

Capítulo 2

Entrelazamiento cuántico

2.1 Descripción de un sistema cuántico

En la teoría cuántica axiomática, el estado de un sistema físico se encuentra contenido en un vector $|\psi\rangle$ que vive en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . En general se considera que los estados están normalizados y se establece una relación de equivalencia entre estados que difieren en una fase compleja. A los elementos pertenecientes a esta clase de equivalencia se los llama *rayos*.

Los observables de un sistema físico, se corresponden con operadores autoadjuntos $A = A^\dagger$ que actúan sobre rayos del espacio de Hilbert y su valor de expectación se calcula multiplicando a izquierda y derecha por el estado, $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$. Los estados que pueden describirse como un rayo en el espacio de Hilbert se conocen como *estados puros*. Puede ocurrir el caso en que no sabemos con certeza el estado en el cual se encuentra nuestro sistema, si no que, cuando mucho, sabemos que puede encontrarse en algunos estados con una cierta probabilidad. En este caso no podemos describir al sistema con un rayo y es necesario introducir un elemento que nos permita generalizar nuestra descripción del estado.

Supongamos que sabemos que nuestro sistema puede encontrarse en algún estado $|\psi_i\rangle$ con una probabilidad p_i , la descripción de este sistema va a estar dada por el ensamble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ donde además se tienen las restricciones $0 \leq p_i \leq 1$ y $\sum_i p_i = 1$. A los estados descrito por un ensamble estadístico de esta forma, los llamamos *estados mixtos*. Vamos entonces a definir un objeto que para estados puros, provee una descripción equivalente a la de un rayo y permite describir a los estados mixtos, la *matriz densidad*

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.1)$$

Esta matriz densidad cumple las siguientes propiedades

Más aún, cualquier operador que cumpla con estas propiedades se puede interpretar como un operador densidad. En el caso particular de estados puros se tiene que

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|, \quad (2.2)$$

y podemos ver que el valor de expectación de A coincide con

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A), \quad (2.3)$$

donde esta última expresión en (2.3) es general y vale también para estados mixtos.

A partir de la ecuación (2.2) podemos notar que la matriz densidad para un estado puro es un proyector sobre ese estado, por lo tanto cumple que $\rho^2 = \rho$. Si a esto último lo juntamos con la normalización de la matriz densidad podemos ver que se cumple la relación

$$\text{Tr}(\rho^2) \leq 1, \quad (2.4)$$

donde la igualdad vale si y solo si el estado ρ es puro.

2.1.1 Sistemas compuestos

Supongamos que tenemos un sistema compuesto por múltiples sistemas físicos. El estado del sistema total vive en un espacio de Hilbert compuesto por el producto tensorial de los espacios de cada subsistema. Podemos entonces imaginarnos que tenemos el sistema total en algún estado puro $|\psi\rangle$ y, una pregunta bastante natural que podemos hacernos es si este estado puede escribirse como un producto de estados de cada subsistema. Por ejemplo, consideremos el estado de dos qubits

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |00\rangle) = |0\rangle_A \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_B + |0\rangle_B). \quad (2.5)$$

Rápidamente vemos que este estado puede factorizarse en estados pertenecientes a cada subsistema. Otro estado posible para dos qubits es

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle). \quad (2.6)$$

Luego de probar un rato, uno puede convencerse de que no hay ninguna forma posible de factorizar este estado como el producto de un estado perteneciente a cada subsistema. Esto último es lo que ocurre para la mayoría de los estados que viven en el Hilbert del sistema compuesto. ¿Por qué es importante evidenciar esta distinción entre estados separables y no separables? Ocurre que si el estado total es separable, cada uno de los subsistemas se encuentran descritos por un estado puro. En cambio, si el estado total no es separable, solo podemos saber que puede encontrarse en algún estado con una cierta probabilidad.

Matriz densidad reducida

Para estudiar los subsistemas de un sistema compuesto, usamos la *matriz densidad reducida*, la cual consiste en tomar (en alguna base) la traza parcial sobre un subsistema. Sea $\rho \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, y sea $\{|b\rangle\}$ una base de \mathcal{H}_B , el estado reducido al subsistema A se define

$$\rho_A \equiv \text{Tr}_B(\rho) = \sum_b \langle b | \rho | b \rangle. \quad (2.7)$$

¿En qué sentido decimos que ρ_A describe al estado del subsistema A ? Supongamos que tenemos un observable sobre el subsistema A , es decir, un operador de la forma $M = M_A \otimes I_B$, donde I_B es el operador identidad actuando sobre elementos de \mathcal{H}_B . Se tiene entonces que

$$\text{Tr}(M\rho) = \text{Tr}_A(M_A\rho_A). \quad (2.8)$$

Veamos un ejemplo. Para el estado puro que propusimos arriba $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ la matriz densidad reducida al subsistema A queda

$$\rho_A = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \quad (2.9)$$

la cual nos dice que el subsistema puede encontrarse con igual probabilidad en el estado $|0\rangle$ o $|1\rangle$. Como veremos más adelante, esto ocurre en general. Si partimos con un estado global puro, los subsistemas se van a encontrar en estados mixtos.

2.2 Entrelazamiento

Como vimos más arriba, existen estados que viven en un espacio de Hilbert compuesto y que pueden factorizarse como el producto de estados de cada subsistema y otros que no. Vamos a decir entonces que si un estado puede factorizarse, es un estado *separable* y en caso contrario es un estado *entrelazado*.

2.2.1 Entropía de Von Neumann

Empecemos viendo que ocurre en el caso de estados puros. Comentamos previamente que una forma de distinguir si un estado ρ es puro, es ver si es o no un proyector. Resulta conveniente tener otro criterio que nos permita realizar esta distinción. Para esto definimos una función que cumpla la propiedad de ser cero si y solo si el estado es puro, la *entropía de Von Neumann*

$$S(\rho) \equiv -\text{Tr}(\rho \log \rho) = -\sum_{\lambda} p_{\lambda} \log p_{\lambda}, \quad (2.10)$$

donde p_{λ} corresponden a los autovalores de ρ . Esta función cumple con varias propiedades importantes, algunas de ellas

- $S(U^{\dagger} \rho U) = S(\rho)$, con U un operador unitario.
- $S(\rho) \geq 0$.
- $S(\rho) \leq \log(d)$, donde d es la dimensión de \mathcal{H} .

De la definición (2.10) vemos que la entropía es máxima cuando todos los estados son equiprobables con probabilidad $p_{\lambda} = 1/d$ y mínima cuando $p_j = 1$ y $p_{\lambda} = 0$ para todo $\lambda \neq j$. En este sentido decimos que la entropía da cuenta de la falta de información sobre el sistema.

2.2.2 Estados puros

Sea $|\psi\rangle$ un estado puro que vive en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, y sean $\{|a\rangle\}$, $\{|b\rangle\}$ dos bases de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente, la forma más general de descomponer este estado

$$|\psi\rangle = \sum_{a,b} c_{ab} |a\rangle_A \otimes |b\rangle_B. \quad (2.11)$$

Cualquier estado puro puede reescribirse en una base distinta, más iluminadora, que permite dar una condición necesaria y suficiente (además de que puede calcularse fácilmente) para establecer si un estado es separable o no, la *descomposición de Schmidt*. Existen conjuntos ortonormales $|i\rangle_A$ y $|i\rangle_B$ tales que el estado se puede escribir como

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B \quad (2.12)$$

donde $\{p_i\}$ es una distribución de probabilidad. Decimos entonces que un estado puro es separable si existe un único $p_i \neq 0$.

A partir de este último resultado, hay por lo menos dos cosas que vale la pena indicar. Primero, veamos que las matrices reducidas al sistema A y B respectivamente quedan

$$\rho_A = \sum_i p_i |i\rangle_A \langle i| \quad \rho_B = \sum_i p_i |i\rangle_B \langle i|, \quad (2.13)$$

es decir, el espectro de ambas matrices densidad reducida son el mismo. Este resultado va a cumplir un rol muy importante más adelante cuando definamos la *entropía de entrelazamiento*.

Segundo, nos permite definir una noción de *cantidad* de entrelazamiento:

- Ningún entrelazamiento si $p_i = 1$ y $p_j = 0$ para todo $i \neq j$.
- Máximo entrelazamiento si $p_i = \frac{1}{d}$, $\forall i$, donde d es el mínimo entre las dimensiones de A y B .

En el último caso, decimos que el entrelazamiento es máximo ya que los subsistemas pueden estar en cualquiera de sus estados posibles con igual probabilidad. Cualquier caso entre los extremos va a tener un entrelazamiento intermedio.

2.2.3 Estados mixtos

En el caso de estados mixtos, vamos a decir que un estado $\rho \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ es *separable* si puede descomponerse de la forma

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \quad (2.14)$$

mientras que cualquier estado que no cumpla con la condición (2.14) lo llamamos *entrelazado*. En general, para un estado mixto, decir si un estado es separable o entrelazado es algo no trivial y un área de investigación abierta. Se han propuesto múltiples herramientas para distinguir esta condición.

Criterios de separabilidad

Pendiente

2.3 Entropía de entrelazamiento

Dado un estado ρ que vive en el espacio compuesto por dos subsistemas A y B , definimos la *entropía de entrelazamiento* de A con respecto a B , como la entropía de Von Neumann de la matriz densidad reducida ρ_A

$$S(A) \equiv S(\rho_A) = -\text{Tr}(\rho_A \log \rho_A). \quad (2.15)$$

En el caso particular de estados puros, vimos que como consecuencia de la descomposición de Schmidt los autovalores para la matriz reducida de A y B son los mismos, por lo que se tiene

$$S(A) = S(B). \quad (2.16)$$

Entonces la entropía de entrelazamiento, en el caso de estados puros, permite detectar entrelazamiento y cuantificarlo. Esto no es cierto en el caso de un estado global mixto, ya que la entropía va a ser distinta de cero aunque no haya entrelazamiento.

2.3.1 Propiedades

Previamente comentamos algunas propiedades de la entropía cuando introdujimos la entropía de Von Neumann. Otras propiedades interesantes que aparecen cuando consideramos subsistemas son la *subaditividad*

$$S(A) + S(B) \geq S(A \cup B), \quad (2.17)$$

donde la igualdad vale para el caso en que el estado global es separable. Esto nos dice que en general la entropía es una magnitud no extensiva (salvo en el caso de estado global separable).

Otra propiedad que juega un rol importante en varios resultados importantes es la *subaditividad fuerte*, la cual nos dice que para un sistema compuesto por tres subsistemas A , B y C

$$S(A \cup B) + S(B \cup C) \geq S(B) + S(A \cup B \cup C) \quad (2.18)$$

2.4 Medidas de entrelazamiento

2.4.1 Entropía relativa

En el caso de estados mixtos, no es trivial determinar si un estado dado presenta entrelazamiento o no. Una magnitud que puede resultar útil en estos casos es la *entropía relativa*

$$S(\rho||\sigma) \equiv \text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)], \quad (2.19)$$

la cual funciona como una medida de la distinguibilidad entre dos estados. Esta magnitud es semidefinida positiva.

2.4.2 Información mutua

La *información mutua* entre dos subsistemas

$$I(A, B) \equiv S(\rho||\rho_A \otimes \rho_B) = S(A) + S(B) - S(A \cup B), \quad (2.20)$$

es una medida de las correlaciones que hay en un sistema, tanto clásicas como cuánticas. Dados dos observables M_A y M_B , la información mutua impone una cota sobre los correladores

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\langle M_A \otimes M_B \rangle - \langle M_A \rangle \langle M_B \rangle}{||M_A|| ||M_B||} \right)^2 \leq I(A, B) \quad (2.21)$$

La información mutua nos da la pauta de que la correlación cuántica es más fuerte que la correlación clásica, ya que por ejemplo, dado el estado de dos qubits

$$\rho = \frac{1}{2} (|00\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11|), \quad (2.22)$$

el cual corresponde a un estado mixto separable, la información mutua entre A y B es $I(A, B) = \log 2$. Mientras que para el estado (2.6) tenemos que $I(A, B) = 2 \log 2$.

Esta magnitud además es relevante ya que es una magnitud que siempre está bien definida en el contexto de la teoría cuántica de campos que veremos más adelante.

2.4.3 Entropías de Rényi

2.5 Entropía en teoría cuántica de campos

2.5.1 Método de réplicas

Matriz densidad reducida del estado de vacío

2.5.2 Entropías de Rényi en QFT