=13

images/Logo$_Uni_Goettingen.*$
*von*http://www.physik.uni-goettingen.de/...*laden*

Bachelorarbeit

Zur Auflsung der Wellenfrontmenge mittels Shearlets

Resolution of the wavefrontset using shearlets

angefertigt von

Jan Lukas Bosse

aus Freiburg im Breisgau

am Institut für Mathematik

Bearbeitungszeit: 15. Februar 2018 bis 30. Juli 2018

Erstgutachter/in: Prof. Dr. Dorothea Bahns

Zweitgutachter/in: Prof. Dr. Ingo Witt

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung fr Mathematiker

Ursprnglich in der Bildbearbeitung und -kompression wurde erkannt und genutzt, dass die (stetige) Wavelettransformationen einer Funktion f schnell abfllt an Punkten, an denen f glatt ist und langsam an den Singularitten. Bekanntestes Beispiel dafr ist die JPEG-Kompression, welche auf der Wavelettransformation basiert.

Allerdings ist die klassische Wavelettransformation mit gleichmßiger Skalierung in alle Richtungen nicht in der Lage, die Orientierung der Singularitten zu erkennen. Deshalb wurden verschiedene Verallgemeinerungen von Wavelets mit anisotroper Skalierung entwickelt ([5] [7] [1]), die in der Lage sind auch die Orientierung der Singularitten zu erkennen. Im Fourierraum bedeutet anisotrope Skalierung, dass der Trger der Wavelets mit feiner werdendem Skalenparameter in immer engeren Kegeln liegt. Im Realraum entspricht dies immer flacher werdenden '"Wellenpaketen" als Testfunktionen. Bei isotroper Skalierung hingegen wird der Trger im Realraum in alle Richtungen gleichmßig kleiner.

Dies ist eng verwandt mit dem Konzept der *Wellenfrontmenge* aus der *mikrolokalen Analysis*. Die Wellenfrontmenge misst, vereinfacht gesagt, die Lage und Orientierung der Singularitten von nicht nur Funktionen, sondern auch Distributionen. Das Versprechen in [7] ist, dass es mit anisotrop skalierenden Wavelettransformationen mglich ist Wellenfrontmengen zu berechnen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, genauer zu untersuchen inwiefern die Shearletttransformation von Kutyniok und Labate [7] geeignet ist, um Wellenfrontmengen zu bestimmen. Dazu werden die Wellenfrontmengen von physikalisch motivierten Distributionen berechnet. Außerdem fllen wir eine kleine Lcke in [7], geben einen Ansatz, wie die Ergebnisse von Kutyniok und Labate [7] auf temperierte Distributionen ausgedehnt werden knnen und erklren, warum sie nicht auf alle Distributionen ausgedehnt werden knnen. Des weiteren wird noch eine kurze Diskussion gegeben, welche weiteren Grßen der mikrolokalen Analysis mithilfe von Shearlets berechnet werden knnen und welche Mglichkeiten es fr hherdimensionale Shearlets gibt.

2 Einleitung fr Physiker

noch WF(Θ) ausrechnen und dann zeigen wo bei Hrmander die Probelne liegen?

Einer der Zugnge zur Renormierung in der Quantenfeldtheorie ist die Fortsetzung der auftretenden Produkte von Distributionen auf ganz $\mathbb{R}^{1+d}$. Um zu bestimmen, wo und mit welchen Freiheiten diese fortgesetzt werden knnen, muss die Wellenfrontmenge der Faktoren bestimmt werden. Leider ist es notorisch schwierig Wellenfrontmengen fr Distributionen, die komplizierter sind als die δ-Distribution und Ableitungen, direkt zu bestimmen.

Ursprnglich in der Bildbearbeitung und -kompression wurde erkannt und zur Kompression genutzt, dass Wavelettransformationen in der Lage sind, die Singularittsstruktur von Bildern zu erkennen. Wie Kutyniok und Labate [7] sowie Cands und Donoho [1] gezeigt haben, lassen sich diese Erkenntnisse auf Distributionen ausweiten und mit anisotropen und gerichteten Wavelets Wellenfrontmengen ausrechnen.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir am Beispiel von *Shearlets* untersuchen, wie praktikabel diese Methoden sind, um Wellenfrontmengen komplizierterer Distributionen auszurechnen. Daneben gibt es noch eine kurze Diskussion, ob und wie es mglich ist, die Ergebnisse auf mehr als nur zwei Dimensionen auszuweiten. Des Weiteren wird skizziert, welche weiteren Grßen der *mikrolokalen Analysis*, wie z.B. der Skalengrad, mithilfe von Shearlets berechnet werden knnen.

Wir kommen zu dem Ergebnis, dass die Shearlettransformation in zwei Dimensionen zwar eine theoretische Mglichkeit ist, Wellefrontmengen zu berechnen, aber deutlich mehr Arbeit als weniger direkte Methoden. In hheren – und damit physikalisch relevanteren – Dimensionen sind noch keine Verallgemeinerung bekannt, aber die konkreten Rechnungen werden sicher nicht bersichtlicher als in zwei Dimensionen.

3 Fouriertransformation, mikrolokale Analysis und all die Mathematik

Im folgenden gehen wir davon aus, dass die grundlegenden Eigenschaften der Fouriertransformation (Faltungssatz, Parsevals Satz etc.) bekannt sind und fhren nur die Begriffe ein, die ber das Grundstudium hinaus gehen und nicht vorausgesetzt werden knnen.

3.1 Nomenklatur und $2\pi = 1$

Da in der gesamten vorliegenden Arbeit so gut wie immer vor allem von Belang ist, wie schnell gewisse Integrale mit einem gewissen Parameter gegen 0 gehen, es dafr aber vollkommen unerheblich ist, ob in den Abschtzungen noch Faktoren von 2π durch den Faltungssatz fehlen oder ob man fr die richtige Abschtzung noch einmal mit 2 multiplizieren sollten, sind wir in der gesamten Arbeit sehr großzgig damit, wie genau wir Buch fhren mit solchen Vorfaktoren. Unser Faltungssatz liest sich also

Ist das so akzeptabel? Oder wird in einer BA doch erwartet, dass man etwas mehr sorgfalt walten lsst?

$$\widehat{fg}(k) = \hat{f} * \hat{f}(k),$$

obwohl wir die Fouriertransformation

$$\hat{f}(k) := \int f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x$$

mit der, konsequenterweise nur bis auf einen Faktor 2π, Inversen

$$f(x) := \int \hat{f}(k) e^{ikx} \, \mathrm{d}x$$

verwenden. Des weiteren verwenden wir fr die inverse Fouriertransformation den inversen Hut, also $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) =: f^{\vee}(x)$.

3.2 Die Wellenfrontmenge

Anschaulich sagt uns die Wellenfrontmenge wo und in welche Richtungen eine Distribution singulr ist. So ist z.B. die Wellenfrontmenge der δ-Distribution $\{(0, \mathbb{R}^n \setminus 0)\}$ oder die der 2-dimensionalen Heaviside-Funktion $1(x) \cdot \Theta(y)$ ist $\{((x,0),(0,1) \cdot \mathbb{R} \setminus 0)\}$

Definition 3.1 (high frequency set)
Sei $f \in \mathcal{E}'(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakt getragene Distribution. Dann definieren wir die *Richtungen hoher Frequenzen* als

$$\Sigma(v) = \Big\{k \in \hat{\mathbb{R}}^n \mid k \text{ hat } \textit{keine} \text{ kegelfrmige Umgebung } U \text{ s.d.} \\ |\hat{v}(k')| \leq C_N(1+|k|)^{-N}\, \forall k \in U,\, \forall N \in \mathbb{N}\Big\}$$

und darauf basierend definieren wir noch eine punktweise Variante:

Sei $f \in \mathcal{D}'(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Distribution. Sei $\mathcal{D}_x$ die Menge der kompakt getragenen glatten Funktionen, die an x nicht verschwinden. Dann ist die *singulre Faser* von f an x definiert als

$$\Sigma_x(f) = \bigcap_{\phi \in \mathcal{D}_x} \Sigma(\underbrace{\phi f}_{\in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)})$$

Damit knnen wir die Wellenfrontmenge definieren:

Definition 3.2 (Wellenfrontmenge)
Sei $f \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Distribution. Dann ist ihre *Wellenfrontmenge* definiert als

$$WF(f) := \Big\{(x,k) \in \Omega \times (\hat{\mathbb{R}}^n \setminus 0) \,\Big|\, k \in \Sigma_x(f)\Big\}$$

Aber weshalb ist die Wellenfrontmenge interessant fr uns? Unter anderem liefert sie ein Kriterium, wann das Produkt zweier Distributionen wohldefiniert ist. Und zwar mittels folgendem Satz:

Abb. 1: so ne tolle Faltung

Satz 3.3 (Hrmanders Kriterium)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $f, g \in \mathcal{D}(\Omega)$ Distributionen und es gelte $(x,k) \in WF(f) \Rightarrow (x,-k) \notin WF(g)$. Es sei außerdem $\operatorname{diag} : \Omega \to \Omega \times \Omega;\ x \mapsto (x,x)$. Dann kann das Produkt von f und g definiert werden ber den Pullback mit diag, also

$$fg \coloneqq \operatorname{diag}^*(f \otimes g)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} WF(fg) \subset \big\{(x, k+k') \mid\ & (x,k) \in WF(f) \text{ oder } k = 0, \\ & (x,k') \in WF(g) \text{ oder } k' = 0\big\} \end{aligned}$$

Der Beweis findet sich in Hrmander [6].

Eine gute Anschauung, warum es dieses Kriterium tut, sowie auch dafr warum es eigentlich zu scharf ist, erhlt man, wenn man das Produkt (zumindest lokal) ber die Faltung der Fouriertransformierten definiert. Dann muss dafr gesorgt werden, dass $\hat{f}(k')\hat{g}(k-k')$ fr $|k'| \to \infty$ in alle Richtungen schnell genug abfllt, damit

$$\widehat{fg}(k) = \int \hat{f}(k')\hat{g}(k-k')\,\mathrm{d}k'$$

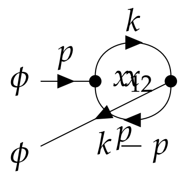
fr alle k existiert. „Schnell genug“ ist aber nicht nur exponentieller Abfall, sondern sogar schon $o(k'^{-n})$. Mehr dazu in **??**.

4 Zweipunktfunktionen, Sternprodukte und all die Physik

In diesem Kapitel wollen wir motivieren, warum die Multiplikation von Distributionen auch fr Physiker eine relevante Fragestellung ist, was getwistete Produkte sind und was sie mit nicht-kommutativer Raumzeit zu tun haben.

4.1 Die Zweipunktfunktionen und warum wir sie potenzieren wollen

In der strungstheoretischen Quantenfeldtheorie entsprechen schon einfache Feynmandiagramme, wie z.B. das in **??** (formal) Integralen ber Produkte von Distributionen, in diesem Fall dem Feynman-Propagator.



$$= \int G_F(x_1, x_2)\, G_F(x_2, x_1) e^{ik(x_1 - x_2)} e^{i(p-k)(x_2 - x_1)}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}k$$

Abb. 2: Ein einfaches Feynman-Diagramm aus der skalaren ϕ^3-Theorie und das entsprechende Integral ber Feynman-Propagatoren

Der Feynman-Propagator in zwei Dimensionen kann geschrieben werden als zeitgeordnete Zweipunktfunktion (vgl. Michael Reed [9]), also

$$G_F(t, x) = \Theta(t)\Delta_m(t, x) + \Theta(-t)\Delta_m(-t, -x) \tag{4.1}$$

Wobei Θ die Heaviside-Funktion bezeichnet und als $\Theta(t) \otimes 1(x)$ zu verstehen ist. Also sind Potenzen des Feynman-Propagators gegeben durch Potenzen der Zweipunktfunktion und der Heaviside-Funktion. Um zu wissen, wo diese Produkte definiert werden knnen, muss man deren Wellenfrontmengen kennen; dann liefert Hrmanders Kriterium **??** ein Kriterium fr die Wohldefiniertheit.

In all dem kann die Zweipunktfunktion Δ_m geschrieben werden als Fouriertransformierte eines positiven Maßes auf der positiven Massenschale H_m (vgl. Schwartz [11], 24.69):

$$\Delta_m(t, x) = \int \delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(-\omega)e^{-i\omega t + ikx}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \tag{4.2}$$

4.2 Sternprodukte und getwistete Faltungen

Die *nicht kommutative Quantenfeldtheorie* beschftigt sich mit Quantenfeldtheorien in der Grßenordnung der *Planck-Skala*. Bei diesen Grßenordnungen wird erwartet, dass die Geometrie der Raumzeit nicht mehr kommutativ ist, sich also Ort und Zeit nicht mehr mit beliebiger Przision messen lassen. Diese Schranken in der Messgenauigkeit lassen sich als Unschrferelation verstehen, ganz analog zur klassischen Unschrferelation zwischen Ort und Impuls.

Bei der Deformationsquantisierung wird das kommutative punktweise Produkt von Funktionen auf dem Phasenraum ersetzt durch ein nicht-kommutatives *Sternprodukt/Moyal-Produkt*, um das nicht-kommutieren von Ort und Impuls zu implementieren. Mehr Details finden sich in Waldmann [12, Kap. 6].

Analog zu dieser Konstruktion ersetzen Doplicher, Fredenhagen und Roberts [3] das kommutative Produkt von Funktionen auf der Raumzeit durch ein Sternprodukt $\star$ auf den Funktionen auf der Raumzeit und erhalten damit eine nicht-kommutative Geometrie. Gemß dem Faltungssatz fr die Fouriertransformierte gibt es auch eine *getwistete Faltung* $\circledast$, s.d. der Faltungssatz erfllt ist. Also

$$\widehat{f \star g}\,(k) = \hat{f} \circledast \hat{g}\,(k)$$

In zwei Dimensionen ist die getwistete Faltung definiert wie folgt:

Definition 4.1 (getwistete Faltung)
Seien $f, g \in$ „passender Funktionen-/Distributionenraum“. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symplektische Matrix. Dann ist die getwistete Faltung $(f \circledast g)(x)$ definiert als

$$(f \circledast g)\,(x) \coloneqq \int f(y) g(x-y) e^{\frac{i}{2}\Omega(x,y)}\,\mathrm{d}y \tag{4.3}$$

Die getwistete Faltung ist also einfach die gewhnliche Faltung, die noch mit einem ortsabhngigen Phasenfaktor verziert wurde.

Wir verwenden die kanonische symplektische Matrix, also $\Omega = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

Durch formale Rechnung, Ausschreiben der e-Funktion als Potenzreihe und nutzen der Fourieridentitten $x\cdot \leftrightarrow i\partial_k$ sieht man, dass das Sternprodukt die Form

Drin lassen oder nicht? Ich verwende es ja nicht, aber ohne fhlt sich unvollstndig an

$$f \star g = fg + \frac{i}{2}\sum_{i,j}\Pi^{ij}(\partial_i f)(\partial_j g) - \frac{1}{8}\sum_{i,j,k,m}\Pi^{ij}\Pi^{km}(\partial_i\partial_k f)(\partial_j\partial_m g) + \dots$$

hat. Dabei ist Π der zu Ω korrespondierende Poisson-Bivektor.

5 Wavelettransformation und die Wellenfrontmenge

Die klassische Fouriertransformation $f(x) \mapsto \int f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$ zerlegt eine Funktion in ihre verschiedenen Frequenzanteile und misst nach dem Satz von Payley-Wiener dabei auch die Regularitt der Funktion. Es gilt nmlich $f \in C^N(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f}(k) = O(k^N)$ fr $|k| \to \infty$. Leider „sieht“ die Fouriertransformation aber nicht, an welchen Punkten x die Funktion f singulr (= nicht glatt) ist. Das hngt damit zusammen, dass die „Basisfunktionen“, die ebenen Wellen, nicht lokalisiert sind. Das Argument der Fouriertransformation k kontrolliert die Richtung und Skala, die von der Basisfunktion e^{-ikx} aufgelst werden. Zustzliche Ortsauflsung der Singularitten gibt uns die

5.1 Wavelettransformation

Einen Schritt in die richtige Richtung, nmlich die Ortsauflsung der Singularitten, macht die Wavelettransformation. Hier wird eine Familie von Basisfunktionen fr $L^2(\mathbb{R}^n)$ erzeugt von einem *Mutterwavelet* ψ. Anders als die ebenen Wellen ist ψ aber lokalisiert – hufig sogar kompakt getragen – und die Basis wird erzeugt durch Verschieben *und* Skalieren des Mutterwavelets.

Eine Hamel-Basis fr $L^2(\mathbb{R}^n)$ die aus Funktionen der Form

$$\left\{\psi_{at}(x) = a^{-\frac{n}{2}}\psi\left(a^{-1}(x-t)\right) \mid t \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}\right\}$$

mit einem *Mutterwavelet* $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ besteht heißt *stetige Waveletbasis* fr $L^2(\mathbb{R}^n)$. Der Parameter t heißt *Verschiebungsparameter* und verschiebt das Wavelet an alle Orte des $\mathbb{R}^n$ whrend der *Skalierungsparameter* a fr $a \to 0$ ψ immer genauer lokalisiert. Der Faktor $a^{-\frac{n}{2}}$ sorgt dafr, dass die L^2-Norm aller ψ_{at} gleich ist. In der Fourierdomne wird die Verschiebung zum Phasenfaktor und der Trger mit verschwindendem a immer *grßer*.

Analog zur Definition der Fouriertransformation ist die stetige Wavelettransformation von f die Projektion auf die Basisfunktionen:

$$\mathcal{W}_f(a,t) = \langle f, \psi_{at} \rangle = a^{-\frac{n}{2}} \int f(x) \psi \left(a^{-1}(x-t) \right) \mathrm{d}x \tag{5.1}$$

Ist ψ eine glatte Funktion und f bei t glatt, so fllt $\mathcal{W}_f(a,t)$ schnell ab fr $a \to 0$. Umgekehrt fllt auch $\mathcal{W}_f(a,t)$ *genau dann* nicht schnell ab, wenn f bei t *nicht* glatt ist. Also lst die Wavelettransformation die Lage der Singularitten von f auf. Allerdings sind die klassischen Wavelettransformationen mit isotroper Skalierung nicht in der Lage die Orientierung der Singularitten aufzulsen. Sie besitzen ja gar keinen Orientierungsparameter.

Kurze Plausibel machen, warum dem so ist?

Um auch die Orientierung aufzulsen, muss einerseits ein Richtungsparameter eingefhrt werden und andererseits dafr gesorgt werden, dass die Basisfunktionen mit immer feinerer Skala immer orientierter werden. Deshalb gibt es

5.2 Verallgemeinerte, gerichtete Wavelets

Beispiele solcher gerichteter Wavelets sind die *Curvelets* von Cands und Donoho [1], die *Shearlets* von Kutyniok und Labate [7] sowie *Contourlets* von Do und Vetterli [2]. Die mit feiner werdender Skala schrfer werdende Orientierung wird in den ersten beiden Fllen durch parabolische Skalierung implementiert. D.h. in Richtung der Orientierung im Fourierraum wird mit a skaliert, whrend in den Richtungen senkrecht dazu mit $\sqrt{a}$ skaliert wird. In zwei Dimensionen gibt es nur eine weitere senkrechte Richtung, aber spter wird deutlich werden, dass dies in mehr Dimensionen die richtige Verallgemeinerung der parabolischen Skalierung sein muss.

Die Richtung der Curvelets wird durch Drehmatrizen implementiert, die auf die Variablen (x_1, x_2) wirken, whrend bei den Shearlets die Variablen (x_1, x_2) geschert werden.

Beide Anstze sind in der Lage, die Wellenfrontmenge einer Distribution zu identifizieren. Allerdings sind die Rechnungen bei den *Shearlets* in der praktischen Umsetzung einfacher, wenn auch von einem sthetischen Standpunkt nicht ganz so befriedigend, da sie nicht inhrent rotationsinvariant sind, also nicht alle Symmetrien unseres Raumes abbilden. Aber nach allzu viel sthetik sollte man in dieser Arbeit, mit Hinblick auf die Rechnungen ab **??**, ohnehin nicht fragen.

Bevor wir die konkrete Konstruktion der Shearlets widmen, brauchen wir noch ein kleines bisschen Theorie, welche Mglichkeiten wir berhaupt haben, um die Konstruktion der Wavelets zu verallgemeinern. Die weitestgehende Verallgemeinerung von „verschiebe und skaliere ein Mutterwavelet" um ein reproduzierendes System zu erhalten ist „verschiebe es und lasse eine beliebge invertierbare Matrix auf die Koordinaten wirken". Wir definieren also eine Wirkung der affinen Gruppe $\mathbb{A}^n$ auf Funktionen $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ via

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) &\to L^2(\mathbb{R}^n) \\ ((M,t), \psi(x)) &\mapsto |\det M^{-\frac{1}{2}}|\psi\left(M^{-1}(x-t)\right) =: \psi_{M,t}(x) \end{aligned}$$

mit

$$(M,t) \in \mathbb{A}^n = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$$

Im Allgemeinen wird man aber nicht die ganze affine Gruppe bentigen, um ein reproduzierendes System zu erhalten, sondern nur alle Verschiebungen und eine Untermenge[1] der $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Wann ein Mutterwavelet und die Wirkung einer solchen Untermenge ein reproduzierendes System erzeugen, sagt uns der nchste Satz:

[1] Auch nicht notwendigerweise Untergruppe

Satz 5.1 (Zulssigkeitskriterium)
Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Sei $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{d}\mu(M)$ ein Maß auf G, im Falle einer Untergruppe z.B. das Haarmaß, und es gelte

$$\Delta(\psi)(k) = \int_G |\hat{\psi}(M^t k)|^2 |\det M| \mathrm{d}\mu(M) = 1 \tag{5.2}$$

fr fast alle $k \in \hat{\mathbb{R}}^2$. Dann ist $(\psi, G \ltimes \mathbb{R}^n)$ ein reproduzierendes System fr $L^2(\mathbb{R}^n)$, also gilt fr alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$f = \int_{\mathbb{R}^n} \int_G \langle \psi_{M,t}, f \rangle \, \psi_{M,t} \, \mathrm{d}\mu(M) \, \mathrm{d}t \tag{5.3}$$

In einer Dimension entspricht das Zulssigkeitskriterium genau Calderons Kriterium:

Bemerkung 5.2 (?? ist Calderon)
Fr $n = 1$ ist $\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ mit dem Haarmaß $\mathrm{d}\mu(a) = \frac{\mathrm{d}\lambda(a)}{a}$ und **??** wird zu

$$\int_0^\infty \left|\hat{\psi}(ak)\right|^2 \frac{\mathrm{d}\lambda(a)}{a} = 1, \quad \text{fr fast alle } k \in \hat{\mathbb{R}} \tag{5.4}$$

?? ist also das mehrdimensionale Analogon zu Calderons Kriterium [8, S. 105].

Jetzt aber mehr Details zur Konstruktion der Shearlets und deren Eigenschaften:

5.3 Konstruktion, Eigenschaften der Shearlets und ein wichtiger Satz

Der folgende Abschnitt basiert grßtenteils auf der Arbeit von Kutyniok und Labate [7]. Da wir spter auch komplexwertige Distributionen analysieren wollen, deren Wellenfrontmenge nicht zwingend punktsymmetrisch um den Ursprung (in der Richtung, nicht im Ort) sind, werden wir Shearlets verwenden, deren Fouriertransformierte asymetrischen Trger hat, indem wir die Shearlets aus [7] jeweils in zwei Shearlets aufteilen, eines mit Trger im Frequenzbereich „nach vorne“, und eines mit Trger „nach hinten“.

Definition 5.3 (Shearlettransformation)
Seien

$$\psi_1 \in L^2(\mathbb{R}) \text{ mit } supp(\hat{\psi}_1) \subseteq \left[\frac{1}{2}, 2\right] \text{ und } \psi_1 \text{ erflle } \mathbf{??}^2 \tag{5.5}$$

$$\psi_2 \in L^2(\mathbb{R}) \text{ mit } supp(\hat{\psi}_1) \subseteq [-1, 1] \text{ und } \|\psi_2\|_2 = 1 \tag{5.6}$$

und $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ implizit definiert durch

$$\hat{\psi}(k_1, k_2) = \hat{\psi}_1(k_1)\hat{\psi}_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right). \tag{5.7}$$

Sei des weiteren

$$G = \left\{ M_{as} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \;\middle|\; M_{as} = \left(\begin{smallmatrix} a & -\sqrt{a}s \\ 0 & \sqrt{a} \end{smallmatrix}\right), a \in [0, 1], s \in [-2, 2] \right\} \tag{5.8}$$

Dann ist fr $t \in \mathbb{R}^n$, $M_{as} \in G$ die Shearlettransformation von f bezglich ψ definiert als

$$\mathcal{S}_f(a, s, t)) = \langle D_{M_{as}} T_t \psi, f \rangle = a^{-\frac{3}{4}} \int f(x) \psi \left(\left(\begin{smallmatrix} a & -\sqrt{a}s \\ 0 & \sqrt{a} \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x-t \end{smallmatrix} \right) \right) \mathrm{d}x \tag{5.9}$$

Bevor es mit dem Text weiter geht, noch eine kurze Bemerkung zu Vereinfachung der Notation:

Bemerkung 5.4 (Notation)
Der Kompaktheit halber schreiben wir auch

$$\psi_{ast}(x_1, x_2) \coloneqq a^{-\frac{3}{4}} \psi \left(\left(\begin{smallmatrix} a & -\sqrt{a}s \\ 0 & \sqrt{a} \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x-t \end{smallmatrix} \right) \right)$$

[2] mit $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $|\det M| d\lambda(M) = \frac{\mathrm{d}a}{a}$

Offenbar knnen ψ_1 und ψ_2 in **??** problemlos auch so gewhlt werden, dass $\hat{\psi}_1$ und $\hat{\psi}_2$ glatt sind; wir stellen in **????** ja keine allzu restriktiven Anforderungen an sie. Dann ist ψ_{ast} eine Schwartz-Funktion fr alle (a, s, t) und die Shearlettransformation temperierter Distributionen ist wohldefiniert. Die Anforderungen aus **????** sind genau so gewhlt, dass **??** von ψ erfllt wird, und gleichzeitig die konkreten Rechnungen zur Bestimmung der Wellenfrontmenge auch analytisch mglich sind.

Der kompakte Trger von $\hat{\psi}$ in der Frequenzdomne erlaubt einfachere Abschtzungen von Ausdrcken der Form $\left\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle$, ist aber m.E. *nicht* zwingend notwendig, um mit diesem Shearlet die Wellenfrontmenge zu bestimmen.

Die Wirkung der Scher- und Skalierungsmatrizen aus **??** versteht man am besten in der Frequenzdomne. Mit $a \to 0$ wird $\hat{\psi}$ immer weiter „weg vom Ursprung“ geschoben in der Frequenzdomne und der Trger liegt gleichzeitig in immer engeren Kegeln. Dies ist genau die Anisotropie, die uns erlaubt, nicht nur die Position der Singularitten, sondern auch ihre Orientierung zu erkennen. Der Parameter s bestimmt die Scherung des Trgers von ψ. Fr $s = 0$ ist der Trger um $k = 0$ herum lokalisiert, fr $s = \pm 1$ um die Diagonale bzw Antidiagonale. Das ist dargestellt in **??** und **??**.

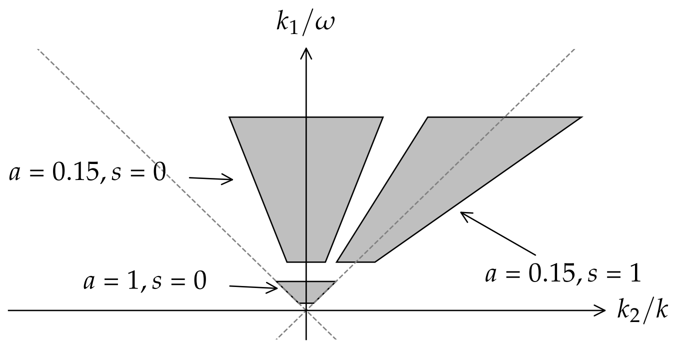


Abb. 3: Der Trger von $\hat{\psi}_{ast}$ fr verschiedene a, s. Man sieht gut, wie $supp(\hat{\psi}_{ast})$ fr kleinere a in immer spitzeren Kegeln liegt. Da wir in den konkreten Rechnungen spter $(k_1, k_2) = (\omega, k)$ nennen werden und Minkowski-Diagramme blicherweise mit ω auf der y-Achse dargestellt werden, haben wir hier beide Namen eingetragen und alles an der Diagonale gespiegelt.

Bemerkung 5.5 (Eigenschaften von $\hat{\psi}_{ast}$)
Im Fourierraum ist $\hat{\psi}_{ast}$ gegeben durch

$$\hat{\psi}_{ast}(k_1, k_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-ikx} \hat{\psi}_1(ak_1) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k_2}{k_1} - s \right) \right) \tag{5.10}$$

und es gilt

$$supp(\hat{\psi}) \subset \left\{ k \in \hat{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; k_1 \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a} \right], \left| \frac{k_2}{k_1} - s \right| \leq \sqrt{a} \right\} \tag{5.11}$$

Eine weitere Eigenschaft, die aus dieser Definition der Shearlets folgt, ist der schnelle Abfall der Shearlets abseits von t:

Proposition 5.6 (ψ_{ast} fllt schnell ab)
Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ein Shearlet wie in **??** und M_{as} wie in **??**. Dann gilt fr alle $N \in \mathbb{N}$, dass es eine konstante C_N gibt s.d. fr alle $t \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} |\psi_{ast}(x_1, x_2)| &\leq C_k \left| \det M_{as} \right|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \left| M_{as}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - t_1 \\ x_2 - t_2 \end{pmatrix} \right|^2 \right)^{-N} \\ &= C_k a^{-\frac{3}{4}} \Big(1 + a^{-2} (x_1 - t_1)^2 + 2a^{-2} s (x_1 - t_1)(x_2 - t_2) \\ &\qquad + a^{-1} \left(1 + a^{-1} s^2 \right) (x_2 - t_2)^2 \Big)^{-N} \end{aligned}$$

Und insbesondere ist $C_N = \frac{15}{2} \frac{\sqrt{a}+s}{a^2} \left(\|\hat{\psi}\|_\infty + \|\triangle^N \hat{\psi}\|_\infty \right)$

Wer bis hier aufmerksam mitgelesen hat und sich **??** genau angeschaut hat, wird bemerkt haben, dass $supp(\hat{\psi}_{ast})$ fr alle a und s quasi nur im Quadranten $x_1^2 \geq x_2^2$ und $x_2 \geq 0$ liegt. Mit den Namen der Physik $(k_1, k_2) = (\omega, k)$ entspricht das dem „Vorwrtslichtkegel“. Glcklicherweise liegen alle analysierten Distributionen im gleich definierten $L(C)^\vee$. Wie der folgende Satz zeigt, erzeugt ψ auch nur fr solche f ein reproduzierendes System.

Satz 5.7 (ψ reproduziert $L^2(C)^\vee$)
Sei

$$C := \left\{ (k_1, k_2) \in \hat{\mathbb{R}}^2 \middle| k_1 \geq 2 \text{ und } \left| \frac{k_2}{k_1} \right| \leq 1 \right\}$$

und

$$L^2(C)^\vee := \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid supp(\hat{f}) \subset C\} \tag{5.12}$$

Dann ist ψ aus **??** ein reproduzierendes System fr $L^2(C)^\vee$, also gilt fr alle $f \in L^2(C)^\vee$:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-2}^{2} \int_{0}^{1} \langle f, \psi_{ast} \rangle \, \psi_{ast}(x) \frac{\mathrm{d}a}{a^3} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t. \tag{5.13}$$

Um nun nicht nur ein reproduzierendes System fr $L^2(C)^\vee$, sondern fr ganz $L^2(\mathbb{R}^2)$ zu erhalten, muss $\hat{\psi}_{ast}$ noch in den rechten, linken und rckwrts liegenden Kegel gedreht und geschoben werden. Zustzlich muss noch eine weitere Funktion W gefunden werden, welche die groben Skalen (also $|k_1|, |k_2| \leq 2$) auflst.

hier ne eigene Definition draus machen?

Wir definieren also

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^{(1)}_{ast}(k_1, k_2) &:= \hat{\psi}_{ast}(k_1, k_2), & \hat{\psi}^{(3)}_{ast}(k_1, k_2) &:= \hat{\psi}_{ast}(-k_1, -k_2), \\ \hat{\psi}^{(2)}_{ast}(k_1, k_2) &:= \hat{\psi}_{ast}(k_2, k_1), & \hat{\psi}^{(4)}_{ast}(k_1, k_2) &:= \hat{\psi}_{ast}(-k_2, -k_1) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Des Weiteren gibt es ein $W(x)$ s.d. $\hat{W}(k) \in C^\infty(\hat{\mathbb{R}}^2)$ und

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\langle f, T_t W \rangle|^2 \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{4} \int |\langle f, \psi_{ast} \rangle| \, \mathrm{d}\mu(a, s, t)$$

und somit erhalten wir (dank Parseval) ein reproduzierendes System fr ganz L^2, da ja $L^2(\mathbb{R}^2) = L^2(\text{grobe Skalen})^\vee \oplus \sum_{i=1}^{4} L^2\left(C^{(i)}\right)^\vee$ ist. Mehr Details dazu finden sich in [7, S. 28 ff].

Das große Versprechen der Shearlettransformation war ja, dass sie in der Lage ist nicht nur Position, sondern auch Orientierung der Singularitten aufzulsen. Dass dem auch so ist, ist Aussage des folgenden Satzes:

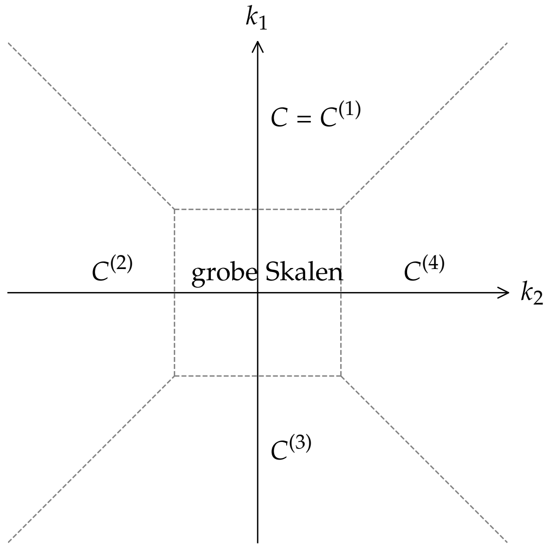


Abb. 4: Aufteilung des Fourierraums in vier Quadranten plus einen Teil fr die groben Skalen. Die Quadranten $C^{(i)}$ entsprechen den Unterrumen von $L^2(\hat{\mathbb{R}}^2)$ die von $\hat{\psi}_{ast}^{(i)}$ reproduziert werden.

Satz 5.8 ($\mathcal{S}_f(a,s,t)$ misst $WF(f)$)
Sei $f \in \mathcal{S}'(C)^{\vee} \cap B(C)^{\vee}$ (wobei $\mathcal{S}(C)^{\vee}$ analog zu $L^2(C)^{\vee}$ definiert ist). Sei $\mathcal{D}$ die Menge der (s,t) s.d. $\mathcal{S}(a,s,t)$ schnell verschwindet. Genauer

$$\mathcal{D} = \Big\{(s_0,t_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1,1] \,\Big|\, \text{ fr } (s,t) \text{ in einer Umgebung } U \text{ von } (t_0,s_0): \\ |S_f(a,s,t)| = O(a^k) \text{ fr } a \to 0, \forall k \in \mathbb{N} \text{ mit } O(\cdot) \text{ gleichmßig ber } (s,t) \in U\Big\}$$

Dann gilt $WF(f)^c = \mathcal{D}$

Bemerkung 5.9
Die Einschrnkung, dass f beschrnkt ist ($f \in B(\mathbb{R}^2)$) ist gravierend und bedeutet zunchst, dass die Shearlettransformation nur bedingt geeignet ist, um Wellenfrontmengen auszurechnen. In **??** soll aber ein Ansatz gegeben werden, wie der Beweis von **??** hoffentlich auf ganz $\mathcal{S}'(C)^{\vee}$ ausgedehnt werden kann. Des Weiteren zeigen ja auch die konkreten Rechnungen an Distributionen mit bereits bekannter Wellefrontmenge, dass die Shearlettransformation diese korrekt erkennt.

Wenn wir die Wellenfrontmenge einer Distribution kennen, kennen wir auch ihren singulren Trger:

Korollar 5.10 ($\mathcal{S}_f(a,s,t)$ misst *sing supp*(ψ))
Sei f wie eben und $\mathcal{R}$ die Projektion von $\mathcal{D}$ auf die Ortskomponente. Also

$$\mathcal{R} = \pi(\mathcal{D}) \ \ ; \quad \pi : (t,s) \mapsto t$$

Dann gilt $sing\ supp(f)^c = \mathcal{R}$

6 Beweis von ??

In [7] wird nur der Beweis von **??** im Detail ausgefhrt. Der Beweis von **??** wird nur skizziert. Deshalb wollen wir diese Lcke hier fllen, wobei das Vorgehen sich natrlich an dem Beweis von **??** orientiert.

Bevor wir mit dem Beweis beginnen knnen, bentigen wir noch ein paar technische Lemmata. Beweise fr diese finden sich, wenn nicht gegeben, in [7].

Lemma 6.1
Sei $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ mit $\|g\|_\infty < \infty$. Nehme an, dass $supp(g) \subset U$ fr ein $U \subset \mathbb{R}^2$ und setze $(U^\delta)^c := \left\{x \in \mathbb{R}^2 | d(x,U) > \delta\right\}$. Dann fllt

$$\hat{h}(k) := \int_0^1 \int_{(B^\delta)^c} \int_{-2}^2 \langle g, \psi_{ast} \rangle \, \hat{\psi}_{ast}(k) \, \mathrm{d}\mu(a,s,t)$$

schnell ab fr $\|k\| \to \infty$.

Der Beweist findet sich in [7] und verwendet die selben Tricks, wie wir bei unserem Beweis von **??**.

Das nchste Lemma ist eine Verfeinerung von Lemma 5.5 in Kutyniok und Labate [7], der Beweis wird deshalb erbracht.

Lemma 6.2
Seien $B(s_0,\Delta) \subset [-2,2]$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ beschrnkt. Nehme an, dass $G(a,s,t)$ schnell abfllt fr $a \to 0$ gleichmßig ber $(s,t) \in B(s_0,\Delta) \times U$. Dann fllt

$$\hat{h}(k) = \int_0^1 \int_U \int_{-2}^2 G(a,s,t)\hat{\psi}_{ast}(k)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}a}{a^3}$$

schnell ab, fr $\|k\| \to \infty$ und $\frac{k_2}{k_1} \in B(s_0,\Delta/2)$.

Beweis
Es sei

$$\Gamma_k = \left\{ a \in [0,1], s \in [-2,2] \;\middle|\; \tfrac{1}{2} \leq a|k| \leq 2, \left| s - \tfrac{k_2}{k_1} \right| \leq \sqrt{a} \right\},$$

also die Menge der a, s s.d. $\psi_{ast}(k) \neq 0$.

Dann knnen wir dank **??** abschtzen

$$|\hat{\psi}_{ast}(k)| \leq C' a^{\frac{3}{4}} \chi_{\Gamma_k},$$

und nach Vorraussetzung gilt auch fr alle $(s,t) \in B(s_0,\Delta) \times U$

$$|G(a,s,t)| \leq C_N a^N, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Außerdem sei $S = B(s_0,\Delta/2)$.

Um $\hat{h}(k)$ abzuschtzen, teilen wir das Integral in die Bereiche auf, in dem G(a,s,t) schnell abfllt und in dem es nicht schnell abfllt:

$$\hat{h}(k) = \underbrace{\int_0^1 \int_U \int_S G(a,s,t)\hat{\psi}_{ast}(k)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}a}{a^3}}_{i)} + \underbrace{\int_0^1 \int_U \int_{[-2,2]\setminus S} G(a,s,t)\hat{\psi}_{ast}(k)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}a}{a^3}}_{ii)}$$

zu *i*)

$$i) \leq \int\limits_0^1 \int\limits_U \int\limits_S |G(a,s,t)| \left|\hat{\psi}_{ast}(k)\right| \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}a}{a^3}$$
$$\leq C_N C' \int\limits_0^1 \int\limits_U \int\limits_S a^{\frac{3}{4}} a^N \chi_{\Gamma_k} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}a}{a^3}$$
$$\leq C_N \int\limits_{\frac{1}{2|k|}}^{\frac{2}{|k|}} a^{N-\frac{9}{4}}\,\mathrm{d}a \;\leq\; C_N|k|^{-N+\frac{7}{4}}$$

$$\implies \quad i) \xrightarrow[a\to 0]{\text{schnell}} 0$$

zu *ii*)

$$ii) \leq \int\limits_0^1 \int\limits_U \int\limits_{[-2,2]\setminus S} |G(a,s,t)||\hat{\psi}_{ast}(k)|\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}a}{a^3}$$
$$\leq C' \int\limits_0^1 \int\limits_U \int\limits_{[-2,2]\setminus S} |G(a,s,t)|\chi_{\Gamma_k} a^{\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}a}{a^3}$$

Fr alle hinreichend großen k ist aber $\Gamma_k \subset S$, also $\Gamma_k \cap [-1,1] \setminus S = \varnothing$ und demnach das Integral 0. Also

$$ii) = 0, \quad \text{fr alle k groß genug}$$

Noch ein letztes Lemma, bevor wir mit dem Beweis beginnen knnen:

Lemma 6.3 (Abschtzungen fr $\langle \phi\psi_{a_0st}, \psi_{a_1s't'}\rangle$)
Sei $\phi \in C_0^\infty(B(t,\delta))$. Dann gilt fr alle $N > 0$

1. Falls $0 \leq \sqrt{a_0} \leq \sqrt{a_1} \leq \delta \leq 1$

$$|\left\langle \phi\psi_{a_0 st}, \psi_{a_1 s' t'} \right\rangle| \leq C_N \left(1 + \frac{a_1}{a_0}\right)^{-N} \left(1 + \frac{|s - s'|^2}{a_1}\right)^{-N} \left(1 + \frac{\|t - t'\|^2}{a_1}\right)^{-N}$$

2. Falls $0 \leq \sqrt{a_0} \leq \delta \leq \sqrt{a_1} \leq 1$

$$|\left\langle \phi\psi_{a_0 st}, \psi_{a_1 s' t'} \right\rangle| \leq C_N \left(1 + \frac{a_1}{a_0}\right)^{-N} \left(1 + \frac{|s - s'|^2}{\delta^2}\right)^{-N} \left(1 + \frac{\|t - t'\|^2}{a_1}\right)^{-N}$$

3. Falls $\sqrt{a_0} \leq \delta \leq a_1 \leq \sqrt{a_1} \leq 1$

$$|\left\langle \phi\psi_{a_0 st}, \psi_{a_1 s' t'} \right\rangle| \leq C_N \left(1 + \frac{\delta}{a_0}\right)^{-N} \left(1 + \frac{\|t - t'\|^2}{\delta}\right)^{-N}$$

Kommen wir nun zu dem Beweis unseres Hauptsatzes:

Beweis (von ??)
Zunchst die einfachere Richtung, nmlich $WF(f)^c \subseteq \mathcal{D}$. Wir nehmen also einen gerichteten regulren Punkt $(s_0, t_0) \in WF(f)^c$ und zeigen, dass er auch in $\mathcal{D}$ liegt. Dazu zerlegen wir f zunchst wie folgt: Da f bei t_0 in Richtung s_0 regulr ist, gibt es per Definition der Wellenfrontmenge ein $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ s.d. $\phi = 1$ in einer Umgebung von t_0 und fr alle $N \in \mathbb{N}$ $\widehat{\phi f} = O(1 + |k|)^{-N}$ fr $\frac{k_2}{k_1}$ in einer Umgebung von s_0. Dementsprechend ist $(1 - \phi)f = 0$ in einer Umgebung von t_0 und es gilt

$$\mathcal{S}_f(a, s, t = \langle \psi_{ast}, \phi f \rangle + \langle \psi_{ast}, (1 - \phi) f \rangle \tag{6.1}$$

Da $(1 - \phi)f$ in einer Umgebung von t_0 verschwindet und nach **??** Shearlets außerhalb von t schnell abfallen fr $a \to 0$ fllt auch der zweite Term von **??** fr $t \neq t_0$ schnell ab. Fr den ersten Term berzeugen wir uns anhand von **????**, dass fr a klein genug $supp(\hat{\psi}_{ast})$ schließlich in jedem noch so kleinen Kegel um s liegt. In einem solchen um s_0 fllt aber $\widehat{\phi f}$ rapide ab nach Vorraussetzung und damit auch der erste Term in (**??**).

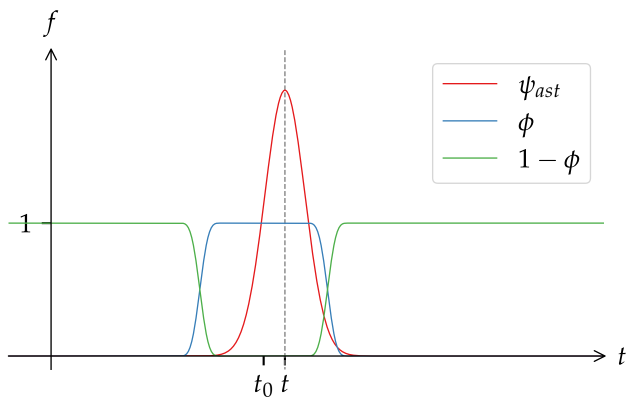


Abb. 5: Die Zerlegung von f um (t_0, x_0) herum visualisiert

Die beiden entscheidenden Zutaten waren hier also die Tatsache, dass die Shearlets außerhalb von t rapide abfallen und damit bei immer feineren Skalen a immer besser lokalisiert werden sowie die Tatsache, dass fr $a \to 0$ der Trger im Frequenzbereich in immer engeren Kegeln liegt.

Deutlich schwieriger ist die umgekehrte Inklusion, nmlich dass die Shearlettransformation tatschlich die ganze Wellenfrontmenge erkennt. Hier geht jetzt auch die Reproduktionseigenschaft der Transformation ein.

Fr die umgekehrte Inklusion $\mathcal{D} \subseteq WF(f)^c$ haben wir zu zeigen, dass falls $\mathcal{S}_f(a,s,t)$ schnell abfllt in einer Umgebung U von (s_0, t_0) fr $a \to 0$ dann auch $\widehat{\phi f}(k)$ schnell abfllt fr $\|(k)\| \to \infty$ fr $\frac{k_2}{k_1}$ in einer Umgebung von s_0 und ein ϕ getragen in einer Umgebung von t_0.

Sei also $\mathcal{S}_f(a,s,t) \xrightarrow[a\to 0]{\text{schnell}} 0$ fr $(s,t) \in B(s_0, 2\Delta) \times B(t_0, 2\delta) =: S \times U$[3]. Sei $\phi \in C_0^\infty(B(t_0,\delta))$ und $\phi \equiv 1$ in einer Umgebung von t_0. Dann mssen wir zeigen, dass $\widehat{\phi f}(k) \xrightarrow[a\to 0]{\text{schnell}} 0$ fr $\frac{k_2}{k_1} \in S$

[3]Falls das ganze gilt fr (s,t) in einer offenen Umgebung von (s_0, t_0), dann auch in solchen Bllen mit passenden Δ, δ

$$
\begin{aligned}
\widehat{\phi f}(k) &= \int \phi(x) f(x) e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(??)}{=} \iint \langle \psi_{ast}, \phi f\rangle\, \psi_{ast}(x)\,\mathrm{d}\mu(a,s,t) e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \langle \psi_{ast'}, \phi f\rangle\, \hat{\psi}_{ast}(k)\,\mathrm{d}\mu(a,s,t) \\
&= \underbrace{\int\limits_{U\times[-2,2]\times[0,1]} \langle \psi_{ast}, \phi f\rangle\, \hat{\psi}_{ast}(k)\,\mathrm{d}\mu(a,s,t)}_{i)} \\
&\quad + \underbrace{\int\limits_{U^c\times[-2,2]\times[0,1]} \langle \psi_{ast}, \phi f\rangle\, \hat{\psi}_{ast}(k)\,\mathrm{d}\mu(a,s,t)}_{ii)}
\end{aligned}
$$

zu *ii)*

Per Konstruktion von ϕ gilt $d(supp(\phi f, U^c)) = \delta > 0$. Also fllt *ii)* nach **??** schnell ab.

zu *i)*

Falls $\langle \psi_{ast}, \phi f\rangle \xrightarrow[a\to 0]{\text{schnell}} 0$ fr $(s,t) \in S \times U$, dann fllt *ii)* schnell ab, falls $\frac{k_2}{k_2} \in B(s_0, \Delta)$ nach **??**. Wir zeigen also, dass $\langle \psi_{ast}, \phi f\rangle \xrightarrow[a\to 0]{\text{schnell}} 0$ fr $(s,t) \in S \times U$.

$$
\begin{aligned}
\langle \phi f, \psi_{ast}\rangle &= \int \phi f \psi_{ast}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \phi(x) \int \langle f, \psi_{a's't'}\rangle\, \psi_{a's't'}(x)\,\mathrm{d}\mu(a',s',t')\, \psi_{ast}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-2}^{2} \langle \phi\psi_{ast}, \psi_{a's't'}\rangle \langle f, \psi_{a's't'}\rangle\,\mathrm{d}s'\,\mathrm{d}t' \frac{\mathrm{d}a'}{a'^3}
\end{aligned}
$$

Fr $a < \delta$[4] teilen wir die Integration ber s' auf in die drei Flle *a)* $0 < a' <$

[4] Und da wir uns fr kleine a interessieren, drfen wir das auch direkt annehmen

$a < \delta$, b) $a < a' < \delta$ und c) $\delta < a'$ und nutzen **??**. Außerdem teilen wir die Integration ber t' auf in die Flle $t' \in U$ und $t' \in U^c$

Zu a)**,** $t' \in U^c$

Hier gilt im Integrationsbereich $\|t' - t\| \geq \delta > 0$. Mit **??**.1) knnen wir fr alle $N \in \mathbb{N}$ abschtzen wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_0^a \int_{U^c} \int_{-2}^2 \langle \phi\psi_{ast}, \psi_{a's't'} \rangle \langle f, \psi_{a's't'} \rangle \, \mathrm{d}s' \, \mathrm{d}t' \frac{\mathrm{d}a'}{a'^3} \\
&\quad \leq \int_0^a \int_{U^c} \int_{-2}^2 C_N \, |\langle f, \psi_{a's't'} \rangle| \left(1 + \frac{\|t - t'\|^2}{a}\right)^{-N} \mathrm{d}\mu(a', s', t') \\
&\quad \leq \int_0^a \int_{U^c} \int_{-2}^2 C_N \, |\langle f, \psi_{a's't'} \rangle| \, a^N \|t - t'\|^{-N} \mathrm{d}\mu(a', s', t') \\
&\quad \leq C_N a^N \int_0^a \int_{U^c} \int_{-2}^2 |\langle f, \psi_{a's't'} \rangle| \, \|t - t'\|^{-N} \mathrm{d}\mu(a', s', t')
\end{aligned}$$

Wobei das letzte Integral endlich ist, da $\|t - t'\| \geq \delta$ im Integrationsbereich und $|\langle f, \psi_{a's't'} \rangle|$ beschrnkt, da f beschrnkt ist. Fr kleinere a kann es nur kleiner werden.

Zu a)**,** $t' \in U$

Eine kurze Erinnerung: Falls $(s', t') \in S \times U$, gilt nach Vorraussetzung fr alle $N \in \mathbb{N}$: $|\langle f, \psi_{a's't'} \rangle| \leq C_N a^N$. Außerdem gilt fr $s' \notin B(s_0, \Delta): \; |s - s'| \geq \Delta$ fr alle s die wir hier betrachten. Also:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^a \int_U \int_{-2}^{2} \langle \phi\psi_{ast}, \psi_{a's't'} \rangle \langle f, \psi_{a's't'} \rangle \,\mathrm{d}\mu(a', s', t') \\
&\quad = \int_0^a \int_U \int_{B(s_0,\Delta)} \text{——}\shortparallel\text{——} \,\mathrm{d}\mu(a', s', t') + \int_0^a \int_U \int_{B(s_0,\Delta)^c} \text{——}\shortparallel\text{——} \,\mathrm{d}\mu(a', s', t') \\
&\quad = \int_0^a \int_U \int_{B(s_0,\Delta)} C_N a^N \,\mathrm{d}\mu(a', s', t') \\
&\qquad + \int_0^a \int_U \int_{B(s_0,\Delta)^c} |\langle f, \psi_{a's't'} \rangle| \left(1 + \frac{|s - s'|^2}{a}\right)^{-N} \mathrm{d}\mu(a', s', t') \\
&\quad \leq C_N a^N + \int_0^a \int_U \int_{B(s_0,\Delta)^c} \langle f, \psi_{a's't'} \rangle \, a^N \Delta^{-2N} \,\mathrm{d}\mu(a', s', t') \\
&\quad \leq C_N a^N
\end{aligned}
$$

Mit analogen Abschtzungen und **??** erhalten wir auch noch, dass auch die Integrale zu *b*) und *c*) schnell abfallen in a.

QED

7 Zwei ntzliche Substitionen fr $\langle \psi_{ast}, f \rangle$

Bemerkung 7.1 (Notation)
Da wir ab jetzt Distributionen aus der Physik betrachten, fr die es blich ist als Variablen (t, x) und als Variablen im Fourierraum (ω, k) zu verwenden, schreiben wir statt (x_1, x_2) ab jetzt (t, x) und statt (k_1, k_2) schreiben wir (ω, k). Außerdem verwenden wir das Minkowski-Skalarprodukt fr die Fouriertransformation d.h.

$$\hat{f}(\omega, k) := \int f(t, x) e^{-i\omega t + ikx} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x,$$

wieder um den Konventionen in der Physik gerecht zu werden.

Zunchst werden wir zwei verschiedene Ausdrcke fr $\langle f, \psi_{ast} \rangle$ im Fourierraum herleiten, welche fast immer Ausgangspunkt fr unsere Abschtzungen sein werden.

Sei also ψ ein Shearlet wie in **??**. Sei f die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\mathcal{S}_f(ast)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\langle f, \psi_{ast} \rangle &= \left\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\omega t + ikx} \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{\omega} - s \right) \right) \hat{f}(\omega, k) \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k\end{aligned}$$

und nach „entscheren“ und „deskalieren“, also der Substitution

$$\begin{aligned} a\omega_1 &= \omega' \\ a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{\omega} - s \right) &= \frac{k'}{\omega'} \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} \omega &= \frac{\omega'}{a} \\ k &= \frac{\omega' s}{a} + a^{-\frac{1}{2}} k' \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k = a^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}\omega' \, \mathrm{d}k'$$

ergibt sich folgendes fr $\langle \psi_{ast}, f \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle f, \psi_{ast} \rangle &= \left\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle \\ &= \iint a^{-\frac{3}{4}} \; \hat{\psi}_1(\omega') \; \hat{\psi}_2 \left(\tfrac{k'}{\omega'} \right) \; \hat{f} \left(\tfrac{\omega'}{a}, \tfrac{\omega' s}{a} + \tfrac{k'}{\sqrt{a}} \right) \; e^{-i \frac{\omega'}{a}(t' + sx') - i \frac{k' x'}{\sqrt{a}}} \, \mathrm{d}\omega' \, \mathrm{d}k' \end{aligned} \tag{Substitution 1, (7.2)}$$

Wie man sieht, tauchen in den Argumente von $\hat{\psi}_1$ und $\hat{\psi}_2$ nun die Parameter a, s, t gar nicht mehr auf, und wir knnen nun verwenden, was wir aus (**??**) ber deren Trger wissen. Alternativ und mit hnlichem Ergebnis kann auch folgende Substitution

$$
\begin{aligned}
a\omega &= \omega' \\
a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega} - s\right) &= k'
\end{aligned}
\qquad \Longleftrightarrow \qquad
\begin{aligned}
\omega &= \frac{\omega'}{a} \\
k &= \left(a^{\frac{1}{2}}k' + s\right)\frac{\omega'}{a}
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

$$
\Rightarrow \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k = a^{-\frac{3}{2}}\omega\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}k'
$$

gewhlt werden, wodurch wieder alle Parameter (a, s, t) aus den Argumenten von $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ verschwinden und sich

$$
\langle f, \psi_{ast}\rangle = \iint a^{-\frac{3}{4}}\; k_1\; \hat{\psi}_1(\omega')\; \hat{\psi}_2(k')\; \hat{f}\left(\tfrac{\omega'}{a}, \omega'\left(a^{-\frac{1}{2}}k' + sa^{-1}\right)\right)\; e^{-i\omega'\left(\frac{t'+sx'}{a} + \frac{k'x'}{\sqrt{a}}\right)}\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}k'
$$

(Substitution 2, (7.4))

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulssig ist, obwohl sie die Orientierung *nicht* erhlt und *keine* Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nmlich $\omega = 0$, liegt nicht im Trger von $\hat{\psi}$.

Beiden Substitution gemein ist aber, dass danach $0 = \omega \notin supp(\hat{\psi})$ und dass $supp(\psi)$ sowohl in k als auch in ω beschrnkt ist. ω kann also sowohl nach unten als auch nach oben durch eine Konstante abgeschtzt werden, wann immer dies der Sache dienlich ist. Auch k kann zumindest nach oben immer durch eine Konstante abgeschtzt werden.

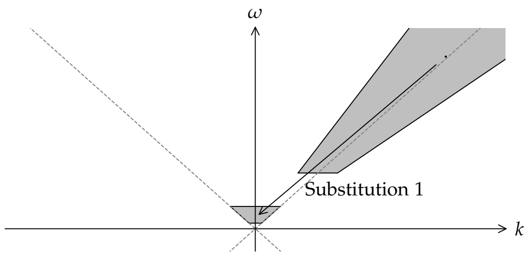


Abb. 6: Der Trger von $\hat{\psi}$ vor und nach der Substitution aus **??**

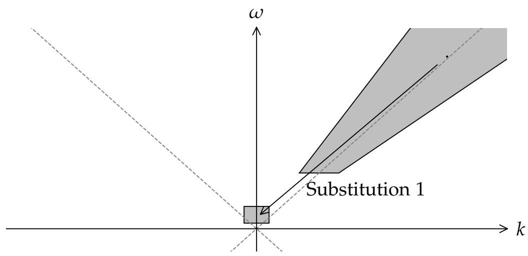


Abb. 7: Der Trger von $\hat{\psi}$ vor und nach der Substitution aus **??**

8 Die Wellenfrontmenge von Δ_m

Nach **??** gilt

$$\Delta_m(t,x) = \int \delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(-\omega)e^{-i\omega t + ikx}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k$$

woraus sich $\widehat{\Delta_m}$ direkt als $\delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(-\omega)$ ablesen lsst.

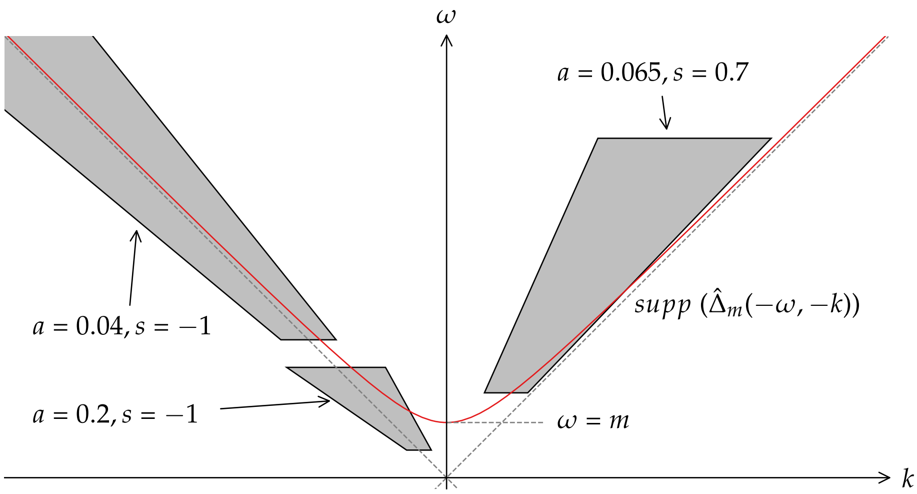


Abb. 8: Die Trger von $\hat{\Delta}_m$ und $\hat{\psi}_{ast}$. Es ist zu sehen, dass fr $a \to 0$ und $s \neq \pm 1$ die Trger schließlich disjunkt sind

Offensichtlich ist $supp(\hat{\Delta}_m) \subset C^{(3)}$, d.h. der entscheidende Beitrag der Shearlettransformation ist

$$\left\langle f, \psi_{ast}^{(3)} \right\rangle = \left\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast}^{(3)} \right\rangle = \left\langle \hat{f}(-\omega,-k), \hat{\psi}_{ast}^{(1)} \right\rangle = \left\langle \hat{f}(-\omega,-k), \hat{\psi}_{ast} \right\rangle$$

Da nach **??** gilt $\psi_{ast}^{(3)}(\omega,k) = \psi_{ast}^{(1)}(-\omega,-k)$. Berechnen wir also letzteres:

<u>**Fall** $s \neq \pm 1$</u>

Hier gibt es nicht viel zu tun, denn fr a klein genug gilt $supp(\hat{\Delta}_m(-\cdot)) \cap supp(\hat{\psi}_{ast}) = \emptyset$ wie man **??** entnehmen kann. Also gilt

$$\begin{aligned}\left\langle \Delta_m, \psi^{(3)}_{ast} \right\rangle &= \left\langle \widehat{\Delta}_m(-\cdot), \hat{\psi}_{ast} \right\rangle \\ &= 0 \\ &= O(a^k)\ \forall k, \quad \text{fr } a \text{ klein genug}\end{aligned} \tag{8.1}$$

Dies gilt fr alle $(t', x') \in \mathbb{R}^2$

<u>**Fall** $s = 1$</u>

Intuition Fr $s = 1$ schneidet die Diagonale $\{\omega = k\}$ den Trger $supp(\hat{\psi}_{ast})$ auf der ganzen Lnge. Der Betrag von $\hat{\psi}_{ast}$ skaliert mit $a^{\frac{3}{4}}$ (vgl. **??**) und die Lnge von $supp(\hat{\psi}_{ast})$ entlang der Diagonalen mit a^{-1} (vgl. **??**). Also erwarten wir schlimmstenfalls $\langle \hat{\Delta}_m, \hat{\psi}_{a1t} \rangle = O\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)$. Aber nur wenn die Wellenfronten von $e^{-i\omega t' + ikx'}$ parallel zu der Singularitt und damit der Diagonalen liegen. Andernfalls erwarten wir, dass die immer schneller werdenden Oszillationen der Phase sich gegenseitig auslschen.

Fleißige Analysis

$$\langle \hat{\Delta}_m, \hat{\psi}_{a1t} \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega} - 1\right)\right)\delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\theta(\omega)e^{-i\omega t' + ikx'} d\omega\, \mathrm{d}k$$

<u>Nullstellen von δ :</u>

$$\omega^2 - k^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\omega^2 - m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}}; \text{ wobei nur „+" in } supp(\hat{\psi}_2) \text{ liegt}$$

$$\begin{aligned}&= a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\omega} - 1\right)\right)\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}} e^{-i\omega t' + i\sqrt{\omega^2 - m^2}x'}\, \mathrm{d}\omega \\ &= a^{\frac{3}{4}} a^{-1} \int \hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2 \underbrace{\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{a\omega^2 - m^2}}{\omega} - 1\right)\right)}_{= \frac{a^{\frac{3}{2}} m^2}{2\omega^2} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - a^2 m^2}} e^{-i\frac{\omega}{a}t' + i\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - m^2}x'}\, \mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

Der Integrand lsst sich nun durch $\hat{\psi}_1(\omega) \cdot \left\|\hat{\psi}_2\right\|_\infty$ majorisieren und wir drfen Lebesgue verwenden um Integral und Grenzwert $a \to 0$ zu vertauschen:

$$
\begin{aligned}
\lim_{a \to o} \left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{\Delta}_m \right\rangle &= a^{-\frac{1}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(0) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} \\
&= a^{-\frac{1}{4}} \hat{\psi}_2(0) \psi_1 \left(\frac{t'-x'}{a}\right) \\
&\sim O\left(a^{-\frac{1}{4}}\right), \quad \text{falls } x' = t' \\
&\sim O\left(a^k\right) \ \forall k, \quad \text{sonst}
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

Das analoge Ergebnis erhlt man mit gleicher Rechnung auch fr $s = -1$ und $t' = -x'$ Dies besttigt das intuitiv erwartete Ergebnis.

8.1 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Fassen wir die Ergebnisse aus **????** noch einmal tabellarisch zusammen:

	$(t', x') = (0, 0)$	$t' = x'$	$t' = -x'$	$t' \neq \pm x'$
s = 1	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	a^k
s = -1	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k
$s \neq \pm 1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tab. 1: Konvergenzordnung von $\left\langle \Delta_m, \psi^{(3)}_{as(t',x'))} \right\rangle$ im Limit $a \to 0$ fr alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

Dies deckt sich auch mit den Ergebnissen von Schulz [10] und Hrmander [6], welche jeweils erhalten:

$$
WF_{(SG)}(\Delta_m) = \{\langle 0, 0; -|k|, k\rangle \ \ | \, k \in \hat{\mathbb{R}}\} \cup \{\langle \pm|x|, x; -\lambda|k|, \mp k\rangle \ \ | \, k \in \hat{\mathbb{R}}, \lambda > 0\}
$$

Zustzlich zu der Wellenfrontmenge erhalten wir aber mit dem Exponenten von a auch noch eine Information „wie schlimm“ die entsprechende Richtung ist. Ein Vergleich mit entsprechenden Begriffen der mikrolokalen Analysis wird in **??** diskutiert.

9 Die Wellenfrontmenge von Θ

Wie in **??** erklrt, sind Potenzen des Feynmanpropagators gegeben durch Potenzen der Zweipunktfunktion Δ_m und der Heaviside-Funktion Θ. Dementsprechend, muss auch die Wellenfrontmenge von Θ berechnet werden, aber dies ist glcklicherweise auch mit unseren Shearlet-Methoden relativ einfach.

Da Θ die Stammfunktion von δ (im distributionellen Sinne) ist, knnen wir die Fouriertransformierte dank der blichen Fourierrechenregeln direkt hinschreiben:[5]

$$\widehat{\Theta(t) \otimes 1(x)}(\omega, k) = \widehat{\Theta}(\omega) \otimes \hat{\delta}(k) = \left(\delta(\omega) + \frac{i}{\omega}\right) \delta(k) \tag{9.1}$$

.

Fall $s \neq 0$

$$supp(\widehat{\Theta(t) \otimes 1(x)}) = \{(\omega, k) \in \hat{\mathbb{R}} | k = 0\}$$

und nach **??**

$$supp(\hat{\psi}) \subset \left\{ k \in \hat{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; k_1 \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right], \left|\frac{k_2}{k_1} - s\right| \leq \sqrt{a} \right\}$$

.

Also gilt fr hinreichend große a:

$$supp(\hat{\psi}_{ast}) \cap supp(\widehat{\Theta(t) \otimes 1(x)}) = \varnothing \implies \left\langle \widehat{\Theta(t) \otimes 1(x)}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle = 0 \tag{9.2}$$

[5] Wieder nur korrekt bis auf Vorfaktoren von 2π

Fall $s = 0$

Mit **??** knnen $\left\langle \hat{\Theta} \otimes \hat{1}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle$ direkt berechnen mit dem Ausdruck fr $\hat{\psi}_{ast}$ aus **??**:

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\Theta} \otimes \hat{1}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle &= a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega}\right)\right)\left(\delta(\omega) + \frac{i}{\omega}\right)\delta(k)e^{-i\omega t' + ikx'}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= \underbrace{a^{\frac{3}{4}}\hat{\psi}_1(0)\hat{\psi}_2(0)}_{=0,\text{ da } \hat{\psi}_1(0)=0} + ia^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2(0)}{\omega} e^{-i\omega t'}\,\mathrm{d}\omega \\
&= ia^{\frac{3}{4}}\hat{\psi}_2(0) \int \underbrace{\frac{\psi_1(\omega)}{\omega}}_{\in C_c^\infty} e^{-i\omega \frac{t'}{a}}\,\mathrm{d}\omega \\
&= O\left(a^{\frac{3}{4}}\right), \quad \text{falls } t = 0 \\
&= O\left(a^k\right) \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{falls } t \neq 0. \qquad (9.3)
\end{aligned}$$

Wobei im letzten Schritt genutzt wurde, dass $\hat{\psi}_1(0) = 0$, $\frac{\hat{\psi}_1(\omega)}{\omega}$ also glatt ist und somit eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

9.1 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Und einmal der vollstndig halber, die Ergebnisse aus **????** tabellarisch dargestellt:

	$t' = 0$	$t' \neq 0$
$s = 0$	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k
$s \neq 0$	a^k	a^k

Tab. 2: Konvergenzordnung von $\mathcal{S}_{\Theta\otimes 1}(a, s, (t', x'))$ im Limit $a \to 0$ fr alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

10 Die Wellenfrontmenge von Δ_m^2

Bevor wir die Wellenfrontmenge von Δ_m^2 berechnen knnen bentigen wir einen Ausdruck dafr, oder besser noch fr die Fouriertransformierte davon.

10.1 $\hat{\Delta}^{*2}$ berechnen

Gemß dem Faltungssatz gilt $\widehat{\Delta_m^2} = \widehat{\Delta_m} * \widehat{\Delta_m} = \widehat{\Delta_m}^{*2}$. Wir mssen also die Faltung von $\widehat{\Delta}_m$ mit sich selber ausrechnen. Dabei gilt (kurze Rechnung):

$$\widehat{\Delta}_m * \widehat{\Delta}_m(-\omega, -k) = \left(\widehat{\Delta}_m(-\cdot) * \widehat{\Delta}_m(-\cdot)\right)(\omega, k)$$

und wir berechnen also letzteren Ausdruck. Das Faltungsintegral ist

noch schnell sage, warum wir hier Faltungsssatz fr Distributionen anwenden? (Also das Hrmander "jupßagt?)

$$\widehat{\Delta}_m^{*2}(-\omega, -k) = \int \Theta(\omega')\delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2)\Theta(\omega - \omega')\delta((\omega - \omega')^2 - (k - k')^2 - m^2)\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}k' \tag{10.1}$$

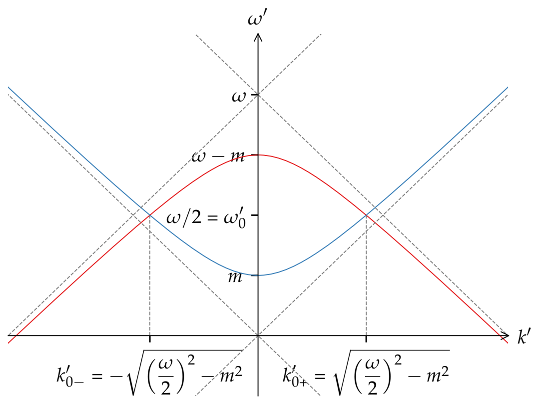


Abb. 9: Das zu berechnende Integral aus **??** visualisiert fr $k = 0$

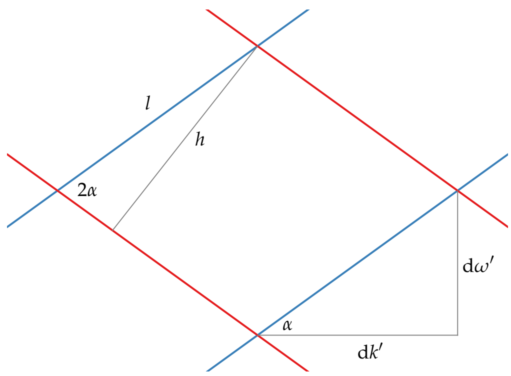


Abb. 10: Die Kreuzungstelle bei k'_{0+} von ganz nah angeschaut

Da Δ_m Lorenz-invariant ist, sind Δ_m^2 und $\widehat{\Delta}_m^{*2}$ es auch. Es gengt also $\widehat{\Delta_m^{*2}}$ fr $k = 0$ und positive ω zu berechnen. Alle anderen Werte holen wir uns dann aus der Lorenz-Invarianz. An **??** sehen wir schon, dass das Faltungsintegral (**??**) nur dann ungleich null ist, wenn (ω, k) oberhalb oder auf der $2m$-Massenschale liegen. Es ist also insbesondere $\omega > 0$.

Um nun das Integral ber zwei sich schneidende lineare[6] δ-Distributionen zu berechnen bedienen wir uns eines Physikertricks und stellen uns die δ-Distribution als Grenzwert ($h \to 0$) einer $\frac{1}{h}$-hohen und h-breiten Rechtecksfunktion vor. Dann ist das Integral ber die sich schneidenden Rechteckfunktionen proportional zu der Schnittflche und damit zu $l \cdot h$ in **??**. Außerdem schneiden sich die beiden Hyperbeln fr $\omega \to +\infty$ in einem rechten Winkel, das Faltungsintegral ergibt hier also 2, da es zwei Schnittpunkte gibt.

Aus **??** lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) = \frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'} \quad \text{und} \quad \frac{h}{l} = \sin(2\alpha) \\ \Rightarrow l = \frac{h}{\sin\left(2\arctan\left(\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'}\right)\right)} = \frac{h\left(\left(\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'}\right)^2 + 1\right)}{2\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'}} \end{aligned} \tag{10.2}$$

außerdem gilt

$$\omega' = \sqrt{k'^2 + m^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'} = \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + m^2}} \tag{10.3}$$

Wenn wir nun **????** sowie die vorhergehenden Gedanken kombinieren erhalten wir

[6] Linear in dem Sinne, dass die Distribution entlang einer Linie getragen ist. Nicht das es eine lineare Distribution ist

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Delta_m}^{*2}(-\omega, 0) &= (\mathbf{??}) \\
&= C \frac{(\mathrm{d}\omega'/\mathrm{d}k')^2\Big|_{k_0'} + 1}{\mathrm{d}\omega'/\mathrm{d}k'|_{k_0'}} \Theta(\omega^2 - (2m)^2) \\
&= C \frac{\sqrt{k_0'^2 + m^2}(2k_0'^2 + m^2)}{2k_0'(k_0^2 + m^2)} \Theta(\dots) \\
&= C \frac{\sqrt{\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2}(\omega^2 - 4m^2 + m^2)}{\sqrt{\omega^2 - 4m^2}(\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2)} \Theta(\dots) \\
&= C \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \Theta(\dots) \overset{C=2}{=} 2 \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \Theta(\dots)
\end{aligned}
\tag{10.4}
$$

Jetzt erhalten wir $\widehat{\Delta}_m^{*2}(\omega, k)$ fr beliebige $k \neq 0$ noch aus der Lorenz-Invarianz:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Delta}_m^{*2}(-\omega, -k) &\overset{(\omega,k)\sim(\sqrt{\omega^2-k^2},0)}{=} \widehat{\Delta}_m^{*2}(\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) \\
&= 2 \frac{\omega^2 - k^2 - 3m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2}\sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}} \Theta(\omega^2 - k^2 - 4m^2)
\end{aligned}
\tag{10.5}
$$

Es ist zu beachten, dass die Heaviside-Funktion genau bei der ersten Nullstelle der zweiten Wurzel im Nenner abschneidet und alle weiteren Nullstellen sowohl des Nenners als auch des Zhlers außerhalb der $2m$-Massenschale, und damit außerhalb des Trgers der Heaviside-Funktion, liegen.

10.2 … und nun zur Wellenfrontmenge

Mit diesem Ausdruck fr $\widehat{\Delta}_m^{*2}$ knnen wir uns nun der Wellenfrontmenge widmen.

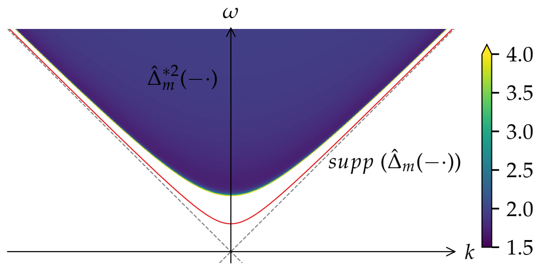


Abb. 11: Plot von $\hat{\Delta}^{*2}_m(-\cdot)$ und $\hat{\Delta}_m(-\cdot)$. Je weiter wir uns von der 2m-Massenschale wegbewegen, desto konstanter wird $\hat{\Delta}^{*2}_m(-\cdot)$ und ist singulr genau auf der $2m$-Massenschale

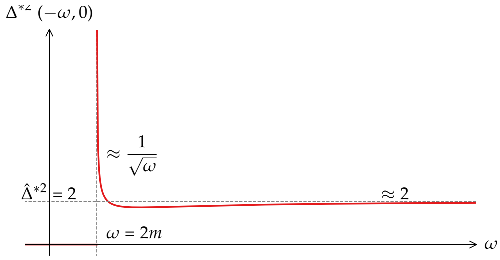


Abb. 12: Plot von $\hat{\Delta}^{*2}_m(-\cdot)\big|_{k=0}$ um das asymptotische Verhalten fr $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ zu verdeutlichen

Fall $|s| > 1$

Genau wie im Fall $s \neq 1$ bei der massiven Zweipunktfunktion (vgl. **??**) ist hier nichts zu tun, da fr a klein genug wieder

$$supp(\hat{\psi}^{(3)}_{ast}) \cap supp(\widehat{\Delta_m^{*2}}) = \varnothing \implies \left\langle \widehat{\Delta_m^{*2}}, \hat{\psi}^{(3)}_{ast} \right\rangle = 0 \tag{10.6}$$

gilt.

Fall $s| < |1$

Hier bedienen wir uns direkt bei **??** und schreiben

$$\left\langle \widehat{\Delta}^{*2}_m, \widehat{\psi}^{(3)}_{ast} \right\rangle = \left\langle \widehat{\Delta}^{*2}_m(-\cdot), \widehat{\psi}_{ast} \right\rangle \tag{10.7}$$

$$= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}}k + sa^{-1}\right)^2 - 3m^2\right)}{\sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}}k + s^{-1}\right)^2} \sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}}k + sa^{-1}\right)^2 - 4m^2}}$$

$$\cdot\, \Theta\left(\omega^2 - k^2 - 4m^2\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)} \omega \,\mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k$$

$$\underset{\Delta s := 1 - s^2 > 0}{=} 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)\cancel{a^{-2}} \left(\omega^2 \left(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2\right) - 3a^2m^2\right) e^{\cdots}\Theta(\ldots)\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}\cancel{a^{-2}}\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2}\sqrt{\Delta s\omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}}\omega^2 ks - a\omega^2k^2 - 4a^2m^2}} \,\mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k$$

Fr hinreichend kleine a knnen wir den Integranden nun majorisieren

$$\left| 2\frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)\omega^2 \Delta s \Theta(\ldots)}{\sqrt{\Delta s}\sqrt{\Delta s \omega^2}} \right|$$
$$\geq \left| \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 \left(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2\right) - 3a^2m^2\right) \Theta(\ldots)}{\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2}\sqrt{\Delta s\omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}}\omega^2 ks - a\omega^2k^2 - 4a^2m^2}} \right|$$

und drfen also Lebesgue verwenden und schreiben

$$\lim_{a\to 0} \int \ldots\ \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k = \int \lim_{a\to 0} \ldots\ \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k$$
$$= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)\ \omega^{\cancel{2}}\ \cancel{\Delta s}\ \Theta(\ldots)}{\cancel{\sqrt{\Delta s}}\cancel{\sqrt{\Delta s \omega}}} e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)} \,\mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k$$
$$\underset{k \to \frac{k}{\omega}}{=} 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\frac{t'-sx'}{a} + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} \,\mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k$$

$$= 2a^{-\frac{3}{4}}\psi\left(\frac{t'-sx'}{a}, \frac{x'}{a}\right)$$

Und da Shearlets nach **??** schnell abfallen erhalten wir schließlich

$$\left\langle \Delta_m^2, \psi_{ast}^{(3)} \right\rangle = 2a^{-\frac{3}{4}}\psi\left(\frac{t'-sx'}{a}, \frac{x'}{a}\right) \tag{10.8}$$
$$\sim O(a^k)\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{falls } (t',x') \neq 0$$
$$\sim O(a^{-\frac{3}{4}}), \quad \text{falls } (t',x') = 0$$

Fall $s = -1$

$$\left\langle \widehat{\Delta_m^{*2}}(-\cdot), \hat{\psi}_{ast} \right\rangle \tag{10.9}$$
$$= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\,\hat{\psi}_2(k)\left(\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2\right) - 3m^2\right)}{\sqrt{\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2\right)}\sqrt{\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2\right) - 4m^2}}$$
$$\cdot\,\Theta\left(\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}} - a^{-1}k^2\right) - 4m^2\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)} \cdot \omega\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k$$
$$= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\,\hat{\psi}_2(k)\,\cancel{a^{-\frac{3}{2}}}\left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2k^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2\right)}{\cancel{a^{-\frac{3}{2}}}\cancel{\omega}\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2}\sqrt{2\omega^2k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2}}$$
$$\cdot\,\Theta\left(2\omega^2k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2\right) \cdot e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)} \cancel{\omega}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k$$
$$= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2(k)\ \left(2\omega^2k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2k^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2\right)\Theta(\ldots)e^{-i\omega k\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2}\sqrt{2\omega^2k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2}}\,\mathrm{d}k \right\}}_{=:\ \hat{f}_a(\omega)}$$
$$\cdot\,\hat{\psi}_1(\omega)e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega$$
$$= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{f}_a(\omega)\,\hat{\psi}_1(\omega)e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega \tag{10.10}$$

Nun mssen wir also $\hat{f}_a(\omega)$ genauer betrachten: $\hat{\psi}_2(k) \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}})$. Θ schneidet genau bei der ersten Nullstelle des Nenners ab. Deshalb verschieben wir durch eine Substitution $k \to k'$ den Integrationsbereich genau so, dass diese Nullstelle bei $k' = 0$ liegt.

Sei also $k_0 := \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega}$ die relevante Nullstelle des Nenners am Integrationsbereich. Dann ist die a-Abhngigkeit von k_0 in erster Nherung gegeben durch $0 < k_0 = \frac{2m^2}{\omega^2} a^{\frac{3}{2}} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) =: c_\omega a^{\frac{3}{2}} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)$ und mit $k' = k - k_0$ gelten folgende Ausdrcke fr den Nenner und den Zhler:

Zhler

$$\begin{aligned}
2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2 &= 2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2 \\
&= 2\omega^2 k' + 2\omega^2 \frac{2m^2}{\omega^2} a^{\frac{3}{2}} + 2\omega^2 O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) \\
&\quad - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2 \\
&= 2\omega^2 k' + a^{\frac{3}{2}} m^2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Nenner

$$\begin{aligned}
\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2}\sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 4m^2} &= \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0)}\sqrt{k' + k_0} \\
&\quad \cdot \underbrace{\sqrt{-a^{\frac{1}{2}}\omega^2\left(k' - \frac{2\sqrt{\omega^2 - 4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega}\right)}}_{=\sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}}\sqrt{k'}
\end{aligned}$$

Nun ist es an der Zeit fr das alte Spiel von „finde eine integrierbare Majorante, um Lebesgue verwenden und alle Terme mit positiver a-Potenz wegschmeißen zu drfen[7]“

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\hat{\psi}_2(k' + k_0)\left(2\omega^2 k' + a^{\frac{3}{2}} m^2 - a^{-\frac{1}{2}}(k' + k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)\right)}{\sqrt{k'}\sqrt{k' + k_0}\sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0)}\sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}}\Theta(k')\right| \\
&\quad \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \frac{\cancel{2}\omega^2 k' + a^{\frac{3}{2}} m^2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}{\sqrt{k' + k_0}\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\sqrt{2}}}\Theta(k')
\end{aligned}$$

[7] so lange sie in einer Summe mit mindestens einem Term *ohne* positive a-Potenz auftauchen

$$\leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \left(\frac{\omega^2 k'}{\sqrt{k'}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}\omega^2 (k'+k_0)^2}{\sqrt{k'+k_0}} + \frac{a^{\frac{3}{2}} m^2}{\sqrt{k'+k_0}} + \frac{O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}{\sqrt{k_0}} \right) \Theta(k')$$

$$= \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \left(\omega^2 \sqrt{k'} - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 (k'+k_0)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{\frac{a^{\frac{3}{2}} m^2}{\sqrt{\frac{2m^2}{\omega^2} a^{\frac{3}{2}} + O(a^{\frac{7}{2}})}}}_{O\left(a^{\frac{3}{4}}\right)} + \dots \right) \Theta(k')$$

$$\leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \Theta(k') \tag{10.11}$$

Der letzte Ausdruck ist eine integrierbare Majorante und in den Abschtzungen wurde u.a. verwendet, das $\hat{\psi}_2$ kompakt getragen und beschrnkt ist. In „const" wurden immer notwendige, aber letzten Endes irrelevante, Vorfaktoren gesammelt, wie z.B. $\|\hat{\psi}_2\|_\infty$.

Der Integrand fr $\hat{f}_a$ konvergiert punktweise (vgl. (**??**))

$$\frac{\hat{\psi}_2(k) \left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2\right) \Theta(\dots) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}} k^2} \sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 4m^2}} \to \hat{\psi}_2(k) \omega \Theta(k) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}} \tag{10.12}$$

und wir knnen also schreiben

$$\begin{aligned}
\hat{f}_a(\omega) \to \hat{f}_0(\omega) &= \int \omega\, \hat{\psi}_2(k)\, \Theta(k)\, e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}}\, \mathrm{d}k \\
&= \omega (\hat{\psi}_2 \cdot \Theta)^\vee (-\omega x'/\sqrt{a}) \\
&= \omega \left(\hat{\psi}_2^\vee * \Theta^\vee\right) (-\omega x'/\sqrt{a}) \\
&= \omega \left(\psi_2 * \left(\delta + i\mathcal{P}(1/x)\right)\right) (-\omega x'/\sqrt{a}) \\
&= \omega \Big[\underbrace{\psi_2(-\omega x'/\sqrt{a})}_{O(a^k)\ \forall k \in \mathbb{N}} + \underbrace{i\, \underbrace{(\psi_2 * \mathcal{P}(1/x))}_{O(x^{-1})} (-\omega x'/\sqrt{a})}_{O((-\omega x'/\sqrt{a})^{-1}) = O\left(a^{\frac{1}{2}}\right)} \Big] \\
&\sim O\left(a^{\frac{1}{2}}\right), \quad \text{falls } x' \neq 0 \\
&\sim \text{const}, \quad \text{falls } x' = 0
\end{aligned} \tag{10.13}$$

Wir drfen also, falls $x' \neq 0$, folgende Abschtzung fr $\hat{f}_a(\omega)$ fr $a \to 0$ machen:

$$\hat{f}_a(\omega) = \omega C a^{\frac{1}{2}} + o\left(a^{\frac{1}{2}}\right)$$

Setzen wir dies nun wieder in unseren letzten Ausdruck in **??** ein, erhalten wir endlich

hier fehlen wenn man es ganz genau nimmt noch $O(a^{\frac{7}{2}})$-Terme. Wird da noch eine Bemerkung zu geschrieben, oder nehme ich die ganz brav mit?

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\Delta}_m^{*2}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\omega C a^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1(\omega)}_{\in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}})} e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}\right)} \, \mathrm{d}\omega \\
&= 2a^{-\frac{1}{4}} C \left(\omega \hat{\psi}_1(\omega)\right)^\vee \left(-\frac{t'+x'}{a}\right) \\
&\sim O(a^{-\frac{1}{4}}), \quad \text{falls } t' = -x' \neq 0 \\
&\sim (a^{-\frac{3}{4}}), \quad \text{falls } t' = 0 = x' \\
&\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}
\end{aligned} \tag{10.14}$$

10.3 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Wenn wir die Ergebnisse aus **??????** zusammenfassen, erhalten wir fr die Wellenfrontmenge von $\widehat{\Delta}_m^{*2}$:

	$(t', x') = 0$	$t' = x' \neq 0$	$t' = -x' \neq 0$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	a^k
$s = -1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	a^k	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k
$\lvert s \rvert < 1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	a^k	a^k	a^k
$\lvert s \rvert > 1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tab. 3: Konvergenzordnung von $\left\langle \Delta_m^2, \psi_{as(t',x')}^{(3)} \right\rangle$ im Limit $a \to 0$ fr alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

Erfreulicherweise deckt sich dies wieder mit den Ergebnissen von Schulz [10, Cor. 3.70], welcher fr allgemeine Potenzen von Δ_m folgendes erhlt:

$$WF^{\psi}_{SG}(\Delta^k_m) \subset WF^{\psi}_{SG}(\Delta_m) \cup \{\langle 0,0;-\lambda,|x|\rangle \;|\; |x| \in \hat{\mathbb{R}}, \lambda > |x|\}$$

11 Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m^{\star 2}$

Bevor wir uns aber der Wellenfrontmenge widmen knnen, brauchen wir einen Ausdruck fr die Fouriertransformierte $\widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}$ von $\Delta_m^{\star 2}$.

11.1 $\hat{\Delta}_m^{\circledast 2}$ berechnen

Auch fr die getwistete Faltung ist schnell nachgerechnet, dass

$$\widehat{\Delta_m} \circledast \widehat{\Delta_m}(-\omega,-k) = \overline{\left(\widehat{\Delta_m}(-\cdot) \circledast \widehat{\Delta_m}(-\cdot)\right)}(\omega,k).$$

Wie wir spter sehen werden, ist die komplexe Konjugation irrelevant, da alles reell.

$$\widehat{\Delta}_m(-\cdot) = \delta(\omega^2 - k^w - m^2)\Theta(\omega) \tag{11.1a}$$

die Fouriertransformierte der massiven Zweipunktfunktion

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.1b}$$

die kanonische symplektische Matrix auf $\mathbb{R}^n$

mit **??????** erhalten wir also

$$\widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}(-\omega,-k) = \int \delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2)\delta((\omega'-\omega)^2 - (k-k')^2 - m^2) \cdot \Theta(\omega')\Theta(\omega-\omega')e^{\frac{i}{2}(\omega' k - \omega k')}\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}k' \tag{11.2}$$

und damit das selbe Integral wie in **??** bis auf einen zustzlichen Phasenfaktor. Nachdem wir gezeigt haben, dass auch dieser Lorentz-Invariant ist, knnen wir das Integral mit dem selben Trick wie in **??** berechnen.

Proposition 11.1 ($\boldsymbol{\Omega_{std}}$ ist Lorentz-invariant fr $\boldsymbol{n = 2}$)
Ω_{std} ist Lorentz-invariant fr $n = 2$

Beweis
Eine einfache Rechnung zeigt

$$\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ -\sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\beta & -\sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

fr alle $\beta \in \mathbb{R}$.

Mit **??** ist $\widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}$ Lorentz-Invariant und es reicht aus $\widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}(\omega, 0)$ zu berechnen.

Die beiden Kreuzungspunkte der δ-Distributionen liegen bei (vgl. **??**)

$$\left(\omega_0', k_{0\pm}'\right) = \left(\frac{\omega}{2}, \pm\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - m^2}\right)$$

Die „Flche" der Kreuzungspunkte der δ-Distributionen wurde in **??** berechnet und ist

$$A = \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}}.$$

Der Phasenfaktor nimmt bei den Kreuzungspunkten folgende Werte an:

$$e^{\frac{i}{2}\Omega\left((\omega,k),(\omega_0',k_{0\pm}')\right)} = e^{\pm\frac{i}{2}\left(-\omega^2\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{\omega^2}}\right)}$$

Kombinieren wir also die vorhergehenden Resultate erhalten wir

$$\widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}(-\omega, 0) = Ae^{\frac{i}{2}\Omega\left((\omega,k),(\omega_0',k_{0+}')\right)} + Ae^{\frac{i}{2}\Omega\left((\omega,k),(\omega_0',k_{0-}')\right)}$$

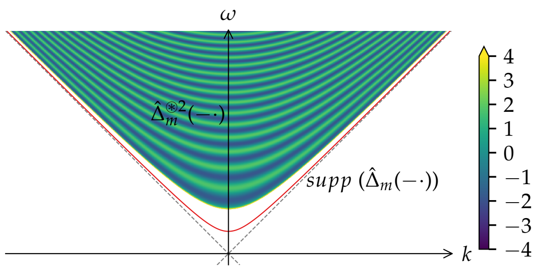


Abb. 13: Plot von $\hat{\Delta}^{\circledast 2}_m(-\cdot)$ und $\hat{\Delta}_m(-\cdot)$. Wieder liegt der Trger von $\hat{\Delta}^{\circledast 2}_m(-\cdot)$ oberhalb der $2m$-Massenschale.

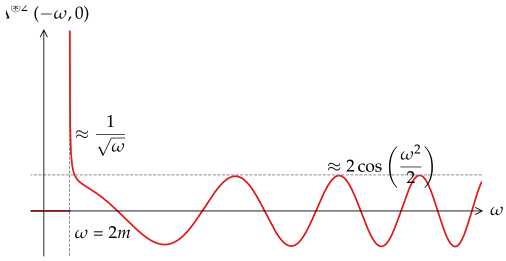


Abb. 14: Plot von $\hat{\Delta}^{\circledast 2}_m\big|_{k=0}(-\cdot)$ um das asymptotische Verhalten fr $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ zu verdeutlichen

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \left\{ e^{-\frac{i}{2}\omega^2\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{\omega^2}}} + e^{\frac{i}{2}\omega^2\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{\omega^2}}} \right\} \Theta\left(\omega^2 - 4m^2\right) \\
&= 2\frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \cos\left(\varphi(\omega^2)\right) \Theta\left(\omega^2 - 4m^2\right),
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt noch implizit $\varphi(\omega^2)$ definiert wurde. Und mit Lorentz-Invarianz erhalten wir schließlich

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}(-\omega, -k) &= \widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}(-\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) \\
&= 2\frac{\omega^2 - k^2 - 3m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2}\sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}} \cos\left(\frac{k^2 - \omega^2}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{k^2 - \omega^2}}\right) \\
&\qquad \cdot \Theta\left(\omega^2 - k^2 - 4m^2\right) \\
&= \widehat{\Delta_m}^{*2}(\omega, k) \cos(\varphi(\omega^2 - k^2))\Theta\left(\omega^2 - k^2 - 4m^2\right),
\end{aligned}
\tag{11.3}
$$

11.2 ... und nun zur Wellenfrontmenge von $\hat{\Delta}_m^{\circledast 2}$

<u>**Fall** $|s| > 1$</u>

Wir bedienen uns wieder genau des selben Arguments, wie in **??** und drfen direkt schreiben:

$$\left\langle \widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}, \hat{\psi}_{ast}^{(3)} \right\rangle = \left\langle \widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}(-\cdot), \hat{\psi}_{ast} \right\rangle = 0, \quad \text{fr alle } a \text{ klein genug} \tag{11.4}$$

<u>**Fall** $|s| < 1, (x,t) \neq 0$</u>

Da $\widehat{\Delta_m}^{\circledast 2} = \widehat{\Delta_m}^{*2} \cos(\dots)$ knnen wir direkt mit dem Ausdruck (**??**) $\cdot \cos$ weiter arbeiten und genau die selben Abschtzungen machen. $\cos(\varphi)$ ist bekanntermaßen beschrnkt.

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}, \widehat{\psi}_{ast}^{(3)} \right\rangle &= \left\langle \widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}(-\cdot), \widehat{\psi}_{ast} \right\rangle \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 \left(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2\right) - 3a^2m^2\right)}{\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2}\sqrt{\Delta s\omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}}\omega^2 ks - a\omega^2k^2 - 4a^2m^2}} \\
&\quad \cdot \Theta(\cdots)\cos(\varphi(\omega^2 - k^2))e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \\
&\leq 2a^{-\frac{3}{4}} \int \omega\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \\
&\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{11.5}$$

<u>**Fall** $|s| < 1, (x,t) = 0$</u>

In diesem Fall lassen wir den cos-Faktor in **??** in der ersten Ungleichung nicht heraus fallen, dafr wird der $e^{\cdots}$-Faktor 1. Den cos-Faktor schreiben wir als Summe von e-Funktionen und erhalten

$$\left\langle \widehat{\Delta}_m^{\circledast 2}(-\cdot), \widehat{\psi}_{ast} \right\rangle \tag{11.6}$$

$$= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \omega \hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2(k) \left\{ \exp\left(ia^{-2}\frac{\omega^2(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{a^2m^2}{\omega^2(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}} \right) + \exp(-i\cdots) \right\} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k$$

$$= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \cancel{\sqrt{\omega}}\hat{\psi}_1(\sqrt{\omega})\hat{\psi}_2(k) \left\{ \exp\left(ia^{-2}\frac{\omega(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{a^2m^2}{\omega(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}} \right) + \mathrm{c.c.} \right\} \frac{\mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k}{\cancel{\sqrt{\omega}}}$$

$$= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \left\{ \int \hat{\psi}_1(\sqrt{\omega}) \left\{ \exp\left(ia^{-2}\left(\frac{\omega \Delta s}{4} + O\left(a^{\frac{1}{2}}\right) \right) \right) + \mathrm{c.c.} \right\} \mathrm{d}\omega \right\} \hat{\psi}_2(k)\, \mathrm{d}k$$

$$= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ (\hat{\psi}_1 \circ \sqrt{\cdot})^\vee \left(\frac{\Delta s}{4a^2} \right) + (\hat{\psi}_1 \circ \sqrt{\cdot})^\vee \left(-\frac{\Delta s}{4a^2} \right) + \mathrm{c.c.} \right\}}_{\sim O(a^k)\ \forall k \in \mathbb{N}} \psi_2(k)\, \mathrm{d}k$$

$$\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

wobei bei der Substition $\omega \to \sqrt{\omega}$ in der zweiten Zeile wichtig ist, dass $0 \notin supp(\hat{\psi}_1)$, also auch nach der Substitution noch $\hat{\psi}_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ist.

<u>**Fall** $s = -1$</u>

Da $\widehat{\Delta}_m^{\circledast 2} = \widehat{\Delta}_m^{*2} \cos(\dots)$ ist, haben wir bis auf den cos-Faktor die selben Analysis zu betreiben, wie fr $\widehat{\Delta}_m^{*2}$.

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \widehat{\Delta}_m^{\circledast 2}(-\cdot), \widehat{\psi}_{a-1t} \right\rangle \\
&\quad = 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\frac{\hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2(k'+k_0)\left(2\omega^2(k'+k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2\right)\Theta(k')}{\sqrt{k'}\sqrt{k'+k_0}\sqrt{2-a^{\frac{1}{2}}(k'+k_0)}\sqrt{-a^{\frac{1}{2}}\omega^2\left(k' - \frac{2\sqrt{\omega^2-4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega}\right)}}}_{i)} \\
&\qquad \cdot \cos \underbrace{\left(\frac{2\omega^2(k'+k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0)^2}{2a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{2\omega^2(k'+k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0)^2}}\right)}_{ii)} \\
&\qquad \cdot e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a} + \frac{(k'+k_0)x'}{\sqrt{a}}\right)} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k'
\end{aligned}
\tag{11.7}
$$

Genau wie in **??** knnen wir fr *i*) wieder abschtzen[8]

$$
i) \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}}\Theta(k')
$$

Damit drfen wir wieder Lebesgue anwenden, um den Grenzwert $a \to 0$ des Integrals zu berechnen. Des Weiteren ist analog zu **??**

$$
i) \overset{\text{punktweise f..}}{\longrightarrow} \omega\,\hat{\psi}_1(\omega)\,\hat{\psi}_2(k')\Theta(k'). \tag{11.8}
$$

Widmen wir uns also dem Argument des Kosinus *ii*):

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\omega^2(k'+k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0)^2}{2a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{2\omega^2(k'+k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0)^2}} \\
&= \frac{\omega^2(k'+k'0)(2 - a^{\frac{1}{2}}(k_+k_0))}{2a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{\omega^2(k'+k_0)(a^{\frac{1}{2}}(k'+k_0)-2)}} \\
&\overset{\text{punktweise, außer } k'=0}{\longrightarrow} \frac{\omega^2 k' a^{-\frac{3}{2}}}{2}
\end{aligned}
$$

[8] Da cos beschrnkt ist, spielt er bei den Abschtzungen keine Rolle

$$\Longrightarrow \quad \cos\left(ii\right)) \overset{\text{punktweise, außer } k'=0}{\longrightarrow} \cos\left(\frac{\omega^2 k' a^{-\frac{3}{2}}}{2}\right) \tag{11.9}$$

Einsetzen von **????** in **??** ergibt mit Lebesgue

$$\begin{aligned}
&\lim_{a \to 0} \left\langle \widehat{\Delta}_m^{\circledast 2}(-\cdot), \widehat{\psi}_{a-1t} \right\rangle \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \omega\, \hat{\psi}_1(\omega)\, \hat{\psi}_2(k') \cos\left(a^{-\frac{3}{2}} \frac{\omega^2 k'}{2}\right) e^{-i\omega k' \frac{x'}{\sqrt{a}}} e^{-i\omega \frac{t'+x'}{a}}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k' \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \hat{\psi}_2(k')\Theta(k') \left(e^{ia^{-\frac{3}{2}} \frac{\omega^2 k'}{2}} + e^{-i\cdots} \right) e^{-i\omega k' \frac{x'}{\sqrt{a}}}\, \mathrm{d}k' \right\}}_{=:\hat{f}_a(\omega)} \cdot \omega \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \frac{t'+x'}{a}}\, \mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir $\hat{f}_a(\omega)$ und erhalten analog zu **??**

$$\begin{aligned}
\hat{f}_a(\omega) &= \int \hat{\psi}_2(k')\Theta(k') \left(e^{ia^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\omega^2 k'}{2} + O(a^1) \right)} + e^{-i\cdots} \right) \mathrm{d}k \\
&\overset{a\to 0}{\longrightarrow} \int \hat{\psi}_2(k')\Theta(k') \left(e^{ia^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\omega^2 k'}{2} \right)} + \text{c.c} \right) \mathrm{d}k' \\
&= \Bigg[\underbrace{\psi_2\left(-\frac{\omega^2}{2a^{\frac{3}{2}}} \right)}_{O(a^k)\ \forall k \in \mathbb{N}} + \underbrace{i \underbrace{(\psi_2 * \mathcal{P}(1/x))}_{O(x^{-1})} \left(-\frac{\omega^2}{2a^{\frac{3}{2}}} \right)}_{O\left(\left(-\frac{\omega^2}{2a^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right) = O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)} + \text{c.c} \Bigg] \\
&\sim O\left(a^{\frac{3}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Also drfen wir fr $a \to 0$ schreiben $\hat{f}_a(\omega) = Ca^{\frac{3}{2}} + o\left(a^{\frac{3}{2}}\right)$ und landen bei

$$\begin{aligned}
\lim_{a \to 0} \left\langle \widehat{\Delta}_m^{\circledast 2}, \widehat{\psi}_{a-1t}^{(3)} \right\rangle &= a^{-\frac{3}{4}} \int C a^{\frac{3}{2}} \omega \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \frac{t'+x'}{a}}\, \mathrm{d}\omega \\
&\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right), \quad \text{falls } t' = -x' \\
&\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}
\end{aligned} \tag{11.10}$$

11.3 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Fassen wir die Ergebnisse aus **????????** wieder in einer bersichtstabelle zusammen:

	$(t', x') = 0$	$t' = x' \neq 0$	$t' = -x' \neq 0$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{\frac{3}{4}}$	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k	a^k
$s = -1$	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k
$\lvert s\rvert < 1$	a^k	a^k	a^k	a^k
$\lvert s\rvert > 1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tab. 4: Konvergenzordnung von $\left\langle \Delta_m^{\star 2}, \psi_{ast}^{(3)} \right\rangle$ im Limit $a \to 0$ fr alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

Auch diesmal stimmen die Ergebnisse mit denen von Schulz [10, Prop. 3.72][9] berein, welcher fr alle Potenzen des getwisteten Produkts $\Delta_m^{\star k}$ erhlt:

$$\langle t, x; \omega, k \rangle \in WF(\Delta_m^{\star k}) \Rightarrow -\omega \geq |k|$$

12 Berechnen von $WF(G_F)$

12.1 Ausdrcke fr $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$

Der Feynmanpropgator ist einerseits definiert durch **??**, kann aber im Impulsraum auch geschrieben werden als (Schwartz [11], (6.34))

$$\hat{G}_F(\omega, k) = \frac{1}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \tag{12.1}$$

Setzen wir dies in unsere Ausdrcke fr $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ aus **??** bzw. **??** ergibt sich, unter Verwendung des Minkowskiskalaprodukts,

[9] So weit sie gegeben wurden

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle &= \int \hat{\psi}_{ast}(\omega, t)\ \hat{G}_F(\omega, t)\ \ \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(a\omega)\ \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\frac{k}{\omega} - s\right)\ e^{-i\omega t' + ikx'}}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{w}\right)\ e^{-i\omega\frac{t'-sx'}{a} + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{\omega s}{a} + \frac{k}{\sqrt{a}}\right)^2 - i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint\limits_{\substack{\omega \in [-2,-\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},2] \\ \left|\frac{k}{2} - s\right| \le \sqrt{ax}}} \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\frac{t'-sx'}{a} + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 + a^{-2}\omega^2(s^2 - 1) + a^{-\frac{3}{2}}2s\omega k + a^{-1}k - i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \qquad (12.2)
\end{aligned}
$$

Integral hbsch machen. Grßeres Integralzeichen?

und mit der anderen Substitution analog

$$
\left\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle = a^{-\frac{3}{4}} \iint\limits_{\substack{|\omega|\ \in\ [\frac{1}{2},2] \\ k\ \in\ [-1,1]}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + \frac{kx'}{\sqrt{a}}\right)}}{m^2 - \omega^2(a^{-2}(1 - s^2) - a^{-1}k^2 - 2ksa^{-\frac{3}{2}})}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \qquad (12.3)
$$

wobei sich die Integrationsbereiche aus den Forderungen an den Trger von ψ (vgl. (**??**)) ergeben.

<u>**Fall** $s = 1, t' = 0 = x'$</u>

Nach (**??**) erhalten wir mit $s = 1, t' = 0 = x'$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{a10} \right\rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{m^2 + \omega^2(a^{-1}k^2 + a^{-\frac{3}{2}}2k)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= \int a^{\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + \omega^2(a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2k)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k
\end{aligned}
$$

Da aber $|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2]$ und $k \in [-1, 1]$ ist, ist fr hinreichend kleine a (und fr genau die interessieren wir uns ja)

$$\left| \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{k\omega^2} \right| \geq \left| \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}} m^2 + a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k + 2k\omega^2} \right|$$

eine integrierbare (im Sinne des Cauchy-Hauptwertes) Majorante fr den Integranden.

Wir drfen uns also des Lebesgueschen Konvergenzsatzes bedienen und schreiben

$$\lim_{a \to 0} \left\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{2k\omega^2}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \sim O(a^{\frac{3}{4}}) \tag{12.4}$$

Fr $s = -1$ erhalten wir genau das selbe Ergebniss, da ja der $\omega^2(1 - s^2)$-Term im Nenner genauso wieder verschwindet.

Fall $s \neq \pm 1, t' = 0 = x'$

In diesem Fall verschwindet der $\omega^2(1 - s^2)$-Term im Nenner nicht und dementsprechend folgt

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{as0} \right\rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{m^2 - \omega^2((1 - s^2) - a^{-1}k^2 - a^{-\frac{3}{2}} 2k)}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \\ &= \int a^{\frac{5}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^2 m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2 k^2 + a^{\frac{1}{2}} 2\omega^2 ks}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \end{aligned}$$

Analog zum vorigen Teil ist, diesmal sogar ohne den Cauchy-Hauptwert bemhen zu mssen,

berall wo es sein muss $\lim_{a \to 0}$ dazu schreiben, oder sagen dass der Limit berall impliziert ist

$$\left| \frac{2\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1 - s^2)} \right| \geq \left| \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^2 m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2 k^2 + a^{\frac{1}{2}} 2\omega^2 ks} \right|$$

dass eine integrierbare Majorante ist (in der Tat ja sogar in $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$) Damit knnen wir folgende Abschtzung treffen:

$$\lim_{a\to 0}\left\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{as0}\right\rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{2\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \sim O(a^{\frac{5}{4}}) \tag{12.5}$$

<u>**Fall** $s \neq \pm 1, (t', s') \neq 0$</u>

In diesem Fall benutzen wir wieder die erste Substitution (**??**) und klammern wie schon in den beiden vorigen Teilen die hchste negative Potenz von a im Nenner aus.

$$\Rightarrow\ \left\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{ast}\right\rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^2m^2-\omega^2(1-s^2)+a^{\frac{1}{2}}s\omega k+ak^2}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \tag{12.6}$$

und da immer noch $0 \notin supp(\psi_1)$ gilt ist ein weiteres mal eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$2\frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \tag{12.7}$$

In der Tat ist sogar

$$\hat{f}(\omega,k) := \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}}^2) \tag{12.8}$$

da ψ_1 und ψ_2 getragen sind. Demnach ist die Fourierinverse von $\hat{f}$, $f := (\hat{f})^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, also schnell fallend. Damit knnen wir schließlich abschtzen

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{ast}\right\rangle\right| &= a^{\frac{5}{4}} \left| \int \hat{f}(\omega, k)\, e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \right| \\
&= a^{\frac{5}{4}} \left| f\left(\frac{t'-sx}{a}, \frac{x'}{\sqrt{a}}\right)\right| \leq a^{\frac{5}{4}} C_k \left(1 + \left\| \binom{(t'-sx')/a}{x'/\sqrt{a}} \right\|\right)^{-k} \\
&\leq a^{\frac{5}{4}} \frac{C_k}{2} a^{\frac{k}{2}} \left\| \binom{(t'-sx')}{x'} \right\|^{-k} \sim O\left(a^{\frac{5/2+k}{2}}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \left|\left\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{ast}\right\rangle\right| \sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{12.9}
$$

Fall $s = 1, (t', x') \neq 0$

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder den ersten Ausdruck fr $\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle$ aus (**??**) und sorgen wir auch bisher jedes Mal dafr, dass wir im Nenner nur noch positive Potenzen von a und einen von a unabhngigen Term haben. Dann sieht das ganze so aus:

$$
\left\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{a1t}\right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^{\frac{3}{2}} m^2 + a^{\frac{1}{2}} k^2 + 2\omega k}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k
$$

wo wir im $\lim_{a\to 0}$ wieder doe a-Potenzen im Nenner weg fallen lassen und auch dieses Mal dafr wieder den Cauchy-Hauptwert bemhen mssen, um den Lebesgueschen Konvergenzsatz benutzen zu drfen. Weiter geht's:

$$
\begin{aligned}
&= a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2\omega k}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \\
&= a^{\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2k\omega}\, \mathrm{d}k \right\}}_{=:\hat{f}_a(\omega)} \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)}\, \mathrm{d}\omega
\end{aligned} \tag{12.10}
$$

und um hier weiter zu kommen, schauen wir uns $\hat{f}_a$ genauer an. Sei dazu $\Psi_2(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \psi_2(\omega')\,\mathrm{d}\omega' - \int_{\omega}^{+\infty} \psi_2(\omega')\,\mathrm{d}\omega'$ eine Stammfunktion von ψ_2. Dies ist offenbar C^∞ und beschrnkt, da $\hat{\psi}_2 \in C_c^\infty$. Mithilfe von Fourieridentitten und Substitution knnen wir nun weiter rechnen:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_a(\omega) &= \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{2k\omega} e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}\omega \\
&\overset{i)}{=} \int \frac{\hat{\psi}_2(k)}{2k} e^{ik\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}\omega \\
&\overset{ii)}{=} \frac{i}{2}\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)
\end{aligned}$$

Hier wurde in *i)* einfach $k \to \omega k$ substituiert und im Schritt *ii)* wurde genutzt, dass $f(x) = \mathrm{sgn}(x) \leftrightarrow \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k}$. Nun stecken wir diese Erkenntnisse in unseren vorigen Ausdruck und erhalten

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{a1t} \right\rangle &= \frac{ia^{\frac{3}{4}}}{2} \int \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)\ \hat{\psi}_1(\omega)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right), \quad \text{fr } \mathrm{t'=x'} \\
&\sim O\left(a^{k}\right)\ \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}
\end{aligned} \tag{12.11}$$

Im letzten Schritt wurde wieder genutzt, dass $\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)\ \hat{\psi}_1(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, und demnach eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

12.2 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Fassen wir wie bisher schon die Ergebnisse aus**????????** wieder in einer bersichtstabelle zusammen:

Das analoge Ergebnis erhlt man auch fr $s = -1$ und $t' = -x'$

	$(t', x') = (0, 0)$	$t' = x'$	$t' = -x'$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{\frac{3}{4}}$	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k	a^k
$s = -1$	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k
$s \neq \pm 1$	$a^{\frac{5}{4}}$	a^k	a^k	a^k

Tab. 5: Konvergenzordnung von $\mathcal{S}_{G_F}(a, s, (t', x'))$ im Limit $a \to 0$ fr alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

13 Ausblick

13.1 Ausdehnen von ?? auf $\mathcal{S}'$

Wie in **??** angesprochen, zeigt der Beweis von Kutyniok und Labate [7] **??** nur fr beschrnkte Funtkionen und nicht fr allgemeine temperierte Distributionen. So werden alle Hilfslemmata fr den Beweis von **??** nur fr solche Funktionen bewiesen. Wir glauben aber, dass sich der Beweis auf alle temperierten Distributionen ausdehnen lsst, dank der Tatsache dass „temperierte Distributionen polynomiell beschrnkt sind“:

Satz 13.1 (Struktursatz fr temperierte Distributionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f \in \mathcal{S}'(\Omega)$. Dann gibt es ein $F \in C(\Omega)$ und $C \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}$ s.d. fr alle $x \in \Omega$

$$|F(x)| \leq C(1 + |x|)^N$$

(also F polynomiell beschrnkt ist) und

$$f = \partial^\alpha F$$

als distributionelle Ableitung

Beweis

Der Beweis findet sich in Friedlander u. a. [4, S. 97].

Leider fehlt aufgrund des stetigen Studienfortschritts die Zeit, diesen Beweis komplett auszuarbeiten. Der Beweis der auf temperierte Distributionen ausgeweiteten **??** und wie der Struktursatz eingeht soll hier aber beispielhaft skizziert werden. Mit hnlichen Tricks lassen sich hoffentlich auch alle anderen Hilfslemmata auf temperierte Distributionen ausweiten.

Lemma 13.2 (Verfeinerung von ??)
Sei $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ und $supp(f) \subset U$. Sei $t \notin U$. Dann gilt fr alle $k \in \mathbb{N}$

$$|\langle f, \psi_{ast} \rangle| \leq C_k \left(1 + a^{-1} d(t, U)\right)^{-k}$$

ab einem hinreichend kleinen a.

Vor dem Beweis zwei Worte zur Bedeutung des Lemmas: Der hauptschliche Nutzen des Lemmas ist die Aussage, dass wir mit Shearlets, also Schwartzfunktionen und damit *nicht zwingend kompakt getragenen* Funktionen, die lokalen Eigenschaften von temperierten Distributionen untersuchen knnen, da wir alles was δ-weit von t entfernt geschieht exponentiell schnell (in a) nicht mehr sehen. Dies ist mglich, da temperierte Distributionen in einem geeigneten Sinn nur polynomiell schnell wachsen.

Beweis
Nach **??** gibt es ein polynomiell beschrnktes $F \in C(\mathbb{R}^2)$ s.d. $f = \partial^\alpha F$. O.B.d.A knnen wir annehmen, dass f auf $B(0, \delta)$ verschwindet (im distributionellen Sinne) und damit o.B.d.A auch F. Dann zeigen wir die Aussage fr $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
|\langle f, \psi_{as0} \rangle| &\overset{\text{formal}}{=} \left| \int f(x) \psi \left(\begin{pmatrix} a & -\sqrt{a}s \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}^{-1} (x - 0) \right) \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int F(x) \partial^\alpha \left[\psi \left(\begin{pmatrix} a^{-1} & \frac{s}{\sqrt{a}} \\ 0 & a^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-1} x \right) \right] \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int\limits_{|x| \geq \delta} C(1 + |x|)^N a^{-|\alpha|} \underbrace{\left[\left| \partial_{x_1}^{|\alpha|} \right| + |\partial^\alpha \psi| \right]}_{=:\phi \in \mathcal{S}} \begin{pmatrix} a^{-1} & \frac{s}{\sqrt{a}} \\ 0 & a^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} x \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int\limits_{|x| \geq \delta} C(1 + |x|)^N a^{-|\alpha|} C_k \left(1 + \left| \begin{pmatrix} a^{-1} & \frac{s}{\sqrt{a}} \\ 0 & a^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} x \right| \right)^{-k} \mathrm{d}x \\
&\leq \int\limits_{|x| \geq \delta} C C_k a^{-|\alpha|} (1 + |x|)^N (1 + a^{-1}|x|)^{-k} \, \mathrm{d}x \\
&\leq C C_k a^{-|\alpha|} \int\limits_{|x| \geq \delta} (1 + a^{-1}|x|)^{N-k} \, \mathrm{d}x \\
&= C C_k a^{-|\alpha|} 2\pi \int\limits_{\delta}^{\infty} (1 + a^{-1} r)^{N-k} \, \mathrm{d}r \\
&= C C_k a^{-|\alpha|} 2\pi \frac{(a + \delta) \left(1 + \frac{\delta}{a} \right)^{N-k} (a + (k - N - 1)\delta)}{(k - N - 1)(k - N - 2)} \\
&\leq C_k' \left(1 + \frac{\delta}{a} \right)^{N-k-|\alpha|}
\end{aligned}
$$

Was die Aussage fr $N - k - |\alpha|$ und damit auch fr alle k zeigt.

Neben der Ausweitung der Hilfslemmata auf temperierte Distributionen muss auch noch erklrt werden, was die richtige Verallgemeinerung der Reproduktionseigenschaft in **??** ist. Die kanonische Verallgemeinerung ist

$$
\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\{a,s,t\}} \langle f, \psi_{ast} \rangle \; \psi_{ast}(x) \, \phi(x) \, \mathrm{d}\mu(a, s, t) \, \mathrm{d}x.
$$

Fr alle Schwartzfunktionen ϕ und alle temperierten Distributionen $f \in \mathcal{S}'(C)^\vee$, wobei $\mathcal{S}'(C)^\vee$ analog zu **??** definiert ist.

In den Beweis von **??** ging der Struktursatz fr temperierte Distributionen entscheidend ein. Deshalb ist eine Ausweitung der Ergebnisse auf ganz $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ nicht mglich. In der Tat sind die Shearlets ψ_{ast} ja gar nicht kompakt getragen. Ob eine analoge Konstruktion von Shearlets die kompakt getragen sind mglich ist, ist a priori nicht klar.

wie sieht es mit Shearlets nicht nur fr Schwartzfunktionen aus?

13.2 Hrmanders Kriterium abschwchen

Um die Wellenfrontmenge einer Distribution zu bestimmen, muss man diese per Definition erst einmal mit einer kompakt getragenen Funktion lokalisieren, um eine kompakt getragene Distribution zu erhalten, deren Fouriertransformation sich berechnen lsst. Ist der Ansatz aus **??** erfolgreich, so zeigt dies, dass temperierte Distributionen mit *nicht* kompakt getragenen Funktionen lokalisert werden knnen; exponentieller Abfall ist genug, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen.

Nach der Anschauung aus **??** ist Hrmanders Kriterium zwar hinreichend, um das punktweise Produkt zweier Distributionen zu definieren ber die Faltung ihrer Fouriertransformierten, aber nicht notwendig. Ein Beispiel dafr ist die Heaviside-Funktion. Offenbar existiert $\Theta(x)^2$, aber Hrmanders Kriterium wird an der 0 verletzt, da $\hat{\Theta}(k) = \frac{i}{k} + \delta(k)$. Es ist ausreichend, wenn die lokalisierten Fouriertransformierten in entgegengesetzter im Produkt mit $|k|^{-d-\epsilon}$ abfallen, damit das Faltungsintegral existiert. Allerdings ist damit nur sicher gestellt, dass $f \cdot g \in \mathcal{D}'$, noch nicht $f \cdot g \in \mathcal{S}'$.

Die Hoffnung ist also, dass man an der a-Potenz mit der $\langle f, \psi_{ast} \rangle$ fr $a \to 0$ skaliert ablesen kann, wie schnell $\lim_{|k| \to \infty} \widehat{\phi f}(k)$ abfllt fr $\frac{k_2}{k_1} = s$ und ϕ beliebig nah um t lokalisiert.

Der Ansatz dabei wre es, zunchst einmal diese a-Potenzen bei gut verstandenen Distributionen, z.B. Polynomen oder Ableitungen der δ-Distribution auszurechnen und mit dem Abfallverhalten der lokalisierten Fouriertransformierten zu vergleichen, um dann den genauen Zusammenhang zu raten. Dann wird man versuchen diesen mit den Techniken und Lemmata aus **??** zu beweisen.

13.3 Hherdimensionale Shearlets

Eine offensichtliche weitere Frage ist: Wie steht es denn damit, das ganze Geschft der Shearlets mal auf hhere Dimensionen auszudehnen und auch dort eine Technik zum Berechnen von Wellenfrontmengen zu erhalten?

Guo u. a. [5] diskutieren Verallgemeinerungen der Schergruppe in hheren Dimensionen und entwickeln daraus auch diskrete Shearlets. Aus **??** wird auch deutlich, was die richtige Verallgemeinerung der parabolischen Skalierung ist. Nmlich

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

denn diese sorgt wieder dafr, dass der Trger von ψ_{ast} im Fourierraum fr $a \to 0$ wieder einer immer spitzer werdenden Nadel gleicht. Die Wahl $\sqrt{a}$ statt a^δ fr irgendein anderes $a < 1$ ist ziemlich willkrlich. Kutyniok und Labate [7] schreiben auch, dass sie fr $\delta \neq \frac{1}{2}$ die Wellenfrontmenge an Beispielen genau so gut bestimmen konnten, wie fr $\delta = \frac{1}{2}$. Tatschlich geht $\delta = \frac{1}{2}$ nur bei dem Beweis von **??** explizit ein. Aber sicher lsst sich **??** auch mit einem **??** beweisen, das leicht andere Exponenten hat.[10]

13.4 Berechnung des Skalengrads mittels Shearlets

Eine weitere Grße der mikrolokalen Analysis, die eventuell durch die Shearlettransformation bestimmt werden kann ist der Skalengrad. Er ist definiert wie folgt:

[10] Stellt sich nur die Frage, warum man das berhaupt wollte. $\delta = \frac{1}{2}$ ist doch ein ziemlich schne Wahl.

Definition 13.3 (Skalengrad)
Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist der Skalengrad $sd(u)$ definiert als

$$\inf_{\omega} \left\{ \lambda^{\omega} \langle u_\lambda, \phi \rangle \overset{\lambda \to 0}{\to} 0, \quad \text{fr alle } \phi \right\}$$

wobei u_λ definiert ist ber

$$\langle u_\lambda, \phi \rangle = \lambda^{-n} \left\langle u, \phi \left(\tfrac{\cdot}{\lambda} \right) \right\rangle$$

also falls $u \in C^\infty$:

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x)$$

Eine einfache Rechnung zeigt z.B. fr die δ-Distribution und ihre Ableitungen, dass

$$sd(\delta^{(\alpha)}) = n + |\alpha|.$$

Mit der Shearlettransformation erhalten wir aber

$$\begin{aligned} \left\langle \delta_{x_1}^{\alpha} \otimes \delta_{x_2}, \psi_{a00} \right\rangle &= \partial_{x_1}^{\alpha} \left(a^{-\frac{3}{4}} \psi \left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{\sqrt{a}} \right) \right) \Bigg|_{x=0} \\ &= a^{-\frac{3}{4}} a^{-\alpha} \partial_{x_1}^{\alpha} \psi(0) \sim a^{-\alpha - \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

und bei Ableitung in die andere Richtung

$$\begin{aligned} \left\langle \delta_{x_1} \otimes \delta_{x_2}^{\alpha}, \psi_{a00} \right\rangle &= \partial_{x_2}^{\alpha} \left(a^{-\frac{3}{4}} \psi \left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{\sqrt{a}} \right) \right) \Bigg|_{x=0} \\ &= a^{-\frac{3}{4}} a^{-\frac{\alpha}{2}} \partial_{x_2}^{\alpha} \psi(0) \sim a^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Und falls wir $s \neq 0$ whlen wird das ganze nur noch unbersichtlicher, da wir Mischterme erhalten. Dieses Beispiel legt also nahe, dass es einen Zusammenhang zwischen dem Skalengrad einer Distribution und dem Abfallverhalten der Shearlettransformation bei $t = 0$ gibt. Aber die parabolische Skalierung in a und Scherung in s sorgen dafr, dass sie sich nicht mehr ganz einfach ablesen lsst.

14 Fazit fr Physiker

Die Berechnungen in **??????** und Abschtzungsungetme wie **??** zeigen deutlich, dass **??** zwar eine theoretische Mglichkeit liefert Wellenfrontmengen auszurechnen, es aber kein sehr praktikabler Ansatz ist. So wurde auch ψ_{ast} nie konkret angegeben, sondern nur darauf hingewiesen, dass es Funktionen gibt, die all das erfllen, was wir brauchen (also schneller Abfall und gewisse Eigenschaften des Trgers der Fouriertransformierten). Eins wrden diese Funktionen aber sicher *nicht* erfllen: Dass $\int \psi_{ast}(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x$ fr eine grßere Klasse von Funktionen tatschlich analytisch zu berechnen ist, und nicht nur gewisse Schranken fr den Abfall in a gegeben werden knnen.

hnlich sieht es bei der Berechnung des Skalengrads mithilfe von Shearlets aus (vgl. **??**): Es sieht so aus, als sei es theoretisch mglich. Aber mit gewissem Aufwand bei den Abschtzungen verbunden.

Umso erfreulicher ist, dass die Ergebnisse fr die berechneten Wellenfrontmengen mit den bisher bekannten bereinstimmen. Im Falle des getwisteten Produkts der Zweipunktfunktion konnte das Ergebnis von Schulz [10] ja sogar verschrft und gezeigt werden, dass das getwistete Produkt bei 0 nicht ganz so singulr ist, wie das ungetwistete.

Hherdimensionale Verallgemeinerungen der Shearlets mssten mit noch mehr Scherparametern arbeiten – im drei dimensionalen Fall 3, in 4D schon 6 – welche dann in den Ausdrcken auftauchen. Dann msste man schlau erkennen, fr welche Kombinationen dieser Scherpararemeter an welchen Orten t $\langle f, \psi_{ast} \rangle$ nicht schnell abfllt und abschtzen, wie schnell genau es abfllt. Wenn die Verzweiflung also sehr groß ist, man viel Zeit, Papier und hherdimensionale Shearlets zur Verfgung hat *knnte* die Shearlettransformation eine theoretische Mglichkeit sein Wellenfrontmengen temperierter Distributionen auszurechnen. Aber eigentlich eher nicht.

Oder natrlich wir haben etwas ganz wichtiges bersehen, und es ist doch alles nicht so hoffnungslos.

15 Fazit fr Mathematiker

Erfreulicherweise[11] stimmen die Ergebnisse fr berechneten Wellenfrontmengen mit denen in der Literatur berein. ber die Wellenfrontmenge hinaus erhalten wir mit dem Exponenten von a auch noch weitere Informationen wie langsam die lokalisierte Fouriertransformierte in eine gewisse Richtung abfllt. Grßtenteils offen ist, inwiefern diese zustzlichen Informationen genutzt werden knnen. Allerdings finden sich in **????** schon Anstze.

In den Komplikationen und langen Abschtzungen in **??????** zeigt sich, dass die Shearlettransformation nur bedingt geeignet ist, um Wellenfrontmengen von temperierten Distributionen zu berechnen.

Dennoch sind im Ausblick mit der Ausweitung von **??** auf temperierte Distributionen und der Konstruktion hherdimensionaler Shearlets interessante Fragen aufgekommen, bei deren Bearbeitung sicher temperierte Distributionen und auch etwas Geometrie besser verstanden werden knnen.

Literatur

[1] Emmanuel J. Cands und David L. Donoho. „Continuous curvelet transform: I. Resolution of the wavefront set“. In: *Applied and Computational Harmonic Analysis* 19.2 (2005), S. 162–197. ISSN: 10635203.

[2] M. N. Do und M. Vetterli. „The Contourlet Transform: An Efficient Directional Multiresolution Image Representation“. In: *Trans. Img. Proc.* 14.12 (Dez. 2005), S. 2091–2106. ISSN: 1057-7149. URL: https://doi.org/10.1109/TIP.2005.859376.

[3] Sergio Doplicher, Klaus Fredenhagen und John E. Roberts. „The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields“. In: *Communications in Mathematical Physics* 172.1 (Aug. 1995), S. 187–220. URL: https://doi.org/10.1007/bf02104515.

[11] und glcklicherweise, sonst htten wir uns ja verrechnet

[4] F. G. Friedlander u. a. *Introduction to the Theory of Distributions -*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. ISBN: 978-0-521-64971-1.

[5] Kanghui Guo u. a. „Wavelets with composite dilations and their MRA properties“. In: *Applied and Computational Harmonic Analysis* 20.2 (März 2006), S. 202–236. URL: https://doi.org/10.1016/j.acha.2005.07.002.

[6] Lars Hrmander. *The analysis of linear partial differential operators -*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1985. ISBN: 978-0-387-12104-8.

[7] Gitta Kutyniok und Demetrio Labate. „Resolution of the wavefront set using continuous shearlets“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 361.05 (Okt. 2008), S. 2719–2754. URL: https://doi.org/10.1090/s0002-9947-08-04700-4.

[8] Stephane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing - The Sparse Way*. Amsterdam, Boston: Academic Press, 2008. ISBN: 978-0-080-92202-7.

[9] Barry Simon Michael Reed. *Methods of mathematical physics. Fourier analysis, self-adjointness*. Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 2. Academic Press, 1975. ISBN: 9780125850025,0125850026.

[10] Rene M. Schulz. „Microlocal Analysis of Tempered Distributions“. Diss. Niederschsische Staats- und Universittsbibliothek Gttingen: Georg-August University School of Science, 2014.

[11] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model -*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1-107-03473-0.

[12] Stefan Waldmann. *Poisson-Geometrie und Deformationsquantisierung - Eine Einfhrung*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2007. ISBN: 978-3-540-72518-3.

Erklärung Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken entnommene Stellen habe ich unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht. Die Richtlinien zur Sicherung der guten wissenschaftlichen Praxis an der Universität Göttingen wurden von mir beachtet. Eine gegebenenfalls eingereichte digitale Version stimmt mit der schriftlichen Fassung überein. Mir ist bewusst, dass bei Verstoß gegen diese Grundsätze die Prüfung mit nicht bestanden bewertet wird.

Göttingen, den 29. Juni 2018

(Jan Lukas Bosse)