# 第2章　行列式与克拉默法则

郑州大学数学与统计学院 线性代数教研室

# 目录

# 拉普拉斯定理

已知行列式可以按某一行(列)展开，即

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}.$$

# 拉普拉斯定理

已知行列式可以按某一行(列)展开，即

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}.$$

如果把行列式的某一行(列)各元素与另一行(列)的代数余子式的乘积求和，结果会怎样?

# 拉普拉斯定理

已知行列式可以按某一行(列)展开，即

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}.$$

如果把行列式的某一行(列)各元素与另一行(列)的代数余子式的乘积求和，结果会怎样?

**定理 2.3** 设$D=|a_{ij}|$为$n$阶行列式，$A_{ij}$为$a_{ij}$在行列式$D$中的代数余子式，则有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{sj}=\begin{cases}D, & i=s\\ 0, & i\neq s.\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=\begin{cases}D, & j=k\\ 0, & j\neq k.\end{cases}\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

**证明** 当$i \neq s$时，把行列式$D$的第$s$行换成第$i$行，得到一个新的行列式

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第}i\text{行}) \\ \\ (\text{第}s\text{行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

由性质4，$D_0 = 0$. 再按第$s$行展开，又得

$$D_0 = a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj} = 0,$$

因此对$i \neq s$结论成立。对$i = s$，结论显然成立(按行展开定理)。 □

引入记号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

则定理2.3中的两个式子可改写成

引入记号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

则定理2.3中的两个式子可改写成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{sj} = \delta_{is} D,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \delta_{jk} D.$$

# 线性方程组

对于$n$个未知量$n$个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.1}$$

称由未知量的系数$a_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$构成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为方程组(1.1)的**系数行列式**。

# 克拉默法则

前面二元、三元线性方程组的结果，可以推广到一般的$n$元线性方程组上。

**定理 2.4** 如果线性方程组(1.1)的系数行列式$D \neq 0$，则(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中$D_j$是把系数行列式$D$的第$j$列换成常数列$b_1, b_2, \cdots, b_n$后得到的$n$阶行列式$(j = 1, 2, \cdots, n)$.

# 克拉默法则

前面二元、三元线性方程组的结果，可以推广到一般的$n$元线性方程组上。

**定理 2.4** 如果线性方程组(1.1)的系数行列式$D \neq 0$，则(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中$D_j$是把系数行列式$D$的第$j$列换成常数列$b_1, b_2, \cdots, b_n$后得到的$n$阶行列式$(j = 1, 2, \cdots, n)$.

**证明** 首先验证$x_1 = \frac{D_1}{D}$，$\cdots$，$x_n = \frac{D_n}{D}$是方程组(1.1)的解。

我们把$x_1 = \frac{D_1}{D}$，$\cdots$，$x_n = \frac{D_n}{D}$代入第$i$个方程进行验证，得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{D_j}{D} = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j.$$

由行列式按列展开定理得$D_j=\sum_{k=1}^n b_kA_{kj}$，其中$A_{kj}$为系数行列式$D$中元素$a_{kj}$代数余子式，所以有

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &= \frac{1}{D}\sum_{j=1}^n a_{ij}\Big(\sum_{k=1}^n b_kA_{kj}\Big)\\
&= \frac{1}{D}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ij}b_kA_{kj}\\
&= \frac{1}{D}\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}b_kA_{kj}\\
&= \frac{1}{D}\sum_{k=1}^n b_k\Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj}\Big)\\
&= \frac{1}{D}\sum_{k=1}^n b_k\delta_{ik}D = b_i, \qquad (i=1,2,\cdots,n).
\end{aligned}
$$

这就说明$x_1=\frac{D_1}{D}$，$x_2=\frac{D_2}{D}$，$\cdots$，$x_n=\frac{D_n}{D}$的确是(1.1)的解。

下面证明解的唯一性。任取$i \in \{1,2,\cdots,n\}$，考虑方程$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$. 对$k \in \{1,2,\cdots,n\}$，方程两端同乘以元素$a_{ik}$在$D$中的代数余子式$A_{ik}$，得

$$A_{ik}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_iA_{ik},$$

再对$i$求和，得$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ik}x_j = \sum_{i=1}^{n} b_iA_{ik}$，即

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ik}x_j = D_k.$$

左端的双重和式交换次序，得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ik}x_j &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}\right)x_j = \sum_{j=1}^{n}\delta_{jk}D\cdot x_j = Dx_k.\end{aligned}$$

因此得到$Dx_k = D_k$，故$x_k = \frac{D_k}{D}$，$k = 1,2,\cdots,n$. $\square$

**推论** 对于$n$个未知量$n$个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

**推论** 对于$n$个未知量$n$个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

如果它的系数行列式不为0，那么(1.2)只有零解。换言之，如果(1.2)有非零解，那么系数行列式为0.

**例 1** 设线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0, \end{cases}$$

有非零解，求参数$\lambda$的值。

**例 1** 设线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0, \end{cases}$$

有非零解，求参数$\lambda$的值。

**解** 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2.$$

因为原方程有非零解，则$D = 0$，得$\lambda = -2$或$\lambda = 1$.

# Thanks for your attention!