

Tesis

Juan Laurnagaray

1 de febrero de 2022

Índice

1	Introducción	3
2	Entrelazamiento cuántico	4
2.1	Descripción de un sistema cuántico	4
2.1.1	Sistemas compuestos	5
2.2	Entrelazamiento	6
2.2.1	Entropía de Von Neumann	6
2.2.2	Estados puros	7
2.2.3	Estados mixtos	8
2.3	Entropía de entrelazamiento	8
2.3.1	Propiedades	8
2.4	Medidas de entrelazamiento	9
2.4.1	Entropía relativa	9
2.4.2	Información mutua	9
2.4.3	Entropías de Rényi	10
2.5	Entropía en teoría cuántica de campos	10
2.5.1	Método de réplicas	10
2.5.2	Entropías de Rényi en QFT	10
3	Entropía en función del correlador y la resolvente	11
3.1	Fermión en 1+1	11

3.2	Entropías de Rényi en función del correlador	12
3.3	Entropías de Rényi en función de la resolvente	14
3.4	Cálculo de la resolvente en el toro	14
4	Entropías de Rényi	16
5	Conclusiones	17

Capítulo 1

Introducción

Capítulo 2

Entrelazamiento cuántico

2.1 Descripción de un sistema cuántico

En la teoría cuántica axiomática, el estado de un sistema físico se encuentra contenido en un vector $|\psi\rangle$ que vive en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . En general se considera que los estados están normalizados y se establece una relación de equivalencia entre estados que difieren en una fase compleja. A los elementos pertenecientes a esta clase de equivalencia se los llama *rayos*.

Los observables de un sistema físico, se corresponden con operadores autoadjuntos $A = A^\dagger$ que actúan sobre rayos del espacio de Hilbert y su valor de expectación se calcula multiplicando a izquierda y derecha por el estado, $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$. Los estados que pueden describirse como un rayo en el espacio de Hilbert se conocen como *estados puros*. Puede ocurrir el caso en que no sabemos con certeza el estado en el cual se encuentra nuestro sistema, si no que, cuando mucho, sabemos que puede encontrarse en algunos estados con una cierta probabilidad. En este caso no podemos describir al sistema con un rayo y es necesario introducir un elemento que nos permita generalizar nuestra descripción del estado.

Supongamos que sabemos que nuestro sistema puede encontrarse en algún estado $|\psi_i\rangle$ con una probabilidad p_i , la descripción de este sistema va a estar dada por el ensamble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ donde además se tienen las restricciones $0 \leq p_i \leq 1$ y $\sum_i p_i = 1$. A los estados descripto por un ensamble estadístico de esta forma, los llamamos *estados mixtos*. Vamos entonces a definir un objeto que para estados puros, provee una descripción equivalente a la de un rayo y permite describir a los estados mixtos, la *matriz densidad*

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.1)$$

Esta matriz densidad cumple las siguientes propiedades

Más aún, cualquier operador que cumpla con estas propiedades se puede interpretar como un operador

densidad. En el caso particular de estados puros se tiene que

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (2.2)$$

y podemos ver que el valor de expectación de A coincide con

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A), \quad (2.3)$$

donde esta última expresión en (2.3) es general y vale también para estados mixtos.

A partir de la ecuación (2.2) podemos notar que la matriz densidad para un estado puro es un proyector sobre ese estado, por lo tanto cumple que $\rho^2 = \rho$. Si a esto último lo juntamos con la normalización de la matriz densidad podemos ver que se cumple la relación

$$\text{Tr}(\rho^2) \leq 1, \quad (2.4)$$

donde la igualdad vale si y solo si el estado ρ es puro.

2.1.1 Sistemas compuestos

Supongamos que tenemos un sistema compuesto por múltiples sistemas físicos. El estado del sistema total vive en un espacio de Hilbert compuesto por el producto tensorial de los espacios de cada subsistema. Podemos entonces imaginarnos que tenemos el sistema total en algún estado puro $|\psi\rangle$ y, una pregunta bastante natural que podemos hacernos es si este estado puede escribirse como un producto de estados de cada subsistema. Por ejemplo, consideremos el estado de dos qubits

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |00\rangle) = |0\rangle_A \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_B + |0\rangle_B). \quad (2.5)$$

Rápidamente vemos que este estado puede factorizarse en estados pertenecientes a cada subsistema. Otro estado posible para dos qubits es

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle). \quad (2.6)$$

Luego de probar un rato, uno puede convencerse de que no hay ninguna forma posible de factorizar este estado como el producto de un estado perteneciente a cada subsistema. Esto último es lo que ocurre para la mayoría de los estados que viven en el Hilbert del sistema compuesto. ¿Por qué es importante evidenciar esta distinción entre estados separables y no separables? Ocurre que si el estado total es separable, cada uno de los subsistemas se encuentran descritos por un estado puro. En cambio, si el estado total no es separable, solo podemos saber que puede encontrarse en algún estado con una cierta probabilidad.

Matriz densidad reducida

Para estudiar los subsistemas de un sistema compuesto, usamos la *matriz densidad reducida*, la cual consiste en tomar (en alguna base) la traza parcial sobre un subsistema. Sea $\rho \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, y sea $\{|b\rangle\}$ una base de \mathcal{H}_B , el estado reducido al subsistema A se define

$$\rho_A \equiv \text{Tr}_B (\rho) = \sum_b \langle b | \rho | b \rangle. \quad (2.7)$$

¿En qué sentido decimos que ρ_A describe al estado del subsistema A ? Supongamos que tenemos un observable sobre el subsistema A , es decir, un operador de la forma $M = M_A \otimes I_B$, donde I_B es el operador identidad actuando sobre elementos de \mathcal{H}_B . Se tiene entonces que

$$\text{Tr} (M\rho) = \text{Tr}_A (M_A \rho_A). \quad (2.8)$$

Veamos un ejemplo. Para el estado puro que propusimos arriba $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ la matriz densidad reducida al subsistema A queda

$$\rho_A = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \quad (2.9)$$

la cual nos dice que el subsistema puede encontrarse con igual probabilidad en el estado $|0\rangle$ o $|1\rangle$. Como veremos más adelante, esto ocurre en general. Si partimos con un estado global puro, los subsistemas se van a encontrar en estados mixtos.

2.2 Entrelazamiento

Como vimos más arriba, existen estados que viven en un espacio de Hilbert compuesto y que pueden factorizarse como el producto de estados de cada subsistema y otros que no. Vamos a decir entonces que si un estado puede factorizarse, es un estado *separable* y en caso contrario es un estado *entrelazado*.

2.2.1 Entropía de Von Neumann

Empecemos viendo que ocurre en el caso de estados puros. Comentamos previamente que una forma de distinguir si un estado ρ es puro, es ver si es o no un proyector. Resulta conveniente tener otro criterio que nos permita realizar esta distinción. Para esto definimos una función que cumpla la propiedad de ser cero si y solo si el estado es puro, la *entropía de Von Neumann*

$$S(\rho) \equiv -\text{Tr}(\rho \log \rho) = -\sum_{\lambda} p_{\lambda} \log p_{\lambda}, \quad (2.10)$$

donde p_{λ} corresponden a los autovalores de ρ . Esta función cumple con varias propiedades importantes, algunas de ellas

- $S(U^\dagger \rho U) = S(\rho)$, con U un operador unitario.
- $S(\rho) \geq 0$.
- $S(\rho) \leq \log(d)$, donde d es la dimensión de \mathcal{H} .

De la definición (2.10) vemos que la entropía es máxima cuando todos los estados son equiprobables con probabilidad $p_\lambda = 1/d$ y mínima cuando $p_j = 1$ y $p_\lambda = 0$ para todo $\lambda \neq j$. En este sentido decimos que la entropía da cuenta de la falta de información sobre el sistema.

2.2.2 Estados puros

Sea $|\psi\rangle$ un estado puro que vive en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, y sean $\{|a\rangle\}$, $\{|b\rangle\}$ dos bases de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente, la forma más general de descomponer este estado

$$|\psi\rangle = \sum_{a,b} c_{ab} |a\rangle_A \otimes |b\rangle_B. \quad (2.11)$$

Cualquier estado puro puede reescribirse en una base distinta, más iluminadora, que permite dar una condición necesaria y suficiente (además de que puede calcularse fácilmente) para establecer si un estado es separable o no, la *descomposición de Schmidt*. Existen conjuntos ortonormales $|i\rangle_A$ y $|i\rangle_B$ tales que el estado se puede escribir como

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B \quad (2.12)$$

donde $\{p_i\}$ es una distribución de probabilidad. Decimos entonces que un estado puro es separable si existe un único $p_i \neq 0$.

A partir de este último resultado, hay por lo menos dos cosas que vale la pena indicar. Primero, veamos que las matrices reducidas al sistema A y B respectivamente quedan

$$\rho_A = \sum_i p_i |i\rangle_A \langle i| \quad \rho_B = \sum_i p_i |i\rangle_B \langle i|, \quad (2.13)$$

es decir, el espectro de ambas matrices densidad reducida son el mismo. Este resultado va a cumplir un rol muy importante más adelante cuando definamos la *entropía de entrelazamiento*.

Segundo, nos permite definir una noción de *cantidad* de entrelazamiento:

- Ningún entrelazamiento si $p_i = 1$ y $p_j = 0$ para todo $i \neq j$.
- Máximo entrelazamiento si $p_i = \frac{1}{d}$, $\forall i$, donde d es el mínimo entre las dimensiones de A y B .

En el último caso, decimos que el entrelazamiento es máximo ya que los subsistemas pueden estar en cualquiera de sus estados posibles con igual probabilidad. Cualquier caso entre los extremos va a tener un entrelazamiento intermedio.

2.2.3 Estados mixtos

En el caso de estados mixtos, vamos a decir que un estado $\rho \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ es *separable* si puede descomponerse de la forma

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \quad (2.14)$$

mientras que cualquier estado que no cumpla con la condición (2.14) lo llamamos *entrelazado*. En general, para un estado mixto, decir si un estado es separable o entrelazado es algo no trivial y un área de investigación abierta. Se han propuesto múltiples herramientas para distinguir esta condición.

Criterios de separabilidad

Pendiente

2.3 Entropía de entrelazamiento

Dado un estado ρ que vive en el espacio compuesto por dos subsistemas A y B , definimos la *entropía de entrelazamiento* de A con respecto a B , como la entropía de Von Neumann de la matriz densidad reducida ρ_A

$$S(A) \equiv S(\rho_A) = -\text{Tr}(\rho_A \log \rho_A). \quad (2.15)$$

En el caso particular de estados puros, vimos que como consecuencia de la descomposición de Schmidt los autovalores para la matriz reducida de A y B son los mismos, por lo que se tiene

$$S(A) = S(B). \quad (2.16)$$

Entonces la entropía de entrelazamiento, en el caso de estados puros, permite detectar entrelazamiento y cuantificarlo. Esto no es cierto en el caso de un estado global mixto, ya que la entropía va a ser distinta de cero aunque no haya entrelazamiento.

2.3.1 Propiedades

Previamente comentamos algunas propiedades de la entropía cuando introdujimos la entropía de Von Neumann. Otras propiedades interesantes que aparecen cuando consideramos subsistemas son la *subaditividad*

$$S(A) + S(B) \geq S(A \cup B), \quad (2.17)$$

donde la igualdad vale para el caso en que el estado global es separable. Esto nos dice que en general la entropía es una magnitud no extensiva (salvo en el caso de estado global separable).

Otra propiedad que juega un rol importante en varios resultados importantes es la *subaditividad fuerte*, la cual nos dice que para un sistema compuesto por tres subsistemas A , B y C

$$S(A \cup B) + S(B \cup C) \geq S(B) + S(A \cup B \cup C) \quad (2.18)$$

2.4 Medidas de entrelazamiento

2.4.1 Entropía relativa

En el caso de estados mixtos, no es trivial determinar si un estado dado presenta entrelazamiento o no. Una magnitud que puede resultar útil en estos casos es la *entropía relativa*

$$S(\rho||\sigma) \equiv \text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)], \quad (2.19)$$

la cual funciona como una medida de la distinguibilidad entre dos estados. Esta magnitud es semidefinida positiva.

2.4.2 Información mutua

La *información mutua* entre dos subsistemas

$$I(A, B) \equiv S(\rho||\rho_A \otimes \rho_B) = S(A) + S(B) - S(A \cup B), \quad (2.20)$$

es una medida de las correlaciones que hay en un sistema, tanto clásicas como cuánticas. Dados dos observables M_A y M_B , la información mutua impone una cota sobre los correladores

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\langle M_A \otimes M_B \rangle - \langle M_A \rangle \langle M_B \rangle}{\|M_A\| \|M_B\|} \right)^2 \leq I(A, B) \quad (2.21)$$

La información mutua nos da la pauta de que la correlación cuántica es más fuerte que la correlación clásica, ya que por ejemplo, dado el estado de dos qubits

$$\rho = \frac{1}{2} (|00\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11|), \quad (2.22)$$

el cual corresponde a un estado mixto separable, la información mutua entre A y B es $I(A, B) = \log 2$. Mientras que para el estado (2.6) tenemos que $I(A, B) = 2 \log 2$.

Esta magnitud además es relevante ya que es una magnitud que siempre está bien definida en el contexto de la teoría cuántica de campos que veremos más adelante.

2.4.3 Entropías de Rényi

2.5 Entropía en teoría cuántica de campos

2.5.1 Método de réplicas

Matriz densidad reducida del estado de vacío

2.5.2 Entropías de Rényi en QFT

Capítulo 3

Entropía en función del correlador y la resolvente

En el capítulo anterior vimos algunas magnitudes de la teoría de información y sus propiedades. Además discutimos como pueden incorporarse en el marco de la teoría cuántica de campos. Al final del día queremos calcular las entropías de Rényi para un campo fermiónico en el círculo a temperatura finita. Para esto vamos a presentar la teoría del fermión libre en 1+1, calcular la matriz densidad reducida a una región y derivar algunas fórmulas que van a resultar útiles más adelante.

3.1 Fermión en 1+1

La acción del fermión libre está dada por

$$S[\psi] = i \int dt dx \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (3.1)$$

donde γ^μ es un vector de matrices de 2x2 que satisfacen el álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ y muchas veces se elige una representación en términos de las matrices de Pauli. Si la representación elegida es real entonces las componentes del espinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

son reales y la acción se desacopla, $S[\psi] = S_+[\psi_+] + S_-[\psi_-]$. El Hamiltoniano de la teoría está dado por

$$\mathcal{H} = -i \int dx \left(\psi_+^\dagger \partial_x \psi_+ - \psi_-^\dagger \partial_x \psi_- \right) \quad (3.3)$$

el cual podemos ver es cuadrático en los campos y por lo tanto el estado fundamental cumple el teorema de Wick, i.e., las funciones de n -puntos pueden escribirse como combinación de funciones de 2-puntos. Esta propiedad es general para teorías libres.

3.2 Entropías de Rényi en función del correlador

Recordemos que queremos calcular magnitudes de la teoría de información para una región V del espacio. Para esto necesitamos la matriz densidad reducida a esta región. Para calcularla discretizamos el espacio mediante la introducción de un *cutoff* ϵ y al final tomamos el límite $\epsilon \rightarrow 0$.

Definimos la matriz densidad reducida al estado V tal que reproduzca los valores de expectación de un observable O_V

$$\langle O_V \rangle = \text{Tr}(\rho_V O_V) \quad (3.4)$$

donde el subíndice indica que consideramos el estado reducido a la región V del espacio. Como vale el teorema de Wick para la teoría, alcanza para definir la matriz densidad pedirle que reproduzca las funciones de dos puntos.

La teoría de campos queda definida por los correladores según los axiomas de Wightman. si consideramos estados gaussianos, como es el caso del estado de vacío para una teoría libre, podemos escribir los correladores de n -puntos en terminos de las funciones de 2-puntos. Esto entonces motiva escribir la matriz densidad reducida a la región V en términos de las funciones de 2-puntos.

Proponemos el ansatz

$$\rho_V = \frac{1}{Z} e^{-\mathcal{H}} = \frac{1}{Z} e^{-\sum_{i,j} H_{ij} \psi_i^\dagger \psi_j} \quad (3.5)$$

donde H_{ij} es hermítico y los campos cumplen las relaciones de anticonmutación

$$\{\psi_i, \psi_j^\dagger\} = \delta_{ij}. \quad (3.6)$$

Diagonalizamos el Hamiltoniano $U^\dagger H U = \text{Diag}(\epsilon_i)$, donde ϵ_i son los autovalores del Hamiltoniano. Entonces $\sum_{i,j} \psi_i^\dagger H_{ij} \psi_j = \sum_l \epsilon_l d_l^\dagger d_l$, donde los operadores de creación y destrucción cumplen las relaciones de anticonmutación

$$\{d_i, d_j^\dagger\} = \delta_{ij}. \quad (3.7)$$

Luego la matriz densidad reducida a la región V

$$\rho_V = \frac{1}{Z} e^{-\sum_l \epsilon_l d_l^\dagger d_l}, \quad (3.8)$$

donde la constante de normalización Z se define de forma tal que la traza de la matriz densidad sea igual a 1, y resulta $Z = \prod_l (1 + e^{-\epsilon_l})$. Se puede ver que esta forma propuesta para la matriz densidad reducida automáticamente cumple el teorema de Wick para los operadores de creación y destrucción. Luego, como los campos y sus momentos canónicos se escriben como combinación lineal de estos, también cumplen el teorema de Wick. Podemos entonces encontrar una expresión del Hamiltoniano en términos del correlador $C_{ij} \equiv \langle \psi_i \psi_j^\dagger \rangle = \text{Tr}(\rho_V \psi_i \psi_j^\dagger)$. Para esto empezamos viendo el elemento kl que se obtiene de encerrar el correlador con las matrices que diagonalizan al Hamiltoniano

$$(UCU^\dagger)_{kl} = \frac{1}{Z} \sum_{\{n\}} e^{-\sum_m \epsilon_m n_m} \delta_{kl} (1 - n_k), \quad (3.9)$$

donde $\sum_{\{n\}}$ viene de la traza e indica que tenemos que sumar sobre todos los valores de n . Para llegar al lado derecho se usó (3.7) y n_m corresponde al autovalor del operador de número $d_m^\dagger d_m |n\rangle = n_m |n\rangle$. Para el cálculo de los dos términos en (3.9) recordamos que los campos cumplen la estadística de Fermi-Dirac. El primer término es simplemente una delta δ_{kl} mientras que el segundo término $1/(e^{\epsilon_k} + 1)$, por lo tanto el elemento de matriz queda $(UCU^\dagger)_{kl} = \delta_{kl}/(1 + e^{-\epsilon_k})$, a partir de la cual se puede obtener de forma directa la relación

$$C = \frac{1}{1 + e^{-H}}, \quad (3.10)$$

y despejando el Hamiltoniano

$$H = -\log(C^{-1} - 1). \quad (3.11)$$

Esta expresión se entiende como una relación entre los autovalores de ambos operadores. Es importante resaltar que a partir de esta expresión podemos ver que el espectro de C se encuentra en el intervalo $(0, 1)$. Si llamamos ν a los autovalores del correlador, usando las relaciones de arriba podemos ver que la traza de la potencia n -ésima de la matriz densidad se escribe

$$\text{Tr}(\rho_V^n) = \prod_l (\nu_l^n + (1 - \nu_l)^n), \quad (3.12)$$

lo cual nos permite escribir las entropías de Rényi como

$$S^{(n)} = \frac{1}{1-n} \text{Tr} \log(C^n + (1-C)^n). \quad (3.13)$$

Hasta acá dijimos que trabajamos en una red cuadrada. A partir de ahora vamos a suponer que este resultado es válido en el continuo y que tomamos el valor del *cutoff* a cero.

Observemos que según lo hecho hasta ahora, no hay una restricción para el exponente n , como si ocurre con otras formas de cálculo, e.g. el método de réplicas. Recordemos que queremos encontrar una expresión para las entropías de Rényi que valga para n real.

3.3 Entropías de Rényi en función de la resolvente

Lo que buscamos ahora es escribir las entropías de Rényi en términos de la resolvente del correlador

$$R(\xi) = \frac{1}{\xi - (1/2 - C)}, \quad (3.14)$$

y luego aprovechar que podemos encontrar una expresión cerrada para la resolvente del fermión en el toro. Para esto usamos la fórmula integral de Cauchy

$$f\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint dw \frac{f(w)}{w - (1/2 - z)}, \quad (3.15)$$

la cual nos permite reescribir

$$S_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{1-n} \oint d\xi \operatorname{Tr} \frac{\log[(1/2 - \xi)^n + (1/2 + \xi)^n]}{\xi - (1/2 - C)}, \quad (3.16)$$

donde la curva de integración debe encerrar la región $f_n(\xi) = \frac{1}{1-n} \log[(1/2 - \xi)^n + (1/2 + \xi)^n]$ es analítica y debe contener además el espectro de C . Se puede ver que para n genérico (es decir, no nos restringimos a n entero) f_n es analítica en todos lados excepto en $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$ donde el argumento del logaritmo es real negativo. El espectro de $1/2 - C$ se encuentra en el intervalo $(-1/2, 1/2)$, por lo tanto un contorno de integración que cumple los requisitos es **Contorno integración**.

3.4 Cálculo de la resolvente en el toro

En esta sección vamos a calcular la resolvente del toro. Para esto primero vamos a ver que el problema de la resolvente es equivalente a encontrar una función que cumpla una serie de restricciones y luego encontrar explícitamente la función. En otros trabajos previos se calculó la resolvente mediante el método de imágenes el cual consiste en estudiar que restricciones debe tener la función debido a la invarianza modular del toro y luego ver que en el caso del plano se obtiene el resultado esperado.

3.4.1 Problema analítico

Sea $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y A una colección arbitraria de intervalos tal que:

1. $S(z)$ es analítica para $z \in [-L, L] \times [-\beta, \beta] - \bar{A}$ (\bar{A} es la *clausura* de A).
2. $S^\mp(x) = \frac{\gamma}{\gamma-1} S^\pm(x) - \frac{f(x)}{\gamma(\gamma-1)}, \quad x \in A$
3. $S(z + P_i) = (-1)^{\nu_i} S(z)$ para $z \rightarrow \infty$
4. $(z - q_i) S(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow q_i$, donde $q_i \in \partial A$

El propagador del fermión en el toro debe cumplir

- $G(z, w) \simeq \pm \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - w}$ para $z \rightarrow w$. Además es analítico para todo $z \neq w \in (-L, L) \times (-\beta, \beta)$.
- $G(z + P_i, w) = (-1)^{\nu_i} G(z, w)$.

Equivalencia entre los problemas

$$\oint_{\mathcal{C}} dw G(z, w) S(w) = 0$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \text{cell}} dw G(z, w) S(w) &= \int_{z_0}^{z_0+L} dw G(z, w) S(w) + \int_{z_0+L}^{z_0+L+i\beta} dw G(z, w) S(w) \\ &\quad + \int_{z_0+L+i\beta}^{z_0+i\beta} dw G(z, w) S(w) + \int_{z_0+i\beta}^{z_0} dw G(z, w) S(w) \end{aligned}$$

en la segunda y tercera integral cambiamos respectivamente

$$w \rightarrow w - L \qquad w \rightarrow w - i\beta,$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \text{cell}} dw G(z, w) S(w) &= \int_{z_0}^{z_0+L} dw G(z, w) S(w) + \int_{z_0}^{z_0+i\beta} dw G(z, w+L) S(w+L) \\ &\quad + \int_{z_0+L}^{z_0} dw G(z, w+i\beta) S(w+i\beta) + \int_{z_0+i\beta}^{z_0} dw G(z, w) S(w) \\ &= \int_{z_0}^{z_0+L} dw [G(z, w) S(w) - G(z, w+i\beta) S(w+i\beta)] \\ &\quad + \int_{z_0}^{z_0+i\beta} dw [G(z, w) S(w) - G(z, w+L) S(w+L)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Solución del problema analítico

Proponemos el ansatz

$$\begin{aligned} S(z) &= e^{\mp i k \omega(z)} \tilde{S}(z) \\ k(\gamma) &= \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right), \end{aligned}$$

donde

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n \log \left| \frac{\sigma(x - a_j)}{\sigma(x - b_j)} \right|$$

Capítulo 4

Entropías de Rényi

Capítulo 5

Conclusiones