

# Jan Lukas krasse Bachelorarbeit

Jan Lukas Bosse\*

10. Juni 2018

Hier ist wohl noch etwas zu tun... So eine hübsche Frontseite wäre doch was!

## Inhaltsverzeichnis

1	Zweipunktfunktionen, Sternprodukte und all die Physik	2
2	Fouriertransformation, mikrolokale Analysis und all die Mathematik	2
3	Shearlets	2
4	Zwei nützliche Substitutionen für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$	3
5	Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m$	5
6	Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m^2$	8
6.1	$\hat{\Delta}^{*2}$ berechnen	8
6.2	... und nun zur Wellenfrontmenge	10
7	Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m^{*2}$	15
7.1	$\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}$ berechnen	16
7.2	... und nun zur Wellenfrontmenge von $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}$	18
8	Berechnen von $WF(G_F)$	22
8.1	Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$	22

---

\*Georg-August Universität Göttingen

# 1 Zweipunktfunktionen, Sternprodukte und all die Physik

Hier entsteht irgendwann mal ein Kapitel, in dem die notwendigen physikalischen Begriffe alle eingeführt werden und das Problem motiviert wird.

# 2 Fouriertransformation, mikrolokale Analysis und all die Mathematik

Hier entsteht mal ein Kapitel, in dem die notwendigen mathematischen Begriffe eingeführt und motiviert werden.

# 3 Shearlets

## Proposition 3.1 ( $\psi_{ast}$ fällt schnell ab)

Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  ein Shearlet wie definiert und  $M$  so ne Trafomatrix. Dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dass es eine konstante  $C_k$  gibt s.d. für alle  $x \in \mathbb{R}^2$  gilt

$$\begin{aligned} |\psi_{ast}(x)| &\leq C_k |\det M|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + |M^{-1}(x - t)|^2\right)^{-k} \\ &= C_k a^{-\frac{3}{4}} \left(1 + a^{-2}(x_1 - t_1)^2 + 2a^{-2}s(x_1 - t_1)(x_2 - t_2) + a^{-1} \left(1 + a^{-1}s^2\right)(x_2 - t_2)^2\right)^{-k} \end{aligned}$$

Und insbesondere ist  $C_k = \frac{15}{2} \frac{\sqrt{a+s}}{a^2} (\|\hat{\psi}\|_\infty + \|\triangle^k \hat{\psi}\|_\infty)$

## Satz 3.2 ( $\mathcal{S}_f(a, s, t)$ misst $WF(f)$ )

Sei  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$  wobei  $\mathcal{D}_1 = \{ (t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \mid |\mathcal{S}_f(a, s, t)| = O(a^k) \text{ gleichmäßig } \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } (t_0, s_0) \}$  und  $\mathcal{D}_2$  analog für  $\psi^{(v)}$

Dann gilt  $WF(f)^c = \mathcal{D}$

## Korollar 3.3 ( $WF(f)$ misst $\text{sing supp}(\psi)$ )

Sei  $\mathcal{R} = \{ t_0 \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathcal{S}_f(a, s, t)| = O(a^k) \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } t_0 \}$

Dann gilt  $\text{sing supp}(\psi)^c = \mathcal{R}$

In dieser Sektion nur die wichtigsten Ergebnisse des Papers angeben, oder auch Beweise oder zumindest Beweisskizzen, damit man sieht wie alles zusammen spielt?

diesen Satz richtig hin schreiben und ordentlich setzen

Stil und Nummerierung für Sätze, Propositionen etc. anpassen

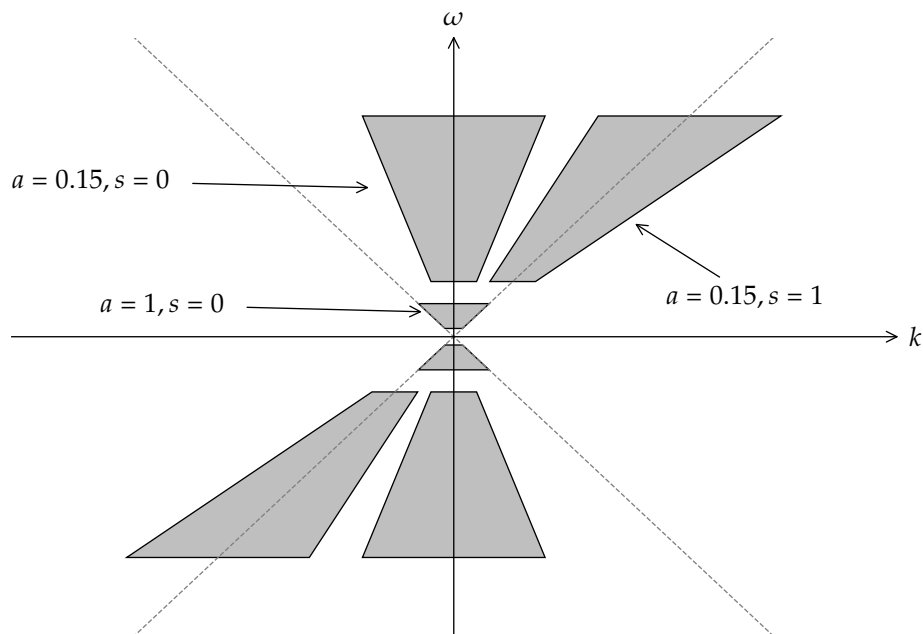


Abbildung 1: Der Träger von  $\hat{\psi}_{ast}$  für verschiedene  $a, s$ . Man sieht gut, wie  $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$  für kleinere  $a$  in immer spitzeren Kegeln liegt.

#### Bemerkung 3.4 (Träger von $\hat{\psi}_{ast}$ )

Im Fourierraum ist  $\hat{\psi}_{ast}$  gegeben durch

$$\hat{\psi}_{ast}(\xi_1, \xi_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right)\right) \quad (3.1)$$

und es gilt

$$\text{supp}(\hat{\psi}) \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi_1| \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right], \left|\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right| \leq \sqrt{a} \right\} \quad (3.2)$$

## 4 Zwei nützliche Substitutionen für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$

Zunächst werden wir zwei verschiedene Ausdrücke für  $\langle \psi_{ast}, f \rangle$  im Fourierraum herleiten, welche fast immer Ausgangspunkt für unsere Abschätzungen sein werden.

Sei also  $\psi$  ein Shearlet wie in Bemerkung 3.4. Sei  $f$  die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ . Dann ist  $\mathcal{S}_f(ast)$  gegeben durch

mit  $(\omega, k)$  als Variablennamen arbeiten, um zum Rest des Textes zu passen, oder mit  $(\xi_1, \xi_2)$  um zu Kutyniok2008 zu passen?

$$\begin{aligned}\langle \psi_{ast}, f \rangle &= \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{f} \rangle \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\tilde{\zeta} \cdot t} \hat{\psi}_1(a\tilde{\zeta}_1) \hat{\psi}_2 \left( a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\tilde{\zeta}_2}{\tilde{\zeta}_1} - s \right) \right) \hat{f}(\tilde{\zeta}) d\tilde{\zeta}\end{aligned}$$

und nach „entscheren“ und „deskalisieren“, also der Substitution

$$\begin{aligned}a\tilde{\zeta}_1 &= k_1 & \Longleftrightarrow & \quad \tilde{\zeta}_1 = \frac{k_1}{a} \\ a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\tilde{\zeta}_2}{\tilde{\zeta}_1} - s \right) &= \frac{k_2}{k_1} & \Longleftrightarrow & \quad \tilde{\zeta}_2 = \frac{k_1 s}{a} + a^{-\frac{1}{2}} k_2\end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\Rightarrow d\tilde{\zeta}_1 d\tilde{\zeta}_2 = a^{-\frac{3}{2}} dk_1 dk_2$$

entscheiden,  
was mit  
dem  
fehlenden  
Faktor  
 $\frac{1}{(2\pi)^n}$   
geschieht

ergibt sich folgendes für  $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ :

owntag  
fixen

$$\begin{aligned}\langle \psi_{ast}, f \rangle &= \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{f} \rangle \\ &= \iint a^{-\frac{3}{4}} \hat{\psi}_1(k_1) \hat{\psi}_2 \left( \frac{k_2}{k_1} \right) \hat{f} \left( \frac{k_1}{a}, \frac{k_1 s}{a} + \frac{k_2}{\sqrt{a}} \right) e^{-i\frac{k_1}{a}(t_1+t_2s) - i\frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}} dk_1 dk_2 q : substitution1q : substitution1a\end{aligned} \quad (4.2, \text{Substitution 1})$$

Wie man sieht, tauchen in den Argumente von  $\hat{\psi}_1$  und  $\hat{\psi}_2$  nun die Parameter  $a, s, t$  gar nicht mehr auf, und wir können nun verwenden, was wir aus 3 über deren Träger wissen. Alternativ und mit ähnlichem Ergebniss kann auch folgende Substitution

$$\begin{aligned}a\tilde{\zeta}_1 &= k_1 & \Longleftrightarrow & \quad \tilde{\zeta}_1 = \frac{k_1}{a} \\ a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\tilde{\zeta}_2}{\tilde{\zeta}_1} - s \right) &= k_2 & \Longleftrightarrow & \quad \tilde{\zeta}_2 = \left( a^{\frac{1}{2}} k_2 + s \right) \frac{k_1}{a}\end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow d\tilde{\zeta}_1 d\tilde{\zeta}_2 = a^{-\frac{3}{2}} k_1 dk_1 dk_2$$

gewählt werden, wodurch wieder alle Parameter  $(a, s, t)$  aus den Argumenten von  $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$  verschwinden und sich

$$\langle \psi_{ast}, f \rangle = \iint a^{-\frac{3}{4}} k_1 \hat{\psi}_1(k_1) \hat{\psi}_2(k_2) \hat{f}\left(\frac{k_1}{a}, k_1 \left(a^{-\frac{1}{2}} k_2 + sa^{-1}\right)\right) e^{-ik_1 \left(\frac{t_1 + st_2}{a} + \frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}\right)} dk_1 dk_2 q : substitution2q : sub$$

(4.4, Substitution 2)

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulässig ist, obwohl sie die Orientierung nicht erhält und keine Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nämlich  $\zeta_1 = 0$ , liegt nicht im Träger von  $\hat{\psi}$ .

Beiden Substitution gemein ist aber, dass danach  $0 = \omega \notin \text{supp}(\hat{\psi})$  und dass  $\text{supp}(\psi)$  sowohl in  $k$  als auch in  $\omega$  beschränkt ist.  $\omega$  kann also sowohl nach unten als auch nach oben durch eine Konstante abgeschätzt werden, wannimmer dies der Sache dienlich ist. Auch  $k$  kann zumindest nach oben immer durch eine Konstante abgeschätzt werden.

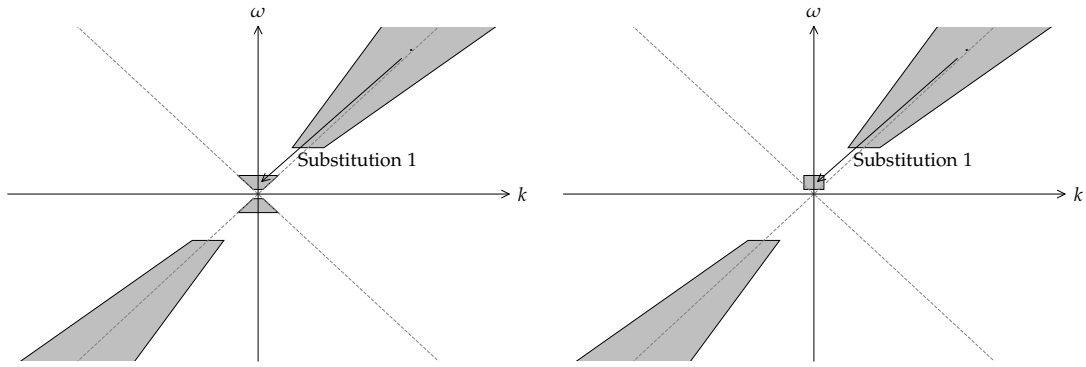


Abbildung 2: Der Träger von  $\hat{\psi}$  vor und nach der Substitution aus Gleichung (4.1)

Abbildung 3: Der Träger von  $\hat{\psi}$  vor und nach der Substitution aus Gleichung (4.3)

## 5 Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m$

Die massive Zweipunktfunktion ist die Fouriertransformierte der  $1m$ -Massenschale positiver Energie (vgl. **Schwartz2014**, 24.69):

$$\Delta_m(t, x) = \int \delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \Theta(\omega) e^{-i\omega t + ikx} d\omega dk \quad (5.1)$$

woraus sich  $\hat{\Delta}_m$  direkt als  $\delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \Theta(\omega)$  ablesen lässt.

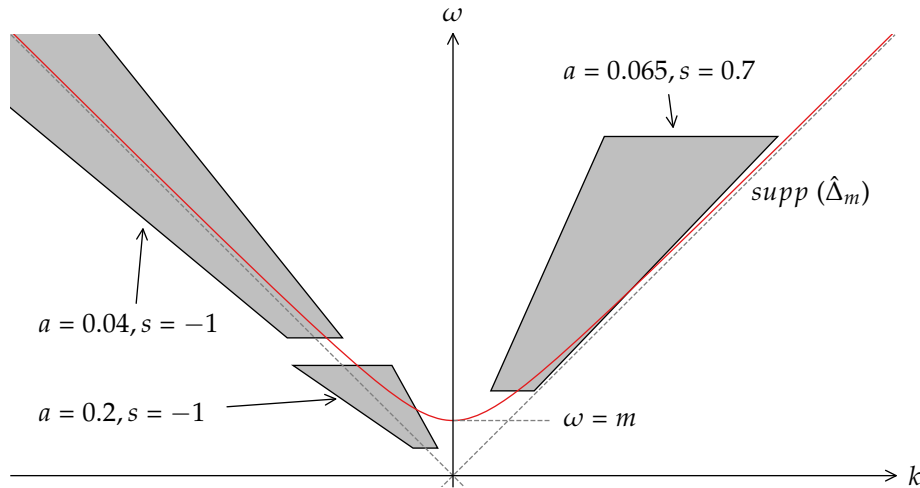


Abbildung 4: Die Träger von  $\hat{\Delta}_m$  und  $\hat{\psi}_{ast}$ . Es ist zu sehen, dass für  $a \rightarrow 0$  und  $s \neq \pm 1$  die Träger schließlich disjunkt sind

#### Fall $s \neq \pm 1$

Hier gibt es nicht viel zu tun, denn für  $a$  klein genug gilt  $\text{supp}(\hat{\Delta}_m) \cap \text{supp}(\hat{\psi}_{ast}) = \emptyset$  wie man Abb. 4 entnehmen kann. Also gilt

$$\begin{aligned} \langle \psi_{ast}, \Delta_m \rangle &= \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m \rangle \\ &= 0 \\ &= O(a^k) \quad \forall k, \quad \text{für } a \text{ klein genug} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dies gilt für alle  $(t', x') \in \mathbb{R}^2$

#### Fall $s = 1$

**Intuition** Für  $s = 1$  schneidet die Diagonale  $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$  auf der ganzen Länge. Der Betrag von  $\hat{\psi}_{ast}$  skaliert mit  $a^{\frac{3}{4}}$  (vgl. Gleichung (3.1)) und die Länge von  $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$  entlang der Diagonalen mit  $a^{-1}$  (vgl. Gleichung (3.1)). Also erwarten wir schlimmstenfalls  $\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m \rangle = O(a^{-\frac{1}{4}})$ . Aber nur wenn die Wellenfronten von  $e^{-i\omega t' + ikx'}$  parallel zu der Singularität und damit der Diagonalen liegen. Andernfalls erwarten wir, dass die immer schneller werdenden Oszillationen der Phase sich gegenseitig auslöschen.

hier noch blöde Abschätzerei machen, warum das tatsächlich gilt, oder stehen lassen. Oder im Kapitel Shearlets ne Bemerkung machen, warum wir in immer engeren Kegeln landen?

## Fleißige Analysis

$$\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{\Delta}_m \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2 \left( a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{k}{\omega} - 1 \right) \right) \delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \theta(\omega) e^{-i\omega t' + ikx'} d\omega dk$$

Nullstellen von  $\delta$  :

$$\omega^2 - k^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\omega^2 - m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{d\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}}; \text{ wobei nur „+“ in } \text{supp}(\hat{\psi}_2) \text{ liegt}$$

$$\begin{aligned} &= a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2 \left( a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\omega} - 1 \right) \right) e^{-i\omega t' + i\sqrt{\omega^2 - m^2}x'} d\omega \\ &= a^{\frac{3}{4}} a^{-1} \int \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2 \left( a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{a\omega^2 - m^2}}{\omega} - 1 \right) \right) e^{-i\frac{\omega}{a}t' + i\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - m^2}x'} d\omega \\ &\quad \underbrace{\left( a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{a\omega^2 - m^2}}{\omega} - 1 \right) \right)}_{= \frac{3}{2} \frac{m^2}{\omega^2} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)} \end{aligned}$$

Der Integrand lässt sich nun durch  $\hat{\psi}_1(\omega) \|\hat{\psi}_2\|_\infty$  majorisieren und wir dürfen Lebesgue verwenden um Integral und Grenzwert  $a \rightarrow 0$  zu vertauschen

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{\Delta}_m \rangle &= a^{-\frac{1}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(0) e^{-i\omega \left( \frac{t' - x'}{a} \right)} \\ &= a^{-\frac{1}{4}} \hat{\psi}_2(0) \psi_1 \left( \frac{t' - x'}{a} \right) \\ &\sim O\left(a^{-\frac{1}{4}}\right), \text{ falls } x' = t' \\ &\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k, \text{ sonst} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Das analoge Ergebnis erhält man mit gleicher Rechnung auch für  $s = -1$  und  $t' = -x'$ . Dies bestätigt das intuitiv erwartete Ergebnis. Fassen wir die Ergebnisse aus Gleichungen (5.2) und (5.3) noch einmal tabellarisch zusammen:

	$(t', x') = (0, 0)$	$t' = x'$	$t' = -x'$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^k$	$a^k$
$s = -1$	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^k$	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^k$
$s \neq \pm 1$	$a^k$	$a^k$	$a^k$	$a^k$

Tabelle 1: Konvergenzordnung von  $S_{\Delta_m}(a, s, (t', x'))$  im Limit  $a \rightarrow 0$  für alle interessanten Kombinationen von  $s$  und  $(t', x')$

Statt  $a^k$  einfach leer lassen, und nur nicht reguläre Punkte und Richtungen aufschreiben?

## 6 Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m^2$

Bevor wir die Wellenfrontmenge von  $\Delta_m^2$  berechnen können, benötigen wir einen Ausdruck dafür, oder besser noch einen für die Fouriertransformierte davon.

### 6.1 $\hat{\Delta}^{*2}$ berechnen

Gemäß dem Faltungssatz gilt  $\widehat{\Delta_m^2} = \hat{\Delta}_m * \hat{\Delta}_m = \hat{\Delta}_m^{*2}$ . Wir müssen also die Faltung von  $\hat{\Delta}_m$  mit sich selber ausrechnen.

Das Faltungsintegral ist

$$\hat{\Delta}_m^{*2}(\omega, k) = \int \theta(\omega') \delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2) \theta(\omega - \omega') \delta((\omega - \omega')^2 - (k - k')^2 - m^2) d\omega' dk' \quad (6.1)$$

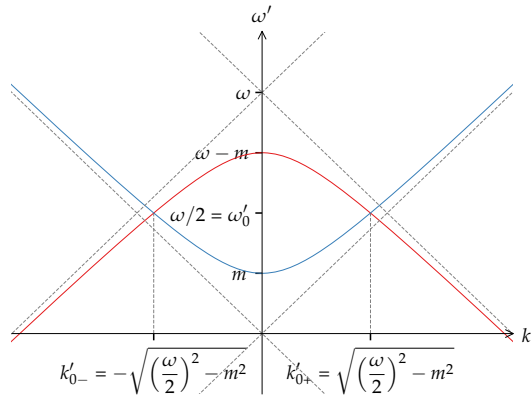


Abbildung 5: Das zu berechnende Integral aus Gleichung (6.1) visualisiert für  $k = 0$

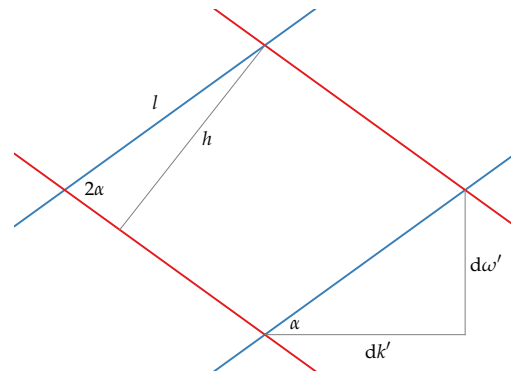


Abbildung 6: Die Kreuzungstelle bei  $k'_{0+}$  von ganz nah angeschaut

Da  $\Delta_m$  Lorentz-invariant ist, sind  $\Delta_m^2$  und  $\hat{\Delta}_m^{*2}$  es auch. Es genügt also  $\hat{\Delta}_m^{*2}$  für  $k = 0$  und positive  $\omega$  zu berechnen. Alle anderen Werte holen wir uns dann aus der Lorentz-Invarianz. An Abb. 5 sehen wir schon, dass das Faltungsintegral Gleichung (6.1) nur dann ungleich null ist, wenn  $(\omega, k)$  in der  $2m$ -Massenschale liegen. Es ist also insbesondere  $\omega > 0$ .

Um nun das Integral über zwei sich schneidende lineare<sup>1</sup>  $\delta$ -Distributionen zu berechnen

Wie erklärt man das besser, ohne an Anschaulichkeit oder Rigorosität zu verlieren



bedienen wir uns eines Physikertricks und stellen uns die  $\delta$ -Distribution als Grenzwert ( $h \rightarrow 0$ ) einer  $\frac{1}{h}$ -hohen und  $h$ -breiten Rechtecksfunktion vor. Dann ist das Integral über die sich schneidenden Rechtecksfunktionen proportional zu der Schnittfläche und damit zu  $l \cdot h$  in Abb. 6. Außerdem schneiden sich die beiden Hyperbeln für  $\omega \rightarrow +\infty$  in einem rechten Winkel, das Faltungsintegral ergibt hier also 2 da es zwei Schnittpunkte gibt.

Aus Abb. 6 lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{d\omega'}{dk'} \quad \text{und} \quad \frac{h}{l} = \sin(2\alpha) \\ \Rightarrow l &= \frac{h}{\sin\left(2 \arctan\left(\frac{d\omega'}{dk'}\right)\right)} = \frac{h \left( \left(\frac{d\omega'}{dk'}\right)^2 + 1 \right)}{2 \frac{d\omega'}{dk'}} \end{aligned} \quad (6.2)$$

außerdem gilt

$$\omega' = \sqrt{k'^2 + m^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega'}{dk'} = \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + m^2}} \quad (6.3)$$

Wenn wir nun Gleichungen (6.2) und (6.3) sowie die vorhergehenden Gedanken kombinieren erhalten wir

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta_m}^{*2}(\omega, 0) &= (6.1) \\ &= C \frac{\left(\frac{d\omega'}{dk'}\right)^2 \Big|_{k'_0} + 1}{\frac{d\omega'}{dk'} \Big|_{k'_0}} \Theta(\omega^2 - (2m)^2) \\ &= C \frac{\sqrt{k_0'^2 + m^2}(2k_0'^2 + m^2)}{2k_0'(k_0'^2 + m^2)} \Theta(\dots) \\ &= C \frac{\sqrt{\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2(\omega^2 - 4m^2 + m^2)}}{\sqrt{\omega^2 - 4m^2}(\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2)} \Theta(\dots) \\ &= C \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \Theta(\dots) \stackrel{C=2}{=} 2 \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \Theta(\dots) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Jetzt erhalten wir  $\widehat{\Delta_m}^{*2}(\omega, k)$  für beliebige  $k$  noch aus der Lorentz-Invarianz:

<sup>1</sup>Linear in dem Sinne, dass die Distribution entlang einer Linie getragen ist. Nicht dass es eine lineare Distribution ist

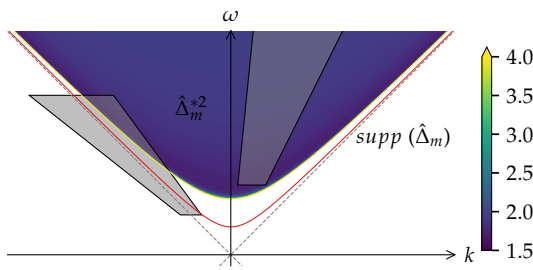


Abbildung 7: Plot von  $\hat{\Delta}_m^{*2}$  und  $\hat{\Delta}_m$ . Je weiter wir uns von der  $2m$ -Massenschale wegbewegen, desto konstanter wird  $\hat{\Delta}_m^{*2}$  und ist singulär genau auf der  $2m$ -Massenschale

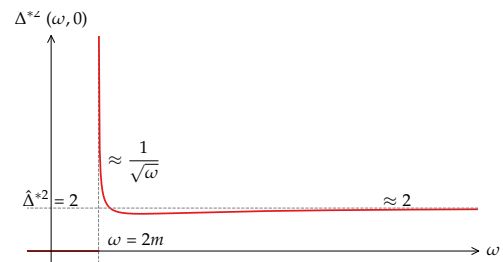


Abbildung 8: Plot von  $\hat{\Delta}_m^{*2}|_{k=0}$  um das asymptotische Verhalten für  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$  zu verdeutlichen

$$\hat{\Delta}_m^{*2}(\omega, k) \stackrel{(\omega, k) \sim (\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0)}{=} \hat{\Delta}_m^{*2}(\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) = 2 \frac{\omega^2 - k^2 - 3m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2} \sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}} \Theta(\omega^2 - k^2 - 4m^2) \quad (6.5)$$

Es ist zu beachten, dass die Heaviside-Funktion genau bei der ersten Nullstelle der zweiten Wurzel im Nenner abschneidet und alle weiteren Nullstellen sowohl des Nenners als auch des Zählers außerhalb der  $2m$ -Massenschale und damit außerhalb des Trägers der Heaviside-Funktion liegen.

## 6.2 ... und nun zur Wellenfrontmenge

Mit diesem Ausdruck für  $\hat{\Delta}_m^{*2}$  können wir uns nun der Wellenfrontmenge widmen.

**Fall  $|s| > 1$**

Genau wie im Fall  $s \neq 1$  bei der massiven Zweipunktfunktion (vgl. Abschnitt 5) ist hier nichts zu tun, da für  $a$  klein genug wieder

$supp(\psi_{ast})$   
einzeichnen  
oder  
nicht in  
Abb. 7?

spacing  
der  
figu-  
res  
anpas-  
sen

$$\text{supp}(\hat{\psi}_{ast}) \cap \text{supp}(\hat{\Delta}_m^{*2}) = \emptyset \implies \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m^{*2} \right\rangle = 0 \quad (6.6)$$

gilt.

**Fall  $s < 1$**

Hier bedienen wir uns direkt bei ?? und schreiben

$$\begin{aligned} & \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m^{*2} \right\rangle \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left( \omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left( a^{-\frac{1}{2}} k + s a^{-1} \right)^2 - 3m^2 \right)}{\sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left( a^{-\frac{1}{2}} k + s^{-1} \right)^2} \sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left( a^{-\frac{1}{2}} k + s a^{-1} \right)^2 - 4m^2}} \\ & \quad \cdot \Theta \left( \omega^2 - k^2 - 4m^2 \right) e^{-i\omega \left( \frac{t' - sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \omega \, d\omega \, dk \\ & \stackrel{\Delta s := 1 - s^2 > 0}{=} 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) a^{-\frac{1}{2}} \left( \omega^2 \left( \Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2 \right) - 3a^2 m^2 \right) e^{\dots} \Theta(\dots)}{\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k s - a \omega^2 k^2 - 4a^2 m^2}} \, d\omega \, dk \end{aligned} \quad (6.7)$$

Für hinreichend kleine  $a$  können wir den Integranden nun majorisieren

$$\left| 2 \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \omega^2 \Delta s \Theta(\dots)}{\sqrt{\Delta s} \sqrt{\Delta s \omega^2}} \right| \geq \left| \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left( \omega^2 \left( \Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2 \right) - 3a^2 m^2 \right) \Theta(\dots)}{\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k s - a \omega^2 k^2 - 4a^2 m^2}} \right|$$

und dürfen also Lebesgue verwenden und schreiben

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \int \dots \, d\omega \, dk &= \int \lim_{a \rightarrow 0} \dots \, d\omega \, dk \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \omega^2 \Delta s \Theta(\dots)}{\sqrt{\Delta s} \sqrt{\Delta s \omega^2}} e^{-i\omega \left( \frac{t' - sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \, d\omega \, dk \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}} \, d\omega \, dk \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \psi\left(\frac{t' - sx'}{a}, \frac{x'}{a}\right) \end{aligned}$$

Und da Shearlets nach Satz 3.1 schnell abfallen erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\langle \psi_{ast}, \Delta_m^2 \rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \psi \left( \frac{t' - sx'}{a}, \frac{x'}{a} \right) \\ &\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{falls } (t', x') \neq 0 \\ &\sim O(a^{-\frac{3}{4}}), \quad \text{falls } (t', x') = 0\end{aligned}\tag{6.8}$$

Fall  $s = -1$

$$\begin{aligned}\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m^{*2} \rangle & \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left( \omega^2 \left( a^{-2}(1-s^2) - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2 \right) - 3m^2 \right)}{\sqrt{\omega^2 \left( a^{-2}(1-s^2) - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2 \right)} \sqrt{\omega^2 \left( a^{-2}(1-s^2) - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2 \right) - 4m^2}} \\ &\quad \cdot \Theta \left( \omega^2 \left( a^{-2}(1-s^2) - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2 \right) - 4m^2 \right) e^{-i\omega \left( \frac{t'-sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \cdot \omega \, d\omega \, dk \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) a^{\frac{3}{2}} \left( 2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2 \right)}{a^{\frac{3}{2}} \omega \sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2} \sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2}} \\ &\quad \cdot \Theta \left( 2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2 \right) \cdot e^{-i\omega \left( \frac{t'+x'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \omega \, d\omega \, dk \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \left\{ \underbrace{\int \frac{\hat{\psi}_2(k) \left( 2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2 \right) \Theta(\dots) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2} \sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2}} \, dk}_{=: \hat{f}_a(\omega)} \right\} \\ &\quad \cdot \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \left( \frac{t'+x'}{a} \right)} \, d\omega \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{f}_a(\omega) \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \left( \frac{t'+x'}{a} \right)} \, d\omega\end{aligned}\tag{6.9}$$

Nun müssen wir also  $\hat{f}_a(\omega)$  genauer betrachten:  $\hat{\psi}_2(k) \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ .  $\Theta$  schneidet genau bei der ersten Nullstelle des Nenners ab. Deshalb verschieben wir durch eine Substitution  $k \rightarrow k'$  den Integrationsbereich genau so, dass diese Nullstelle bei  $k' = 0$  liegt.

Sei also  $k_0 := \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega}$  die relevante Nullstelle des Nenners am Integrationsbereich. Dann ist die  $a$ -Abhängigkeit von  $k_0$  in erster Näherung gegeben durch  $0 < k_0 = \frac{2m^2}{\omega^2} a^{\frac{3}{2}} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) =: c_\omega a^{\frac{3}{2}} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)$  und mit  $k' = k - k_0$  gelten folgende Ausdrücke für den Nenner und den Zähler:

### Zähler

$$\begin{aligned}
2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2 &= 2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2 \\
&= 2\omega^2 k' + 2\omega^2 \frac{2m^2}{\omega^2} a^{\frac{3}{2}} + 2\omega^2 O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2 \\
&= 2\omega^2 k' + a^{\frac{3}{2}}m^2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)
\end{aligned}$$

### Nenner

$$\begin{aligned}
\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2} \sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2} &= \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0)} \sqrt{k' + k_0} \\
&\quad \cdot \underbrace{\sqrt{-a^{\frac{1}{2}}\omega^2 \left(k' - \frac{2\sqrt{\omega^2 - 4a^2 m^2}}{\sqrt{a}\omega}\right)}}_{= \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}} \sqrt{k'} \\
&= \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}
\end{aligned}$$

Nun ist es an der Zeit für das alte Spiel von „finde eine integrierbare Majorante, um Lebesgue verwenden und alle Terme mit positiver  $a$ -Potenz wegschmeißen zu dürfen<sup>2</sup>“

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\hat{\psi}_2(k' + k_0) \left( 2\omega^2 k' + a^{\frac{3}{2}}m^2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) \right)}{\sqrt{k'} \sqrt{k' + k_0} \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0)} \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}} \Theta(k') \right| \\
&\leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \frac{2\omega^2 k' + a^{\frac{3}{2}}m^2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}{\sqrt{k' + k_0} \sqrt{2} \sqrt{2}} \Theta(k') \\
&\leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \left( \frac{\omega^2 k'}{\sqrt{k'}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2}{\sqrt{k' + k_0}} + \frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{\sqrt{k' + k_0}} + \frac{O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}{\sqrt{k_0}} \right) \Theta(k') \quad (6.10) \\
&= \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \left( \omega^2 \sqrt{k'} - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{\frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{\sqrt{\frac{2m^2}{\omega^2} a^{\frac{3}{2}} + O(a^{\frac{7}{2}})}}}_{O\left(a^{\frac{3}{4}}\right)} + \dots \right) \Theta(k') \\
&\leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \Theta(k')
\end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>so lange sie in einer Summe mit mindestens einem Term ohne positive  $a$ -Potenz auftauchen

Der letzte Ausdruck ist eine integrierbare Majorante und in den Abschätzungen wurde u.a. verwendet, dass  $\hat{\psi}_2$  kompakt getragen und beschränkt ist. In „const“ wurden immer notwendige aber letzten Endes irrelevante Vorfaktoren gesammelt wie z.B.  $\|\hat{\psi}_2\|_\infty$ .

Der Integrand für  $\hat{f}_a$  konvergiert punktweise (vgl. Gleichung (6.9))

$$\frac{\hat{\psi}_2(k) \left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2\right) \Theta(\dots) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}} k^2} \sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 4m^2}} \rightarrow \hat{\psi}_2(k) \omega \Theta(k) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}} \quad (6.11)$$

und wir können also schreiben

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\omega) &\rightarrow \hat{f}_0(\omega) = \int \omega \hat{\psi}_2(k) \Theta(k) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}} dk \\ &= \omega (\hat{\psi}_2 \cdot \Theta)^\vee(-\omega x' / \sqrt{a}) \\ &= \omega (\hat{\psi}_2^\vee * \Theta^\vee)(-\omega x' / \sqrt{a}) \\ &= \omega (\psi_2 * (\delta + i\mathcal{P}(1/x)))(-\omega x' / \sqrt{a}) \\ &= \omega \left[ \underbrace{\psi_2(-\omega x' / \sqrt{a})}_{O(a^k) \forall k \in \mathbb{N}} + i \underbrace{(\psi_2 * \mathcal{P}(1/x))(-\omega x' / \sqrt{a})}_{O(x^{-1})} \right] \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{O((-\omega x' / \sqrt{a})^{-1}) = O(a^{\frac{1}{2}})} \\ &\sim O(a^{\frac{1}{2}}), \quad \text{falls } x' \neq 0 \\ &\sim \text{const}, \quad \text{falls } x' = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Tief in uns drinnen, wissen wir alle, dass die Behauptung mit dem  $O(x^{-1})$  stimmt, müssen wir sie also wirklich noch zeigen?

Wir dürfen also, falls  $x' \neq 0$ , folgende Abschätzung für  $\hat{f}_a(\omega)$  für  $a \rightarrow 0$  machen:

$$\hat{f}_a(\omega) = \omega C a^{\frac{1}{2}} + o(a^{\frac{1}{2}})$$

Setzen wir dies nun schließlich wieder in unseren letzten Ausdruck in Gleichung (6.9) ein, erhalten wir nach einiger Rechnerei und Abschätzerei endlich

hier fehlen wenn man es ganz genau nimmt noch  $O(a^{\frac{7}{2}})$ -Terme. Wird da noch eine Bemerkung zu geschrieben, oder nehme ich die

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m^{*2} \right\rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\omega C a^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1(\omega)}_{\in C_c^\infty(\mathbb{R})} e^{-i\omega \left( \frac{t'+x'}{a} \right)} d\omega \\
&= 2a^{-\frac{1}{4}} C \left( \omega \hat{\psi}_1(\omega) \right)^\vee \left( -\frac{t'+x'}{a} \right) \\
&\sim O(a^{-\frac{1}{4}}), \quad \text{falls } t' = -x' \neq 0 \\
&\sim (a^{-\frac{3}{4}}), \quad \text{falls } t' = 0 = x' \\
&\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Wenn wir die Ergebnisse aus Gleichungen (6.6), (6.8) und (6.13) zusammenfassen, haben wir für die Wellenfrontmenge von  $\hat{\Delta}_m^{*2}$

	$(t', x') = 0$	$t' = x' \neq 0$	$t' = -x' \neq 0$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^k$	$a^k$
$s = -1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	$a^k$	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^k$
$ s  < 1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	$a^k$	$a^k$	$a^k$
$ s  > 1$	$a^k$	$a^k$	$a^k$	$a^k$

Tabelle 2: Konvergenzordnung von  $\mathcal{S}_{\Delta_m^2}(a, s, (t', x'))$  im Limit  $a \rightarrow 0$  für alle interessanten Kombinationen von  $s$  und  $(t', x')$

## 7 Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m^{*2}$

Hier gehört wohl erstmal Text hin, was diese verdrehte Faltung überhaupt zu bedeuten hat. Leider weiß ich das selber noch nicht.

Die verdrehte Faltung zweier Funktionen ist definiert wie folgt:

### Definition 7.1 (verdrehte Faltung)

<sup>3</sup> Seien  $f, g \in$  „passender Funktionen/Distributionenraum“. Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symplektische Matrix. Dann ist die verdrehte Faltung  $(f \circledast g)(x)$  definiert als

$$(f \circledast g)(x) := \int f(y) g(x - y) e^{\frac{i}{2} \Omega(x, y)} dy \tag{7.1}$$

Die verdrehte Faltung ist also einfach die gewöhnliche Faltung, die noch mit einem ortsabhängigen Phasenfaktor verziert wurde.

<sup>3</sup>jetzt noch die Enden verkleben, und fertig ist das Möbiusband

verdrehte Faltung definieren, oder sternprodukt definieren und zeigen, dass dann der Faltungssatz zu dem mit der verdrehte Faltung wird?

Gibt es schon eine Übersetzung für verdrehte Faltung?

Bevor wir uns aber der Wellenfrontmenge widmen können, brauchen wir einen Ausdruck für die Fouriertransformierte  $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}$  von  $\Delta_m^{\star 2}$ .

### 7.1 $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}$ berechnen

Sammeln wir zunächst einmal die Zutaten, die wir für die verdrehte Faltung der massiven Zweipunktfunktion mit sich selber brauchen:

$$\hat{\Delta}_m = \delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \Theta(\omega) \quad (7.2a)$$

die Fouriertransformierte der massiven Zweipunktfunktion

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2b)$$

die kanonische symplektische Matrix auf  $\mathbb{R}^n$

mit Definition 7.1 und Gleichungen (7.2a) und (7.2b) erhalten wir also

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_m^{\otimes 2}(\omega, k) = & \int \delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2) \delta((\omega' - \omega)^2 - (k - k')^2 - m^2) \\ & \cdot \Theta(\omega') \Theta(\omega - \omega') e^{\frac{i}{2}(\omega' k - \omega k')} d\omega' dk' \end{aligned} \quad (7.3)$$

und damit das selbe Integral wie in Gleichung (6.1) bis auf einen zusätzlichen Phasenfaktor. Nachdem wir gezeigt haben, dass auch dieser Lorenz-Invariant ist, können wir das Integral mit dem selben Trick wie in Abschnitt 6.1 berechnen.

**Proposition 7.2 ( $\Omega_{std}$  ist Lorenz-invariant für  $n = 2$ )**

$\Omega_{std}$  ist Lorenz-invariant für  $n = 2$

Beweis

Eine einfache Rechnung zeigt

$$\begin{pmatrix} \cosh \beta & \sinh \beta \\ -\sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \beta & -\sinh \beta \\ \sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$



Mit Satz 7.2 ist  $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}$  Lorentz-Invariant und es reicht aus  $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2}(\omega, 0)$  zu berechnen.

Die beiden Kreuzungspunkte der  $\delta$ -Distributionen liegen bei (vgl. Abb. 5)

$$(\omega'_0, k'_{0\pm}) = \left( \frac{\omega}{2}, \pm \sqrt{\left( \frac{\omega}{2} \right)^2 - m^2} \right)$$

Die „Fläche“ der Kreuzungspunkte der  $\delta$ -Distributionen wurde in Abschnitt 6.1 berechnet und ist

$$A = \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}}$$

Der Phasenfaktor nimmt bei den Kreuzungspunkten folgende Werte an:

$$e^{\frac{i}{2}\Omega((\omega, k), (\omega'_0, k'_{0\pm}))} = e^{\pm \frac{i}{2} \left( -\omega^2 \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{\omega^2}} \right)}$$

Kombinieren wir also die vorhergehenden Resultate erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_m^{\otimes 2}(\omega, 0) &= A e^{\frac{i}{2}\Omega((\omega, k), (\omega'_0, k'_{0+}))} + A e^{\frac{i}{2}\Omega((\omega, k), (\omega'_0, k'_{0-}))} \\ &= \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \left\{ e^{-\frac{i}{2}\omega^2 \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{\omega^2}}} + e^{\frac{i}{2}\omega^2 \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{\omega^2}}} \right\} \\ &= 2 \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \cos(\varphi(\omega^2)) \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt noch implizit  $\varphi(\omega^2)$  definiert wurde. Und mit Lorentz-Invarianz erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_m^{\otimes 2}(\omega, k) &= \hat{\Delta}_m^{\otimes 2}(\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) \\ &= 2 \frac{\omega^2 - k^2 - 3m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2} \sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}} \cos \left( \frac{k^2 - \omega^2}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{k^2 - \omega^2}} \right) \quad (7.4) \\ &= \hat{\Delta}_m^{*2}(\omega, k) \cos(\varphi(\omega^2 - k^2)) \end{aligned}$$

herausfinden,  
warum  
hier Satz  
statt Pro-  
position  
geschrie-  
ben  
wird...  
Warum ist  
cleverref  
nicht so  
clever?

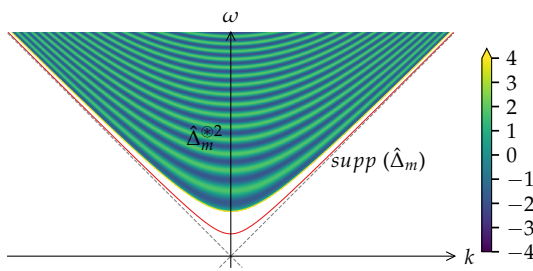


Abbildung 9: Plot von  $\hat{\Delta}_m^{*2}$  und  $\hat{\Delta}_m$ . Wieder liegt der Träger von  $\hat{\Delta}_m^{*2}$  in der kausalen Zukunft.

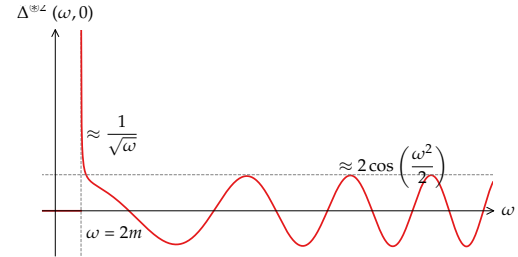


Abbildung 10: Plot von  $\hat{\Delta}_m^{*2}|_{k=0}$  um das asymptotische Verhalten für  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$  zu verdeutlichen

## 7.2 ... und nun zur Wellenfrontmenge von $\hat{\Delta}_m^{*2}$

**Fall  $|s| > 1$**

Wir bedienen uns wieder genau des selben Arguments, wie in Gleichung (6.6) und dürfen direkt schreiben:

$$\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m^{*2} \right\rangle = 0, \quad \text{für alle } a \text{ klein genug} \quad (7.5)$$

**Fall  $|s| < 1, (x, t) \neq 0$**

Da  $\hat{\Delta}_m^{*2} = \hat{\Delta}_m^{*2} \cos(\dots)$  können wir direkt mit dem Ausdruck Gleichung (6.7)  $\cdot \cos$  weiter arbeiten und genau die selben Abschätzungen machen.  $\cos$  ist bekanntermaßen beschränkt.

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m^{*2} \right\rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left( \omega^2 \left( \Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} ks - ak^2 \right) - 3a^2 m^2 \right)}{\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} ks - ak^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}} \omega^2 ks - a \omega^2 k^2 - 4a^2 m^2}} \\ &\quad \cdot \Theta(\dots) \cos(\varphi(\omega^2 - k^2)) e^{-i\omega \left( \frac{t' - sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} d\omega dk \\ &\leq 2a^{-\frac{3}{4}} \int \omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega \left( \frac{t' - sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} d\omega dk \\ &\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Referenz zu Delta\_m2 s<1 einfügen und argumentieren, dass wir genau die selben Abschätzungen machen.

**Fall**  $|s| < 1, (x, t) = 0$

In diesem Fall lassen wir den  $\cos$ -Faktor in Gleichung (7.6) in der ersten Ungleichung nicht heraus fallen, dafür wird der  $e^{\dots}$ -Faktor 1. Den  $\cos$ -Faktor schreiben wir als Summe von  $e$ -Funktionen und erhalten

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m^{\otimes 2} \right\rangle \tag{7.7} \\
 &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left\{ \exp \left( ia^{-2} \frac{\omega^2(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{a^2m^2}{\omega^2(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \exp(-i \dots) \right\} d\omega dk \\
 &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \sqrt{\omega} \hat{\psi}_1(\sqrt{\omega}) \hat{\psi}_2(k) \left\{ \exp \left( ia^{-2} \frac{\omega(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{a^2m^2}{\omega(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \exp(-i \dots) \right\} \frac{d\omega dk}{\sqrt{\omega}} \\
 &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \left\{ \int \hat{\psi}_1(\sqrt{\omega}) \left\{ \exp \left( ia^{-2} \left( \frac{\omega \Delta s}{4} + O \left( a^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \exp(-i \dots) \right\} d\omega \right\} \hat{\psi}_2(k) dk \\
 &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ (\hat{\psi}_1 \circ \sqrt{\cdot})^\vee \left( \frac{\Delta s}{4a^2} \right) + (\hat{\psi}_1 \circ \sqrt{\cdot})^\vee \left( -\frac{\Delta s}{4a^2} \right) \right\}}_{\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}} \hat{\psi}_2(k) dk \\
 &\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

... in exp  
durch —  
ersetzen

wobei bei der Substitution  $\omega \rightarrow \sqrt{\omega}$  in der zweiten Zeile wichtig ist, dass  $0 \notin \text{supp}(\hat{\psi}_1)$ , also auch nach der Substitution noch  $\hat{\psi}_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  ist.

**Fall**  $s = -1$

Da  $\hat{\Delta}_m^{\otimes 2} = \hat{\Delta}_m^{\ast 2} \cos(\dots)$  ist, haben wir bis auf den  $\cos$ -Faktor die selben Analysis zu betreiben, wie für  $\hat{\Delta}_m^{\ast 2}$ .

Schritt  
von drit-  
te in die  
vierte Zei-  
le recht-  
fertigen.  
Ist wieder  
die Ge-  
schichte  
vom „hal-  
ben Le-  
besgue“

ordentliche  
Formu-  
lierung  
und or-  
dentliche  
Refe-  
renzen  
einfügen

$$\begin{aligned}
& \left\langle \widehat{\psi}_{a-1t}, \widehat{\Delta}_m^{\otimes 2} \right\rangle \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\frac{\widehat{\psi}_1(\omega) \widehat{\psi}_2(k' + k_0) \left( 2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2 \right) \Theta(k')}{\sqrt{k'} \sqrt{k' + k_0} \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0)} \sqrt{-a^{\frac{1}{2}}\omega^2 \left( k' - \frac{2\sqrt{\omega^2 - 4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega} \right)}}}_{i)} \\
&\quad \cdot \underbrace{\cos \left( \frac{2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2}{2a^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2}} \right)}_{ii)} \\
&\quad \cdot e^{-i\omega \left( \frac{t' + x'}{a} + \frac{(k' + k_0)x'}{\sqrt{a}} \right)} d\omega dk'
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Genau wie in Gleichung (6.10) können wir für  $i)$  wieder Abschätzen<sup>4</sup>

$$i) \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \Theta(k')$$

Damit dürfen wir wieder Lebesgue anwenden, um den Grenzwert  $a \rightarrow 0$  des Integrals zu berechnen. Des weiteren ist analog zu Gleichung (6.11)

$$i) \xrightarrow{\text{punktweise f.ü.}} \omega \widehat{\psi}_1(\omega) \widehat{\psi}_2(k') \Theta(k') \tag{7.9}$$

Widmen wir uns also dem Argument des cosinus  $ii)$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2}{2a^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2}} \\
&= \frac{\omega^2(k' + k_0)(2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0))}{2a^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{\omega^2(k' + k_0)(a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0) - 2)}} \\
&\xrightarrow{\text{punktweise, außer } k'=0} \frac{\omega^2 k' a^{-\frac{3}{2}}}{2}
\end{aligned}$$

also

---

<sup>4</sup>Da cos beschränkt ist, spielt er bei den Abschätzungen keine Rolle

$$\cos(ii)) \xrightarrow{\text{punktweise, außer } k' = 0} \cos\left(\frac{\omega^2 k' a^{-\frac{3}{2}}}{2}\right) \quad (7.10)$$

Einsetzen von Gleichungen (7.9) und (7.10) in Gleichung (7.8) ergibt mit Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \left\langle \hat{\psi}_{a-1t}, \hat{\Delta}_m^{\otimes 2} \right\rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k') \cos\left(a^{-\frac{3}{2}} \frac{\omega^2 k'}{2}\right) e^{-i\omega k' \frac{x'}{\sqrt{a}}} e^{-i\omega \frac{t'+x'}{a}} d\omega dk' \\ &= a^{-\frac{3}{4}} \int \left\{ \underbrace{\int \hat{\psi}_2(k') \Theta(k') \left( e^{ia^{-\frac{3}{2}} \frac{\omega^2 k'}{2}} + e^{-i\dots} \right) e^{-i\omega k' \frac{x'}{\sqrt{a}}} dk'}_{=: \hat{f}_a(\omega)} \right\} \\ &\quad \cdot \omega \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \frac{t'+x'}{a}} d\omega \end{aligned}$$

den Ausdruck hübscher machen. So ist das ja grauenhaft

Nun betrachten wir  $\hat{f}_a(\omega)$  und erhalten analog zu Gleichung (6.12)

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\omega) &= \int \hat{\psi}_2(k') \Theta(k') \left( e^{ia^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{\omega^2 k'}{2} + O(a^1) \right)} + e^{-i\dots} \right) dk' \\ &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \int \hat{\psi}_2(k') \Theta(k') \left( e^{ia^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{\omega^2 k'}{2} \right)} + e^{-i\dots} \right) dk' \\ &= \left[ \underbrace{\psi_2 \left( -\frac{\omega^2}{2a^{\frac{3}{2}}} \right)}_{O(a^k) \forall k \in \mathbb{N}} + i \underbrace{(\psi_2 * \mathcal{P}(1/x)) \left( -\frac{\omega^2}{2a^{\frac{3}{2}}} \right)}_{O(x^{-1})} + (\text{anderer Term}) \right] \\ &\quad \underbrace{O \left( \left( -\frac{\omega^2}{2a^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} \right)}_{= O(a^{\frac{3}{2}})} \\ &\sim O \left( a^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

Also dürfen wir für  $a \rightarrow 0$  schreiben  $\hat{f}_a(\omega) = Ca^{\frac{3}{2}} + o \left( a^{\frac{3}{2}} \right)$  und landen bei

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \left\langle \hat{\psi}_{a-1t}, \hat{\Delta}_m^{\otimes 2} \right\rangle &= a^{-\frac{3}{4}} \int Ca^{\frac{3}{2}} \omega \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \frac{t'+x'}{a}} d\omega \\ &\sim O \left( a^{\frac{3}{4}} \right), \quad \text{falls } t' = -x' \\ &\sim O \left( a^k \right) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Fassen wir also wie bisher schon die Ergebnisse aus Gleichungen (7.5) bis (7.7) und (7.11) wieder in einer Übersichtstabelle zusammen:

	$(t', x') = 0$	$t' = x' \neq 0$	$t' = -x' \neq 0$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{\frac{3}{4}}$	$a^{\frac{3}{4}}$	$a^k$	$a^k$
$s = -1$	$a^{\frac{3}{4}}$	$a^k$	$a^{\frac{3}{4}}$	$a^k$
$ s  < 1$	$a^k$	$a^k$	$a^k$	$a^k$
$ s  > 1$	$a^k$	$a^k$	$a^k$	$a^k$

Tabelle 3: Konvergenzordnung von  $\mathcal{S}_{\Delta_m^{*2}}(a, s, (t', x'))$  im Limit  $a \rightarrow 0$  für alle interessanten Kombinationen von  $s$  und  $(t', x')$

## 8 Berechnen von $WF(G_F)$

### 8.1 Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$

Ab jetzt werden wir der Namenskonvention der Physiker in der SRT folgen und unsere Ortsraumvariablen mit  $x = (t, x)$  und unsere Impulsraumvariablen mit  $\xi = (\omega, k)$  bezeichnen sowie konsequenterweise das Minkowskiskalarprodukt  $x \cdot \xi = \omega t - kx$  verwenden. Des weiteren wird der Verschiebungsparameter mit  $t = (t', x')$  bezeichnet.

Die massive skalare Zweipunktfunktion bzw. der Feynmanpropagator im Impulsraum ist dann gegeben durch (Schwartz2014, (6.34))

$$\hat{G}_F(\omega, k) = \frac{1}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \quad (8.1)$$

Setzen wir dies in unsere Ausdrücke für  $\langle \psi_{ast}, f \rangle$  aus (??) bzw. (??) ergibt sich, unter Verwendung des Minkowskiskalaprodukts,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle &= \int \hat{\psi}_{ast}(\omega, t) \hat{G}_F(\omega, t) \, d\omega \, dk \\
&= a^{\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}} \frac{k}{\omega} - s\right) e^{-i\omega t' + ikx'}}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \, d\omega \, dk \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{\omega s}{a} + \frac{k}{\sqrt{a}}\right)^2 - i0^+} \, d\omega \, dk \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{\omega \in [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2] \\ |\frac{k}{2} - s| \leq \sqrt{ax}}} \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 + a^{-2}\omega^2(s^2 - 1) + a^{-\frac{3}{2}}2s\omega k + a^{-1}k - i0^+} \, d\omega \, dk \quad (8.2)
\end{aligned}$$

Überarbeiten  
und dem  
Format  
der  
anderen  
Bere-  
chungen  
anpassen!

und mit der anderen Substitution analog

$$\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle = a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2] \\ k \in [-1, 1]}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega \left( \frac{t'-sx'}{a} + \frac{kx'}{\sqrt{a}} \right)}}{m^2 - \omega^2(a^{-2}(1-s^2) - a^{-1}k^2 - 2ksa^{-\frac{3}{2}})} d\omega dk \quad (8.3)$$

wobei sich die Integrationsbereiche aus den Forderungen an den Träger von  $\psi$  (vgl. (3.2)) ergeben.

Nach Satz (3.2) genügt es zu bestimmen, an welchen Punkten  $(t', x')$  und in welche Richtungen  $s$   $S_f(a, s, (t', x'))$  nicht schnell-fallend in  $a^{-1}$  ist, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen. Da wir keine explizite erzeugende Funktion  $\psi$  angegeben haben, werden wir uns dabei Argumente bedienen, die alleine auf den allgemeinen Eigenschaften von  $\psi_{ast}$  beruhen, aber nicht einer expliziten Form.

Das allgemeine Vorgehen wird dabei folgendes sein: Die Ausdrücke in (8.2) und (8.3) genau anstarren, um zu sehen für welche Werte von  $(t', x')$  und  $s$  potentiell interessante Dinge geschehen, also z.B. Terme im Nenner weg fallen, oder die Phase konstant wird. Dann werden diese Werte von  $(t', x')$  und  $s$  eingesetzt und alles so weit vereinfacht und genähert – im Rahmen des Erlaubten, ohne das Verhalten für  $a \rightarrow 0$  zu ändern –, bis die  $a$ -Abhängigkeit abgelesen werden kann. Entscheidende Zutaten sind dabei der beschränkte Träger von  $\hat{\psi}$  und der schnelle Abfall von  $\psi$ .

**Fall**  $s = 1, t' = 0 = x'$

Nach (8.3) erhalten wir mit  $s = 1, t' = 0 = x'$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 + \omega^2(a^{-1}k^2 + a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + \omega^2(a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2k)} d\omega dk \end{aligned}$$

Da aber  $|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2]$  und  $k \in [-1, 1]$  ist, ist für hinreichend kleine  $a$  (und für genau die interessieren wir uns ja)

Integral hübsch machen. Größeres Integralzeichen?

In Textform beschreiben, was die grobe Strategie ist, also wie der Integrand vernünftigerweise vereinfacht wird und welche Eigenschaften von  $\psi$  wie eingehen.

Hier schon die Ergebnisse als Satz angeben, und dann Beweis hinschreiben?

Bemerkung einfügen, warum dass auch ziemlich unmöglich

$$\left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{k\omega^2} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}\omega^2k + 2k\omega^2} \right|$$

eine integrierbare (im Sinne des Cauchy-Hauptwertes) Majorante für den Integranden.

Wir dürfen uns also des Lebesgueschen Konvergenzsatzes bedienen und schreiben

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{2k\omega^2} d\omega dk \sim O(a^{\frac{3}{4}}) \quad (8.4)$$

Für  $s = -1$  erhalten wir genau das selbe Ergebniss, da ja der  $\omega^2(1-s^2)$ -Term im Nenner genauso wieder verschwindet.

**Fall**  $s \neq \pm 1, t' = 0 = x'$

In diesem Fall verschwindet der  $\omega^2(1-s^2)$ -Term im Nenner nicht und dementsprechend folgt

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 - \omega^2((1-s^2) - a^{-1}k^2 - a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{5}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2ks} d\omega dk \end{aligned}$$

Analog zum vorigen Teil ist, diesmal sogar ohne den Cauchy-Hauptwert bemühen zu müssen,

$$\left| \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2ks} \right|$$

dass eine integrierbare Majorante ist (in der Tat ja sogar in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ) Damit können wir folgende Abschätzung treffen:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} d\omega dk \sim O(a^{\frac{5}{4}})$$

Warum ist Cauchy-Hauptwert hier erlaubt? Weiter ausführe, warum es diese Majorante tut?

Überall wo es sein muss  $\lim_{a \rightarrow 0}$  dazu schreiben, oder sagen dass der Limit überall impliziert ist



Fall  $s \neq \pm 1, (t', s') \neq 0$

In diesem Fall benutzen wir wieder die erste Substitution (8.2) und klammern wie schon in den beiden vorigen Teilen die höchste negative Potenz von  $a$  im Nenner aus.

$$\Rightarrow \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^2 m^2 - \omega^2(1-s^2) + a^{\frac{1}{2}} s\omega k + ak^2} d\omega dk \quad (8.5)$$

und da immer noch  $0 \notin \text{supp}(\psi_1)$  gilt ist ein weiteres mal eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$2 \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \quad (8.6)$$

In der Tat ist sogar

$$\hat{f}(\omega, k) := \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \quad (8.7)$$

da  $\psi_1$  und  $\psi_2$  getragen sind. Demnach ist die Fourierinverse von  $\hat{f}$ ,  $f := (\hat{f})^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , also schnell fallend. Damit können wir schließlich abschätzen

$$\begin{aligned} |\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle| &= a^{\frac{5}{4}} \left| \int \hat{f}(\omega, k) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega dk \right| \\ &= a^{\frac{5}{4}} \left| f\left(\frac{t'-sx}{a}, \frac{x'}{\sqrt{a}}\right) \right| \leq a^{\frac{5}{4}} C_k \left(1 + \left\| \frac{(t'-sx')/a}{x'/\sqrt{a}} \right\| \right)^{-k} \\ &\leq a^{\frac{5}{4}} \frac{C_k}{2} a^{\frac{k}{2}} \left\| \frac{(t'-sx')}{x'} \right\|^{-k} \sim O\left(a^{\frac{5/2+k}{2}}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow |\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle| &\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Fall  $s = 1, (t', x') \neq 0$

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder den ersten Ausdruck für  $\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle$  aus (8.2) und sorgen wir auch bisher jedes Mal dafür, dass wir im Nenner nur noch positive Potenzen von  $a$  und einen von  $a$  unabhängigen Term haben. Dann sieht das ganze so aus:

$$\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2\omega k} d\omega dk$$

wo wir im  $\lim_{a \rightarrow 0}$  wieder die  $a$ -Potenzen im Nenner weg fallen lassen und auch dieses Mal dafür wieder den Cauchy-Hauptwert bemühen müssen, um den Lebesgueschen Konvergenzsatz benutzen zu dürfen. Weiter geht's:

$$\begin{aligned} &= a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2\omega k} d\omega dk \\ &= a^{\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2k\omega} dk \right\}}_{=: \hat{f}_a(\omega)} \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} d\omega \end{aligned} \quad (8.9)$$

und um hier weiter zu kommen, schauen wir uns  $\hat{f}_a$  genauer an. Sei dazu  $\Psi_2(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \psi_2(\omega') d\omega' - \int_{\omega}^{+\infty} \psi_2(\omega') d\omega'$  eine Stammfunktion von  $\psi_2$ . Dies ist offenbar  $C^\infty$  und beschränkt, da  $\hat{\psi}_2 \in C_c^\infty$ . Mithilfe von Fourieridentitäten und Substitution können wir nun weiter rechnen:

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\omega) &= \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{2k\omega} e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega \\ &\stackrel{i)}{=} \int \frac{\hat{\psi}_2(k)}{2k} e^{ik\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}} d\omega \\ &\stackrel{ii)}{=} \frac{i}{2} \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \end{aligned}$$

Hier wurde in  $i)$  einfach  $k \rightarrow \omega k$  substituiert und im Schritt  $ii)$  wurde genutzt, dass  $f(x) = \text{sgn}(x) \leftrightarrow \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k}$ . Nun stecken wir diese Erkenntnisse in unseren vorigen Ausdruck und erhalten

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle &= \frac{ia^{\frac{3}{4}}}{2} \int \Psi_2 \left( \frac{x'\omega}{\sqrt{a}} \right) \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \left( \frac{t'-x'}{a} \right)} d\omega dk \\
&\sim O \left( a^{\frac{3}{4}} \right), \quad \text{für } t'=x' \\
&\sim O \left( a^k \right) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Im letzten Schritt wurde wieder genutzt, dass  $\Psi_2 \left( \frac{x'\omega}{\sqrt{a}} \right) \hat{\psi}_1(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist, und demnach eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

Das analoge Ergebnis erhält man auch für  $s = -1$  und  $t' = -x'$