

Jan Lukas krasse Bachelorarbeit

Jan Lukas Bosse*

7. Juni 2018

Hier ist wohl noch etwas zu tun... So eine hübsche Frontseite wäre doch was!

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeines Gelaber über Shearlets	2
2	Zwei nützliche Substitutionen für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$	3
3	Die Wellenfrontmenge von Δ_m	5
4	Die Wellenfrontmenge von Δ_m^2	7
4.1	$\hat{\Delta}^{*2}$ berechnen	7
4.2	... und nun zur Wellenfrontmenge	9
5	Die Wellenfrontmenge von Δ_m^{*2}	15
5.1	Δ berechnen	15
5.2	... und nun zur Wellenfrontmenge von $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}$	17
5.2.1	Fall $ s > 1$	17
6	Berechnen von $WF(G_F)$	19
6.1	Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$	19

*Georg-August Universität Göttingen

1 Allgemeines Gelaber über Shearlets

Proposition 1.1 (ψ_{ast} fällt schnell ab)

Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ein Shearlet wie definiert und M so ne Trafomatrix. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass es eine konstante C_k gibt s.d. für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} |\psi_{ast}(x)| &\leq C_k |\det M|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + |M^{-1}(x - t)|^2\right)^{-k} \\ &= C_k a^{-\frac{3}{4}} \left(1 + a^{-2}(x_1 - t_1)^2 + 2a^{-2}s(x_1 - t_1)(x_2 - t_2) + a^{-1} \left(1 + a^{-1}s^2\right)(x_2 - t_2)^2\right)^{-k} \end{aligned}$$

Und insbesondere ist $C_k = \frac{15}{2} \frac{\sqrt{a+s}}{a^2} (\|\hat{\psi}\|_\infty + \|\Delta^k \hat{\psi}\|_\infty)$

Satz 1.2 ($\mathcal{S}_f(a, s, t)$ misst $WF(f)$)

Sei $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ wobei $\mathcal{D}_1 = \{(t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \mid |\mathcal{S}_f(a, s, t)| = O(a^k) \text{ gleichmäßig } \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } (t_0, s_0)\}$ und \mathcal{D}_2 analog für $\psi^{(v)}$

Dann gilt $WF(f)^c = \mathcal{D}$

Korollar 1.3 ($WF(f)$ misst $\text{sing supp}(\psi)$)

Sei $\mathcal{R} = \{t_0 \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathcal{S}_f(a, s, t)| = O(a^k) \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } t_0\}$

Dann gilt $\text{sing supp}(\psi)^c = \mathcal{R}$

Bemerkung 1.4 (Träger von ψ)

Im Fourierraum ist $\hat{\psi}_{ast}$ gegeben durch

$$\hat{\psi}_{ast}(\xi_1, \xi_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right)\right) \quad (1.1)$$

und es gilt

$$\text{supp}(\hat{\psi}) \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi_1| \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right], \left|\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right| \leq \sqrt{a} \right\} \quad (1.2)$$

diesen Satz richtig hin schreiben und ordentlich setzen

Stil und Nummerierung für Sätze, Propositionen etc. anpassen

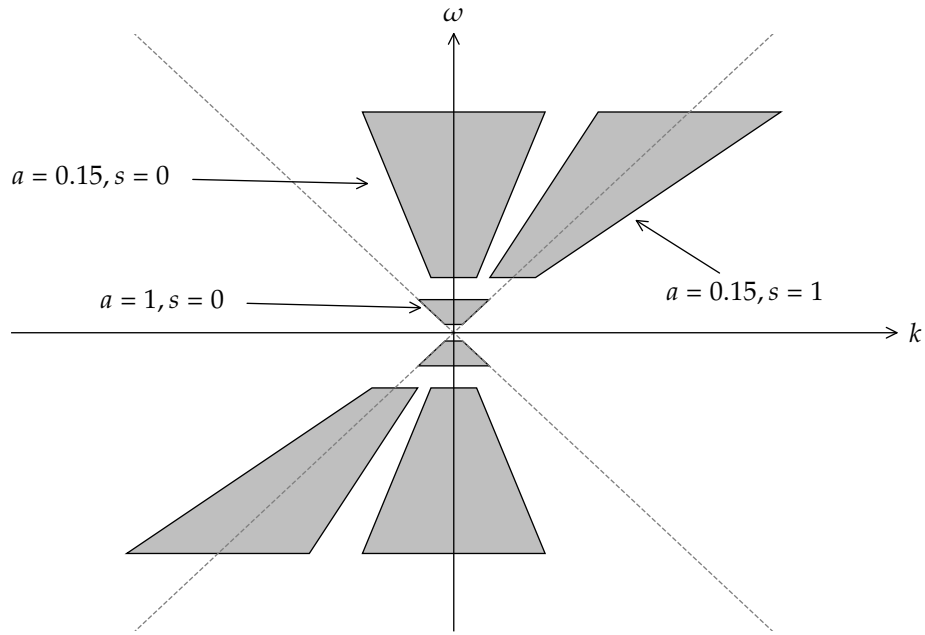


Abbildung 1: Der Träger von $\hat{\psi}_{ast}$ für verschiedene a, s . Man sieht gut, wie $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$ für kleinere a in immer spitzeren Kegeln liegt.

2 Zwei nützliche Substitutionen für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$

Zunächst werden wir zwei verschiedene Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ im Fourierraum herleiten, welche fast immer Ausgangspunkt für unsere Abschätzungen sein werden.

Sei also ψ ein Shearlet wie in Korollar 1.4. Sei f die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\mathcal{S}_f(ast)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \psi_{ast}, f \rangle &= \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{f} \rangle \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\tilde{\xi} \cdot t} \hat{\psi}_1(a\tilde{\xi}_1) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\tilde{\xi}_2}{\tilde{\xi}_1} - s\right)\right) \hat{f}(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} \end{aligned}$$

und nach „entscheren“ und „deskalisieren“, also der Substitution

$$\begin{aligned} a\tilde{\xi}_1 &= k_1 \\ a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\tilde{\xi}_2}{\tilde{\xi}_1} - s\right) &= \frac{k_2}{k_1} \end{aligned} \iff \begin{aligned} \tilde{\xi}_1 &= \frac{k_1}{a} \\ \tilde{\xi}_2 &= \frac{k_1 s}{a} + a^{-\frac{1}{2}} k_2 \end{aligned}$$

entscheiden,
was mit
dem
fehlenden
Faktor
 $\frac{1}{(2\pi)^n}$
geschieht

$$\Rightarrow d\tilde{\zeta}_1 d\tilde{\zeta}_2 = a^{-\frac{3}{2}} dk_1 dk_2$$

ergibt sich folgendes für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{ast}, f \rangle &= \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{f} \rangle \\ &= \iint a^{-\frac{3}{4}} \hat{\psi}_1(k_1) \hat{\psi}_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \hat{f}\left(\frac{k_1}{a}, \frac{k_1 s}{a} + \frac{k_2}{\sqrt{a}}\right) e^{-i\frac{k_1}{a}(t_1+t_2s) - i\frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}} dk_1 dk_2 \end{aligned}$$

(2.1, Substitution 1)

Alternativ kann auch folgende Substitution

$$\begin{aligned} a\tilde{\zeta}_1 &= k_1 \\ a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\tilde{\zeta}_2}{\tilde{\zeta}_1} - s \right) &= k_2 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \tilde{\zeta}_1 &= \frac{k_1}{a} \\ \tilde{\zeta}_2 &= \left(a^{\frac{1}{2}} k_2 + s \right) \frac{k_1}{a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d\tilde{\zeta}_1 d\tilde{\zeta}_2 = a^{-\frac{3}{2}} k_1 dk_1 dk_2$$

gewählt werden, wodurch alle Parameter (a, s, t) aus den Argumenten von $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ verschwinden und sich

$$\langle \psi_{ast}, f \rangle = \iint a^{-\frac{3}{4}} k_1 \hat{\psi}_1(k_1) \hat{\psi}_2(k_2) \hat{f}\left(\frac{k_1}{a}, k_1 \left(a^{-\frac{1}{2}} k_2 + s a^{-1} \right) \right) e^{-ik_1 \left(\frac{t_1 + s t_2}{a} + \frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}} \right)} dk_1 dk_2$$

(2.2, Substitution 2)

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulässig ist, obwohl sie die Orientierung nicht erhält und keine Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nämlich $\tilde{\zeta}_1 = 0$, liegt nicht im Träger von $\hat{\psi}$.

herausfinden,
wie die
Gleichungen auch
Kapitelnummern
erhalten

Grafik
basteln, die
 $\text{supp } \psi$
vor und
nach der
Substitution
zeigt.

3 Die Wellenfrontmenge von Δ_m

Die massive Zweipunktfunktion ist die Fouriertransformierte der $1m$ -Massenschale positiver Energie:

$$\Delta_m(t, x) = \int \delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \Theta(\omega) e^{-i\omega t + ikx} d\omega dk \quad (3.1)$$

Quelle
dafür zi-
tieren...

woraus sich $\hat{\Delta}_m$ direkt als $\delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \Theta(\omega)$ ablesen lässt.

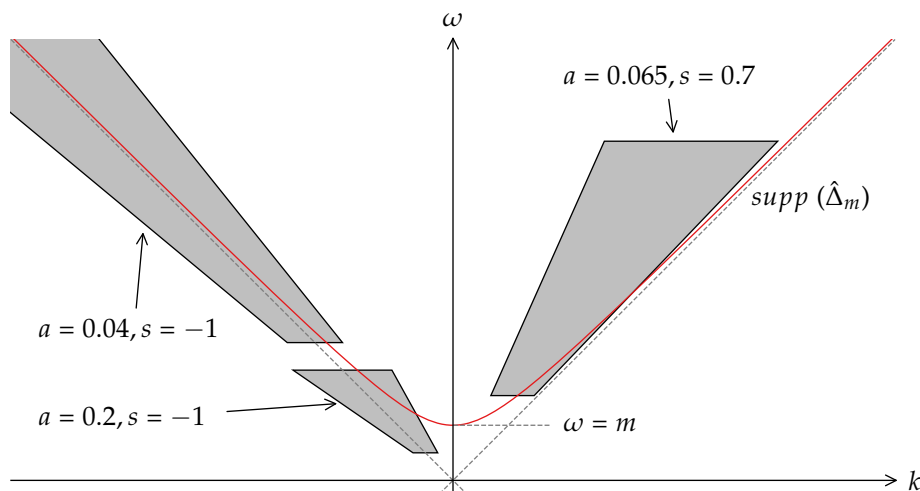


Abbildung 2: Die Träger von $\hat{\Delta}_m$ und $\hat{\psi}_{ast}$. Es ist zu sehen, dass für $a \rightarrow 0$ und $s \neq \pm 1$ die Träger schließlich disjunkt sind

Fall $s \neq \pm 1$

Hier gibt es nicht viel zu tun, denn für a klein genug gilt $\text{supp}(\hat{\Delta}_m) \cap \text{supp}(\hat{\psi}_{ast}) = \emptyset$ wie man Abb. 2 entnehmen kann. Also gilt

$$\begin{aligned} \langle \psi_{ast}, \Delta_m \rangle &= \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m \rangle \\ &= 0 \\ &= O(a^k) \quad \forall k, \quad \text{für } a \text{ klein genug} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dies gilt für alle $(t', x') \in \mathbb{R}^2$

hier noch
blöde Ab-
schätzerei
machen,
warum
das tat-
sächlich
gilt, oder
stehen
lassen.
Oder im
Kapitel

Fall $s = 1$

Intuition Für $s = 1$ schneidet die Diagonale $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$ auf der ganzen Länge. Der Betrag von $\hat{\psi}_{ast}$ skaliert mit $a^{\frac{3}{4}}$ und die Länge von $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$ entlang der Diagonalen mit a^{-1} . Also erwarten wir schlimmstenfalls $\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{\Delta}_m \rangle = O(a^{-\frac{1}{4}})$. Aber nur wenn die Wellenfronten von $e^{-i\omega t' + ikx'}$ parallel zu der Singularität und damit der Diagonalen liegen. Andernfalls erwarten wir, dass die immer schneller werdenden Oszillationen der Phase sich gegenseitig auslöschen.

Fleißige Analysis

$$\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{\Delta}_m \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{\omega} - 1 \right) \right) \delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \theta(\omega) e^{-i\omega t' + ikx'} d\omega dk$$

Nullstellen von δ :

$$\omega^2 - k^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\omega^2 - m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{d\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}}; \text{ wobei nur „+“ in } \text{supp}(\hat{\psi}_2) \text{ liegt}$$

$$\begin{aligned} &= a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\omega} - 1 \right) \right) e^{-i\omega t' + i\sqrt{\omega^2 - m^2} x'} d\omega \\ &= a^{\frac{3}{4}} a^{-1} \int \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2 \left(\underbrace{a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{a\omega^2 - m^2}}{\omega} - 1 \right)}_{= \frac{a^{\frac{3}{2}} m^2}{2\omega^2} + O\left(\frac{7}{2}\right)} \right) e^{-i\frac{\omega}{a} t' + i\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - m^2} x'} d\omega \end{aligned}$$

Der Integrand lässt sich nun durch $\hat{\psi}_1(\omega) \|\hat{\psi}_2\|_{\infty}$ majorisieren und wir dürfen Lebesgue verwenden um Integral und Grenzwert $a \rightarrow 0$ zu vertauschen

$$\begin{aligned} &= a^{-\frac{1}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(0) e^{-i\omega \left(\frac{t' - x'}{a} \right)} \\ &= a^{-\frac{1}{4}} \hat{\psi}_2(0) \psi_1 \left(\frac{t' - x'}{a} \right) \\ &\sim O\left(a^{-\frac{1}{4}}\right), \quad \text{falls } x' = t' \\ &\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k, \quad \text{sonst} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Das analoge Ergebnis erhält man mit gleicher Rechnung auch für $s = -1$ und $t' = -x'$. Dies bestätigt das intuitiv erwartete Ergebnis. Fassen wir die Ergebnisse aus (3.2) und (3.3) noch einmal tabellarisch zusammen:

	$(t', x') = (0, 0)$	$t' = x'$	$t' = -x'$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	a^k
$s = -1$	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k
$s \neq \pm 1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tabelle 1: Konvergenzordnung von $S_{\Delta_m}(a, s, (t', x'))$ im Limit $a \rightarrow 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

4 Die Wellenfrontmenge von Δ_m^2

Bevor wir die Wellenfrontmenge von Δ_m^2 berechnen können, benötigen wir einen Ausdruck dafür, oder besser noch einen für die Fouriertransformierte davon.

4.1 $\hat{\Delta}^{*2}$ berechnen

Gemäß dem Faltungssatz gilt $\widehat{\Delta_m^2} = \hat{\Delta}_m * \hat{\Delta}_m = \hat{\Delta}_m^{*2}$. Wir müssen also die Faltung von $\hat{\Delta}_m$ mit sich selber ausrechnen.

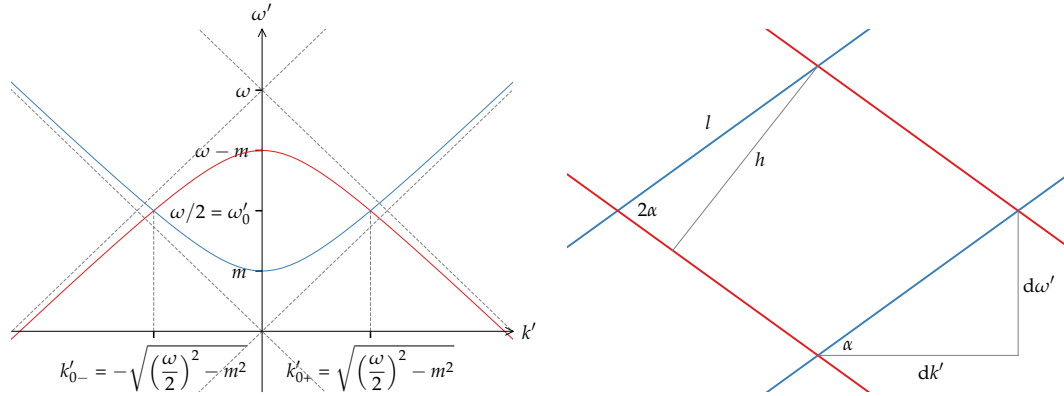


Abbildung 3: Das zu berechnende Integral aus (4.1) visualisiert

Abbildung 4: Die Kreuzungstelle bei k'_{0+} von ganz nah angeschaut

$$\hat{\Delta}_m^{*2}(\omega, k) = \int \theta(\omega') \delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2) \theta(\omega - \omega') \delta((\omega - \omega')^2 - (k - k')^2 - m^2) d\omega' dk' \quad (4.1)$$

An Abbildung 3 sehen wir schon, dass das Faltungsintegral nur dann ungleich null ist, wenn (ω, k) in der $2m$ -Massenschale liegen. Es ist also insbesondere $\omega > 0$. Da Δ_m

Lorenz-invariant ist, sind Δ_m^2 und $\widehat{\Delta}_m^{*2}$ es auch. Es genügt also $\widehat{\Delta}_m^{*2}$ für $k = 0$ und positive ω zu berechnen. Alle anderen Werte holen wir uns dann aus der Lorenz-Invarianz.

Um nun das Integral über zwei sich schneidende lineare¹ δ -Distributionen zu berechnen bedienen wir uns eines Physikertricks und stellen uns die δ -Distribution als Grenzwert ($h \rightarrow 0$) einer $\frac{1}{h}$ -hohen und h -breiten Rechtecksfunktion vor. Dann ist das Integral über die sich schneidenden Rechtecksfunktionen proportional zu der Schnittfläche und damit zu $l \cdot h$ in Abb. 4. Außerdem schneiden sich die beiden Hyperbeln für $\omega \rightarrow +\infty$ in einem rechten Winkel, das Faltungsintegral ergibt hier also 2.

Wie erklärt man das besser, ohne an Anschaulichkeit oder Rigorosität zu verlieren

Aus Abb. 4 lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{d\omega'}{dk'} \quad \text{und} \quad \frac{h}{l} = \sin(2\alpha) \\ \Rightarrow l &= \frac{h}{\sin\left(2 \arctan\left(\frac{d\omega'}{dk'}\right)\right)} = \frac{h \left(\left(\frac{d\omega'}{dk'}\right)^2 + 1 \right)}{2 \frac{d\omega'}{dk'}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

außerdem gilt

$$\omega' = \sqrt{k'^2 + m^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega'}{dk'} = \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + m^2}} \quad (4.3)$$

Wenn wir nun (4.2) und (4.3) sowie die vorhergehenden Gedanken kombinieren erhalten wir

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_m^{*2}(\omega, 0) &= C \frac{\left(\frac{d\omega'}{dk'}\right)^2 \Big|_{k'_0} + 1}{\frac{d\omega'}{dk'} \Big|_{k'_0}} \Theta(\omega^2 - (2m)^2) \\ &= C \frac{\sqrt{k'_0{}^2 + m^2} (2k'_0{}^2 + m^2)}{2k'_0 (k'_0{}^2 + m^2)} \Theta(\dots) \\ &= C \frac{\sqrt{\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2 (\omega^2 - 4m^2 + m^2)}}{\sqrt{\omega^2 - 4m^2} (\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2)} \Theta(\dots) \\ &= C \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \Theta(\dots) \stackrel{C=2}{=} 2 \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \Theta(\dots) \end{aligned} \quad (4.4)$$

¹Linear in dem Sinne, dass die Distribution entlang einer Linie getragen ist. Nicht dass es eine lineare Distribution ist

die Erklärungen dazwischen sind noch nicht ganz klar, fürchte ich...

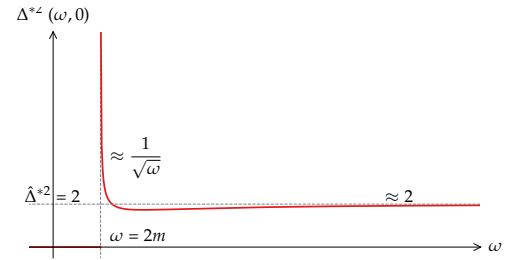
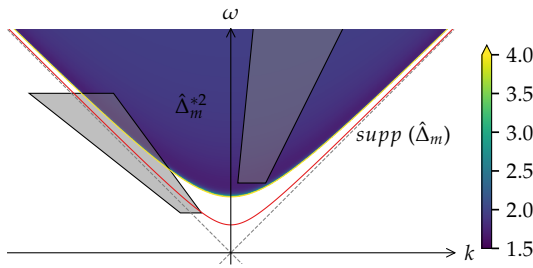


Abbildung 5: Plot von $\hat{\Delta}_m^{*2}$ und $\hat{\Delta}_m$. Je weiter wir uns von der $2m$ -Massenschale wegbewegen, desto konstanter wird $\hat{\Delta}_m^{*2}$ und ist singulär genau auf der $2m$ -Massenschale

Abbildung 6: Plot von $\hat{\Delta}_m^{*2}|_{k=0}$ um das asymptotische Verhalten für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ zu verdeutlichen

Jetzt erhalten wir $\hat{\Delta}_m^{*2}(\omega, k)$ noch aus der Poincare-Invarianz:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_m^{*2}(\omega, k) &\stackrel{(\omega, k) \sim (\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0)}{=} \hat{\Delta}_m^{*2}(\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) \\ &= 2 \frac{\omega^2 - k^2 - 3m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2} \sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}} \Theta(\omega^2 - k^2 - 4m^2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Es ist zu beachten, dass die Heaviside-Funktion genau bei der ersten Nullstelle der zweiten Wurzel im Nenner abschneidet und alle weiteren Nullstellen sowohl des Nenners als auch des Zählers außerhalb der $2m$ -Massenschale und damit außerhalb des Trägers der Heaviside-Funktion liegen.

4.2 ... und nun zur Wellenfrontmenge

Mit diesen Ausdrücken für $\hat{\Delta}_m^{*2}$ können wir uns nun der Wellenfrontmenge widmen.

breqn-
Package
ausprobieren!

spacing
der figu-
res an-
passen.
Monster
hässliche
Hüte kor-
rigieren...

Fall $|s| > 1$

Genau wie im Fall $s \neq 1$ bei der massiven Zweipunktfunktion (vgl. 3) ist hier nichts zu tun, da für a klein genug wieder

$$\text{supp}(\hat{\psi}_{ast}) \cap \text{supp}(\widehat{\Delta_m}^{*2}) = \emptyset \Rightarrow \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta_m}^{*2} \right\rangle = 0 \quad (4.6)$$

gilt.

Fall $s < 1$

Hier bedienen wir uns direkt bei (2.2, Substitution 2) und schreiben

$$\begin{aligned} & \left\langle \widehat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta_m}^{*2} \right\rangle \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}} k + s a^{-1} \right)^2 - 3m^2 \right)}{\sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}} k + s^{-1} \right)^2} \sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}} k + s a^{-1} \right)^2 - 4m^2}} \\ & \quad \cdot \Theta \left(\omega^2 - k^2 - 4m^2 \right) e^{-i\omega \left(\frac{t'-sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \omega \, d\omega \, dk \\ & \stackrel{\Delta s := 1-s^2 > 0}{=} 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \omega^2 \left(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2 \right) - 3a^2 m^2}{\omega^2 \sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k s - a \omega^2 k^2 - 4a^2 m^2}} \Theta(\dots) \omega \, d\omega \, dk \end{aligned} \quad (4.7)$$

Für hinreichend kleine a können wir den Integranden nun majorisieren

$$\left| 2 \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \omega^2 \Delta s \Theta(\dots)}{\sqrt{\Delta s} \sqrt{\Delta s \omega^2}} \right| \geq \left| \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 \left(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2 \right) - 3a^2 m^2 \right) \Theta(\dots)}{\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k s - a \omega^2 k^2 - 4a^2 m^2}} \right|$$

und dürfen also Lebesgue verwenden und schreiben

$$\begin{aligned}
\lim_{a \rightarrow 0} \int \dots d\omega dk &= \int \lim_{a \rightarrow 0} \dots d\omega dk \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \omega^{\cancel{2}} \cancel{\Delta s} \Theta(\dots)}{\sqrt{\cancel{\Delta s}} \sqrt{\cancel{\Delta s}} \cancel{\omega}} e^{-i\omega \left(\frac{t' - sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} d\omega dk \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega dk \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \psi\left(\frac{t' - sx'}{a}, \frac{x'}{a}\right)
\end{aligned}$$

Und da Shearlets nach Proposition 1.1 schnell abfallen erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{ast}, \Delta_m^2 \rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \psi\left(\frac{t' - sx'}{a}, \frac{x'}{a}\right) \\
&\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{falls } (t', x') \neq 0 \\
&\sim O(a^{-\frac{3}{4}}), \quad \text{falls } (t', x') = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Fall $s = -1$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta_m^{*2}} \right\rangle \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 \left(a^{-2} \cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}} ks - a^{-1} k^2 \right) - 3m^2 \right)}{\sqrt{\omega^2 \left(a^{-2} \cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}} ks - a^{-1} k^2 \right)} \sqrt{\omega^2 \left(a^{-2} \cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}} ks - a^{-1} k^2 \right) - 4m^2}} \\
&\quad \cdot \Theta \left(\omega^2 \left(a^{-2} \cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}} ks - a^{-1} k^2 \right) - 4m^2 \right) e^{-i\omega \left(\frac{t' - sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \cdot \omega d\omega dk \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \cancel{\omega^{\frac{3}{2}}} \left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2 \right)}{\cancel{\omega^{\frac{3}{2}}} \sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}} k^2} \sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 4m^2}} \\
&\quad \cdot \Theta \left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 4m^2 \right) \cdot e^{-i\omega \left(\frac{t' + x'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \omega d\omega dk \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \left\{ \underbrace{\int \frac{\hat{\psi}_2(k) \left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2 \right) \Theta(\dots) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}} k^2} \sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 4m^2}} dk}_{=: \hat{f}_a(\omega)} \right\} \\
&\quad \cdot \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \left(\frac{t' + x'}{a} \right)} d\omega \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{f}_a(\omega) \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \left(\frac{t' + x'}{a} \right)} d\omega
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Nun müssen wir also $\hat{f}_a(\omega)$ genauer betrachten: $\hat{\psi}_2(k) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Θ schneidet genau bei der ersten Nullstelle des Nenners ab. Deshalb verschieben wir durch eine Substitution $k \rightarrow k'$ den Integrationsbereich genau so, dass diese Nullstelle bei $k' = 0$ liegt.

Sei also $k_0 := \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega}$ die relevante Nullstelle des Nenners am Integrationsbereich. Dann ist die a -Abhängigkeit von k_0 in erster Näherung gegeben durch $0 < k_0 = \frac{2m^2}{\omega^2}a^{\frac{3}{2}} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) =: c_\omega a^{\frac{3}{2}} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)$ und mit $k' = k - k_0$ gelten folgende Ausdrücke für den Nenner und den Zähler:

Zähler

$$\begin{aligned} 2\omega^2k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2k^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2 &= 2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2 \\ &= 2\omega^2k' + 2\omega^2\frac{2m^2}{\omega^2}a^{\frac{3}{2}} + 2\omega^2O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2 \\ &= 2\omega^2k' + a^{\frac{3}{2}}m^2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) \end{aligned}$$

Nenner

$$\begin{aligned} \sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2} \sqrt{2\omega^2k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2} &= \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0)} \sqrt{k' + k_0} \\ &\quad \cdot \underbrace{\sqrt{-a^{\frac{1}{2}}\omega^2 \left(k' - \frac{2\sqrt{\omega^2 - 4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega} \right)}}_{= \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}} \sqrt{k'} \end{aligned}$$

Nun ist es an der Zeit für das alte Spiel von „finde eine integrierbare Majorante, um Lebesgue verwenden und alle Terme mit positiver a -Potenz wegschmeißen zu dürfen“²

²so lange sie in einer Summe mit mindestens einem Term ohne positive a -Potenz auftauchen

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\hat{\psi}_2(k' + k_0) \left(2\omega^2 k' + a^{\frac{3}{2}} m^2 - a^{-\frac{1}{2}} (k' + k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) \right)}{\sqrt{k'} \sqrt{k' + k_0} \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}} (k' + k_0)} \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}} \Theta(k') \right| \\
& \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \frac{2\omega^2 k' + a^{\frac{3}{2}} m^2 - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 (k' + k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}{\sqrt{k' + k_0} \sqrt{2} \sqrt{2}} \\
& \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \left(\frac{\omega^2 k'}{\sqrt{k'}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} \omega^2 (k' + k_0)^2}{\sqrt{k' + k_0}} + \frac{a^{\frac{3}{2}} m^2}{\sqrt{k' + k_0}} + \frac{O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}{\sqrt{k_0}} \right) \\
& = \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \left(\omega^2 \sqrt{k'} - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 (k' + k_0)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{\frac{a^{\frac{3}{2}} m^2}{\sqrt{\frac{2m^2}{\omega^2} a^{\frac{3}{2}} + O(a^{\frac{7}{2}})}}}_{O\left(a^{\frac{3}{4}}\right)} + \dots \right) \\
& \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \Theta(k')
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist eine integrierbare Majorante und in den Abschätzungen wurde u.a. verwendet, dass $\hat{\psi}_2$ kompakt getragen und beschränkt ist. In „const“ wurden immer notwendige aber letzten Endes irrelevante Vorfaktoren gesammelt wie z.B. $\|\hat{\psi}_2\|_\infty$.

Der Integrand für \hat{f}_a konvergiert punktweise (vgl. (4.9))

$$\frac{\hat{\psi}_2(k) \left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2 \right) \Theta(\dots) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}} k^2} \sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 4m^2}} \rightarrow \hat{\psi}_2(k) \omega \Theta(k) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}} \quad (4.10)$$

und wir können also schreiben

Tief in uns drinnen, wissen wir alle, dass die Behauptung mit dem $O(x^{-1})$ stimmt, müssen wir sie also wirklich noch zeigen?

$$\begin{aligned}
\hat{f}_a(\omega) &\rightarrow \hat{f}_0(\omega) \\
&= \int \omega \hat{\psi}_2(k) \Theta(k) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}} dk \\
&= \omega (\hat{\psi}_2 \cdot \Theta)^\vee (-\omega x' / \sqrt{a}) \\
&= \omega (\hat{\psi}_2^\vee * \Theta^\vee) (-\omega x' / \sqrt{a}) \\
&= \omega (\psi_2 * (\delta + i\mathcal{P}(1/x))) (-\omega x' / \sqrt{a}) \\
&= \omega \left[\underbrace{\psi_2(-\omega x' / \sqrt{a})}_{O(a^k) \forall k \in \mathbb{N}} + i \underbrace{(\psi_2 * \mathcal{P}(1/x))(-\omega x' / \sqrt{a})}_{\underbrace{O(x^{-1})}_{O((-\omega x' / \sqrt{a})^{-1}) = O(a^{\frac{1}{2}})}} \right] \\
&= O\left(a^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Wir dürfen also folgende Abschätzung für $\hat{f}_a(\omega)$ für $a \rightarrow 0$ machen:

$$\hat{f}_a(\omega) = \omega C a^{\frac{1}{2}} + o\left(a^{\frac{1}{2}}\right)$$

Setzen wir dies nun schließlich wieder in unseren letzten Ausdruck in (4.9) ein, erhalten wir nach einiger Rechnerei und Abschätzerei endlich

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m^{*2} \right\rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\omega C a^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1(\omega)}_{\in C_c^\infty(\mathbb{R})} e^{-i\omega \left(\frac{t'+x'}{a}\right)} d\omega \\
&= 2a^{-\frac{1}{4}} C (\omega \hat{\psi}_1(\omega))^\vee \left(-\frac{t'+x'}{a}\right) \\
&\sim O(a^{-\frac{1}{4}}), \quad \text{falls } t' = -x' \\
&\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Wenn wir die Ergebnisse aus (4.6), (4.8) und (4.11) zusammenfassen, haben wir für die Wellenfrontmenge von $\hat{\Delta}_m^{*2}$

hier fehlen wenn man es ganz genau nimmt noch $O(a^{\frac{7}{2}})$ -Terme. Wird da noch eine Bemerkung zu geschrieben, oder nehme ich die ganz brav mit?

Fall $x'=t'=0$ fehlt noch! Erwartet wird $a^{-\frac{3}{4}}$

	$(t', x') = 0$	$t' = x' \neq 0$	$t' = -x' \neq 0$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	a^k
$s = -1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	a^k	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k
$ s < 1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	a^k	a^k	a^k
$ s > 1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tabelle 2: Konvergenzordnung von $\mathcal{S}_{\Delta_m^2}(a, s, (t', x'))$ im Limit $a \rightarrow 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

5 Die Wellenfrontmenge von Δ_m^{*2}

Hier gehört wohl erstmal Text hin, was diese perverse Windung = (twisted convolution) überhaupt zu bedeuten hat. Leider weiß ich das selber noch nicht.

Die perverse Windung zweier Funktionen ist definiert wie folgt:

Definition 5.1 (perverse Windung)

Seien $f, g \in$ „passender Funktionen/Distributionenraum“. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symplektische Matrix. Dann ist die perverse Windung $(f \circledast g)(x)$ definiert als

$$(f \circledast g)(x) := \int f(y)g(x-y)e^{\frac{i}{2}\Omega(x,y)} dy \quad (5.1)$$

Die perverse Windung ist also einfach die gewöhnliche Faltung, die noch mit einem Ortsabhängigen Phasenfaktor verziert wurde.

Bevor wir uns aber der Wellenfrontmenge widmen können, brauchen wir einen Ausdruck für die Fouriertransformierte $\widehat{\Delta_m^{*2}}$ von Δ_m^{*2} .

5.1 Δ berechnen

Sammeln wir zunächst einmal die Zutaten, die wir für die perverse Windung der massiven Zweipunktfunktion mit sich selber brauchen:

herausfinden, was für ein Symbol man für dieses verdrehte Produkt verwendet

twisted convolution definieren, oder twisted product definieren und zeigen, dass dann der Faltungssatz zu dem mit der twisted convolution wird?

Gibt es schon eine Übersetzung für twisted convolution?

$$\begin{aligned}
& \hat{\Delta}_m = \delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \Theta(\omega) \\
& \text{die Fouriertransformierte der massiven Zweipunktfunktion} \\
(5.2) \quad \Omega &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
& \text{die kanonische symplektische Matrix auf } \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

mit der Definition aus 5.1 erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}(\omega, k) &= \int \delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2) \delta((\omega' - \omega)^2 - (k' - k)^2 - m^2) \\
&\quad \cdot \Theta(\omega') \Theta(\omega - \omega') e^{\frac{i}{2}(\omega' k - \omega k')} d\omega' dk'
\end{aligned} \tag{5.3}$$

und damit das selbe Integral wie in (4.1) bis auf einen zusätzlichen Phasenfaktor. Nachdem wir gezeigt haben, dass auch dieser Poincare-Invariant ist, können wir das Integral mit dem selben Trick wie in Abschnitt 4.1 berechnen.

Proposition 5.2 (Ω_{std} ist Lorentz-invariant für $n = 2$)
 Ω_{std} ist Lorentz-invariant für $n = 2$

Beweis

Eine einfache Rechnung zeigt

$$\begin{pmatrix} \cosh \beta & \sinh \beta \\ -\sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \beta & -\sinh \beta \\ \sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Proposition 5.2 ist $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}$ Lorentz-Invariant und es reicht aus $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}(\omega, 0)$ zu berechnen.

Die beiden Kreuzungspunkte der δ -Distributionen liegen bei (vgl. Abb. 3)

$$(\omega'_0, k'_{0\pm}) = \left(\frac{\omega}{2}, \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - m^2} \right)$$

Die „Fläche“ der Kreuzungspunkte der δ -Distributionen wurde in Abschnitt 4.1 berechnet und ist

$$A = \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}}$$

Der Phasenfaktor nimmt bei den Kreuzungspunkten adsföl fadmdsaf ökan

$$e^{\frac{i}{2}\Omega((\omega,k),(\omega'_0,k'_{0\pm}))} = e^{\pm \frac{i}{2}\left(-\omega^2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{\omega^2}}\right)}$$

Kombinieren wir also die vorhergehenden Resultate erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}(\omega, 0) &= Ae^{\frac{i}{2}\Omega((\omega,k),(\omega'_0,k'_{0+}))} + Ae^{\frac{i}{2}\Omega((\omega,k),(\omega'_0,k'_{0-}))} \\ &= \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \left\{ e^{-\frac{i}{2}\omega^2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{\omega^2}}} + e^{\frac{i}{2}\omega^2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{\omega^2}}} \right\} \\ &= 2 \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \cos(\varphi(\omega^2))\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt noch implizit $\varphi(\omega^2)$ definiert wurde. Und mit Lorenz-Invarianz erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}(\omega, k) &= \hat{\Delta}_m^{\otimes 2}(\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) \\ &= 2 \frac{\omega^2 - k^2 - 3m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2}\sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}} \cos\left(\frac{k^2 - \omega^2}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{k^2 - \omega^2}}\right) \\ &= \hat{\Delta}_m^{*2}(\omega, k) \cos(\varphi(\omega^2 - k^2))\end{aligned} \tag{5.4}$$

5.2 ... und nun zur Wellenfrontmenge von $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}$

5.2.1 Fall $|s| > 1$

Wir bedienen uns wieder genau des selben Arguments, wie in (4.6)

$$\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m^{\otimes 2} \right\rangle = 0 \tag{5.5}$$

für a klein genug.

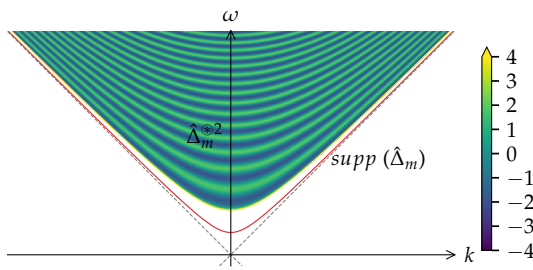


Abbildung 7: Plot von $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}$ und $\hat{\Delta}_m$. Wieder liegt der Träger von $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}$ in der kausalen Zukunft.

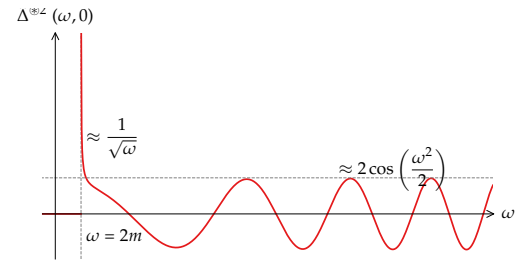


Abbildung 8: Plot von $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}|_{k=0}$ um das asymptotische Verhalten für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ zu verdeutlichen

Fall $|s| < 1, (x, t) \neq 0$

Da $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2} = \hat{\Delta}_m^{\otimes 2} \cos(\dots)$ können wir direkt mit dem Ausdruck (4.7) $\cdot \cos$ weiter arbeiten.

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m^{\otimes 2} \right\rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 \left(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2 \right) - 3a^2m^2 \right)}{\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2} \sqrt{\Delta s\omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}}\omega^2ks - a\omega^2k^2 - 4a^2m^2}} \\ &\quad \cdot \Theta(\dots) \cos(\varphi(\omega^2 - k^2)) e^{-i\omega \left(\frac{t'-sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} d\omega dk \\ &\leq 2a^{-\frac{3}{4}} \int \omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega \left(\frac{t'-sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} d\omega dk \\ &\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Referenz zu Delta_m2 s<1 einfügen und argumentieren, dass wir genau die selben Abschätzungen machen.

Fall $|s| < 1, (x, t) = 0$

In diesem Fall lassen wir den cos-Faktor in (5.6) in der ersten Ungleichung nicht heraus fallen, dafür wird der e^{\dots} -Faktor 1. Den cos-schreiben wir als Summe von e -Funktionen und erhalten

das wird so nix, wie bringe ich den cosinus dazu, zu regeln? Reed Simons nachlesen?

$$\begin{aligned}
& \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m^{\otimes 2} \right\rangle \tag{5.7} \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left\{ \exp \left(ia^{-2} \frac{\omega^2(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{a^2 m^2}{\omega^2(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \exp(-i \dots) \right\} d\omega dk \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \cancel{\omega} \hat{\psi}_1(\sqrt{\omega}) \hat{\psi}_2(k) \left\{ \exp \left(ia^{-2} \frac{\omega(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{a^2 m^2}{\omega(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \exp(-i \dots) \right\} \frac{d\omega dk}{\cancel{\omega}} \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \left\{ \int \hat{\psi}_1(\sqrt{\omega}) \left\{ \exp \left(ia^{-2} \left(\frac{\omega \Delta s}{4} + O\left(a^{\frac{1}{2}}\right) \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \exp(-i \dots) \right\} d\omega \right\} \hat{\psi}_2(k) dk \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{(\hat{\psi}_1 \circ \sqrt{\cdot})^\vee \left(\frac{\Delta s}{4a^2} \right)}_{\sim O(a^k) \ \forall k \in \mathbb{N}} \psi_2(k) dk \\
&\sim O(a^k) \ \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

wobei bei der Substitution $\omega \rightarrow \sqrt{\omega}$ in der zweiten Zeile wichtig ist, dass $0 \notin \text{supp}(\hat{\psi}_1)$, also auch nach der Substitution noch $\hat{\psi}_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ist.

Schritt von dritte in die vierte Zeile rechtfertigen. Vermutlich nicht einfach...

6 Berechnen von $WF(G_F)$

6.1 Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$

Ab jetzt werden wir der Namenskonvention der Physiker in der SRT folgen und unsere Ortsraumvariablen mit $x = (t, x)$ und unsere Impulsraumvariablen mit $\xi = (\omega, k)$ bezeichnen sowie konsequenterweise das Minkowskiskalarprodukt $x \cdot \xi = \omega t - kx$ verwenden. Des weiteren wird der Verschiebungsparameter mit $t = (t', x')$ bezeichnet.

Die massive skalare Zweipunktfunktion bzw. der Feynmanpropagator im Impulsraum ist dann gegeben durch (**Schwartz2014**, (6.34))

$$\hat{G}_F(\omega, k) = \frac{1}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \tag{6.1}$$

Setzen wir dies in unsere Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ aus (2.1, Substitution 1) bzw. (2.1, Substitution 1) ergibt sich, unter Verwendung des Minkowskiskalarprodukts,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle &= \int \hat{\psi}_{ast}(\omega, t) \hat{G}_F(\omega, t) d\omega dk \\
&= a^{\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}} \frac{k}{\omega} - s\right) e^{-i\omega t' + ikx'}}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} d\omega dk \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{\omega s}{a} + \frac{k}{\sqrt{a}}\right)^2 - i0^+} d\omega dk \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{\omega \in [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2] \\ |\frac{k}{2} - s| \leq \sqrt{ax}}} \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 + a^{-2}\omega^2(s^2 - 1) + a^{-\frac{3}{2}}2s\omega k + a^{-1}k^2 - i0^+} d\omega dk \quad (6.2)
\end{aligned}$$

und mit der anderen Substitution analog

$$\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle = a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2] \\ k \in [-1, 1]}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega \left(\frac{t' - sx'}{a} + \frac{kx'}{\sqrt{a}}\right)}}{m^2 - \omega^2(a^{-2}(1 - s^2) - a^{-1}k^2 - 2ksa^{-\frac{3}{2}})} d\omega dk \quad (6.3)$$

Integral
hübsch
machen.
Größeres
Integral-
zeichen?

wobei sich die Integrationsbereiche aus den Forderungen an den Träger von ψ (vgl. (1.2)) ergeben.

Nach Satz (1.2) genügt es zu bestimmen, an welchen Punkten (t', x') und in welche Richtungen s $S_f(a, s, (t', x'))$ nicht schnell-fallend in a^{-1} ist, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen. Da wir keine explizite erzeugende Funktion ψ angegeben haben, werden wir uns dabei Argumente bedienen, die alleine auf den allgemeinen Eigenschaften von ψ_{ast} beruhen, aber nicht einer expliziten Form.

Das allgemeine Vorgehen wird dabei folgendes sein: Die Ausdrücke in (6.2) und (6.3) genau anstarren, um zu sehen für welche Werte von (t', x') und s potentiell interessante Dinge geschehen, also z.B. Terme im Nenner weg fallen, oder die Phase konstant wird. Dann werden diese Werte von (t', x') und s eingesetzt und alles so weit vereinfacht

In Text-
form be-
schrei-
ben, was
die grobe
Strategie
ist, also
wie der
Integrand
vernün-
ftig ver-
einfacht
wird und
welche
Eigen-
schaften
von ψ wie
eingehen.

und genähert – im Rahmen des Erlaubten, ohne das Verhalten für $a \rightarrow 0$ zu ändern –, bis die a -Abhängigkeit abgelesen werden kann. Entscheidende Zutaten sind dabei der beschränkte Träger von $\hat{\psi}$ und der schnelle Abfall von ψ .

Fall $s = 1, t' = 0 = x'$

Nach (6.3) erhalten wir mit $s = 1, t' = 0 = x'$

$$\begin{aligned}\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 + \omega^2(a^{-1}k^2 + a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + \omega^2(a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2k)} d\omega dk\end{aligned}$$

Da aber $|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2]$ und $k \in [-1, 1]$ ist, ist für hinreichend kleine a (und für genau die interessieren wir uns ja)

$$\left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{k\omega^2} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}\omega^2k + 2k\omega^2} \right|$$

eine integrierbare (im Sinne des Cauchy-Hauptwertes) Majorante für den Integranden.

Wir dürfen uns also des Lebesgueschen Konvergenzsatzes bedienen und schreiben

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{2k\omega^2} d\omega dk \sim O(a^{\frac{3}{4}}) \quad (6.4)$$

Für $s = -1$ erhalten wir genau das selbe Ergebniss, da ja der $\omega^2(1 - s^2)$ -Term im Nenner genauso wieder verschwindet.

Warum ist Cauchy-Hauptwert hier erlaubt? Weiter ausführe, warum es diese Majorante tut?

Fall $s \neq \pm 1, t' = 0 = x'$

In diesem Fall verschwindet der $\omega^2(1-s^2)$ -Term im Nenner nicht und dementsprechend folgt

$$\begin{aligned}\langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 - \omega^2((1-s^2) - a^{-1}k^2 - a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{5}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2 m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2 k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2 ks} d\omega dk\end{aligned}$$

Analog zum vorigen Teil ist, diesmal sogar ohne den Cauchy-Hauptwert bemühen zu müssen,

$$\left| \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2 m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2 k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2 ks} \right|$$

dass eine integrierbare Majorante ist (in der Tat ja sogar in $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$) Damit können wir folgende Abschätzung treffen:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} d\omega dk \sim O(a^{\frac{5}{4}})$$

Überall
wo es
sein muss
 $\lim_{a \rightarrow 0}$
dazu
schreiben,
oder sa-
gen dass
der Limit
überall
impliziert
ist

Fall $s \neq \pm 1, (t', s') \neq 0$

In diesem Fall benutzen wir wieder die erste Substitution (6.2) und klammern wie schon in den beiden vorigen Teilen die höchste negative Potenz von a im Nenner aus.

$$\Rightarrow \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^2 m^2 - \omega^2(1-s^2) + a^{\frac{1}{2}}s\omega k + ak^2} d\omega dk \quad (6.5)$$

und da immer noch $0 \notin \text{supp}(\psi_1)$ gilt ist ein weiteres mal eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$2 \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2 - 1)} \quad (6.6)$$

In der Tat ist sogar

$$\hat{f}(\omega, k) := \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2 - 1)} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \quad (6.7)$$

da ψ_1 und ψ_2 getragen sind. Demnach ist die Fourierinverse von \hat{f} , $f := (\hat{f})^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, also schnell fallend. Damit können wir schließlich abschätzen

$$\begin{aligned} |\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle| &= a^{\frac{5}{4}} \left| \int \hat{f}(\omega, k) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega dk \right| \\ &= a^{\frac{5}{4}} \left| f\left(\frac{t'-sx}{a}, \frac{x'}{\sqrt{a}}\right) \right| \leq a^{\frac{5}{4}} C_k \left(1 + \left\| \frac{(t'-sx')/a}{x'/\sqrt{a}} \right\| \right)^{-k} \\ &\leq a^{\frac{5}{4}} \frac{C_k}{2} a^{\frac{k}{2}} \left\| \frac{(t'-sx')}{x'} \right\|^{-k} \sim O\left(a^{\frac{5/2+k}{2}}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow |\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle| &\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Fall $s = 1, (t', x') \neq 0$

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder den ersten Ausdruck für $\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle$ aus (6.2) und sorgen wir auch bisher jedes Mal dafür, dass wir im Nenner nur noch positive Potenzen von a und einen von a unabhängigen Term haben. Dann sieht das ganze so aus:

$$\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2\omega k} d\omega dk$$

wo wir im $\lim_{a \rightarrow 0}$ wieder die a -Potenzen im Nenner weg fallen lassen und auch dieses Mal dafür wieder den Cauchy-Hauptwert bemühen müssen, um den Lebesgueschen Konvergenzsatz benutzen zu dürfen. Weiter geht's:

$$\begin{aligned} &= a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2\omega k} d\omega dk \\ &= a^{\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2k\omega} dk \right\}}_{=: \hat{f}_a(\omega)} \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} d\omega \end{aligned} \quad (6.9)$$

und um hier weiter zu kommen, schauen wir uns \hat{f}_a genauer an. Sei dazu $\Psi_2(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \psi_2(\omega') d\omega' - \int_{\omega}^{+\infty} \psi_2(\omega') d\omega'$ eine Stammfunktion von ψ_2 . Dies ist offenbar C^∞ und beschränkt, da $\hat{\psi}_2 \in C_c^\infty$. Mithilfe von Fourieridentitäten und Substitution können wir nun weiter rechnen:

$$\begin{aligned}\hat{f}_a(\omega) &= \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{2k\omega} e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega \\ &\stackrel{i)}{=} \int \frac{\hat{\psi}_2(k)}{2k} e^{ik\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}} d\omega \\ &\stackrel{ii)}{=} \frac{i}{2} \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)\end{aligned}$$

Hier wurde in *i)* einfach $k \rightarrow \omega k$ substituiert und im Schritt *ii)* wurde genutzt, dass $f(x) = \text{sgn}(x) \leftrightarrow \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k}$. Nun stecken wir diese Erkenntnisse in unseren vorigen Ausdruck und erhalten

$$\begin{aligned}\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle &= \frac{ia^{\frac{3}{4}}}{2} \int \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} d\omega dk \\ &\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right), \quad \text{für } t'=x' \\ &\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}\end{aligned}\tag{6.10}$$

Im letzten Schritt wurde wieder genutzt, dass $\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \hat{\psi}_1(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, und demnach eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

Das analoge Ergebnis erhält man auch für $s = -1$ und $t' = -x'$