Jan Lukas krasse Bachelorarbeit

Jan Lukas Bosse*

8. Juni 2018

Hier ist wohl noch etwas zu tun... So eine hübsche Frontseite wäre doch was!

Inhaltsverzeichnis

*Georg-August Universität Göttingen

1 Allgemeines Gelaber über Shearlets

Proposition 1.1 (ψ_{ast} fällt schnell ab)
Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ein Shearlet wie definiert und M so ne Trafomatrix. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass es eine konstante C_k gibt s.d. für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$
\begin{aligned}
&|\psi_{ast}(x)| \\
&\leq C_k \left|\det M\right|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + |M^{-1}(x-t)|^2\right)^{-k} \\
&= C_k a^{-\frac{3}{4}} \left(1+a^{-2}(x_1-t_1)^2+2a^{-2}s(x_1-t_1)(x_2-t_2)+a^{-1}\left(1+a^{-1}s^2\right)(x_2-t_2)^2\right)^{-k}
\end{aligned}
$$

Und insbesondere ist $C_k = \frac{15}{2}\frac{\sqrt{a}+s}{a^2}\left(\|\hat{\psi}\|_\infty+\|\triangle^k\hat{\psi}\|_\infty\right)$

Satz 1.2 ($\mathcal{S}_f(a,s,t)$ misst $WF(f)$)
Sei $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ wobei $\mathcal{D}_1 = \{\, (t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1,1] |\ |\mathcal{S}_f(a,s,t)| = O(a^k)$ gleichmäßig $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U$ Umgebung von $(t_0, s_0)\,\}$ und $\mathcal{D}_2$ analog für $\psi^{(v)}$

Dann gilt $WF(f)^c = \mathcal{D}$

Korollar 1.3 (WF(f) misst $sing\ supp(\psi)$)
Sei $\mathcal{R} = \{\, t_0 \in \mathcal{R}^2 |\ |\mathcal{S}_f(a,s,t)| = O(a^k)\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U$ Umgebung von $t_0\,\}$

Dann gilt $sing\ supp(\psi)^c = \mathcal{R}$

Bemerkung 1.4 (Träger von ψ)
Im Fourierraum ist $\hat{\psi}_{ast}$ gegeben durch

$$\hat{\psi}_{ast}(\xi_1, \xi_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right)\right) \tag{1.1}$$

und es gilt

$$supp(\hat{\psi}) \subset \left\{ \xi \in \hat{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; |\xi_1| \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right], \left|\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right| \leq \sqrt{a} \right\} \tag{1.2}$$

diesen Satz richtig hin schreiben und ordentlich setzen

Stil und Nummerierung für Sätze, Propositionen etc. anpassen

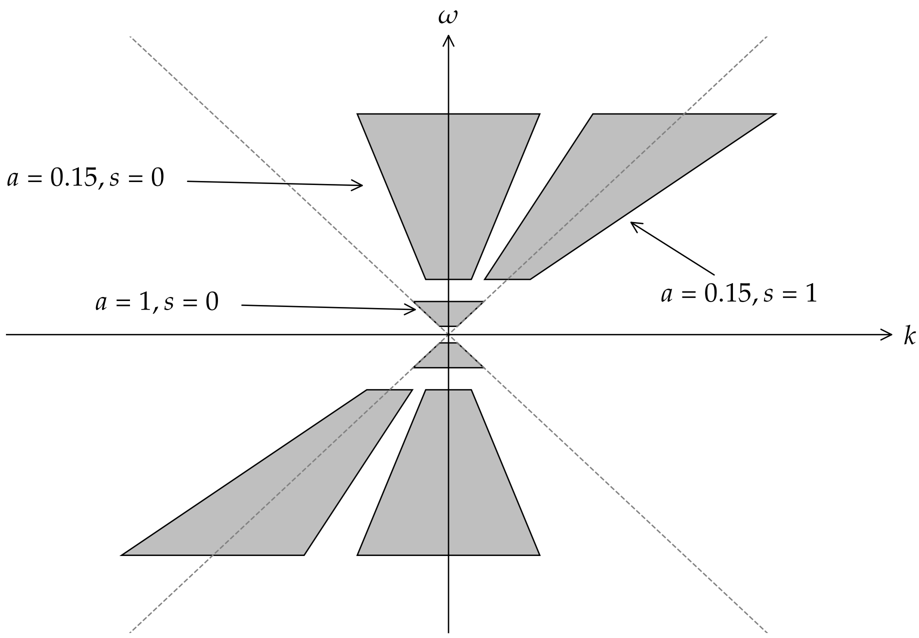

Abbildung 1: Der Träger von $\hat{\psi}_{ast}$ für verschiedene a, s. Man sieht gut, wie $supp(\hat{\psi}_{ast})$ für kleinere a in immer spitzeren Kegeln liegt.

2 Zwei nützliche Substitionen für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$

Zunächst werden wir zwei verschiedene Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ im Fourierraum herleiten, welche fast immer Ausgangspunkt für unsere Abschätzungen sein werden.

Sei also ψ ein Shearlet wie in Korollar 1.4. Sei f die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\mathcal{S}_f(ast)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \psi_{ast}, f \rangle &= \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{f} \right\rangle \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) \right) \hat{f}(\xi) \, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

und nach „entscheren“ und „deskalieren“, also der Substitution

entscheiden, was mit dem fehlenden Faktor $\frac{1}{(2\pi)^n}$ geschieht

$$\begin{aligned} a\xi_1 &= k_1 \\ a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) &= \frac{k_2}{k_1} \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{k_1}{a} \\ \xi_2 &= \frac{k_1 s}{a} + a^{-\frac{1}{2}} k_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 = a^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2$$

ergibt sich folgendes für $\langle \psi_{ast}, f\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle \psi_{ast}, f\rangle &= \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{f}\right\rangle \\ &= \iint a^{-\frac{3}{4}}\ \hat{\psi}_1(k_1)\ \hat{\psi}_2\left(\tfrac{k_2}{k_1}\right)\ \hat{f}\left(\tfrac{k_1}{a}, \tfrac{k_1 s}{a} + \tfrac{k_2}{\sqrt{a}}\right)\ e^{-i\frac{k_1}{a}(t_1+t_2 s)-i\frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\end{aligned} \tag{2.1, Substitution 1}$$

Alternativ kann auch folgende Substitution

$$\begin{aligned} a\xi_1 &= k_1 \\ a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right) &= k_2 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{k_1}{a} \\ \xi_2 &= \left(a^{\frac{1}{2}}k_2 + s\right)\frac{k_1}{a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 = a^{-\frac{3}{2}}k_1\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2$$

gewählt werden, wodurch alle Parameter (a, s, t) aus den Argumenten von $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ verschwinden und sich

$$\langle \psi_{ast}, f\rangle = \iint a^{-\frac{3}{4}}\ k_1\ \hat{\psi}_1(k_1)\ \hat{\psi}_2(k_2)\ \hat{f}\left(\tfrac{k_1}{a}, k_1\left(a^{-\frac{1}{2}}k_2 + sa^{-1}\right)\right)\ e^{-ik_1\left(\frac{t_1+st_2}{a}+\frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}\right)}\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2 \tag{2.2, Substitution 2}$$

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulässig ist, obwohl sie die Orientierung <u>nicht</u> erhält und <u>keine</u> Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nämlich $\xi_1 = 0$, liegt nicht im Träger von $\hat{\psi}$.

herausfinden, wie die Gleichungen auch Kapitelnummern erhalten

Grafik basteln, die $supp\ \psi$ vor und nach der Substitution zeigt.

3 Die Wellenfrontmenge von Δ_m

Die massive Zweipunktfunktion ist die Fouriertransformierte der $1m$-Massenschale positiver Energie:

$$\Delta_m(t,x) = \int \delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(\omega)e^{-i\omega t + ikx}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \tag{3.1}$$

Quelle dafür zitieren...

woraus sich $\widehat{\Delta}_m$ direkt als $\delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(\omega)$ ablesen lässt.

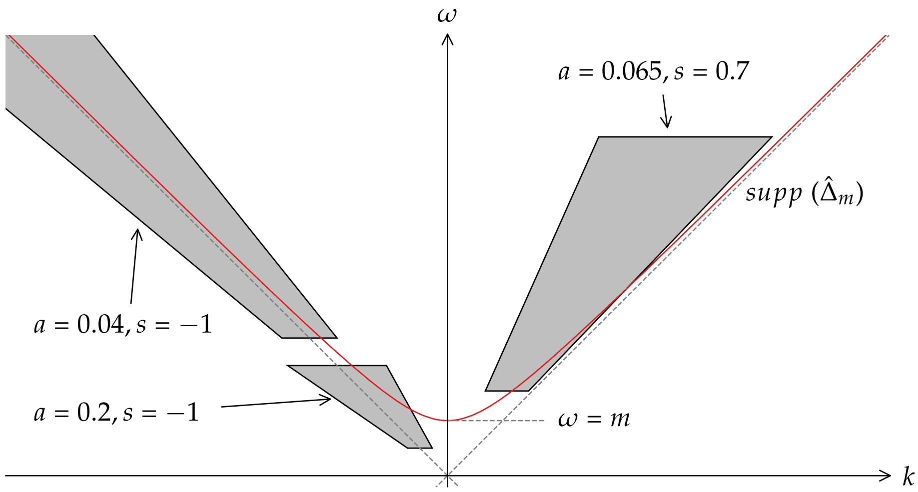

Abbildung 2: Die Träger von $\hat{\Delta}_m$ und $\hat{\psi}_{ast}$. Es ist zu sehen, dass für $a \to 0$ und $s \neq \pm 1$ die Träger schließlich disjunkt sind

<u>**Fall** $s \neq \pm 1$</u>

Hier gibt es nicht viel zu tun, denn für a klein genug gilt $supp(\hat{\Delta}_m) \cap supp(\hat{\psi}_{ast}) = \varnothing$ wie man Abb. 2 entnehmen kann. Also gilt

$$\begin{aligned} \langle \psi_{ast}, \Delta_m \rangle &= \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta}_m \right\rangle \\ &= 0 \\ &= O(a^k)\ \forall k, \quad \text{für } a \text{ klein genug} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dies gilt für alle $(t', x') \in \mathbb{R}^2$

hier noch blöde Abschätzerei machen, warum das tatsächlich gilt, oder stehen lassen. Oder im Kapitel

Fall $s = 1$

Intuition Für $s = 1$ schneidet die Diagonale $supp(\hat{\psi}_{ast})$ auf der ganzen Länge. Der Betrag von $\hat{\psi}_{ast}$ skaliert mit $a^{\frac{3}{4}}$ und die Länge von $supp(\hat{\psi}_{ast})$ entlang der Diagonalen mit a^{-1}. Also erwarten wir schlimmstenfalls $\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{\Delta}_m \right\rangle = O\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)$. Aber nur wenn die Wellenfronten von $e^{-i\omega t'+ikx'}$ parallel zu der Singularität und damit der Diagonalen liegen. Andernfalls erwarten wir, dass die immer schneller werdenden Oszillationen der Phase sich gegenseitig auslöschen.

Fleißige Analysis

$$\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{\Delta}_m \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega} - 1\right)\right)\delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\theta(\omega)e^{-i\omega t'+ikx'}d\omega\,\mathrm{d}k$$

$$\begin{aligned}
&\underline{\text{Nullstellen von } \delta:}\\
&\omega^2 - k^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\omega^2 - m^2}\\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}};\ \text{wobei nur „+" in } supp(\hat{\psi}_2) \text{ liegt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\omega^2-m^2}}{\omega} - 1\right)\right)e^{-i\omega t'+i\sqrt{\omega^2-m^2}x'}\,\mathrm{d}\omega\\
&= a^{\frac{3}{4}}a^{-1} \int \hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2\underbrace{\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{a\omega^2-m^2}}{\omega} - 1\right)\right)}_{=\frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{2\omega^2}+O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}e^{-i\frac{\omega}{a}t'+i\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2}-m^2}x'}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

Der Integrand lässt sich nun durch $\hat{\psi}_1(\omega)\left\|\hat{\psi}_2\right\|_\infty$ majorisieren und wir dürfen Lebesgue verwenden um Integral und Grenzwert $a \to 0$ zu vertauschen

$$\begin{aligned}
&= a^{-\frac{1}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2(0)e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)}\\
&= a^{-\frac{1}{4}}\hat{\psi}_2(0)\psi_1\left(\frac{t'-x'}{a}\right)\\
&\sim O\left(a^{-\frac{1}{4}}\right),\quad \text{falls } x' = t'\\
&\sim O\left(a^k\right)\quad \forall k,\quad \text{sonst}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Das analoge Ergebnis erhält man mit gleicher Rechnung auch für $s = -1$ und $t' = -x'$ Dies bestätigt das intuitiv erwartete Ergebnis. Fassen wir die Ergebnisse aus (3.2) und (3.3) noch einmal tabellarisch zusammen:

	$(t',x')=(0,0)$	$t'=x'$	$t'=-x'$	$t'\neq\pm x'$
s = 1	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	a^k
s = -1	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k
$s\neq\pm1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tabelle 1: Konvergenzordnung von $\mathcal{S}_{\Delta_m}(a,s,(t',x'))$ im Limit $a\to 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t',x')

4 Die Wellenfrontmenge von Δ_m^2

Bevor wir die Wellenfrontmenge von Δ_m^2 berechnen können, benötigen wir einen Ausdruck dafür, oder besser noch einen für die Fouriertransformierte davon.

4.1 $\hat{\Delta}^{*2}$ berechnen

Gemäß dem Faltungssatz gilt $\widehat{\Delta_m^2}=\widehat{\Delta}_m*\widehat{\Delta}_m=\widehat{\Delta}_m^{*2}$. Wir müssen also die Faltung von $\widehat{\Delta}_m$ mit sich selber ausrechnen.

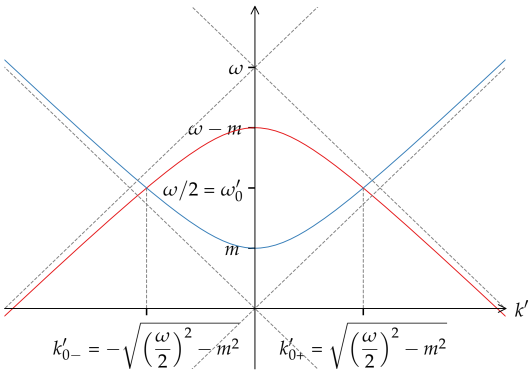

Abbildung 3: Das zu berechnende Integral aus (4.1) visualisiert

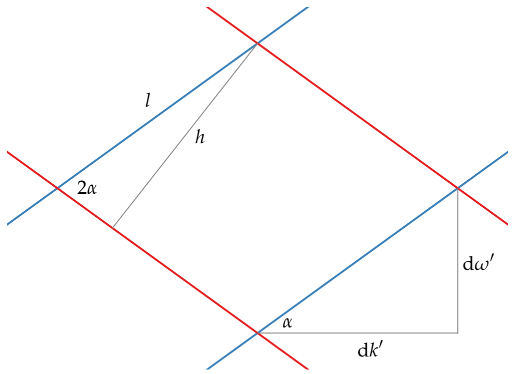

Abbildung 4: Die Kreuzungstelle bei k'_{0+} von ganz nah angeschaut

$$\widehat{\Delta}_m^{*2}(\omega,k)=\int\theta(\omega')\delta(\omega'^2-k'^2-m^2)\theta(\omega-\omega')\delta((\omega-\omega')^2-(k-k')^2-m^2)\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}k' \quad (4.1)$$

An Abbildung 3 sehen wir schon, dass das Faltungsintegral nur dann ungleich null ist, wenn (ω,k) in der $2m$-Massenschale liegen. Es ist also insbesondere $\omega>0$. Da Δ_m

Lorenz-invariant ist, sind Δ_m^2 und $\widehat{\Delta_m}^{*2}$ es auch. Es genügt also $\widehat{\Delta_m^{*2}}$ für $k = 0$ und positive ω zu berechnen. Alle anderen Werte holen wir uns dann aus der Lorenz-Invarianz.

Um nun das Integral über zwei sich schneidende lineare[1] δ-Distributionen zu berechnen bedienen wir uns eines Physikertricks und stellen uns die δ-Distribution als Grenzwert ($h \to 0$) einer $\frac{1}{h}$-hohen und h-breiten Rechtecksfunktion vor. Dann ist das Integral über die sich schneidenden Rechteckfunktionen proportional zu der Schnittfläche und damit zu $l \cdot h$ in Abb. 4. Außerdem schneiden sich die beiden Hyperbeln für $\omega \to +\infty$ in einem rechten Winkel, das Faltungsintegral ergibt hier also 2.

Wie erklärt man das besser, ohne an Anschaulichkeit oder Rigorosität zu verlieren

die Erklärungen dazwischen sind noch nicht ganz klar, fürchte ich...

Aus Abb. 4 lesen wir ab:

$$\tan(\alpha) = \frac{d\omega'}{dk'} \quad \text{und} \quad \frac{h}{l} = \sin(2\alpha)$$
$$\Rightarrow l = \frac{h}{\sin\left(2\arctan\left(\frac{d\omega'}{dk'}\right)\right)} = \frac{h\left(\left(\frac{d\omega'}{dk'}\right)^2 + 1\right)}{2\frac{d\omega'}{dk'}} \tag{4.2}$$

außerdem gilt

$$\omega' = \sqrt{k'^2 + m^2} \implies \frac{d\omega'}{dk'} = \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + m^2}} \tag{4.3}$$

Wenn wir nun (4.2) und (4.3) sowie die vorhergehenden Gedanken kombinieren erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta_m}^{*2}(\omega, 0) &= C\frac{\left(d\omega'/dk'\right)^2\Big|_{k_0'} + 1}{d\omega'/dk'|_{k_0'}}\Theta(\omega^2 - (2m)^2) \\
&= C\frac{\sqrt{k_0'^2 + m^2}(2k_0'^2 + m^2)}{2k_0'(k_0^2 + m^2)}\Theta(\dots) \\
&= C\frac{\sqrt{\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2}(\omega^2 - 4m^2 + m^2)}{\sqrt{\omega^2 - 4m^2}(\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2)}\Theta(\dots) \\
&= C\frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}}\Theta(\dots) \overset{C=2}{=} 2\frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}}\Theta(\dots)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

[1] Linear in dem Sinne, dass die Distribution entlang einer Linie getragen ist. Nicht das es eine lineare Distribution ist

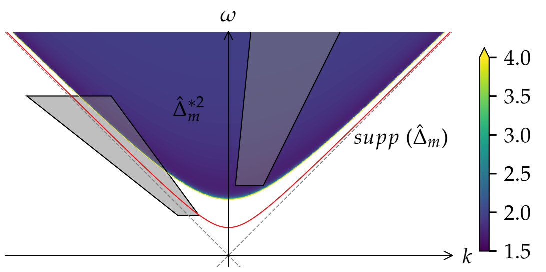

Abbildung 5: Plot von $\hat{\Delta}_m^{*2}$ und $\hat{\Delta}_m$. Je weiter wir uns von der 2m-Massenschale wegbewegen, desto konstanter wird $\hat{\Delta_m}^{*2}$ und ist singulär genau auf der $2m$-Massenschale

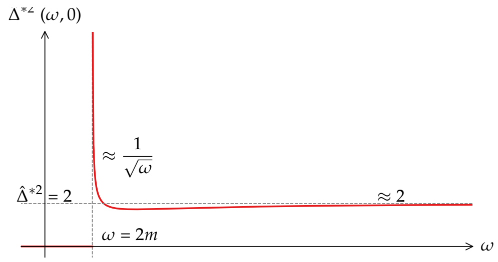

Abbildung 6: Plot von $\hat{\Delta_m}^{*2}\Big|_{k=0}$ um das asymptotische Verhalten für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ zu verdeutlichen

breqn-Package ausprobieren!

Jetzt erhalten wir $\widehat{\Delta_m}^{*2}(\omega, k)$ noch aus der Poincare-Invarianz:

$$\widehat{\Delta_m}^{*2}(\omega, k) \overset{(\omega,k)\sim(\sqrt{\omega^2-k^2},0)}{=} \widehat{\Delta_m}^{*2}(\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) = 2\frac{\omega^2 - k^2 - 3m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2}\sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}}\Theta(\omega^2 - k^2 - 4m^2) \tag{4.5}$$

Es ist zu beachten, dass die Heaviside-Funktion genau bei der ersten Nullstelle der zweiten Wurzel im Nenner abschneidet und alle weiteren Nullstellen sowohl des Nenners als auch des Zählers außerhalb der $2m$-Massenschale und damit außerhalb des Trägers der Heaviside-Funktion liegen.

spacing der figures anpassen. Monster hässliche Hüte korrigieren...

4.2 ...und nun zur Wellenfrontmenge

Mit diesen Ausdrücken für $\widehat{\Delta_m}^{*2}$ können wir uns nun der Wellenfrontmenge widmen.

<u>**Fall** $|s| > 1$</u>

Genau wie im Fall $s \neq 1$ bei der massiven Zweipunktfunktion (vgl. 3) ist hier nichts zu tun, da für a klein genug wieder

$$supp(\hat{\psi}_{ast}) \cap supp(\widehat{\Delta_m}^{*2}) = \varnothing \Rightarrow \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta_m}^{*2} \right\rangle = 0 \tag{4.6}$$

gilt.

<u>**Fall** $s < 1$</u>

Hier bedienen wir uns direkt bei (2.2, Substitution 2) und schreiben

$$\begin{aligned}
&\left\langle \widehat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta_m}^{*2} \right\rangle \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}} k + s a^{-1} \right)^2 - 3m^2 \right)}{\sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}} k + s^{-1} \right)^2} \sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}} k + s a^{-1} \right)^2 - 4m^2}} \\
&\quad \cdot \Theta \left(\omega^2 - k^2 - 4m^2 \right) e^{-i\omega \left(\frac{t' - s x'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \omega \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k \\
&\underset{\Delta s := 1 - s^2 > 0}{=} 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) \cancel{a^{-2}} \left(\omega^2 \left(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2 \right) - 3a^2 m^2 \right) e^{\cdots} \Theta(\ldots) \cancel{\omega}}{\cancel{\omega} \cancel{a^{-2}} \sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k s - a \omega^2 k^2 - 4a^2 m^2}} \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Für hinreichend kleine a können wir den Integranden nun majorisieren

$$\left| 2 \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) \omega^2 \Delta s \Theta(\ldots)}{\sqrt{\Delta s} \sqrt{\Delta s \omega^2}} \right| \geq \left| \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 \left(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2 \right) - 3a^2 m^2 \right) \Theta(\ldots)}{\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k s - a \omega^2 k^2 - 4a^2 m^2}} \right|$$

und dürfen also Lebesgue verwenden und schreiben

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0}\int \ldots \; \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k &= \int \lim_{a\to 0} \ldots \; \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\; \hat{\psi}_2(k)\; \omega^{\cancel{2}}\; \cancel{\Delta s}\; \Theta(\ldots)}{\cancel{\sqrt{\Delta s}}\cancel{\sqrt{\Delta s}}\cancel{\omega}} e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}+k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&\underset{k\to\frac{k}{\omega}}{=} 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega)\; \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\frac{t'-sx'}{a}+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}}\psi\left(\frac{t'-sx'}{a},\frac{x'}{a}\right)
\end{aligned}$$

Und da Shearlets nach Proposition 1.1 schnell abfallen erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi_{ast}, \Delta_m^2 \right\rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}}\psi\left(\frac{t'-sx'}{a},\frac{x'}{a}\right) \\
&\sim O(a^k)\ \forall k\in\mathbb{N},\quad \text{falls } (t',x')\neq 0 \\
&\sim O(a^{-\frac{3}{4}}),\quad \text{falls (t',x') = 0}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Fall $s=-1$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta}_m^{*2} \right\rangle \qquad (4.9)\\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\,\hat{\psi}_2(k)\left(\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)}-2a^{-\frac{3}{2}}ks-a^{-1}k^2\right)-3m^2\right)}{\sqrt{\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)}-2a^{-\frac{3}{2}}ks-a^{-1}k^2\right)}\sqrt{\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)}-2a^{-\frac{3}{2}}ks-a^{-1}k^2\right)-4m^2}} \\
&\quad\cdot\Theta\left(\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)}-2a^{-\frac{3}{2}}-a^{-1}k^2\right)-4m^2\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}+k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)}\cdot\omega\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\,\hat{\psi}_2(k)\,\cancel{a^{-\frac{3}{2}}}\left(2\omega^2k-a^{\frac{1}{2}}\omega^2k^2-a^{\frac{3}{2}}3m^2\right)}{\cancel{a^{-\frac{3}{2}}}\cancel{\omega}\sqrt{2k-a^{\frac{1}{2}}k^2}\sqrt{2\omega^2k-a^{\frac{1}{2}}\omega^2k^2-a^{\frac{3}{2}}4m^2}} \\
&\quad\cdot\Theta\left(2\omega^2k-a^{\frac{1}{2}}\omega^2k^2-a^{\frac{3}{2}}4m^2\right)\cdot e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}+k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)}\cancel{\omega}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{\int \frac{\hat{\psi}_2(k)\;\left(2\omega^2k-a^{\frac{1}{2}}\omega^2k^2-a^{\frac{3}{2}}3m^2\right)\Theta(\ldots)e^{-i\omega k\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{2k-a^{\frac{1}{2}}k^2}\sqrt{2\omega^2k-a^{\frac{1}{2}}\omega^2k^2-a^{\frac{3}{2}}4m^2}}\,\mathrm{d}k\right\}}_{=:\,\hat{f}_a(\omega)} \\
&\quad\cdot\hat{\psi}_1(\omega)e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}}\int \hat{f}_a(\omega)\,\hat{\psi}_1(\omega)e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

Nun müssen wir also $\hat{f}_a(\omega)$ genauer betrachten: $\hat{\psi}_2(k) \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}})$. Θ schneidet genau bei der ersten Nullstelle des Nenners ab. Deshalb verschieben wir durch eine Substitution $k \to k'$ den Intgegrationsbereich genau so, dass diese Nullstelle bei $k' = 0$ liegt.

Sei also $k_0 := \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4a^2 m^2}}{\sqrt{a}\omega}$ die relevante Nullstelle des Nenners am Integrationsbereich. Dann ist die a-Abhängigkeit von k_0 in erster Näherung gegeben durch $0 < k_0 = \frac{2m^2}{\omega^2} a^{\frac{3}{2}} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) =: c_\omega a^{\frac{3}{2}} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)$ und mit $k' = k - k_0$ gelten folgende Ausdrücke für den Nenner und den Zähler:

<u>Zähler</u>

$$\begin{aligned}
2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2 &= 2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2 \\
&= 2\omega^2 k' + 2\omega^2 \frac{2m^2}{\omega^2} a^{\frac{3}{2}} + 2\omega^2 O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}} 3m^2 \\
&= 2\omega^2 k' + a^{\frac{3}{2}} m^2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)
\end{aligned}$$

<u>Nenner</u>

$$\begin{aligned}
\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2}\sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 4m^2} &= \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0)}\sqrt{k' + k_0} \\
&\quad \cdot \underbrace{\sqrt{-a^{\frac{1}{2}}\omega^2\left(k' - \frac{2\sqrt{\omega^2 - 4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega}\right)}}_{=\sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}}\sqrt{k'}
\end{aligned}$$

Nun ist es an der Zeit für das alte Spiel von „finde eine integrierbare Majorante, um Lebesgue verwenden und alle Terme mit positiver a-Potenz wegschmeißen zu dürfen[2]“

[2]so lange sie in einer Summe mit mindestens einem Term <u>ohne</u> positive a-Potenz auftauchen

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\hat{\psi}_2(k'+k_0)\left(2\omega^2 k' + a^{\frac{3}{2}}m^2 - a^{-\frac{1}{2}}(k'+k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)\right)}{\sqrt{k'}\sqrt{k'+k_0}\sqrt{2-a^{\frac{1}{2}}(k'+k_0)}\sqrt{2-a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}}\Theta(k')\right| \\
&\leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}}\frac{\cancel{2}\omega^2 k' + a^{\frac{3}{2}}m^2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}{\sqrt{k'+k_0}\cancel{\sqrt{2}\sqrt{2}}}\Theta(k') \\
&\leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}}\left(\frac{\omega^2 k'}{\sqrt{k'}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0)^2}{\sqrt{k'+k_0}} + \frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{\sqrt{k'+k_0}} + \frac{O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}{\sqrt{k_0}}\right)\Theta(k') \\
&= \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}}\left(\omega^2\sqrt{k'} - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{\frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{\sqrt{\frac{2m^2}{\omega^2}a^{\frac{3}{2}} + O(a^{\frac{7}{2}})}}}_{O\left(a^{\frac{3}{4}}\right)} + \dots\right)\Theta(k') \\
&\leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}}\Theta(k')
\end{aligned}
$$

Der letzte Ausdruck ist eine integrierbare Majorante und in den Abschätzungen wurde u.a. verwendet, das $\hat{\psi}_2$ kompakt getragen und beschränkt ist. In „const"'wurden immer notwendige aber letzten Endes irrelevante Vorfaktoren gesammelt wie z.B. $\|\hat{\psi}_2\|_\infty$.

Der Integrand für $\hat{f}_a$ konvergiert punktweise (vgl. (4.9))

$$
\frac{\hat{\psi}_2(k)\left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}3m^2\right)\Theta(\dots)e^{-i\omega k\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2}\sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2}} \to \hat{\psi}_2(k)\omega\Theta(k)e^{-i\omega k\frac{x'}{\sqrt{a}}} \tag{4.10}
$$

und wir können also schreiben

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_a(\omega) \to \hat{f}_0(\omega) &= \int \omega\,\hat{\psi}_2(k)\,\Theta(k)\,e^{-i\omega k\frac{x'}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}k \\
&= \omega(\hat{\psi}_2\cdot\Theta)^\vee(-\omega x'/\sqrt{a}) \\
&= \omega\left(\hat{\psi}_2^\vee * \Theta^\vee\right)(-\omega x'/\sqrt{a}) \\
&= \omega\left(\psi_2 * \left(\delta + i\mathcal{P}(1/x)\right)\right)(-\omega x'/\sqrt{a}) \\
&= \omega\left[\underbrace{\psi_2(-\omega x'/\sqrt{a})}_{O(a^k)\ \forall k\in\mathbb{N}} + \underbrace{i\underbrace{(\psi_2 * \mathcal{P}(1/x))}_{O(x^{-1})}(-\omega x'/\sqrt{a})}_{O((-\omega x'/\sqrt{a})^{-1})=O\left(a^{\frac{1}{2}}\right)}\right] \\
&= O\left(a^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Tief in uns drinnen, wissen wir alle, dass die Behauptung mit dem $O(x^{-1})$ stimmt, müssen wir sie also wirklich noch zeigen?

Wir dürfen also folgende Abschätzung für $\hat{f}_a(\omega)$ für $a \to 0$ machen:

$$\hat{f}_a(\omega) = \omega C a^{\frac{1}{2}} + o\left(a^{\frac{1}{2}}\right)$$

Setzen wir dies nun schließlich wieder in unseren letzten Ausdruck in (4.9) ein, erhalten wir nach einiger Rechnerei und Abschätzerei endlich

hier fehlen wenn man es ganz genau nimmt noch $O(a^{\frac{7}{2}})$-Terme. Wird da noch eine Bemerkung zu geschrieben, oder nehme ich die ganz brav mit?

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta}_m^{*2} \right\rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\omega C a^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1(\omega)}_{\in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}})} e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}\right)} \,\mathrm{d}\omega \\ &= 2a^{-\frac{1}{4}} C \left(\omega \hat{\psi}_1(\omega)\right)^\vee \left(-\frac{t'+x'}{a}\right) \\ &\sim O(a^{-\frac{1}{4}}), \quad \text{falls t' = -x'} \\ &\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}\end{aligned} \tag{4.11}$$

Wenn wir die Ergebnisse aus (4.6), (4.8) und (4.11) zusammenfassen, haben wir für die Wellenfrontmenge von $\widehat{\Delta}_m^{*2}$

	$(t',x')=0$	$t'=x'\neq 0$	$t'=-x'\neq 0$	$t'\neq \pm x'$
$s=1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	a^k
$s=-1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	a^k	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k
$\lvert s\rvert<1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	a^k	a^k	a^k
$\lvert s\rvert>1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tabelle 2: Konvergenzordnung von $\mathcal{S}_{\Delta_m^2}(a,s,(t',x'))$ im Limit $a \to 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t',x')

Fall x'=t'=0 fehlt noch! Erwartet wird $a^{-\frac{3}{4}}$

5 Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m^{\star 2}$

herausfinden, was für ein Symbol man für dieses verdrehte Produkt verwendet

Hier gehört wohl erstmal Text hin, was diese perverse Windung = (twisted convolution) überhaupt zu bedeuten hat. Leider weiß ich das selber noch nicht.

twisted convolution definieren, oder twisted product

Die perverse Windung zweier Funktionen ist definiert wie folgt:

Definition 5.1 (perverse Windung)
Seien $f, g \in$ „passender Funktionen/Distributionenraum"'. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symplektische Matrix. Dann ist die perverse Windung $(f \circledast g)(x)$ definiert als

$$(f \circledast g)(x) := \int f(y)g(x-y)e^{\frac{i}{2}\Omega(x,y)}\,\mathrm{d}y \tag{5.1}$$

Die perverse Windung ist also einfach die gewöhnliche Faltung, die noch mit einem Ortsabhängigen Phasenfaktor verziert wurde.

Gibt es schon eine Übersetzung für twisted convolution?

Bevor wir uns aber der Wellenfrontmenge widmen können, brauchen wir einen Ausdruck für die Fouriertransformierte $\widehat{\Delta_m^{\circledast 2}}$ von $\Delta_m^{\star 2}$.

5.1 $\hat{\Delta}_m^{\circledast 2}$ berechnen

Sammeln wir zunächst einmal die Zutaten, die wir für die perverse Windung der massiven Zweipunktfunktion mit sich selber brauchen:

$$\widehat{\Delta_m} = \delta(\omega^2 - k^w - m^2)\Theta(\omega)$$

die Fouriertransformierte der massiven Zweipunktfunktion

(5.2)
$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

die kanonische symplektische Matrix auf $\mathbb{R}^n$

mit der Definition aus 5.1 und (5.2) erhalten wir also

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta_m^{\circledast 2}}(\omega, k) = \int &\delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2)\delta((\omega' - \omega)^2 - (k-k')^2 - m^2) \\ &\cdot \Theta(\omega')\Theta(\omega - \omega')e^{\frac{i}{2}(\omega' k - \omega k')}\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}k'\end{aligned} \tag{5.3}$$

und damit das selbe Integral wie in (4.1) bis auf einen zusätzlichen Phasenfaktor. Nachdem wir gezeigt haben, dass auch dieser Lorenz-Invariant ist, können wir das Integral mit dem selben Trick wie in Abschnitt 4.1 berechnen.

Proposition 5.2 (Ω_{std} ist Lorenz-invariant für $n = 2$)
Ω_{std} ist Lorenz-invariant für $n = 2$

Beweis
Eine einfache Rechnung zeigt

$$\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ -\sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\beta & -\sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Proposition 5.2 ist $\widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}$ Lorenz-Invariant und es reicht aus $\widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}(\omega, 0)$ zu berechnen.

Die beiden Kreuzungspunkte der δ-Distributionen liegen bei (vgl. Abb. 3)

$$(\omega_0', k_{0\pm}') = \left(\frac{\omega}{2}, \pm\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - m^2}\right)$$

Die „Fläche“ der Kreuzungspunkte der δ-Distributionen wurde in Abschnitt 4.1 berechnet und ist

$$A = \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}}$$

Der Phasenfaktor nimmt bei den Kreuzungspunkten folgende Werte an:

$$e^{\frac{i}{2}\Omega\left((\omega,k),(\omega_0',k_{0\pm}')\right)} = e^{\pm\frac{i}{2}\left(-\omega^2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{\omega^2}}\right)}$$

Kombinieren wir also die vorhergehenden Resultate erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}(\omega, 0) &= Ae^{\frac{i}{2}\Omega\left((\omega,k),(\omega_0',k_{0+}')\right)} + Ae^{\frac{i}{2}\Omega\left((\omega,k),(\omega_0',k_{0-}')\right)} \\
&= \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \left\{ e^{-\frac{i}{2}\omega^2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{\omega^2}}} + e^{\frac{i}{2}\omega^2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{\omega^2}}} \right\} \\
&= 2\frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \cos\left(\varphi(\omega^2)\right)
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt noch implizit $\varphi(\omega^2)$ definiert wurde. Und mit Lorenz-Invarianz erhalten wir schließlich

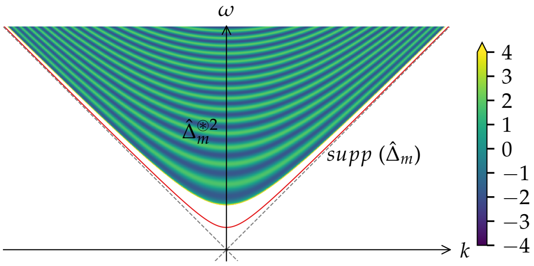

Abbildung 7: Plot von $\hat{\Delta}_m^{\circledast 2}$ und $\hat{\Delta}_m$. Wieder liegt der Träger von $\hat{\Delta}_m^{\circledast 2}$ in der kausalen Zukunft.

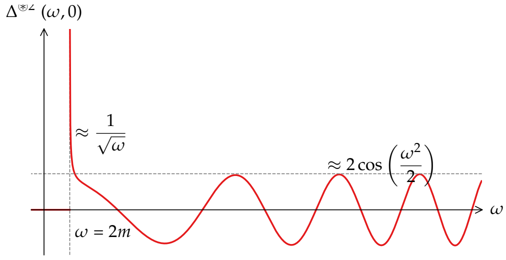

Abbildung 8: Plot von $\hat{\Delta}_m^{\circledast 2}\big|_{k=0}$ um das asymptotische Verhalten für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ zu verdeutlichen

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}(\omega, k) &= \widehat{\Delta_m}^{\circledast 2}(\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) \\
&= 2\frac{\omega^2 - k^2 - 3m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2}\sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}} \cos\left(\frac{k^2 - \omega^2}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{k^2 - \omega^2}}\right) \\
&= \widehat{\Delta_m}^{*2}(\omega, k)\cos(\varphi(\omega^2 - k^2))
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

5.2 . . . und nun zur Wellenfrontmenge von $\hat{\Delta}_m^{\circledast 2}$

5.2.1 Fall $|s| > 1$

Wir bedienen uns wieder genau des selben Arguments, wie in (4.6) und dürfen direkt schreiben:

$$
\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta_m}^{\circledast 2} \right\rangle = 0, \quad \text{für alle } a \text{ klein genug} \tag{5.5}
$$

Fall $|s| < 1, (x, t) \neq 0$

Da $\widehat{\Delta_m}^{\circledast 2} = \widehat{\Delta_m}^{*2}\cos(\dots)$ können wir direkt mit dem Ausdruck (4.7) $\cdot$ cos weiter arbeiten.

Referenz zu Delta_m2 s<1 einfügen und argumentieren, dass wir genau die selben Abschätzungen machen.

$$
\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta}_m^{\circledast 2} \right\rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\, \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 \left(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2\right) - 3a^2m^2\right)}{\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2}\sqrt{\Delta s\omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}}\omega^2 ks - a\omega^2k^2 - 4a^2m^2}} \\
&\quad \cdot \Theta(\cdots)\cos(\varphi(\omega^2 - k^2))e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)}\, d\omega\, dk \\
&\leq 2a^{-\frac{3}{4}} \int \omega\hat{\psi}_1(\omega)\, \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)}\, d\omega\, dk \\
&\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Fall $|s| < 1, (x,t) = 0$

In diesem Fall lassen wir den cos-Faktor in (5.6) in der ersten Ungleichung nicht heraus fallen, dafür wird der $e^{\cdots}$-Faktor 1. Den cos-Faktor schreiben wir als Summe von e-Funktionen und erhalten

. . . in exp durch —— ersetzen

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \widehat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta}_m^{\circledast 2} \right\rangle \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \omega\hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2(k) \left\{ \exp\left(ia^{-2}\frac{\omega^2(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{a^2m^2}{\omega^2(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}}\right) \right. \\
&\qquad \left. + \exp(-i\cdots) \right\} d\omega\, dk \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \cancel{\sqrt{\omega}}\hat{\psi}_1(\sqrt{\omega})\hat{\psi}_2(k) \left\{ \exp\left(ia^{-2}\frac{\omega(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{a^2m^2}{\omega(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}}\right) \right. \\
&\qquad \left. + \exp(-i\cdots) \right\} \frac{d\omega\, dk}{\cancel{\sqrt{\omega}}} \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \left\{ \int \hat{\psi}_1(\sqrt{\omega}) \left\{ \exp\left(ia^{-2}\left(\frac{\omega\Delta s}{4} + O\left(a^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right) \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. + \exp(-i\cdots) \right\} d\omega \right\} \hat{\psi}_2(k)\, dk \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{(\hat{\psi}_1 \circ \sqrt{\cdot})^{\vee}\left(\frac{\Delta s}{4a^2}\right)}_{\sim O(a^k)\ \forall k \in \mathbb{N}} \psi_2(k)\, dk \\
&\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Schritt von dritte in die vierte Zeile rechtfertigen. Vermutlich nicht einfach...

wobei bei der Substition $\omega \to \sqrt{\omega}$ in der zweiten Zeile wichtig ist, dass $0 \notin supp(\hat{\psi}_1)$, also auch nach der Substitution noch $\hat{\psi}_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ist.

6 Berechnen von $WF(G_F)$

6.1 Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$

Ab jetzt werden wir der Namenskonvention der Physiker in der SRT folgen und unsere Ortsraumvariablen mit $x = (t, x)$ und unsere Impulsraumvariablen mit $\xi = (\omega, k)$ bezeichnen sowie konsequenterweise das Minkowskiskalarprodukt $x \cdot \xi = \omega t - kx$ verwenden. Des weiteren wird der Verschiebungsparameter mit $t = (t', x')$ bezeichnet.

Die massive skalare Zweipunktfunktion bzw. der Feynmanpropagator im Impulsraum ist dann gegeben durch (**Schwartz2014**, (6.34))

$$\hat{G}_F(\omega, k) = \frac{1}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \tag{6.1}$$

Setzen wir dies in unsere Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ aus (2.1, Substitution 1) bzw. (2.1, Substitution 1) ergibt sich, unter Verwendung des Minkowskiskalaprodukts,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle &= \int \hat{\psi}_{ast}(\omega, t)\ \hat{G}_F(\omega, t)\ \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \\
&= a^{\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(a\omega)\ \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\frac{k}{\omega} - s\right)\ e^{-i\omega t' + ikx'}}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{w}\right)\ e^{-i\omega\frac{t' - sx'}{a} + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{\omega s}{a} + \frac{k}{\sqrt{a}}\right)^2 - i0^+} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint\limits_{\substack{\omega\in[-2,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},2] \\ \left|\frac{k}{2} - s\right| \leq \sqrt{ax}}} \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\frac{t' - sx'}{a} + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 + a^{-2}\omega^2(s^2 - 1) + a^{-\frac{3}{2}}2s\omega k + a^{-1}k - i0^+} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Integral hübsch machen. Größeres Integralzeichen?

und mit der anderen Substitution analog

$$\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{-\frac{3}{4}} \iint\limits_{\substack{|\omega| \in [\frac{1}{2},2] \\ k \in [-1,1]}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + \frac{kx'}{\sqrt{a}}\right)}}{m^2 - \omega^2(a^{-2}(1-s^2) - a^{-1}k^2 - 2ksa^{-\frac{3}{2}})}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \tag{6.3}$$

wobei sich die Integrationsbereiche aus den Forderungen an den Träger von ψ (vgl. (1.2)) ergeben.

Nach Satz (1.2) genügt es zu bestimmen, an welchen Punkten (t', x') und in welche Richtungen s $\mathcal{S}_f(a, s, (t', x'))$ nicht schnell-fallend in a^{-1} ist, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen. Da wir keine explizite erzeugende Funktion ψ angegeben haben, werden wir uns dabei Argumente bedienen, die alleine auf den allgemeinen Eigenschaften von ψ_{ast} beruhen, aber nicht einer expliziten Form.

In Textform beschreiben, was die grobe Strategie ist, also wie der Integrand vernünfitg vereinfacht wird und welche Eigenschaften von ψ wie eingehen.

Das allgemeine Vorgehen wird dabei folgendes sein: Die Ausdrücke in (6.2) und (6.3) genau anstarren, um zu sehen für welche Werte von (t', x') und s potentiell interessante Dinge geschehen, also z.B. Terme im Nenner weg fallen, oder die Phase konstant wird. Dann werden diese Werte von (t', x') und s eingesetzt und alles so weit vereinfacht und genähert – im Rahmen des Erlaubten, ohne das Verhalten für $a \to 0$ zu ändern –, bis die a-Abhängigkeit abgelesen werden kann. Entscheidende Zutaten sind dabei der beschränkte Träger von $\hat{\psi}$ und der schnelle Abfall von ψ.

Fall $s = 1, t' = 0 = x'$

Hier schon die Ergebnisse als Satz angeben, und dann Beweis hinschreiben?

Nach (6.3) erhalten wir mit $s = 1, t' = 0 = x'$

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \right\rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{m^2 + \omega^2(a^{-1}k^2 + a^{-\frac{3}{2}}2k)}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \\
&= \int a^{\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + \omega^2(a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2k)}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k
\end{aligned}$$

Da aber $|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2]$ und $k \in [-1, 1]$ ist, ist für hinreichend kleine a (und für genau die interessieren wir uns ja)

$$\left| \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{k\omega^2} \right| \geq \left| \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k + 2k\omega^2} \right|$$

Bemerkung einfügen, warum dass auch ziemlich unmöglich ist eine integrierbare (im Sinne des Cauchy-Hauptwertes) Majorante für den Integranden.

Warum ist Cauchy-Hauptwert hier erlaubt? Weiter ausführe, warum es diese Majorante tut?

Wir dürfen uns also des Lebesgueschen Konvergenzsatzes bedienen und schreiben

$$\lim_{a \to 0} \left\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\omega\, \hat{\psi}_1(\omega)\, \hat{\psi}_2(k)}{2k\omega^2} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k \sim O(a^{\frac{3}{4}}) \tag{6.4}$$

Für $s = -1$ erhalten wir genau das selbe Ergebniss, da ja der $\omega^2(1 - s^2)$-Term im Nenner genauso wieder verschwindet.

<u>**Fall** $s \neq \pm 1, t' = 0 = x'$</u>

In diesem Fall verschwindet der $\omega^2(1 - s^2)$-Term im Nenner nicht und dementsprechend folgt

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \right\rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega\, \hat{\psi}_1(\omega)\, \hat{\psi}_2(k)}{m^2 - \omega^2((1 - s^2) - a^{-1}k^2 - a^{-\frac{3}{2}}2k)} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k \\
&= \int a^{\frac{5}{4}} \frac{\omega\, \hat{\psi}_1(\omega)\, \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2ks} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k
\end{aligned}$$

Analog zum vorigen Teil ist, diesmal sogar ohne den Cauchy-Hauptwert bemühen zu müssen,

Überall wo es sein muss $\lim_{a \to 0}$ dazu schreiben, oder sagen dass der Limit überall impliziert ist

$$\left| \frac{2\omega\, \hat{\psi}_1(\omega)\, \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1 - s^2)} \right| \geq \left| \frac{\omega\, \hat{\psi}_1(\omega)\, \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2ks} \right|$$

dass eine integrierbare Majorante ist (in der Tat ja sogar in $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$) Damit können wir folgende Abschätzung treffen:

$$\lim_{a \to 0} \left\langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{2\omega\, \hat{\psi}_1(\omega)\, \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1 - s^2)} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k \sim O(a^{\frac{5}{4}})$$

Fall $s \neq \pm 1, (t', s') \neq 0$

In diesem Fall benutzen wir wieder die erste Substitution (6.2) und klammern wie schon in den beiden vorigen Teilen die höchste negative Potenz von a im Nenner aus.

$$\Rightarrow \ \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^2m^2 - \omega^2(1-s^2) + a^{\frac{1}{2}} s\omega k + ak^2} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \tag{6.5}$$

und da immer noch $0 \notin supp(\psi_1)$ gilt ist ein weiteres mal eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$2\frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \tag{6.6}$$

In der Tat ist sogar

$$\hat{f}(\omega, k) := \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}}^2) \tag{6.7}$$

da ψ_1 und ψ_2 getragen sind. Demnach ist die Fourierinverse von $\hat{f}$, $f := (\hat{f})^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, also schnell fallend. Damit können wir schließlich abschätzen

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle\right| &= a^{\frac{5}{4}} \left| \int \hat{f}(\omega, k)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \right| \\
&= a^{\frac{5}{4}} \left| f\left(\frac{t'-sx}{a}, \frac{x'}{\sqrt{a}}\right) \right| \leq a^{\frac{5}{4}} C_k \left(1 + \left\| \begin{smallmatrix} (t'-sx')/a \\ x'/\sqrt{a} \end{smallmatrix} \right\| \right)^{-k} \\
&\leq a^{\frac{5}{4}} \frac{C_k}{2} a^{\frac{k}{2}} \left\| \begin{smallmatrix} (t'-sx') \\ x' \end{smallmatrix} \right\|^{-k} \sim O\left(a^{\frac{5/2+k}{2}}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle\right| \sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{6.8}$$

Fall $s = 1, (t', x') \neq 0$

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder den ersten Ausdruck für $\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle$ aus (6.2) und sorgen wir auch bisher jedes Mal dafür, dass wir im Nenner nur noch positive Potenzen von a und einen von a unabhängigen Term haben. Dann sieht das ganze so aus:

$$\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2\omega k}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k$$

wo wir im $\lim_{a\to 0}$ wieder doe a-Potenzen im Nenner weg fallen lassen und auch dieses Mal dafür wieder den Cauchy-Hauptwert bemühen müssen, um den Lebesgueschen Konvergenzsatz benutzen zu dürfen. Weiter geht's:

$$\begin{aligned} &= a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2\omega k}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\ &= a^{\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2k\omega}\,\mathrm{d}k \right\}}_{=:\hat{f}_a(\omega)} \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{6.9}$$

und um hier weiter zu kommen, schauen wir uns $\hat{f}_a$ genauer an. Sei dazu $\Psi_2(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \psi_2(\omega')\,\mathrm{d}\omega' - \int_{\omega}^{+\infty} \psi_2(\omega')\,\mathrm{d}\omega'$ eine Stammfunktion von ψ_2. Dies ist offenbar C^∞ und beschränkt, da $\hat{\psi}_2 \in C_c^\infty$. Mithilfe von Fourieridentitäten und Substitution können wir nun weiter rechnen:

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\omega) &= \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{2k\omega} e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}\omega \\ &\overset{i)}{=} \int \frac{\hat{\psi}_2(k)}{2k} e^{ik\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}\omega \\ &\overset{ii)}{=} \frac{i}{2}\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \end{aligned}$$

Hier wurde in *i*) einfach $k \to \omega k$ substituiert und im Schritt *ii*) wurde genutzt, dass $f(x) = \mathrm{sgn}(x) \leftrightarrow \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k}$. Nun stecken wir diese Erkenntnisse in unseren vorigen Ausdruck und erhalten

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle &= \frac{ia^{\frac{3}{4}}}{2} \int \Psi_2 \left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}} \right) \; \hat{\psi}_1(\omega) \; e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k \\
&\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right), \quad \text{für} \;\; \text{t'=x'} \\
&\sim O\left(a^{k}\right) \;\; \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

Im letzten Schritt wurde wieder genutzt, dass $\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \; \hat{\psi}_1(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, und demnach eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

Das analoge Ergebnis erhält man auch für $s = -1$ und $t' = -x'$