Jan Lukas krasse Bachelorarbeit

Jan Lukas Bosse*

6. Juni 2018

Hier ist wohl noch etwas zu tun... So eine hübsche Frontseite wäre doch was!

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines Gelaber über Shearlets **1**

2 Zwei nützliche Substitionen für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ **3**

3 Die Wellenfrontmenge von Δ_m **4**

4 Die Wellenfrontmenge von Δ_m^2 **7**

4.1 $\hat{\Delta}^{*2}$ berechnen 7

4.2 . . . und nun zur Wellenfrontmenge 9

5 Berechnen von $WF(G_F)$ **12**

5.1 Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$ 12

1 Allgemeines Gelaber über Shearlets

Proposition 1.1 (ψ_{ast} fällt schnell ab)
Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ein Shearlet wie definiert und M so ne Trafomatrix. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass es eine konstante C_k gibt s.d. für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt

*Georg-August Universität Göttingen

$$
\begin{aligned}
&|\psi_{ast}(x)| \\
&\quad \leq C_k \,|\det M|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + |M^{-1}(x-t)|^2\right)^{-k} \\
&\quad = C_k a^{-\frac{3}{4}} \left(1 + a^{-2}(x_1 - t_1)^2 + 2a^{-2} s (x_1 - t_1)(x_2 - t_2) + a^{-1}\left(1 + a^{-1} s^2\right)(x_2 - t_2)^2\right)^{-k}
\end{aligned}
$$

Und insbesondere ist $C_k = \frac{15}{2}\frac{\sqrt{a}+s}{a^2}\left(\|\hat{\psi}\|_\infty + \|\triangle^k \hat{\psi}\|_\infty\right)$

Satz 1.2 ($\mathcal{S}_f(a,s,t)$ misst $WF(f)$)
Sei $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ wobei $\mathcal{D}_1 = \{\, (t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1,1] \,|\, |\mathcal{S}_f(a,s,t)| = O(a^k)$ gleichmäßig $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U$ Umgebung von $(t_0, s_0) \,\}$ und $\mathcal{D}_2$ analog für $\psi^{(v)}$

Dann gilt $WF(f)^c = \mathcal{D}$

Korollar 1.3 (WF(f) misst *sing supp*(ψ))
Sei $\mathcal{R} = \{\, t_0 \in \mathcal{R}^2 \,|\, |\mathcal{S}_f(a,s,t)| = O(a^k)\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U$ Umgebung von $t_0 \,\}$

Dann gilt *sing supp*$(\psi)^c = \mathcal{R}$

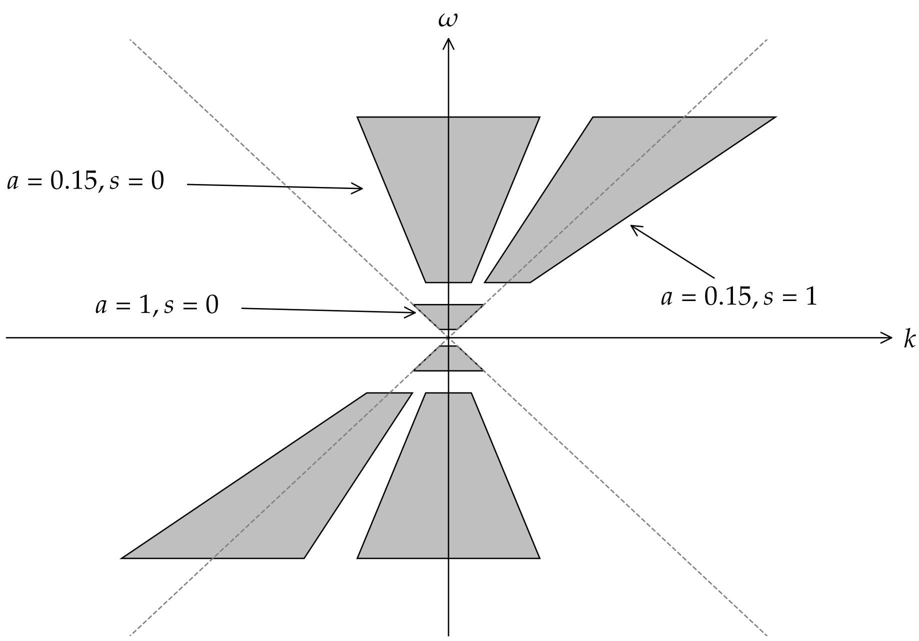

Abbildung 1: Der Träger von $\hat{\psi}_{ast}$ für verschiedene a, s. Man sieht gut, wie $supp(\hat{\psi}_{ast})$ für kleinere a in immer kleineren Kegeln liegt.

diesen Satz richtig hin schreiben und ordentlich setzen

Stil und Nummerierung für Sätze, Propositionen etc. anpassen

Bemerkung 1.4 (Träger von ψ)
Im Fourierraum ist $\hat{\psi}_{ast}$ gegeben durch

$$\hat{\psi}_{ast}(\xi_1,\xi_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi\cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right)\right) \tag{1.1}$$

und es gilt

$$supp(\hat{\psi}) \subset \left\{\xi \in \hat{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; |\xi_1| \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right], \left|\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right| \leq \sqrt{a}\right\} \tag{1.2}$$

2 Zwei nützliche Substitionen für $\langle\psi_{ast}, f\rangle$

Zunächst werden wir zwei verschiedene Ausdrücke für $\langle\psi_{ast}, f\rangle$ im Fourierraum herleiten, welche sich im dann folgenden als nützlich erweisen werden.

Sei also ψ ein Shearlet wie in Korollar 1.4. Sei f die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in $\mathcal{D}\prime(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\mathcal{S}_f(ast)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\langle\psi_{ast}, f\rangle &= \left\langle\hat{\psi}_{ast}, \hat{f}\right\rangle \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi\cdot t}\hat{\psi}_1(a\xi_1)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right)\right)\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

und nach „entscheren“ und „deskalieren“, also der Substitution

entscheiden, was mit dem fehlenden Faktor $\frac{1}{(2\pi)^n}$ geschieht

$$\begin{aligned} a\xi_1 &= k_1 \\ a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right) &= \frac{k_2}{k_1}\end{aligned} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{aligned}\xi_1 &= \frac{k_1}{a} \\ \xi_2 &= \frac{k_1 s}{a} + a^{-\frac{1}{2}}k_2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 = a^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2$$

ergibt sich folgendes für $\langle\psi_{ast}, f\rangle$:

$$\langle\psi_{ast}, f\rangle = \iint a^{-\frac{3}{4}}\;\hat{\psi}_1(k_1)\;\hat{\psi}_2\left(\tfrac{k_2}{k_1}\right)\;\hat{f}\left(\tfrac{k_1}{a}, \tfrac{k_1 s}{a} + \tfrac{k_2}{\sqrt{a}}\right)\;e^{-i\frac{k_1}{a}(t_1+t_2 s) - i\frac{k_2 t_2}{\sqrt(a)}}\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2 \tag{2.1, Substitution 1}$$

herausfinden, wie die Gleichungen auch Kapitelnummern erhalten

Alternativ kann auch folgende Substitution

$$\begin{aligned} a\xi_1 &= k_1 \\ a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right) &= k_2 \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{k_1}{a} \\ \xi_2 &= \left(a^{\frac{1}{2}}k_2 + s\right)\frac{k_1}{a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 = a^{-\frac{3}{2}}k_1\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2$$

gewählt werden, wodurch alle Parameter aus den Argumenten von ψ_1, ψ_2 verschwinden und sich

$$\langle\psi_{ast}, f\rangle = \iint a^{-\frac{3}{4}}\,k_1\,\hat{\psi}_1(k_1)\,\hat{\psi}_2(k_2)\,\hat{f}\left(\tfrac{k_1}{a}, k_1\left(a^{-\frac{1}{2}}k_2 + sa^{-1}\right)\right)\;e^{-ik_1\left(\frac{t_1+st_2}{a}+\frac{k_2t_2}{\sqrt{a}}\right)}\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2 \tag{2.2, Substitution 2}$$

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulässig ist, obwohl sie die Orientierung <u>nicht</u> erhält und <u>keine</u> Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nämlich $\xi_1 = 0$, liegt nicht im Träger von $\widehat{\psi}$.

Grafik basteln, die $supp\ \psi$ vor und nach der Substitution zeigt.

3 Die Wellenfrontmenge von Δ_m

Die massive Zweipunktfunktion ist die Fouriertransformierte der $1m$-Massenschale positiver Energie:

Quelle dafür zitieren...

$$\Delta_m(t, x) = \int \delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(\omega)e^{-i\omega t+ikx}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \tag{3.1}$$

woraus sich $\hat{\Delta}_m$ direkt zu $\delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(\omega)$ ablesen lässt.

<u>**Fall $s \neq \pm 1$**</u>

Hier gibt es nicht viel zu tun, denn für a klein genug gilt $supp(\hat{\Delta}_m) \cap supp(\hat{\psi}_{ast}) = \varnothing$ wie man Abb. 2 entnehmen kann. Also gilt $\langle\psi_{ast}, \Delta_m\rangle = 0 = O(a^k)\ \forall k$ für a klein genug. Dies gilt für alle $(t', x') \in \mathbb{R}^2$

hier noch blöde Abschätzerei machen, warum das tatsächlich gilt, oder stehen lassen. Oder im Kapitel Shearlets

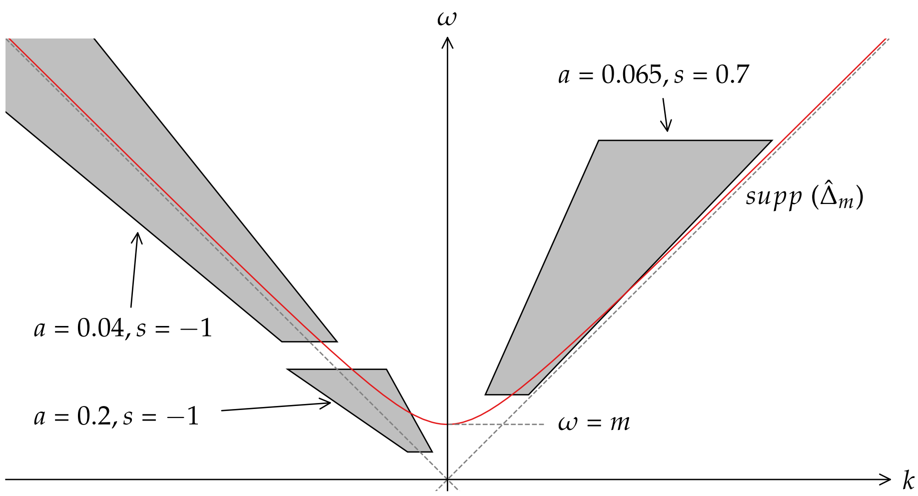

Abbildung 2: Die Träger von $\hat{\Delta}_m$ und $\hat{\psi}_{ast}$. Es ist zu sehen, dass für $a \to 0$ und $s \neq \pm 1$ die Träger schließlich disjunkt sind

Fall $s = 1$

Intuition Für $s = -1$ schneidet die Diagonale $supp(\hat{\psi}_{ast})$ auf der ganzen Länge. Der Betrag von $\hat{\psi}_{ast}$ skaliert mit $a^{\frac{3}{4}}$ und die Länge von $supp(\hat{\psi}_{ast})$ mit a^{-1}. Also erwarten wir schlimmstenfalls $\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{\Delta}_m \rangle = O(a^{-\frac{1}{4}})$. Aber nur wenn die Wellenfronten von $e^{-i\omega t' + ikx'}$ parallel zu der Singularität und damit der Diagonalen liegen. Andernfalls erwarten wir, dass die immer schneller werdenden Oszillationen der Phase sich gegenseitig auslöschen/wegheben.

Fleißige Analysis

$$\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{\Delta}_m \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega}-1\right)\right)\delta(\omega^2-k^2-m^2)\theta(\omega)e^{-i\omega t'+ikx'}d\omega\,\mathrm{d}k$$

Nullstellen von δ :

$\omega^2 - k^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\omega^2 - m^2}$

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2-m^2}}$; wobei nur „+" in $supp(\hat{\psi}_2)$ liegt

$$\begin{aligned}
&= a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\omega^2-m^2}}{\omega}-1\right)\right)e^{-i\omega t'+i\sqrt{\omega^2-m^2}x'}\,\mathrm{d}\omega \\
&= a^{\frac{3}{4}}a^{-1} \int \hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2\underbrace{\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{a\omega^2-m^2}}{\omega}-1\right)\right)}_{=\frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{2\omega^2}+O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}e^{-i\frac{\omega}{a}t'+i\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2}-m^2}x'}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

Der Integrand lässt sich nun durch $\hat{\psi}_1(\omega)\left\|\hat{\psi}_2\right\|_\infty$ majorisieren und wir dürfen Lebesgue verwenden um Integral und Grenzwert $a \to 0$ zu vertauschen

$$\begin{aligned}
&= a^{-\frac{1}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2(0)e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} \\
&= a^{-\frac{1}{4}}\hat{\psi}_2(0)\psi_1\left(\frac{t'-x'}{a}\right) \\
&\sim O\left(a^{-\frac{1}{4}}\right), \quad \text{falls } x' = t' \\
&\sim O\left(a^{k}\right) \quad \forall k, \quad \text{sonst}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Das analoge Ergebnis erhält man mit gleicher Rechnung auch für $s = -1$ und $t' = -x'$ Dies bestätigt das intuitiv erwartete Ergebnis. Insgesamt erhalten wir also für die Wellenfrontmenge:

	$(t', x') = (0, 0)$	$t' = x'$	$t' = -x'$	$t' \neq \pm x'$
s = 1	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	a^k
s = -1	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k
$s \neq \pm 1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tabelle 1: Konvergenzordnung von $\mathcal{S}_{\Delta_m}(a, s, (t', x'))$ im Limit $a \to 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

4 Die Wellenfrontmenge von Δ_m^2

Bevor wir die Wellenfrontmenge von Δ_m^2 berechnen können, benötigen wir einen Ausdruck dafür, oder besser noch einen für die Fouriertransformierte davon.

4.1 $\hat{\Delta}^{*2}$ berechnen

Gemäß dem Faltungssatz gilt $\widehat{\Delta_m^2} = \widehat{\Delta}_m * \widehat{\Delta}_m = \widehat{\Delta}_m^{*2}$. Wir müssen also die Faltung von $\widehat{\Delta}_m$ mit sich selber ausrechnen.

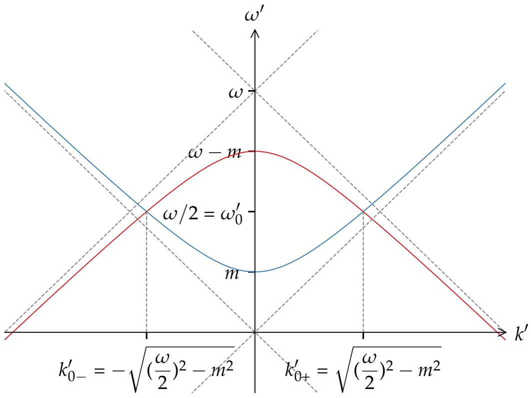

Abbildung 3: Das zu berechnende Integral aus (4.1) visualisiert

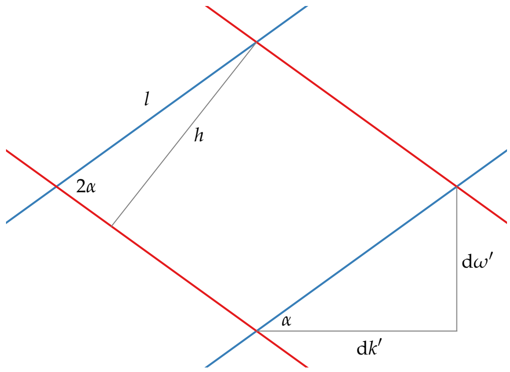

Abbildung 4: Die Kreuzungsstelle bei k'_{0+} von ganz nah angeschaut

$$\widehat{\Delta_m^{*2}}(\omega, k) = \int \theta(\omega')\delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2)\theta(\omega - \omega')\delta((\omega - \omega')^2 - (k - k')^2 - m^2)\, \mathrm{d}\omega'\, \mathrm{d}k' \quad (4.1)$$

An Abbildung 3 sehen wir schon, dass das Faltungsintegral nur dann ungleich null ist, wenn (ω, k) in der $2m$-Massenschale liegen. Es ist also insbesondere $\omega > 0$. Da Δ_m Poincare-invariant ist, sind Δ_m^2 und $\widehat{\Delta_m^{*2}}$ es auch. Es genügt also $\widehat{\Delta_m^{*2}}$ für $k = 0$ und positive ω zu berechnen. Alle anderen Werte holen wir uns dann aus der Poincare-Invarianz.

Um nun das Integral über zwei sich schneidende lineare[1] δ-Distributionen zu berechnen bedienen wir uns eines Physikertricks und stellen uns die δ-Distribution als Grenzwert ($h \to 0$) einer $\frac{1}{h}$-hohen und h-breiten Rechtecksfunktion vor. Dann ist das Integral über

Wie erklärt man das besser, ohne an Anschaulichkeit oder Rigorosität zu verlieren

[1] Linear in dem Sinne, dass die Distribution entlang einer Linie getragen ist. Nicht das es eine lineare Distribution ist

die sich schneidenden Rechteckfunktionen proportional zu der Schnittfläche und damit zu $l \cdot h$ in Abb. 4. Außerdem schneiden sich die beiden Hyperbeln für $\omega \to +\infty$ in einem rechten Winkel, das Faltungsintegral ergibt hier also 2.

Aus Abb. 4 lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) = \frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'} \quad \text{und} \quad \frac{h}{l} = \sin(2\alpha) \\ \Rightarrow l = \frac{h}{\sin\left(2\arctan\left(\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'}\right)\right)} = \frac{h\left(\left(\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'}\right)^2 + 1\right)}{2\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'}} \end{aligned} \tag{4.2}$$

außerdem gilt

$$\omega' = \sqrt{k'^2 + m^2} \implies \frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'} = \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + m^2}} \tag{4.3}$$

Wenn wir nun (4.2) und (4.3) sowie die vorhergehenden Gedanken kombinieren erhalten wir

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta_m}^{*2}(\omega, 0) &= C \frac{\left(\mathrm{d}\omega'/\mathrm{d}k'\right)^2\Big|_{k'_0} + 1}{\mathrm{d}\omega'/\mathrm{d}k'|_{k'_0}} \Theta(\omega^2 - (2m)^2) \\ &= C \frac{\sqrt{k_0'^2 + m^2}(2k_0'^2 + m^2)}{2k'_0(k_0^2 + m^2)} \Theta(\dots) \\ &= C \frac{\sqrt{\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2}(\omega^2 - 4m^2 + m^2)}{\sqrt{\omega^2 - 4m^2}(\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2)} \Theta(\dots) \\ &= C \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \Theta(\dots) \overset{C=2}{=} 2\frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \Theta(\dots) \end{aligned} \tag{4.4}$$

breqn-Package ausprobieren!

Jetzt erhalten wir $\widehat{\Delta_m}^{*2}(\omega, k)$ noch aus der Poincare-Invarianz:

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta_m}^{*2}(\omega, k) &\overset{(\omega,k)\sim(\sqrt{\omega^2-k^2},0)}{=} \widehat{\Delta_m}^{*2}(\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) \\ &= 2\frac{\omega^2 - k^2 - 3m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2}\sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}} \Theta(\omega^2 - k^2 - 4m^2) \end{aligned} \tag{4.5}$$

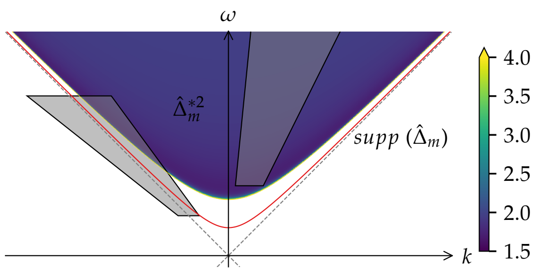

Abbildung 5: Plot von $\hat{\Delta_m}^{*2}$ und $\hat{\Delta_m}$. Je weiter wir uns von der 2m-Massenschale wegbewegen, desto konstanter wird $\hat{\Delta_m}^{*2}$ und ist singulär genau auf der $2m$-Massenschale

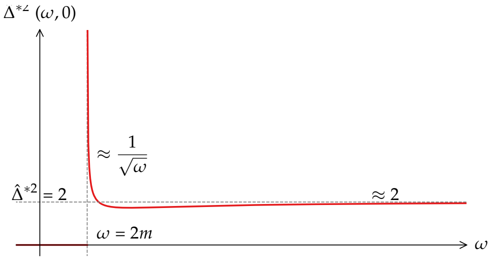

Abbildung 6: Plot von $\hat{\Delta_m}^{*2}\Big|_{k=0}$ um das asymptotische Verhalten für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ zu verdeutlichen

Es ist zu beachten, dass die Heaviside-Funktion genau bei der ersten Nullstelle der zweiten Wurzel im Nenner abschneidet und alle weiteren Nullstellen sowohl des Nenners als auch des Zählers außerhalb der $2m$-Massenschale und damit außerhalb des Trägers der Heaviside-Funktion liegen.

4.2 . . . und nun zur Wellenfrontmenge

Mit diesen Ausdrücken für $\widehat{\Delta_m}^{*2}$ können wir uns nun der Wellenfrontmenge widmen.

<u>Fall $|s| > 1$</u>

Genau wie im Fall $s \neq 1$ bei der massiven Zweipunktfunktion (vgl. 3) ist hier nichts zu tun, da für a klein genug wieder

$$supp(\hat{\psi}_{ast}) \cap supp(\widehat{\Delta_m}^{*2}) = \varnothing \Rightarrow \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta_m}^{*2} \right\rangle = 0$$

gilt.

Fall $s < 1$

Hier bedienen wir uns direkt bei (2.2, Substitution 2) und schreiben

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \widehat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta_m}^{*2} \right\rangle \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}} k + s a^{-1} \right)^2 - 3m^2 \right)}{\sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}} k + s^{-1} \right)^2} \sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}} k + s a^{-1} \right)^2 - 4m^2}} \\
&\quad \cdot \Theta \left(\omega^2 - k^2 - 4m^2 \right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \omega \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k \\
&\underset{\Delta s := 1 - s^2 > 0}{=} 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) \cancel{a^{-2}} \left(\omega^2 \left(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} ks - ak^2 \right) - 3a^2 m^2 \right) e^{\cdots} \Theta(\ldots) \cancel{\omega}}{\cancel{\omega a^{-2}} \sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} ks - ak^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}} \omega^2 ks - a\omega^2 k^2 - 4a^2 m^2}} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k
\end{aligned}
$$

Für hinreichend kleine a können wir den Integranden nun majorisieren

$$
\left| 2 \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) \omega^2 \Delta s \Theta(\ldots)}{\sqrt{\Delta s} \sqrt{\Delta s \omega^2}} \right| \geq \left| \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 \left(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} ks - ak^2 \right) - 3a^2 m^2 \right) \Theta(\ldots)}{\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} ks - ak^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}} \omega^2 ks - a\omega^2 k^2 - 4a^2 m^2}} \right|
$$

und dürfen also Lebesgue verwenden und schreiben

$$
\begin{aligned}
\lim_{a \to 0} \int \ldots \ \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k &= \int \lim_{a \to 0} \ldots \ \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)\ \omega^{\cancel{2}}\ \cancel{\Delta s}\ \Theta(\ldots)}{\cancel{\sqrt{\Delta s} \sqrt{\Delta s}} \cancel{\omega}} e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k \\
&\underset{k \to \frac{k}{\omega}}{=} 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2 \left(\frac{k}{\omega} \right) e^{-i\omega \frac{t'-sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \psi \left(\frac{t' - sx'}{a}, \frac{x'}{a} \right)
\end{aligned}
$$

Und da Shearlets nach Proposition 1.1 schnell abfallen erhalten wir schließlich

$$
\begin{aligned}
\left\langle \psi_{ast}, \Delta_m^2 \right\rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \psi \left(\frac{t' - sx'}{a}, \frac{x'}{a} \right) \\
&\sim O(a^k) \ \forall k \\
&\in \mathbb{N}, \quad \text{falls } (t', x') \neq 0 \\
&\sim O(a^{-\frac{3}{4}}), \quad \text{falls (t',x') = 0}
\end{aligned}
$$

Fall $s = -1$

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta_m}^{*2} \right\rangle \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\,\hat{\psi}_2(k)\left(\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2\right) - 3m^2\right)}{\sqrt{\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{\frac{1}{2}}k^2\right)}\sqrt{\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{\frac{1}{2}}k^2\right) - 4m^2}} \\
&\quad \cdot \Theta\left(\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}}k^2\right) - 4m^2\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)} \cdot \omega \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\,\hat{\psi}_2(k)\,\cancel{a^{-\frac{3}{4}}}\left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2\right)}{\cancel{a^{-\frac{3}{4}}}\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2}\sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{4}} 4m^2}} \\
&\quad \cdot \Theta\left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{4}} 4m^2\right) \cdot e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2(k)\ \left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2\right)\Theta(\ldots) e^{-i\omega k\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2}\sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{4}} 4m^2}}\,\mathrm{d}k \right\}}_{=:\ \hat{f}_a(\omega)} \cdot \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{f}_a(\omega)\,\hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

Nun müssen wir also $\hat{f}_a(\omega)$ genauer betrachten: $\hat{\psi}_2(k) \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}})$. Θ schneidet genau bei der ersten Nullstelle des Nenners ab. Deshalb verschieben wir durch eine Substitution $l \to k'$ den Intgegrationsbereich genau so, dass diese Nullstelle bei $k' = 0$ liegt.

Sei also $k_0 := \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega}$ die relevante Nullstelle des Nenners am Integrationsbereich. Dann ist die a-Abhängigkeit von k_0 in erster Näherung gegeben durch $0 < k_0 = \frac{2m^2}{\omega^2} a^{\frac{3}{2}} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) =: c_\omega a^{\frac{3}{2}} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)$ und mit $k = k' - k_0$ gelten folgende Ausdrücke für den Nenner und den Zähler:

Zähler

$$2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2 = 2\omega^2(k' - k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2$$

Nenner

$$\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2}\sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{4}}4m^2} = \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0)}\sqrt{k' + k_0} \cdot \underbrace{\sqrt{-a^{\frac{1}{2}}\omega^2\left(k' - \frac{2\sqrt{\omega^2 - 4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega}\right)}}_{=\sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}}\sqrt{k'}$$

Nun ist es an der Zeit für das alte Spiel von „finde eine integrierbare Majorante, um Lebesgue verwenden und alle Terme mit positiver a-Potenz wegschmeißen zu dürfen[2]“

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2\,\hat{\psi}_2(k' + k_0)\,\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2}{\sqrt{k'}\sqrt{k' + k_0}\sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0)}\sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}}\Theta(k')\right| \\
&\leq \frac{\text{const }\omega^2 k'}{\sqrt{k'}\sqrt{k' + k_0}\sqrt{2}\sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k'}}\Theta(k') \\
&\leq \frac{\text{const}\sqrt{k'}}{\sqrt{k'}\sqrt{\omega^2}}\Theta(k') \\
&\leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}}\Theta(k')
\end{aligned}$$

5 Berechnen von $WF(G_F)$

5.1 Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$

Ab jetzt werden wir der Namenskonvention der Physiker in der SRT folgen und unsere Ortsraumvariablen mit $x = (t, x)$ und unsere Impulsraumvariablen mit $\xi = (\omega, k)$ bezeichnen sowie konsequenterweise das Minkowskiskalarprodukt $x \cdot \xi = \omega t - kx$ verwenden. Des weiteren wird der Verschiebungsparameter mit $t = (t', x')$ bezeichnet.

Die massive skalare Zweipunktfunktion bzw. der Feynmanpropagator im Impulsraum ist dann gegeben durch (Schwartz [1], (6.34))

$$\hat{G}_F(\omega, k) = \frac{1}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \tag{5.1}$$

[2] so lange sie in einer Summe mit mindestens einem Term ohne positive a-Potenz auftauchen

Setzen wir dies in unsere Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ aus (2.1, Substitution 1) bzw. (2.1, Substitution 1) ergibt sich, unter Verwendung des Minkowskiskalaprodukts,

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle &= \int \hat{\psi}_{ast}(\omega, t)\ \hat{G}_F(\omega, t)\ \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(a\omega)\ \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\frac{k}{\omega} - s\right)\ e^{-i\omega t' + ikx'}}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{w}\right)\ e^{-i\omega\frac{t'-sx'}{a} + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{\omega s}{a} + \frac{k}{\sqrt{a}}\right)^2 - i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint\limits_{\substack{\omega\in[-2,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},2] \\ \left|\frac{k}{2}-s\right|\leq\sqrt{ax}}} \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\frac{t'-sx'}{a} + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 + a^{-2}\omega^2(s^2-1) + a^{-\frac{3}{2}}2s\omega k + a^{-1}k - i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

und mit der anderen Substitution analog

Integral hübsch machen. Größeres Integralzeichen?

$$\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{-\frac{3}{4}} \iint\limits_{\substack{|\omega| \in [\frac{1}{2},2] \\ k \in [-1,1]}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + \frac{kx'}{\sqrt{a}}\right)}}{m^2 - \omega^2(a^{-2}(1-s^2) - a^{-1}k^2 - 2ksa^{-\frac{3}{2}})}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \qquad (5.3)$$

wobei sich die Integrationsbereiche aus den Forderungen an den Träger von ψ (vgl. (1.2)) ergeben.

Nach Satz (1.2) genügt es zu bestimmen, an welchen Punkten (t', x') und in welche Richtungen s $\mathcal{S}_f(a, s, (t', x'))$ nicht schnell-fallend in a^{-1} ist, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen. Da wir keine explizite erzeugende Funktion ψ angegeben haben, werden wir uns dabei Argumente bedienen, die alleine auf den allgemeinen Eigenschaften von ψ_{ast} beruhen, aber nicht einer expliziten Form.

In Textform beschreiben, was die grobe Strategie ist, also wie der Integrand vernünfitg vereinfacht wird und welche Eigenschaften von ψ wie eingehen.

Das allgemeine Vorgehen wird dabei folgendes sein: Die Ausdrücke in (5.2) und (5.3) genau anstarren, um zu sehen für welche Werte von (t', x') und s potentiell interessante Dinge geschehen, also z.B. Terme im Nenner weg fallen, oder die Phase konstant wird. Dann werden diese Werte von (t', x') und s eingesetzt und alles so weit vereinfacht und genähert – im Rahmen des Erlaubten, ohne das Verhalten für $a \to 0$ zu ändern –, bis die a-Abhängigkeit abgelesen werden kann. Entscheidende Zutaten sind dabei der beschränkte Träger von $\hat{\psi}$ und der schnelle Abfall von ψ.

Fall $s = 1, t' = 0 = x'$

Nach (5.3) erhalten wir mit $s = 1, t' = 0 = x'$

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{m^2 + \omega^2(a^{-1}k^2 + a^{-\frac{3}{2}}2k)} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= \int a^{\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + \omega^2(a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2k)} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k
\end{aligned}
$$

Da aber $|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2]$ und $k \in [-1, 1]$ ist, ist für hinreichend kleine a (und für genau die interessieren wir uns ja)

$$
\left| \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{k\omega^2} \right| \geq \left| \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k + 2k\omega^2} \right|
$$

eine integrierbare (im Sinne des Cauchy-Hauptwertes) Majorante für den Integranden.

Warum ist Cauchy-Hauptwert hier erlaubt? Weiter ausführe, warum es diese Majorante tut?

Wir dürfen uns also des Lebesgueschen Konvergenzsatzes bedienen und schreiben

$$
\lim_{a \to 0} \langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{2k\omega^2} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \sim O(a^{\frac{3}{4}}) \tag{5.4}
$$

Für $s = -1$ erhalten wir genau das selbe Ergebniss, da ja der $\omega^2(1 - s^2)$-Term im Nenner genauso wieder verschwindet.

Fall $s \neq \pm 1, t' = 0 = x'$

In diesem Fall verschwindet der $\omega^2(1-s^2)$-Term im Nenner nicht und dementsprechend folgt

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \right\rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{m^2 - \omega^2((1-s^2) - a^{-1}k^2 - a^{-\frac{3}{2}}2k)} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \\ &= \int a^{\frac{5}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2 + \omega^2(s^2-1) + a\omega^2k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2 ks} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k\end{aligned}$$

Analog zum vorigen Teil ist, diesmal sogar ohne den Cauchy-Hauptwert bemühen zu müssen,

$$\left| \frac{2\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} \right| \geq \left| \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2 + \omega^2(s^2-1) + a\omega^2k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2 ks} \right|$$

dass eine integrierbare Majorante ist (in der Tat ja sogar in $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$) Damit können wir folgende Abschätzung treffen:

Überall wo es sein muss $\lim_{a\to 0}$ dazu schreiben, oder sagen dass der Limit überall impliziert ist

$$\lim_{a\to 0} \left\langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{2\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \sim O(a^{\frac{5}{4}})$$

Fall $s \neq \pm 1, (t', s') \neq 0$

In diesem Fall benutzen wir wieder die erste Substitution (5.2) und klammern wie schon in den beiden vorigen Teilen die höchste negative Potenz von a im Nenner aus.

$$\Rightarrow \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^2m^2 - \omega^2(1-s^2) + a^{\frac{1}{2}}s\omega k + ak^2} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \tag{5.5}$$

und da immer noch $0 \notin supp(\psi_1)$ gilt ist ein weiteres mal eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$2\frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \tag{5.6}$$

In der Tat ist sogar

$$\hat{f}(\omega,k) := \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}}^2) \tag{5.7}$$

da ψ_1 und ψ_2 getragen sind. Demnach ist die Fourierinverse von $\hat{f}$, $f := \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, also schnell fallend. Damit können wir schließlich abschätzen

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle\right| &= a^{\frac{5}{4}} \left| \int \hat{f}(\omega,k)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \right| \\
&= a^{\frac{5}{4}} \left| f\left(\frac{t'-sx}{a}, \frac{x'}{\sqrt{a}}\right)\right| \leq a^{\frac{5}{4}} C_k \left(1 + \left\| \begin{smallmatrix} (t'-sx')/a \\ x'/\sqrt{a} \end{smallmatrix} \right\| \right)^{-k} \\
&\leq a^{\frac{5}{4}} \frac{C_k}{2} a^{\frac{k}{2}} \left\| \begin{smallmatrix} (t'-sx') \\ x' \end{smallmatrix} \right\|^{-k} \sim O\left(a^{\frac{5/2+k}{2}}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle\right| \sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{5.8}$$

Fall $s = 1, (t', x') \neq 0$

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder den ersten Ausdruck für $\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle$ aus (5.2) und sorgen wir auch bisher jedes Mal dafür, dass wir im Nenner nur noch positive Potenzen von a und einen von a unabhängigen Term haben. Dann sieht das ganze so aus:

$$\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2\omega k}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k$$

wo wir im $\lim_{a\to 0}$ wieder doe a-Potenzen im Nenner weg fallen lassen und auch dieses Mal dafür wieder den Cauchy-Hauptwert bemühen müssen, um den Lebesgueschen Konvergenzsatz benutzen zu dürfen. Weiter geht's:

$$\begin{aligned}
&= a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2\omega k}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \\
&= a^{\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2k\omega}\, \mathrm{d}k \right\}}_{=:\hat{f}_a(\omega)} \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)}\, \mathrm{d}\omega
\end{aligned} \tag{5.9}$$

und um hier weiter zu kommen, schauen wir uns $\hat{f}_a$ genauer an. Sei dazu $\Psi_2(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \psi_2(\omega')\,\mathrm{d}\omega' - \int_{\omega}^{+\infty} \psi_2(\omega')\,\mathrm{d}\omega'$ eine Stammfunktion von ψ_2. Dies ist offenbar C^∞ und beschränkt, da $\hat{\psi}_2 \in C_c^\infty$. Mithilfe von Fourieridentitäten und Substitution können wir nun weiter rechnen:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_a(\omega) &= \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{2k\omega} e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}\omega \\
&\overset{i)}{=} \int \frac{\hat{\psi}_2(k)}{2k} e^{ik\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}\omega \\
&\overset{ii)}{=} \frac{i}{2}\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)
\end{aligned}$$

Hier wurde in *i*) einfach $k \to \omega k$ substituiert und im Schritt *ii*) wurde genutzt, dass $f(x) = \mathrm{sgn}(x) \leftrightarrow \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k}$. Nun stecken wir diese Erkenntnisse in unseren vorigen Ausdruck und erhalten

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle &= \frac{ia^{\frac{3}{4}}}{2} \int \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)\; \hat{\psi}_1(\omega)\; e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right) \qquad ;\text{ für } t' = x' \\
&\sim O\left(a^k\right)\;\; \forall k \in \mathbb{N} \quad ;\text{ andernfalls}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Im letzten Schritt wurde wieder genutzt, dass $\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)\; \hat{\psi}_1(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, und demnach eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

Das analoge Ergebnis erhält man auch für $s = -1$ und $t' = -x'$

Literatur

[1] Matthew D. Schwartz. Quantum Field Theory and the Standard Model -. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1-107-03473-0.