Berechnen der Wellenfrontmenge der massiven Zweipunktfunktion mittels Shearlets

Jan Lukas Bosse*

1. Juni 2018

Im folgenden werden wir die Wellenfrontmenge der massiven Zweipunktfunktionen mittels der Methoden von Kutyniok und Labate [1] ausrechnen.

1 Allgemeines Gelaber über Shearlets

Satz 1.1 ($\mathcal{S}_f(a,s,t)$ misst $WF(f)$)
Sei $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ wobei $\mathcal{D}_1 = \left\{ (t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1,1] \middle| \, |\mathcal{S}_f(a,s,t)| = O(a^k) \text{ gleichmäßig } \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } (t_0, s_0) \right\}$ und $\mathcal{D}_2$ analog für $\psi^{(v)}$

Dann gilt $WF(f)^c = \mathcal{D}$

diesen Satz richtig hin schreiben und ordentlich setzen

Korollar 1.2 (WF(f) misst $sing\ supp(\psi)$)
Sei $\mathcal{R} = \left\{ t_0 \in \mathcal{R}^2 \middle| \, |\mathcal{S}_f(a,s,t)| = O(a^k) \ \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } t_0 \right\}$

Dann gilt $sing\ supp(\psi)^c = \mathcal{R}$

Stil und Nummerierung für Sätze, Propositionen etc. anpassen

Bemerkung 1.3 (Träger von ψ)
Im Fourierraum ist $\hat{\psi}_{ast}$ gegeben durch

$$\hat{\psi}_{ast}(\xi_1, \xi_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) \right) \tag{1}$$

und es gilt

*Georg-August Universitt Göttingen

$$supp(\hat{\psi}) \subset \left\{ \xi \in \hat{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; |\xi_1| \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right], \left|\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right| \leq \sqrt{a} \right\} \tag{2}$$

2 Allgemeine Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$

Zunächst werden wir zwei verschiedene Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ im Fourierraum herleiten, welche sich im dann folgenden als nützlich erweisen werden.

Sei also ψ ein Shearlet wie in Korollar 1.3. Sei f die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\mathcal{S}_f(ast)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{ast}, f \rangle &= \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{f} \right\rangle \\
&= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi\cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) \right) \hat{f}(\xi) \,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

und nach „entscheren“ und „deskalieren“, also der Substitution

etnscheiden, was mit dem fehlenden Faktor $\frac{1}{(2\pi)^n}$ geschieht

$$\begin{aligned}
a\xi_1 &= k_1 & \qquad & & \xi_1 &= \frac{k_1}{a} \\
a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) &= \frac{k_2}{k_1} & \iff & & \xi_2 &= \frac{k_1 s}{a} + a^{-\frac{1}{2}} k_2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\xi_1 \,\mathrm{d}\xi_2 = a^{-\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}k_1 \,\mathrm{d}k_2$$

ergibt sich folgendes für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$:

$$= \iint a^{-\frac{3}{4}} \; \hat{\psi}_1(k_1) \; \hat{\psi}_2 \left(\tfrac{k_2}{k_1} \right) \; \hat{f} \left(\tfrac{k_1}{a}, \tfrac{k_1 s}{a} + \tfrac{k_2}{\sqrt{a}} \right) \; e^{-i\frac{k_1}{a}(t_1 + t_2 s) - i\frac{k_2 t_2}{\sqrt{(a)}}} \,\mathrm{d}k_1 \,\mathrm{d}k_2 \tag{3}$$

herausfinden, wie die Gleichungen auch Kapitelnummern erhalten

Alternativ kann auch folgende Substitution

$$\begin{aligned}
a\xi_1 &= k_1 & \qquad & & \xi_1 &= \frac{k_1}{a} \\
a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) &= k_2 & \iff & & \xi_2 &= \left(a^{\frac{1}{2}} k_2 + s \right) \frac{k_1}{a}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\xi_1 \,\mathrm{d}\xi_2 = a^{-\frac{3}{2}} k_1 \,\mathrm{d}k_1 \,\mathrm{d}k_2$$

gewählt werden, wodurch alle Parameter aus den Argumenten von ψ_1, ψ_2 verschwinden und sich

$$= \iint a^{-\frac{3}{4}}\ k_1\ \hat{\psi}_1(k_1)\ \hat{\psi}_2(k_2)\ \hat{f}\left(\frac{k_1}{a}, k_1\left(a^{-\frac{1}{2}}k_2 + sa^{-1}\right)\right)\ e^{-ik_1\left(\frac{t_1+st_2}{a}+\frac{k_2t_2}{\sqrt{a}}\right)}\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2 \tag{4}$$

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulässig ist, obwohl sie die Orientierung <u>nicht</u> erhält und <u>nicht</u> keine Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nämlich $\xi_1 = 0$, liegt nicht im Träger von ψ.

Grafik basteln, die *supp* ψ vor und nach der Substitution zeigt.

2.1 Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$

Ab jetzt werden wir der Namenskonvention der Physiker in der SRT folgen und unsere Ortsraumvariablen mit $x = (t, x)$ und unsere Impulsraumvariablen mit $\xi = (\omega, k)$ bezeichnen sowie konsequenterweise das Minkowskiskalarprodukt $x \cdot \xi = \omega t - kx$ verwenden. Des weiteren wird der Verschiebungsparameter mit $t = (t', x')$ bezeichnet.

Die massive skalare Zweipunktfunktion bzw. der Feynmanpropagator im Impulsraum ist dann gegeben durch (Schwartz [2], (6.34))

$$\hat{G}_F(\omega, k) = \frac{1}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \tag{5}$$

Setzen wir dies in unsere Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ aus (3) bzw. (4) ergibt sich, unter Verwendung des Minkowskiskalaprodukts,

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle &= \int \hat{\psi}_{ast}(\omega, t)\ \hat{G}_F(\omega, t)\ \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(a\omega)\ \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\frac{k}{\omega} - s\right)\ e^{-i\omega t' + ikx'}}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{w}\right)\ e^{-i\omega\frac{t'-sx'}{a} + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{\omega s}{a} + \frac{k}{\sqrt{a}}\right)^2 - i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint\limits_{\substack{\omega\in[-2,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},2] \\ \left|\frac{k}{2}-s\right|\le\sqrt{ax}}} \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{w}\right)\ e^{-i\omega\frac{t'-sx'}{a} + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 + a^{-2}\omega^2(s^2-1) + a^{-\frac{3}{2}}2s\omega k + a^{-1}k - i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k
\end{aligned} \tag{6}$$

und mit der anderen Substitution analog

$$\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{-\frac{3}{4}} \iint\limits_{\substack{|\omega| \in [\frac{1}{2},2] \\ k \in [-1,1]}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}+\frac{kx'}{\sqrt{a}}\right)}}{m^2 - \omega^2(a^{-2}(1-s^2) - a^{-1}k^2 - 2ksa^{-\frac{3}{2}})} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \tag{7}$$

wobei sich die Integrationsbereiche aus den Forderungen an den Träger von ψ (vgl. (2)) ergeben.

3 Berechnen von $WF(G_F)$

Nach Satz (1.1) genügt es zu bestimmen, an welchen Punkten (t', x') und in welche Richtungen s $\mathcal{S}_f(a, s, (t', x'))$ nicht schnell-fallend in a^{-1} ist, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen. Da wir keine explizite erzeugende Funktion ψ angegeben haben, werden wir uns dabei Argumente bedienen, die alleine auf den allgemeinen Eigenschaften von ψ_{ast} beruhen, aber nicht einer expliziten Form.

Das allgemeine Vorgehen wird dabei folgendes sein: Die Ausdrücke in (6) und (7) genau anstarren, um zu sehen für welche Werte von (t', x') und s potentiell interessante Dinge geschehen, also z.B. Terme im Nenner weg fallen, oder die Phase konstant wird. Dann werden diese Werte von (t', x') und s eingesetzt und alles so weit vereinfacht und genähert – im Rahmen des Erlaubten, ohne das Verhalten für $a \to 0$ zu ändern –, bis die a-Abhängigkeit abgelesen werden kann. Entscheidende Zutaten sind dabei der beschränkte Träger von $\hat{\psi}$ und der schnelle Abfall von ψ.

Fall $s = 1, t' = 0 = x'$

Nach (7) erhalten wir mit $s = 1, t' = 0 = x'$

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \right\rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{m^2 + \omega^2(a^{-1}k^2 + a^{-\frac{3}{2}}2k)} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + \omega^2(a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2k)} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \end{aligned}$$

Da aber $|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2]$ und $k \in [-1, 1]$ ist, ist für hinreichend kleine a (und für genau die interessieren wir uns ja)

Integral hübsch machen. Größeres Integralzeichen?

In Textform beschreiben, was die grobe Strategie ist, also wie der Integrand vernünfitg vereinfacht wird und welche Eigenschaften von ψ wie eingehen.

Hier schon die Ergebnisse als Satz angeben, und dann Beweis hinschreiben?

Bemerkung einfügen, warum dass auch ziemlich unmöglich ist

$$\left|\frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{k\omega^2}\right| \geq \left|\frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k + 2k\omega^2}\right|$$

eine integrierbare (im Sinne des Cauchy-Hauptwertes) Majorante für den Integranden.

Warum ist Cauchy-Hauptwert hier erlaubt? Weiter ausführe, warum es diese Majorante tut?

Wir dürfen uns also des Lebesgueschen Konvergenzsatzes bedienen und schreiben

$$\lim_{a\to 0}\left\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F\right\rangle = a^{\frac{3}{4}}\int \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{2k\omega^2}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \sim O(a^{\frac{3}{4}}) \tag{8}$$

Für $s=-1$ erhalten wir genau das selbe Ergebniss, da ja der $\omega^2(1-s^2)$-Term im Nenner genauso wieder verschwindet.

Fall $s \neq \pm 1, t' = 0 = x'$

In diesem Fall verschwindet der $\omega^2(1-s^2)$-Term im Nenner nicht und dementsprechend folgt

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F\right\rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}}\frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{m^2-\omega^2((1-s^2)-a^{-1}k^2-a^{-\frac{3}{2}}2k)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k\\ &= \int a^{\frac{5}{4}}\frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2+\omega^2(s^2-1)+a\omega^2k^2+a^{\frac{1}{2}}2\omega^2ks}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k\end{aligned}$$

Analog zum vorigen Teil ist, diesmal sogar ohne den Cauchy-Hauptwert bemühen zu müssen,

Überall wo es sein muss $\lim_{a\to 0}$ dazu schreiben, oder sagen dass der Limit überall impliziert ist

$$\left|\frac{2\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)}\right| \geq \left|\frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2+\omega^2(s^2-1)+a\omega^2k^2+a^{\frac{1}{2}}2\omega^2ks}\right|$$

dass eine integrierbare Majorante ist (in der Tat ja sogar in $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$) Damit können wir folgende Abschätzung treffen:

$$\lim_{a\to 0}\left\langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F\right\rangle = a^{\frac{5}{4}}\int \frac{2\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \sim O(a^{\frac{5}{4}})$$

Fall $s \neq \pm 1, (t', s') \neq 0$

In diesem Fall benutzen wir wieder die erste Substitution (6) und klammern wie schon in den beiden vorigen Teilen die höchste negative Potenz von a im Nenner aus.

$$\Rightarrow \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^2m^2 - \omega^2(1-s^2) + a^{\frac{1}{2}}s\omega k + ak^2} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \tag{9}$$

und da immer noch $0 \notin supp(\psi_1)$ gilt ist ein weiteres mal eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$2\frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \tag{10}$$

In der Tat ist sogar

$$\hat{f}(\omega, k) := \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}}^2) \tag{11}$$

da ψ_1 und ψ_2 getragen sind. Demnach ist die Fourierinverse von $\hat{f}$, $f := \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, also schnell fallend. Damit können wir schließlich abschätzen

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle\right| &= a^{\frac{5}{4}} \left| \int \hat{f}(\omega, k)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \right| \\
&= a^{\frac{5}{4}} \left| f\left(\frac{t'-sx}{a}, \frac{x'}{\sqrt{a}}\right) \right| \leq a^{\frac{5}{4}} C_k \left(1 + \left\| \begin{smallmatrix} (t'-sx')/a \\ x'/\sqrt{a} \end{smallmatrix} \right\| \right)^{-k} \\
&\leq a^{\frac{5}{4}} \frac{C_k}{2} a^{\frac{k}{2}} \left\| \begin{smallmatrix} (t'-sx') \\ x' \end{smallmatrix} \right\|^{-k} \sim O\left(a^{\frac{5/2+k}{2}}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle\right| \sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{12}$$

Fall $s = 1, (t', x') \neq 0$

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder den ersten Ausdruck für $\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle$ aus (6) und sorgen wir auch bisher jedes Mal dafür, dass wir im Nenner nur noch positive Potenzen von a und einen von a unabhängigen Term haben. Dann sieht das ganze so aus:

$$\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2\omega k}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k$$

wo wir im $\lim_{a\to 0}$ wieder doe a-Potenzen im Nenner weg fallen lassen und auch dieses Mal dafür wieder den Cauchy-Hauptwert bemühen müssen, um den Lebesgueschen Konvergenzsatz benutzen zu dürfen. Weiter geht's:

$$\begin{aligned} &= a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2\omega k}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\ &= a^{\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2k\omega}\,\mathrm{d}k \right\}}_{=:\hat{f}_a(\omega)} \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{13}$$

und um hier weiter zu kommen, schauen wir uns $\hat{f}_a$ genauer an. Sei dazu $\Psi_2(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \psi_2(\omega')\,\mathrm{d}\omega' - \int_{\omega}^{+\infty} \psi_2(\omega')\,\mathrm{d}\omega'$ eine Stammfunktion von ψ_2. Dies ist offenbar C^∞ und beschränkt, da $\hat{\psi}_2 \in C_c^\infty$. Mithilfe von Fourieridentitäten und Substitution können wir nun weiter rechnen:

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\omega) &= \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{2k\omega} e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}\omega \\ &\overset{i)}{=} \int \frac{\hat{\psi}_2(k)}{2k} e^{ik\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}\omega \\ &\overset{ii)}{=} \frac{i}{2}\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \end{aligned}$$

Hier wurde in $i)$ einfach $k \to \omega k$ substituiert und im Schritt $ii)$ wurde genutzt, dass $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \leftrightarrow \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k}$. Nun stecken wir diese Erkenntnisse in unseren vorigen Ausdruck und erhalten

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle &= \frac{ia^{\frac{3}{4}}}{2} \int \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)\ \hat{\psi}_1(\omega)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\ &\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right) \qquad \text{; für } t' = x' \\ &\sim O\left(a^k\right)\ \ \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{; andernfalls} \end{aligned} \tag{14}$$

Im letzten Schritt wurde wieder genutzt, dass $\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)\ \hat{\psi}_1(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, und demnach eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

Das analoge Ergebnis erhält man auch für $s = -1$ und $t' = -x'$

Literatur

[1] Gitta Kutyniok und Demetrio Labate. "Resolution of the wavefront set using continuous shearlets". In: Transactions of the American Mathematical Society 361.05 (2008), S. 2719–2754. URL: `https://doi.org/10.1090/s0002-9947-08-04700-4`.

[2] Matthew D. Schwartz. Quantum Field Theory and the Standard Model -. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1-107-03473-0.