_2为异面直线 $\Longleftrightarrow$ $(\overrightarrow{P_1P_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq 0$.

直线与平面的关系

定理 1.5 设直线l的方程为$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$，方向向量为$\boldsymbol{v}=(X,Y,Z)\neq 0$. 又设平面$\pi$的方程为$Ax+By+Cz+D=0$, 法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)\neq 0$. 则有以下结论:

直线与平面的关系

定理 1.5 设直线l的方程为$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$，方向向量为$\boldsymbol{v}=(X,Y,Z)\neq 0$. 又设平面$\pi$的方程为$Ax+By+Cz+D=0$，法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)\neq 0$. 则有以下结论:

(1) l与π平行 $\Longleftrightarrow AX+BY+CZ=0$;

(2) l在π内 $\Longleftrightarrow AX+BY+CZ=0$且$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$;

(3) l与π相交 $\Longleftrightarrow AX+BY+CZ\neq 0$;

(4) l与π垂直相交 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{n}$共线。

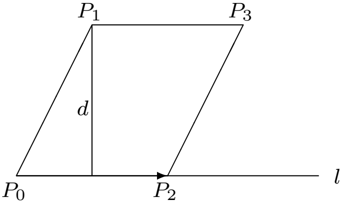
点到直线的距离

定理 1.6 设直线$l: \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量为$\boldsymbol{v}=(X,Y,Z)$. 则点$P_1(x_1,y_1,z_1)$到直线$l$的距离为$d=\frac{|\boldsymbol{v}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\boldsymbol{v}|}$.

点到直线的距离

定理 1.6 设直线l：$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量为$\boldsymbol{v}=(X,Y,Z)$. 则点$P_1(x_1,y_1,z_1)$到直线$l$的距离为$d=\frac{|\boldsymbol{v}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\boldsymbol{v}|}$.

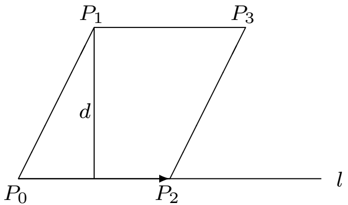
证明 设$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{P_0P_2}$是$l$上的一个向量，如图所示。



点到直线的距离

定理 1.6 设直线$l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$过点$P_0(x_0, y_0, z_0)$，方向向量为$\boldsymbol{v} = (X, Y, Z)$. 则点$P_1(x_1, y_1, z_1)$到直线$l$的距离为$d = \frac{|\boldsymbol{v}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\boldsymbol{v}|}$.

证明 设$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{P_0P_2}$是$l$上的一个向量，如图所示。



平行四边形$P_0P_1P_3P_2$的面积为$S = |\boldsymbol{v} \times \overrightarrow{P_0P_1}|$. 已知$S = |\boldsymbol{v}|d$，所以有

$$d = \frac{|\boldsymbol{v} \times \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

异面直线之间的距离

定理 1.7 两条异面直线l_i : $\frac{x-x_i}{X_i} = \frac{y-y_i}{Y_i} = \frac{z-z_i}{Z_i}$, $i = 1, 2$ 之间的距离为

$$d = \frac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|},$$

其中$P_i(x_i, y_i, z_i)$, $\boldsymbol{v}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$.

异面直线之间的距离

定理 1.7 两条异面直线l_i：$\frac{x-x_i}{X_i}=\frac{y-y_i}{Y_i}=\frac{z-z_i}{Z_i}$，$i=1,2$ 之间的距离为

$$d=\frac{|(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|},$$

其中$P_i(x_i,y_i,z_i)$，$\boldsymbol{v}_i=(X_i,Y_i,Z_i)$.

证明 设平面π过直线l_1，法向量取为$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$，则$d$就是$\overrightarrow{P_1P_2}$在法向量$\boldsymbol{n}$上的投影长度。因此结论成立。

Thanks for your attention!