

# Berechnen der Wellenfrontmenge der massiven Zweipunktfunktion mittels Shearlets

Jan Lukas Bosse\*

3. Juni 2018

Im folgenden werden wir die Wellenfrontmenge der massiven Zweipunktfunktionen mittels der Methoden von Kutyniok und Labate [1] ausrechnen.

## 1 Allgemeines Gelaber über Shearlets

**Satz 1.1** ( $\mathcal{S}_f(a, s, t)$  misst  $WF(f)$ )

Sei  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$  wobei  $\mathcal{D}_1 = \{ (t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \mid |\mathcal{S}_f(a, s, t)| = O(a^k) \text{ gleichmäßig} \}$   
 $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U$  Umgebung von  $(t_0, s_0)$  } und  $\mathcal{D}_2$  analog für  $\psi^{(v)}$

Dann gilt  $WF(f)^c = \mathcal{D}$

**Korollar 1.2** ( $WF(f)$  misst  $\text{sing supp}(\psi)$ )

Sei  $\mathcal{R} = \{ t_0 \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathcal{S}_f(a, s, t)| = O(a^k) \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } t_0 \}$

Dann gilt  $\text{sing supp}(\psi)^c = \mathcal{R}$

**Bemerkung 1.3** (Träger von  $\psi$ )

Im Fourierraum ist  $\hat{\psi}_{ast}$  gegeben durch

$$\hat{\psi}_{ast}(\xi_1, \xi_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2 \left( a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) \right) \quad (1)$$

und es gilt

diesen Satz richtig hin schreiben und ordentlich setzen

Stil und Nummerierung für Sätze, Propositionen etc. anpassen

---

\*Georg-August Universität Göttingen

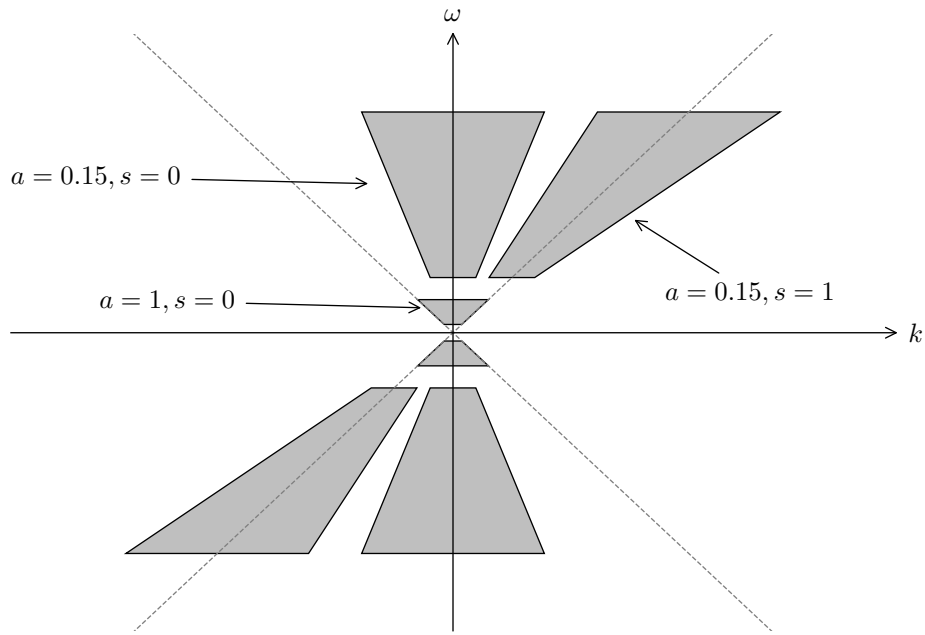


Abbildung 1: Der Träger von  $\hat{\psi}_{ast}$  für verschiedene  $a, s$ . Man sieht gut, wie  $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$  für kleinere  $a$  in immer kleineren Kegeln liegt.

$$\text{supp}(\hat{\psi}) \subset \left\{ \xi \in \hat{\mathbb{R}}^2 \mid |\xi_1| \in \left[ \frac{1}{2a}, \frac{2}{a} \right], \left| \frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right| \leq \sqrt{a} \right\} \quad (2)$$

## 2 Allgemeine Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$

Zunächst werden wir zwei verschiedene Ausdrücke für  $\langle \psi_{ast}, f \rangle$  im Fourierraum herleiten, welche sich im dann folgenden als nützlich erweisen werden.

Sei also  $\psi$  ein Shearlet wie in Korollar 1.3. Sei  $f$  die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ . Dann ist  $\mathcal{S}_f(ast)$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \psi_{ast}, f \rangle &= \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{f} \rangle \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2 \left( a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) \right) \hat{f}(\xi) \, d\xi \end{aligned}$$

und nach „entscheren“ und „deskalisieren“, also der Substitution

entscheiden,  
was mit  
dem  
fehlenden  
Faktor  
 $\frac{1}{(2\pi)^n}$   
geschieht

$$\begin{aligned}
a\xi_1 &= k_1 & \xi_1 &= \frac{k_1}{a} \\
a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) &= \frac{k_2}{k_1} & \xi_2 &= \frac{k_1 s}{a} + a^{-\frac{1}{2}} k_2 \\
\Rightarrow d\xi_1 d\xi_2 &= a^{-\frac{3}{2}} dk_1 dk_2
\end{aligned}$$

ergibt sich folgendes für  $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ :

$$= \iint a^{-\frac{3}{4}} \hat{\psi}_1(k_1) \hat{\psi}_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \hat{f}\left(\frac{k_1}{a}, \frac{k_1 s}{a} + \frac{k_2}{\sqrt{a}}\right) e^{-i\frac{k_1}{a}(t_1+t_2s)-i\frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}} dk_1 dk_2 \quad (3)$$

Alternativ kann auch folgende Substitution

$$\begin{aligned}
a\xi_1 &= k_1 & \xi_1 &= \frac{k_1}{a} \\
a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) &= k_2 & \xi_2 &= \left(a^{\frac{1}{2}} k_2 + s\right) \frac{k_1}{a} \\
\Rightarrow d\xi_1 d\xi_2 &= a^{-\frac{3}{2}} k_1 dk_1 dk_2
\end{aligned}$$

gewählt werden, wodurch alle Parameter aus den Argumenten von  $\psi_1, \psi_2$  verschwinden und sich

$$= \iint a^{-\frac{3}{4}} k_1 \hat{\psi}_1(k_1) \hat{\psi}_2(k_2) \hat{f}\left(\frac{k_1}{a}, k_1 \left(a^{-\frac{1}{2}} k_2 + s a^{-1}\right)\right) e^{-ik_1\left(\frac{t_1+st_2}{a} + \frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}\right)} dk_1 dk_2 \quad (4)$$

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulässig ist, obwohl sie die Orientierung nicht erhält und nicht eine Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nämlich  $\xi_1 = 0$ , liegt nicht im Träger von  $\psi$ .

## 2.1 Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$

Ab jetzt werden wir der Namenskonvention der Physiker in der SRT folgen und unsere Ortsraumvariablen mit  $x = (t, x)$  und unsere Impulsraumvariablen mit  $\xi = (\omega, k)$  bezeichnen sowie konsequenterweise das Minkowskiskalarprodukt  $x \cdot \xi = \omega t - kx$  verwenden. Des weiteren wird der Verschiebungsparameter mit  $t = (t', x')$  bezeichnet.

herausfinden,  
wie die  
Gleichun-  
gen auch  
Kapitel-  
nummern  
erhalten

Grafik  
bas-  
teln, die  
*supp*  $\psi$   
vor und  
nach der  
Substituti-  
on zeigt.

Die massive skalare Zweipunktfunktion bzw. der Feynmanpropagator im Impulsraum ist dann gegeben durch (Schwartz [2], (6.34))

$$\hat{G}_F(\omega, k) = \frac{1}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \quad (5)$$

Setzen wir dies in unsere Ausdrücke für  $\langle \psi_{ast}, f \rangle$  aus (3) bzw. (4) ergibt sich, unter Verwendung des Minkowskiskalaprodukts,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle &= \int \hat{\psi}_{ast}(\omega, t) \hat{G}_F(\omega, t) \, d\omega \, dk \\ &= a^{\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}} \frac{k}{\omega} - s\right) e^{-i\omega t' + ikx'}}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \, d\omega \, dk \\ &= a^{-\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{\omega s}{a} + \frac{k}{\sqrt{a}}\right)^2 - i0^+} \, d\omega \, dk \\ &= a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{\omega \in [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2] \\ |\frac{k}{2} - s| \leq \sqrt{ax}}} \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 + a^{-2}\omega^2(s^2 - 1) + a^{-\frac{3}{2}}2s\omega k + a^{-1}k^2 - i0^+} \, d\omega \, dk \quad (6) \end{aligned}$$

und mit der anderen Substitution analog

$$\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle = a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2] \\ k \in [-1, 1]}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega \left(\frac{t' - sx'}{a} + \frac{kx'}{\sqrt{a}}\right)}}{m^2 - \omega^2(a^{-2}(1 - s^2) - a^{-1}k^2 - 2ksa^{-\frac{3}{2}})} \, d\omega \, dk \quad (7)$$

Integral  
hübsch  
machen.  
Größeres  
Integral-  
zeichen?

wobei sich die Integrationsbereiche aus den Forderungen an den Träger von  $\psi$  (vgl. (2)) ergeben.

### 3 Berechnen von $WF(G_F)$

Nach Satz (1.1) genügt es zu bestimmen, an welchen Punkten  $(t', x')$  und in welche Richtungen  $s$   $\mathcal{S}_f(a, s, (t', x'))$  nicht schnell-fallend in  $a^{-1}$  ist, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen. Da wir keine explizite erzeugende Funktion  $\psi$  angegeben haben, werden wir uns dabei Argumente bedienen, die alleine auf den allgemeinen Eigenschaften von  $\psi_{ast}$  beruhen, aber nicht einer expliziten Form.

In Text-  
form be-  
schrei-  
ben, was  
die grobe  
Strategie  
ist, also  
wie der  
Integrand  
vernünftg  
verein-  
facht wird  
und wel-

Das allgemeine Vorgehen wird dabei folgendes sein: Die Ausdrücke in (6) und (7) genau anstarren, um zu sehen für welche Werte von  $(t', x')$  und  $s$  potentiell interessante Dinge geschehen, also z.B. Terme im Nenner weg fallen, oder die Phase konstant wird. Dann werden diese Werte von  $(t', x')$  und  $s$  eingesetzt und alles so weit vereinfacht und genähert – im Rahmen des Erlaubten, ohne das Verhalten für  $a \rightarrow 0$  zu ändern –, bis die  $a$ -Abhängigkeit abgelesen werden kann. Entscheidende Zutaten sind dabei der beschränkte Träger von  $\hat{\psi}$  und der schnelle Abfall von  $\psi$ .

**Fall**  $s = 1, t' = 0 = x'$

Nach (7) erhalten wir mit  $s = 1, t' = 0 = x'$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 + \omega^2(a^{-1}k^2 + a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + \omega^2(a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2k)} d\omega dk \end{aligned}$$

Da aber  $|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2]$  und  $k \in [-1, 1]$  ist, ist für hinreichend kleine  $a$  (und für genau die interessieren wir uns ja)

$$\left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{k\omega^2} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}\omega^2k + 2k\omega^2} \right|$$

eine integrierbare (im Sinne des Cauchy-Hauptwertes) Majorante für den Integranden.

Wir dürfen uns also des Lebesgueschen Konvergenzsatzes bedienen und schreiben

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{2k\omega^2} d\omega dk \sim O(a^{\frac{3}{4}}) \quad (8)$$

Für  $s = -1$  erhalten wir genau das selbe Ergebniss, da ja der  $\omega^2(1 - s^2)$ -Term im Nenner genauso wieder verschwindet.

**Fall**  $s \neq \pm 1, t' = 0 = x'$

In diesem Fall verschwindet der  $\omega^2(1 - s^2)$ -Term im Nenner nicht und dementsprechend folgt

Warum ist Cauchy-Hauptwert hier erlaubt? Weiter ausführe, warum es diese Majorante tut?

$$\begin{aligned}\langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 - \omega^2((1-s^2) - a^{-1}k^2 - a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{5}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2 m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2 k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2 k s} d\omega dk\end{aligned}$$

Analog zum vorigen Teil ist, diesmal sogar ohne den Cauchy-Hauptwert bemühen zu müssen,

$$\left| \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2 m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2 k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2 k s} \right|$$

dass eine integrierbare Majorante ist (in der Tat ja sogar in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ) Damit können wir folgende Abschätzung treffen:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} d\omega dk \sim O(a^{\frac{5}{4}})$$

Überall  
wo es  
sein muss  
 $\lim_{a \rightarrow 0}$   
dazu  
schrei-  
ben, oder  
sagen dass  
der Limit  
überall  
impliziert  
ist

**Fall**  $s \neq \pm 1, (t', s') \neq 0$

In diesem Fall benutzen wir wieder die erste Substitution (6) und klammern wie schon in den beiden vorigen Teilen die höchste negative Potenz von  $a$  im Nenner aus.

$$\Rightarrow \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^2 m^2 - \omega^2(1-s^2) + a^{\frac{1}{2}}s\omega k + ak^2} d\omega dk \quad (9)$$

und da immer noch  $0 \notin \text{supp}(\psi_1)$  gilt ist ein weiteres mal eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$2 \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2 - 1)} \quad (10)$$

In der Tat ist sogar

$$\hat{f}(\omega, k) := \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2 - 1)} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}}^2) \quad (11)$$

da  $\psi_1$  und  $\psi_2$  getragen sind. Demnach ist die Fourierinverse von  $\hat{f}$ ,  $f := \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , also schnell fallend. Damit können wir schließlich abschätzen

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle \right| &= a^{\frac{5}{4}} \left| \int \hat{f}(\omega, k) e^{-i\omega \left( \frac{t' - sx'}{a} \right) + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega dk \right| \\
&= a^{\frac{5}{4}} \left| f \left( \frac{t' - sx}{a}, \frac{x'}{\sqrt{a}} \right) \right| \leq a^{\frac{5}{4}} C_k \left( 1 + \left\| \frac{(t' - sx')/a}{x'/\sqrt{a}} \right\| \right)^{-k} \\
&\leq a^{\frac{5}{4}} \frac{C_k}{2} a^{\frac{k}{2}} \left\| \frac{(t' - sx')}{x'} \right\|^{-k} \sim O \left( a^{\frac{5/2+k}{2}} \right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow \left| \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle \right| &\sim O \left( a^k \right) \quad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{12}$$

**Fall**  $s = 1, (t', x') \neq 0$

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder den ersten Ausdruck für  $\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle$  aus (6) und sorgen wir auch bisher jedes Mal dafür, dass wir im Nenner nur noch positive Potenzen von  $a$  und einen von  $a$  unabhängigen Term haben. Dann sieht das ganze so aus:

$$\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2 \left( \frac{k}{\omega} \right) e^{-i\omega \left( \frac{t' - x'}{a} \right) + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^{\frac{3}{2}} m^2 + a^{\frac{1}{2}} k^2 + 2\omega k} d\omega dk$$

wo wir im  $\lim_{a \rightarrow 0}$  wieder die  $a$ -Potenzen im Nenner weg fallen lassen und auch dieses Mal dafür wieder den Cauchy-Hauptwert bemühen müssen, um den Lebesgueschen Konvergenzsatz benutzen zu dürfen. Weiter geht's:

$$\begin{aligned}
&= a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2 \left( \frac{k}{\omega} \right) e^{-i\omega \left( \frac{t' - x'}{a} \right) + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2\omega k} d\omega dk \\
&= a^{\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2 \left( \frac{k}{\omega} \right) e^{ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2k\omega} dk \right\}}_{=: \hat{f}_a(\omega)} \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \left( \frac{t' - x'}{a} \right)} d\omega
\end{aligned} \tag{13}$$

und um hier weiter zu kommen, schauen wir uns  $\hat{f}_a$  genauer an. Sei dazu  $\Psi_2(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \psi_2(\omega') d\omega' - \int_{\omega}^{+\infty} \psi_2(\omega') d\omega'$  eine Stammfunktion von  $\psi_2$ . Dies ist offenbar  $C^\infty$  und beschränkt, da  $\hat{\psi}_2 \in C_c^\infty$ . Mithilfe von Fourieridentitäten und Substitution können wir nun weiter rechnen:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_a(\omega) &= \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{2k\omega} e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega \\
&\stackrel{i)}{=} \int \frac{\hat{\psi}_2(k)}{2k} e^{ik\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}} d\omega \\
&\stackrel{ii)}{=} \frac{i}{2} \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)
\end{aligned}$$

Hier wurde in *i*) einfach  $k \rightarrow \omega k$  substituiert und im Schritt *ii*) wurde genutzt, dass  $f(x) = \text{sgn}(x) \leftrightarrow \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k}$ . Nun stecken wir diese Erkenntnisse in unseren vorigen Ausdruck und erhalten

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle &= \frac{ia^{\frac{3}{4}}}{2} \int \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} d\omega dk \\
&\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right) \quad ; \text{ für } t' = x' \\
&\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad ; \text{ andernfalls}
\end{aligned} \tag{14}$$

Im letzten Schritt wurde wieder genutzt, dass  $\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \hat{\psi}_1(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist, und demnach eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

Das analoge Ergebnis erhält man auch für  $s = -1$  und  $t' = -x'$

## Literatur

- [1] Gitta Kutyniok und Demetrio Labate. “Resolution of the wavefront set using continuous shearlets”. In: Transactions of the American Mathematical Society 361.05 (2008), S. 2719–2754. URL: <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-08-04700-4>.
- [2] Matthew D. Schwartz. Quantum Field Theory and the Standard Model -. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1-107-03473-0.