

# Jan Lukas krasse Bachelorarbeit

Jan Lukas Bosse\*

6. Juni 2018

Hier ist wohl noch etwas zu tun... So eine hübsche Frontseite wäre doch was!

## Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeines Gelaber über Shearlets	1
2	Zwei nützliche Substitutionen für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$	3
3	Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m$	4
4	Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m^2$	7
4.1	$\hat{\Delta}^{*2}$ berechnen . . . . .	7
4.2	... und nun zur Wellenfrontmenge . . . . .	9
5	Berechnen von $WF(G_F)$	11
5.1	Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$ . . . . .	11

## 1 Allgemeines Gelaber über Shearlets

**Proposition 1.1** ( $\psi_{ast}$  fällt schnell ab)

Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  ein Shearlet wie definiert und  $M$  so ne Trafomatrix. Dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dass es eine konstante  $C_k$  gibt s.d. für alle  $x \in \mathbb{R}^2$  gilt

---

\*Georg-August Universität Göttingen

$$\begin{aligned}
& |\psi_{ast}(x)| \\
& \leq C_k |\det M|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + |M^{-1}(x - t)|^2\right)^{-k} \\
& = C_k a^{-\frac{3}{4}} \left(1 + a^{-2} (x_1 - t_1)^2 + 2a^{-2}s (x_1 - t_1)(x_2 - t_2) + a^{-1} \left(1 + a^{-1}s^2\right) (x_2 - t_2)^2\right)^{-k}
\end{aligned}$$

Und insbesondere ist  $C_k = \frac{15}{2} \frac{\sqrt{a+s}}{a^2} (\|\hat{\psi}\|_\infty + \|\Delta^k \hat{\psi}\|_\infty)$

**Satz 1.2** ( $\mathcal{S}_f(a, s, t)$  misst  $WF(f)$ )

Sei  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$  wobei  $\mathcal{D}_1 = \{ (t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \mid |\mathcal{S}_f(a, s, t)| = O(a^k) \text{ gleichm\"a\ss}ig \}$   
 $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } (t_0, s_0) \}$  und  $\mathcal{D}_2$  analog f\"ur  $\psi^{(v)}$

Dann gilt  $WF(f)^c = \mathcal{D}$

**Korollar 1.3** ( $WF(f)$  misst  $\text{sing supp}(\psi)$ )

Sei  $\mathcal{R} = \{ t_0 \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathcal{S}_f(a, s, t)| = O(a^k) \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } t_0 \}$

Dann gilt  $\text{sing supp}(\psi)^c = \mathcal{R}$

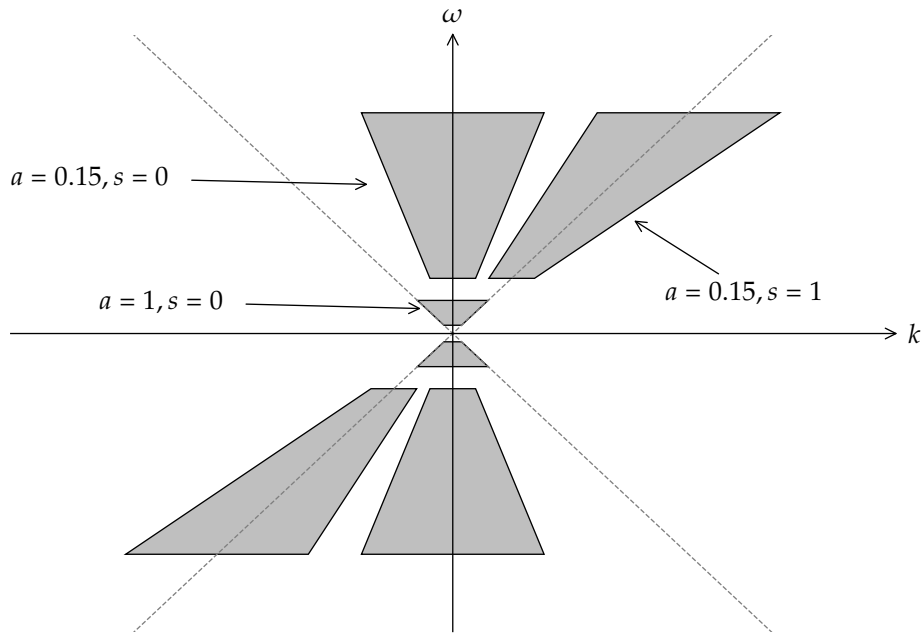


Abbildung 1: Der Tr\"ager von  $\hat{\psi}_{ast}$  f\"ur verschiedene  $a, s$ . Man sieht gut, wie  $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$  f\"ur kleinere  $a$  in immer kleineren Kegeln liegt.

diesen Satz richtig hin schreiben und ordentlich setzen

Stil und Nummerierung f\"ur S\"atze, Propositionen etc. anpassen

**Bemerkung 1.4** (Träger von  $\psi$ )  
Im Fourierraum ist  $\hat{\psi}_{ast}$  gegeben durch

$$\hat{\psi}_{ast}(\xi_1, \xi_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right)\right) \quad (1.1)$$

und es gilt

$$\text{supp}(\hat{\psi}) \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi_1| \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right], \left|\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right| \leq \sqrt{a} \right\} \quad (1.2)$$

## 2 Zwei nützliche Substitutionen für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$

Zunächst werden wir zwei verschiedene Ausdrücke für  $\langle \psi_{ast}, f \rangle$  im Fourierraum herleiten, welche sich im dann folgenden als nützlich erweisen werden.

Sei also  $\psi$  ein Shearlet wie in Korollar 1.4. Sei  $f$  die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ . Dann ist  $\mathcal{S}_f(ast)$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \psi_{ast}, f \rangle &= \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{f} \rangle \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right)\right) \hat{f}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

und nach „entscheren“ und „deskalisieren“, also der Substitution

$$\begin{aligned} a\xi_1 = k_1 & \iff \xi_1 = \frac{k_1}{a} \\ a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right) = \frac{k_2}{k_1} & \iff \xi_2 = \frac{k_1 s}{a} + a^{-\frac{1}{2}} k_2 \\ \Rightarrow d\xi_1 d\xi_2 &= a^{-\frac{3}{2}} dk_1 dk_2 \end{aligned}$$

entscheiden,  
was mit  
dem  
fehlenden  
Faktor  
 $\frac{1}{(2\pi)^n}$   
geschieht

ergibt sich folgendes für  $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ :

$$\langle \psi_{ast}, f \rangle = \iint a^{-\frac{3}{4}} \hat{\psi}_1(k_1) \hat{\psi}_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \hat{f}\left(\frac{k_1}{a}, \frac{k_1 s}{a} + \frac{k_2}{\sqrt{a}}\right) e^{-i\frac{k_1}{a}(t_1+t_2 s) - i\frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}} dk_1 dk_2 \quad (2.1, \text{Substitution 1})$$

herausfinden,  
wie die  
Gleichun-  
gen auch  
Kapitel-  
nummern  
erhalten

Alternativ kann auch folgende Substitution

$$\begin{aligned} a\tilde{\zeta}_1 &= k_1 \\ a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\tilde{\zeta}_2}{\tilde{\zeta}_1} - s \right) &= k_2 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \tilde{\zeta}_1 &= \frac{k_1}{a} \\ \tilde{\zeta}_2 &= \left( a^{\frac{1}{2}} k_2 + s \right) \frac{k_1}{a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d\tilde{\zeta}_1 d\tilde{\zeta}_2 = a^{-\frac{3}{2}} k_1 dk_1 dk_2$$

gewählt werden, wodurch alle Parameter aus den Argumenten von  $\psi_1, \psi_2$  verschwinden und sich

$$\langle \psi_{ast}, f \rangle = \iint a^{-\frac{3}{4}} k_1 \hat{\psi}_1(k_1) \hat{\psi}_2(k_2) \hat{f} \left( \frac{k_1}{a}, k_1 \left( a^{-\frac{1}{2}} k_2 + sa^{-1} \right) \right) e^{-ik_1 \left( \frac{t_1 + st_2}{a} + \frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}} \right)} dk_1 dk_2$$

(2.2, Substitution 2)

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulässig ist, obwohl sie die Orientierung nicht erhält und keine Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nämlich  $\tilde{\zeta}_1 = 0$ , liegt nicht im Träger von  $\hat{\psi}$ .

### 3 Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m$

Die massive Zweipunktfunktion ist die Fouriertransformierte der 1m-Massenschale positiver Energie:

$$\Delta_m(t, x) = \int \delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \Theta(\omega) e^{-i\omega t + ikx} d\omega dk \quad (3.1)$$

woraus sich  $\hat{\Delta}_m$  direkt zu  $\delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \Theta(\omega)$  ablesen lässt.

#### Fall $s \neq \pm 1$

Hier gibt es nicht viel zu tun, denn für  $a$  klein genug gilt  $\text{supp}(\hat{\Delta}_m) \cap \text{supp}(\hat{\psi}_{ast}) = \emptyset$  wie man Abb. 2 entnehmen kann. Also gilt  $\langle \psi_{ast}, \Delta_m \rangle = 0 = O(a^k) \forall k$  für  $a$  klein genug. Dies gilt für alle  $(t', x') \in \mathbb{R}^2$

Grafik bas-teln, die  $\text{supp } \psi$  vor und nach der Substitution zeigt.

Quelle dafür zit-tieren...

hier noch blöde Abschätzerei machen, warum das tatsächlich gilt, oder stehen lassen. Oder im Kapitel Shearlets

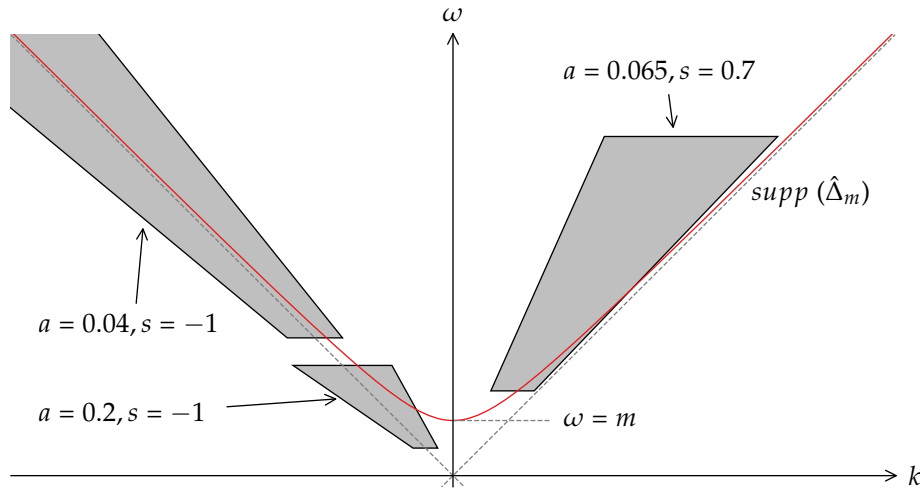


Abbildung 2: Die Träger von  $\hat{\Delta}_m$  und  $\hat{\psi}_{ast}$ . Es ist zu sehen, dass für  $a \rightarrow 0$  und  $s \neq \pm 1$  die Träger schließlich disjunkt sind

#### Fall $s = 1$

**Intuition** Für  $s = -1$  schneidet die Diagonale  $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$  auf der ganzen Länge. Der Betrag von  $\hat{\psi}_{ast}$  skaliert mit  $a^{\frac{3}{4}}$  und die Länge von  $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$  mit  $a^{-1}$ . Also erwarten wir schlimmstenfalls  $\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m \rangle = O(a^{-\frac{1}{4}})$ . Aber nur wenn die Wellenfronten von  $e^{-i\omega t' + ikx'}$  parallel zu der Singularität und damit der Diagonalen liegen. Andernfalls erwarten wir, dass die immer schneller werdenden Oszillationen der Phase sich gegenseitig auslöschen/wegheben.

## Fleißige Analysis

$$\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{\Delta}_m \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2 \left( a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{k}{\omega} - 1 \right) \right) \delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \theta(\omega) e^{-i\omega t' + ikx'} d\omega dk$$

Nullstellen von  $\delta$  :

$$\omega^2 - k^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\omega^2 - m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{d\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}}; \text{ wobei nur „+“ in } \text{supp}(\hat{\psi}_2) \text{ liegt}$$

$$\begin{aligned} &= a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2 \left( a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\omega} - 1 \right) \right) e^{-i\omega t' + i\sqrt{\omega^2 - m^2} x'} d\omega \\ &= a^{\frac{3}{4}} a^{-1} \int \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2 \left( a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{a\omega^2 - m^2}}{\omega} - 1 \right) \right) e^{-i\frac{\omega}{a} t' + i\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - m^2} x'} d\omega \\ &\quad \underbrace{\left( a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{a\omega^2 - m^2}}{\omega} - 1 \right) \right)}_{= \frac{\frac{3}{2}m^2}{2\omega^2} + O\left(\frac{7}{2}\right)} \end{aligned}$$

Der Integrand lässt sich nun durch  $\hat{\psi}_1(\omega) \|\hat{\psi}_2\|_\infty$  majorisieren und wir dürfen Lebesgue verwenden um Integral und Grenzwert  $a \rightarrow 0$  zu vertauschen

$$\begin{aligned} &= a^{-\frac{1}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(0) e^{-i\omega \left( \frac{t' - x'}{a} \right)} \\ &= a^{-\frac{1}{4}} \hat{\psi}_2(0) \psi_1 \left( \frac{t' - x'}{a} \right) \\ &\sim O \left( a^{-\frac{1}{4}} \right), \text{ falls } x' = t' \\ &\sim O \left( a^k \right) \quad \forall k, \text{ sonst} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Das analoge Ergebnis erhält man mit gleicher Rechnung auch für  $s = -1$  und  $t' = -x'$ . Dies bestätigt das intuitiv erwartete Ergebnis. Insgesamt erhalten wir also für die Wellenfrontmenge:

	$(t', x') = (0, 0)$	$t' = x'$	$t' = -x'$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^k$	$a^k$
$s = -1$	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^k$	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^k$
$s \neq \pm 1$	$a^k$	$a^k$	$a^k$	$a^k$

Tabelle 1: Konvergenzordnung von  $S_{\Delta_m}(a, s, (t', x'))$  im Limit  $a \rightarrow 0$  für alle interessanten Kombinationen von  $s$  und  $(t', x')$

## 4 Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m^2$

Bevor wir die Wellenfrontmenge von  $\Delta_m^2$  berechnen können, benötigen wir einen Ausdruck dafür, oder besser noch einen für die Fouriertransformierte davon.

### 4.1 $\widehat{\Delta}^{*2}$ berechnen

Gemäß dem Faltungssatz gilt  $\widehat{\Delta_m^2} = \widehat{\Delta}_m * \widehat{\Delta}_m = \widehat{\Delta}_m^{*2}$ . Wir müssen also die Faltung von  $\widehat{\Delta}_m$  mit sich selber ausrechnen.

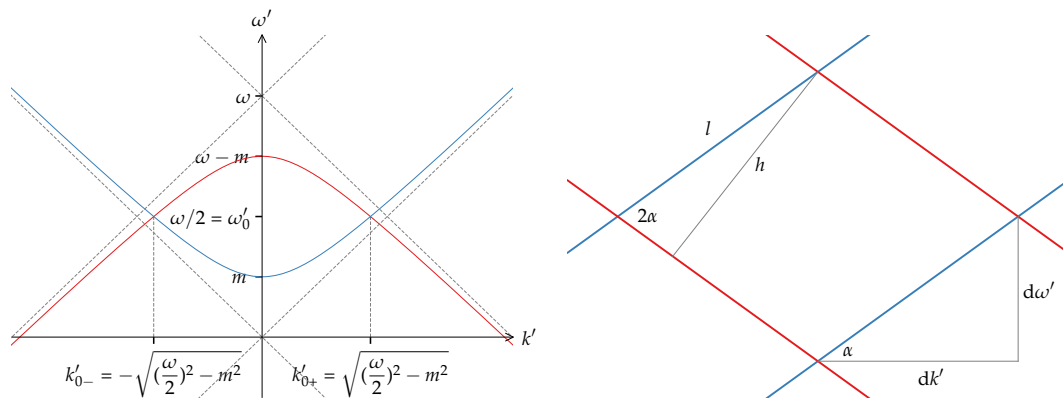


Abbildung 3: Das zu berechnende Integral aus (4.1) visualisiert

Abbildung 4: Die Kreuzungstelle bei  $k'_{0+}$  von ganz nah angeschaut

$$\widehat{\Delta_m^{*2}}(\omega, k) = \int \theta(\omega') \delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2) \theta(\omega - \omega') \delta((\omega - \omega')^2 - (k - k')^2 - m^2) d\omega' dk' \quad (4.1)$$

An Abbildung 3 sehen wir schon, dass das Faltungsintegral nur dann ungleich null ist, wenn  $(\omega, k)$  in der  $2m$ -Massenschale liegen. Es ist also insbesondere  $\omega > 0$ . Da  $\Delta_m$  Poincare-invariant ist, sind  $\Delta_m^2$  und  $\widehat{\Delta}_m^{*2}$  es auch. Es genügt also  $\widehat{\Delta}_m^{*2}$  für  $k = 0$  und positive  $\omega$  zu berechnen. Alle anderen Werte holen wir uns dann aus der Poincare-Invarianz.

Um nun das Integral über zwei sich schneidende lineare<sup>1</sup>  $\delta$ -Distributionen zu berechnen bedienen wir uns eines Physikertricks und stellen uns die  $\delta$ -Distribution als Grenzwert ( $h \rightarrow 0$ ) einer  $\frac{1}{h}$ -hohen und  $h$ -breiten Rechtecksfunktion vor. Dann ist das Integral über

<sup>1</sup>Linear in dem Sinne, dass die Distribution entlang einer Linie getragen ist. Nicht dass es eine lineare Distribution ist

Wie erklärt man das besser, ohne an Anschaulichkeit oder Rigorosität zu verlieren

die sich schneidenden Rechteckfunktionen proportional zu der Schnittfläche und damit zu  $l \cdot h$  in Abb. 4. Außerdem schneiden sich die beiden Hyperbeln für  $\omega \rightarrow +\infty$  in einem rechten Winkel, das Faltungsintegral ergibt hier also 2.

Aus Abb. 4 lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{d\omega'}{dk'} \quad \text{und} \quad \frac{h}{l} = \sin(2\alpha) \\ \Rightarrow l &= \frac{h}{\sin\left(2 \arctan\left(\frac{d\omega'}{dk'}\right)\right)} = \frac{h \left( \left(\frac{d\omega'}{dk'}\right)^2 + 1 \right)}{2 \frac{d\omega'}{dk'}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

außerdem gilt

$$\omega' = \sqrt{k'^2 + m^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega'}{dk'} = \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + m^2}} \quad (4.3)$$

Wenn wir nun (4.2) und (4.3) sowie die vorhergehenden Gedanken kombinieren erhalten wir

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_m^{*2}(\omega, 0) &= C \frac{\left(\frac{d\omega'}{dk'}\right)^2 \Big|_{k'_0} + 1}{\frac{d\omega'}{dk'} \Big|_{k'_0}} \Theta(\omega^2 - (2m)^2) \\ &= C \frac{\sqrt{k_0'^2 + m^2} (2k_0'^2 + m^2)}{2k_0' (k_0'^2 + m^2)} \Theta(\dots) \\ &= C \frac{\sqrt{\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2 (\omega^2 - 4m^2 + m^2)}}{\sqrt{\omega^2 - 4m^2} (\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2)} \Theta(\dots) \\ &= C \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \Theta(\dots) \stackrel{C=2}{=} 2 \frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \Theta(\dots) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Jetzt erhalten wir  $\widehat{\Delta}_m^{*2}(\omega, k)$  noch aus der Poincare-Invarianz:

breqn-  
Package  
ausprobie-  
ren!

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_m^{*2}(\omega, k) &\stackrel{(\omega, k) \sim (\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0)}{=} \widehat{\Delta}_m^{*2}(\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) \\ &= 2 \frac{\omega^2 - k^2 - 3m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2} \sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}} \Theta(\omega^2 - k^2 - 4m^2) \end{aligned} \quad (4.5)$$



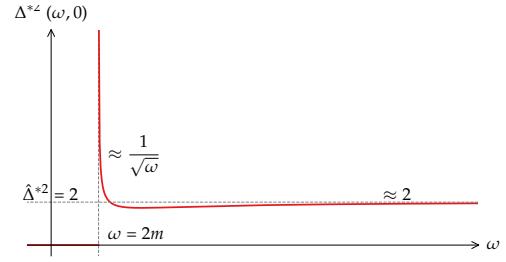
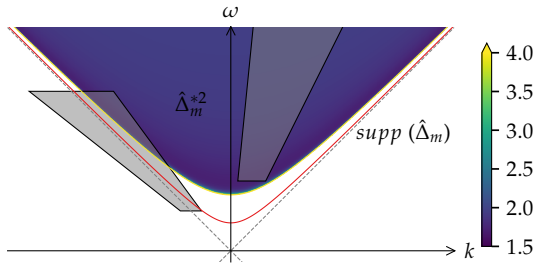


Abbildung 5: Plot von  $\hat{\Delta}_m^{*2}$  und  $\hat{\Delta}_m$ . Je weiter wir uns von der  $2m$ -Massenschale wegbewegen, desto konstanter wird  $\hat{\Delta}_m^{*2}$  und ist singulär genau auf der  $2m$ -Massenschale

Abbildung 6: Plot von  $\hat{\Delta}_m^{*2}|_{k=0}$  um das asymptotische Verhalten für  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$  zu verdeutlichen

Es ist zu beachten, dass die Heaviside-Funktion genau bei der ersten Nullstelle der zweiten Wurzel im Nenner abschneidet und alle weiteren Nullstellen sowohl des Nenners als auch des Zählers außerhalb der  $2m$ -Massenschale und damit außerhalb des Trägers der Heaviside-Funktion liegen.

#### 4.2 ... und nun zur Wellenfrontmenge

Mit diesen Ausdrücken für  $\hat{\Delta}_m^{*2}$  können wir uns nun der Wellenfrontmenge widmen.

##### Fall $|s| > 1$

Genau wie im Fall  $s \neq 1$  bei der massiven Zweipunktfunktion (vgl. 3) ist hier nichts zu tun, da für  $a$  klein genug wieder

$$\text{supp}(\hat{\psi}_{ast}) \cap \text{supp}(\hat{\Delta}_m^{*2}) = \emptyset \Rightarrow \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{\Delta}_m^{*2} \rangle = 0$$

gilt.

Fall  $s < 1$

Hier bedienen wir uns direkt bei (2.2, Substitution 2) und schreiben

$$\begin{aligned}
& \left\langle \widehat{\psi}_{ast'}, \widehat{\Delta}_m^{*2} \right\rangle \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left( \omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left( a^{-\frac{1}{2}} k + s a^{-1} \right)^2 - 3m^2 \right)}{\sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left( a^{-\frac{1}{2}} k + s^{-1} \right)^2} \sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left( a^{-\frac{1}{2}} k + s a^{-1} \right)^2 - 4m^2}} \\
&\quad \cdot \Theta \left( \omega^2 - k^2 - 4m^2 \right) e^{-i\omega \left( \frac{t' - sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \omega \, d\omega \, dk \\
&\stackrel{\Delta s := 1 - s^2 > 0}{=} 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \omega^2 \left( \Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2 \right) - 3a^2 m^2}{\omega \sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k s - a \omega^2 k^2 - 4a^2 m^2}} \Theta(\dots) \omega \, d\omega \, dk
\end{aligned}$$

Für hinreichend kleine  $a$  können wir den Integranden nun majorisieren

$$\left| 2 \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \omega^2 \Delta s \Theta(\dots)}{\sqrt{\Delta s} \sqrt{\Delta s \omega^2}} \right| \geq \left| \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left( \omega^2 \left( \Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2 \right) - 3a^2 m^2 \right) \Theta(\dots)}{\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k s - a \omega^2 k^2 - 4a^2 m^2}} \right|$$

und dürfen also Lebesgue verwenden und schreiben

$$\begin{aligned}
\lim_{a \rightarrow 0} \int \dots \, d\omega \, dk &= \int \lim_{a \rightarrow 0} \dots \, d\omega \, dk \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \omega^2 \Delta s \Theta(\dots)}{\sqrt{\Delta s} \sqrt{\Delta s \omega^2}} e^{-i\omega \left( \frac{t' - sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \, d\omega \, dk \\
&\stackrel{k \rightarrow \frac{k}{\omega}}{=} 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2 \left( \frac{k}{\omega} \right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + i k \frac{x'}{\sqrt{a}}} \, d\omega \, dk \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \psi \left( \frac{t' - sx'}{a}, \frac{x'}{a} \right)
\end{aligned}$$

Und da Shearlets nach Proposition 1.1 schnell abfallen erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{ast'}, \Delta_m^2 \rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \psi \left( \frac{t' - sx'}{a}, \frac{x'}{a} \right) \\
&\sim O(a^k) \quad \forall k \\
&\in \mathbb{N}, \quad \text{falls } (t', x') \neq 0 \\
&\sim O(a^{-\frac{3}{4}}), \quad \text{falls } (t', x') = 0
\end{aligned}$$

Fall  $s = -1$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \widehat{\Delta_m}^{*2} \right\rangle \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left( \omega^2 \left( a^{-2} \cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2 \right) - 3m^2 \right)}{\sqrt{\omega^2 \left( a^{-2} \cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{\frac{1}{2}}k^2 \right)} \sqrt{\omega^2 \left( a^{-2} \cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{\frac{1}{2}}k^2 \right) - 4m^2}} \\
&\quad \cdot \Theta \left( \omega^2 \left( a^{-2} \cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}}k^2 \right) - 4m^2 \right) e^{-i\omega \left( \frac{t'+x'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \cdot \omega \, d\omega \, dk
\end{aligned}$$

## 5 Berechnen von $WF(G_F)$

### 5.1 Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$

Ab jetzt werden wir der Namenskonvention der Physiker in der SRT folgen und unsere Ortsraumvariablen mit  $x = (t, x)$  und unsere Impulsraumvariablen mit  $\xi = (\omega, k)$  bezeichnen sowie konsequenterweise das Minkowskiskalarprodukt  $x \cdot \xi = \omega t - kx$  verwenden. Des weiteren wird der Verschiebungsparameter mit  $t = (t', x')$  bezeichnet.

Die massive skalare Zweipunktfunktion bzw. der Feynmanpropagator im Impulsraum ist dann gegeben durch (Schwartz [1], (6.34))

$$\hat{G}_F(\omega, k) = \frac{1}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \quad (5.1)$$

Setzen wir dies in unsere Ausdrücke für  $\langle \psi_{ast}, f \rangle$  aus (??) bzw. (??) ergibt sich, unter Verwendung des Minkowskiskalaprodukts,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle &= \int \hat{\psi}_{ast}(\omega, t) \hat{G}_F(\omega, t) d\omega dk \\
&= a^{\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}} \frac{k}{\omega} - s\right) e^{-i\omega t' + ikx'}}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} d\omega dk \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{\omega s}{a} + \frac{k}{\sqrt{a}}\right)^2 - i0^+} d\omega dk \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{\omega \in [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2] \\ |\frac{k}{2} - s| \leq \sqrt{ax}}} \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 + a^{-2}\omega^2(s^2 - 1) + a^{-\frac{3}{2}}2s\omega k + a^{-1}k^2 - i0^+} d\omega dk \quad (5.2)
\end{aligned}$$

und mit der anderen Substitution analog

$$\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle = a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2] \\ k \in [-1, 1]}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega \left(\frac{t' - sx'}{a} + \frac{kx'}{\sqrt{a}}\right)}}{m^2 - \omega^2(a^{-2}(1 - s^2) - a^{-1}k^2 - 2ksa^{-\frac{3}{2}})} d\omega dk \quad (5.3)$$

Integral  
hübsch  
machen.  
Größeres  
Integral-  
zeichen?

wobei sich die Integrationsbereiche aus den Forderungen an den Träger von  $\psi$  (vgl. (1.2)) ergeben.

Nach Satz (1.2) genügt es zu bestimmen, an welchen Punkten  $(t', x')$  und in welche Richtungen  $s$   $\mathcal{S}_f(a, s, (t', x'))$  nicht schnell-fallend in  $a^{-1}$  ist, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen. Da wir keine explizite erzeugende Funktion  $\psi$  angegeben haben, werden wir uns dabei Argumente bedienen, die alleine auf den allgemeinen Eigenschaften von  $\psi_{ast}$  beruhen, aber nicht einer expliziten Form.

Das allgemeine Vorgehen wird dabei folgendes sein: Die Ausdrücke in (5.2) und (5.3) genau anstarren, um zu sehen für welche Werte von  $(t', x')$  und  $s$  potentiell interessante Dinge geschehen, also z.B. Terme im Nenner weg fallen, oder die Phase konstant wird. Dann werden diese Werte von  $(t', x')$  und  $s$  eingesetzt und alles so weit vereinfacht und genähert – im Rahmen des Erlaubten, ohne das Verhalten für  $a \rightarrow 0$  zu ändern –, bis die  $a$ -Abhängigkeit abgelesen werden kann. Entscheidende Zutaten sind dabei der beschränkte Träger von  $\hat{\psi}$  und der schnelle Abfall von  $\psi$ .

In Text-  
form be-  
schrei-  
ben, was  
die grobe  
Strategie  
ist, also  
wie der  
Integrand  
vernün-  
ftig ver-  
einfacht  
wird und  
welche  
Eigen-  
schaften  
von  $\psi$  wie  
eingehen.

Hier  
schon  
die Er

Fall  $s = 1, t' = 0 = x'$

Nach (5.3) erhalten wir mit  $s = 1, t' = 0 = x'$

$$\begin{aligned}\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 + \omega^2(a^{-1}k^2 + a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + \omega^2(a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2k)} d\omega dk\end{aligned}$$

Da aber  $|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2]$  und  $k \in [-1, 1]$  ist, ist für hinreichend kleine  $a$  (und für genau die interessieren wir uns ja)

$$\left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{k\omega^2} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}\omega^2k + 2k\omega^2} \right|$$

eine integrierbare (im Sinne des Cauchy-Hauptwertes) Majorante für den Integranden.

Wir dürfen uns also des Lebesgueschen Konvergenzsatzes bedienen und schreiben

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{2k\omega^2} d\omega dk \sim O(a^{\frac{3}{4}}) \quad (5.4)$$

Für  $s = -1$  erhalten wir genau das selbe Ergebniss, da ja der  $\omega^2(1 - s^2)$ -Term im Nenner genauso wieder verschwindet.

Fall  $s \neq \pm 1, t' = 0 = x'$

In diesem Fall verschwindet der  $\omega^2(1 - s^2)$ -Term im Nenner nicht und dementsprechend folgt

$$\begin{aligned}\langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 - \omega^2((1 - s^2) - a^{-1}k^2 - a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{5}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2ks} d\omega dk\end{aligned}$$

Warum ist Cauchy-Hauptwert hier erlaubt? Weiter ausführe, warum es diese Majorante tut?

Analog zum vorigen Teil ist, diesmal sogar ohne den Cauchy-Hauptwert bemühen zu müssen,

$$\left| \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2 m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2 k^2 + a^{\frac{1}{2}} 2\omega^2 k s} \right|$$

dass eine integrierbare Majorante ist (in der Tat ja sogar in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ) Damit können wir folgende Abschätzung treffen:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} d\omega dk \sim O(a^{\frac{5}{4}})$$

Fall  $s \neq \pm 1, (t', s') \neq 0$

In diesem Fall benutzen wir wieder die erste Substitution (5.2) und klammern wie schon in den beiden vorigen Teilen die höchste negative Potenz von  $a$  im Nenner aus.

$$\Rightarrow \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^2 m^2 - \omega^2(1-s^2) + a^{\frac{1}{2}} s\omega k + ak^2} d\omega dk \quad (5.5)$$

und da immer noch  $0 \notin \text{supp}(\psi_1)$  gilt ist ein weiteres mal eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$2 \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2 - 1)} \quad (5.6)$$

In der Tat ist sogar

$$\hat{f}(\omega, k) := \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2 - 1)} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}}^2) \quad (5.7)$$

da  $\psi_1$  und  $\psi_2$  getragen sind. Demnach ist die Fourierinverse von  $\hat{f}$ ,  $f := \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , also schnell fallend. Damit können wir schließlich abschätzen

Überall  
wo es  
sein muss  
 $\lim_{a \rightarrow 0}$   
dazu  
schreiben,  
oder sa-  
gen dass  
der Limit  
überall  
impliziert  
ist

$$\begin{aligned}
|\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle| &= a^{\frac{5}{4}} \left| \int \hat{f}(\omega, k) e^{-i\omega \left( \frac{t'-sx'}{a} \right) + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega dk \right| \\
&= a^{\frac{5}{4}} \left| f \left( \frac{t'-sx}{a}, \frac{x'}{\sqrt{a}} \right) \right| \leq a^{\frac{5}{4}} C_k \left( 1 + \left\| \frac{(t'-sx')/a}{x'/\sqrt{a}} \right\| \right)^{-k} \\
&\leq a^{\frac{5}{4}} \frac{C_k}{2} a^{\frac{k}{2}} \left\| \frac{(t'-sx')}{x'} \right\|^{-k} \sim O \left( a^{\frac{5/2+k}{2}} \right) \quad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle| \sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (5.8)$$

Fall  $s = 1, (t', x') \neq 0$

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder den ersten Ausdruck für  $\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle$  aus (5.2) und sorgen wir auch bisher jedes Mal dafür, dass wir im Nenner nur noch positive Potenzen von  $a$  und einen von  $a$  unabhängigen Term haben. Dann sieht das ganze so aus:

$$\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2 \left( \frac{k}{\omega} \right) e^{-i\omega \left( \frac{t'-x'}{a} \right) + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^{\frac{3}{2}} m^2 + a^{\frac{1}{2}} k^2 + 2\omega k} d\omega dk$$

wo wir im  $\lim_{a \rightarrow 0}$  wieder die  $a$ -Potenzen im Nenner weg fallen lassen und auch dieses Mal dafür wieder den Cauchy-Hauptwert bemühen müssen, um den Lebesgueschen Konvergenzsatz benutzen zu dürfen. Weiter geht's:

$$\begin{aligned}
&= a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2 \left( \frac{k}{\omega} \right) e^{-i\omega \left( \frac{t'-x'}{a} \right) + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2\omega k} d\omega dk \\
&= a^{\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2 \left( \frac{k}{\omega} \right) e^{ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2k\omega} dk \right\}}_{=: \hat{f}_a(\omega)} \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \left( \frac{t'-x'}{a} \right)} d\omega \quad (5.9)
\end{aligned}$$

und um hier weiter zu kommen, schauen wir uns  $\hat{f}_a$  genauer an. Sei dazu  $\Psi_2(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \psi_2(\omega') d\omega' - \int_{\omega}^{+\infty} \psi_2(\omega') d\omega'$  eine Stammfunktion von  $\psi_2$ . Dies ist offenbar  $C^\infty$  und beschränkt, da  $\hat{\psi}_2 \in C_c^\infty$ . Mithilfe von Fourieridentitäten und Substitution können wir nun weiter rechnen:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_a(\omega) &= \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{2k\omega} e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega \\
&\stackrel{i)}{=} \int \frac{\hat{\psi}_2(k)}{2k} e^{ik\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}} d\omega \\
&\stackrel{ii)}{=} \frac{i}{2} \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)
\end{aligned}$$

Hier wurde in *i)* einfach  $k \rightarrow \omega k$  substituiert und im Schritt *ii)* wurde genutzt, dass  $f(x) = \text{sgn}(x) \leftrightarrow \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k}$ . Nun stecken wir diese Erkenntnisse in unseren vorigen Ausdruck und erhalten

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle &= \frac{ia^{\frac{3}{4}}}{2} \int \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} d\omega dk \\
&\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right) \quad ; \text{ für } t' = x' \\
&\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad ; \text{ andernfalls}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Im letzten Schritt wurde wieder genutzt, dass  $\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \hat{\psi}_1(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist, und demnach eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

Das analoge Ergebnis erhält man auch für  $s = -1$  und  $t' = -x'$

## Literatur

- [1] Matthew D. Schwartz. Quantum Field Theory and the Standard Model -. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1-107-03473-0.