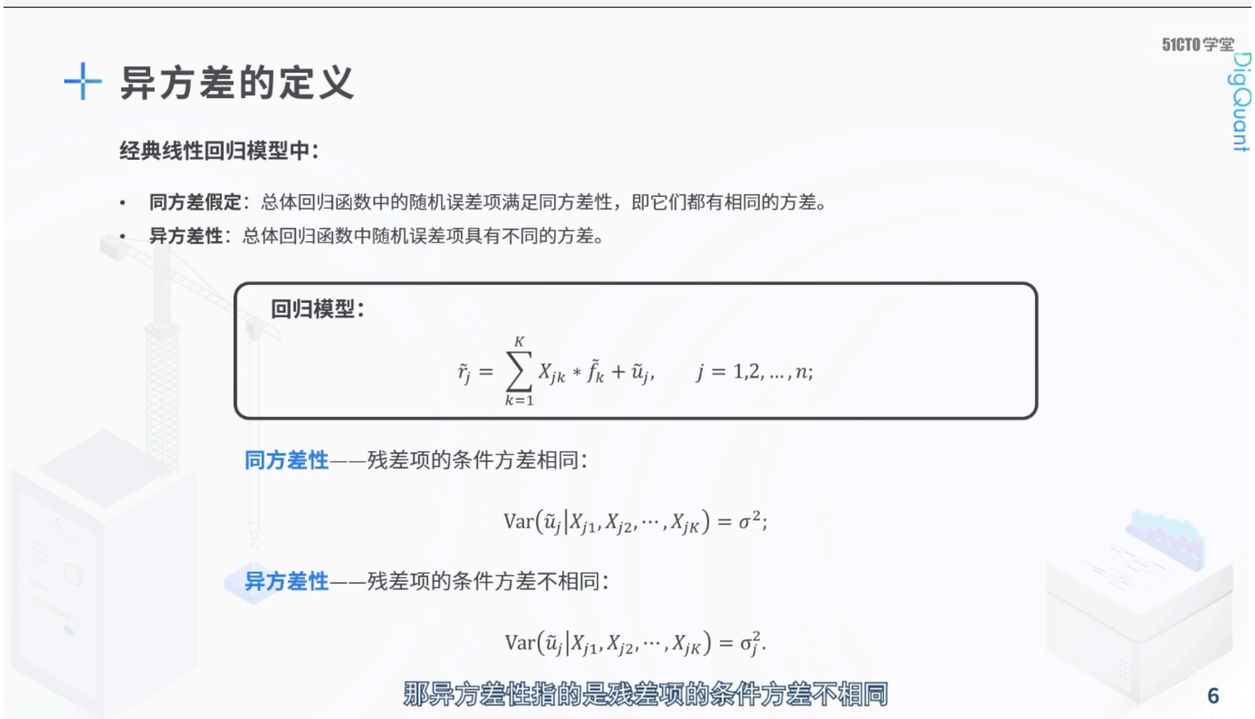

DigQuant
51CTO学堂
四、因子分析
4.3 因子异方差分析
因子异方差分析
DigQuant
点宽


51CTO学堂
课程大纲
异方差简介
异方差的检验与回归
实例：异方差分析
第三部分通过一个实例来看看异方差的分析



异方差是相对于同方差假定的概念，为了让回归参数具有好的统计性质。


3.因子异方差分析.mp4
51CTO学堂
DigQuant
异方差的检验
异方差检验
BP检验
(布伦斯-帕甘检验)
White检验
(怀特检验)
那么分别为BP检验和White检验
9
-15:10

51CTO学堂 DigQuant

异方差的检验-BP检验

基本思想： 构造残差平方序列与解释变量之间的辅助函数，得到回归平方和 (ESS)，判断异方差性存在的显著性。

回归模型：

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_K X_K + u. \quad (1)$$

方差假定形式：

$$\mathrm{Var}(u|X_1,\cdots,X_K) = \mathrm{E}(u^2|X_1,\cdots,X_K) = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_K X_K + v.$$

检验步骤：

a. 根据模型（1）用OLS方法估计 $\hat{u}^2$;

b. 以 $\hat{u}^2$为因变量做模型（2）回归，得到可决系数R^2：

$$\hat{u}^2 = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_K X_K + v; \quad (2)$$

c. 得到模型（2）的F统计量，或者构造统计量LM:

$$LM = nR^2 \sim \chi^2(K);$$

d. 如果F统计量或者LM统计量是显著的，则拒绝原假设，说明模型存在异方差。

对解释变量做模型(2)所示的回归

51CTO学堂 DigQuant

异方差的检验-BP检验

检验假设：$H_0: a_1 = 0, a_2 = 0, \cdots, a_K = 0, \qquad H_1: a_1, a_2, \cdots, a_K$不全为0.

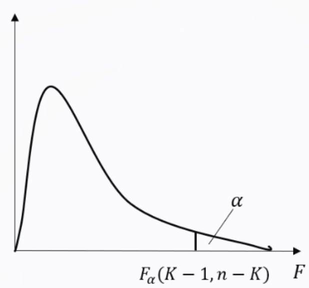
1 F统计量判断：

法❶：构造的F统计量值与临界F值比较：

$$F_{\text{gou}} = \frac{R^2/K}{(1-R^2)/(n-K-1)},$$

$F_{\text{gou}} > F_\alpha(K-1, n-K)$，显著，拒绝原假设，存在异方差；

$F_{\text{gou}} < F_\alpha(K-1, n-K)$，不显著，接受原假设，不存在异方差。



法❷：通过F统计量获取检验的p值（F检验统计量大于所求F值时的概率）。假设在1‰的置信水平下检验：

$p < 0.001$，显著，拒绝原假设，存在异方差

$p > 0.001$，不显著，接受原假设，不存在异方差

假设我们是在1/1000的置信水平下进行检验

51CTO学堂

DigQuant

异方差的检验-BP检验

检验假设： $H_0: a_1 = 0, a_2 = 0, \cdots, a_K = 0,\quad H_1: a_1, a_2, \cdots, a_K$**不全为**0.

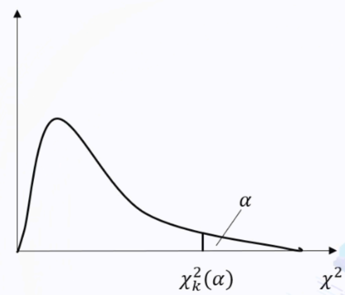
2 LM统计量判断：

构造的LM统计量值与临界$\chi^2(K)$值比较：

$$LM = nR^2$$

$LM > \chi^2(K)$，显著，拒绝原假设，存在异方差

$LM < \chi^2(K)$，不显著，接受原假设，不存在异方差



它是存在异方差的

51CTO学堂

异方差的检验-White检验

White检验：通过一个辅助回归式构造χ^2统计量进行异方差检验。

- 不需要对观测值排序，也不依赖于随机误差项服从正态分布。

回归模型：

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_K X_K + u \qquad (1)$$

检验步骤：

a. 根据模型（1）估计出$\hat{u}^2$;

b. 以 $\hat{u}^2$为因变量做模型（2）回归，得到R^2:

$$\hat{u}^2 = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_K X_K + a_{K+1} X_1^2 + \cdots + a_{2K} X_K^2 + a_{2K+1} X_1 X_2 + \cdots + a_{\frac{K^2+K+2}{2}} X_{K-1} X_K; \qquad (2)$$

c. 计算模型的F统计量，或者构造统计量LM:

$$LM = nR^2 \sim \chi^2\left(\frac{K^2+K+2}{2}\right);$$

d. 对于 $H_0: a_1 = 0, a_2 = 0, \cdots, a_K = 0$，如果 F 统计量或者 LM 统计量是显著的，则拒绝原假设，说明模型存在异方差。

使用F统计量与LM统计量进行判断的过程

51CTO学堂
DigiQuant

异方差的回归

回归模型：

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_K X_{Ki} + u_i.$$

如果模型存在异方差，采用**加权最小二乘法（WLS）**进行回归。

❶如果**方差形式已知**，加权最小二乘法如下：

e.g. 若已知方差形式：

$$\mathrm{Var}(u_i|X_{1i}, X_{2i}, \cdots X_{Ki}) = \mathrm{E}\left(u_i^2|X_{1i}, X_{2i}, \cdots X_{Ki}\right) = \sigma_i^2 = \sigma^2 \cdot h(u_i^*|X_{1i}, X_{2i}, \cdots X_{Ki}) = \sigma^2 \cdot h_i;$$

新的回归模型：

$$\frac{Y_i}{\sqrt{h_i}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{h_i}} + \frac{\beta_1}{\sqrt{h_i}} X_{1i} + \frac{\beta_2}{\sqrt{h_i}} X_{2i} + \cdots + \frac{\beta_K}{\sqrt{h_i}} X_{Ki} + \frac{u_i}{\sqrt{h_i}};$$

记新的模型残差为u_i^*：

$$\mathrm{Var}(u_i^*|X_{1i}, X_{2i}, \cdots X_{Ki}) = \mathrm{E}(u_i^*|X_{1i}, X_{2i}, \cdots X_{Ki}) = \frac{\sigma^2 h_i}{h_i} = \sigma^2.$$

说明新的模型它是不存在异方差性的