Berechnen der Wellenfrontmenge der massiven Zweipunktfunktion mittels Shearlets

Jan Lukas Bosse*

2. Juni 2018

Im folgenden werden wir die Wellenfrontmenge der massiven Zweipunktfunktionen mittels der Methoden von Kutyniok und Labate [1] ausrechnen.

1 Allgemeines Gelaber über Shearlets

Satz 1.1 ($\mathcal{S}_f(a,s,t)$ misst $WF(f)$)
Sei $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ wobei $\mathcal{D}_1 = \left\{\ (t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1,1] \middle| \ |\mathcal{S}_f(a,s,t)| = O(a^k) \text{ gleichmäßig } \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } (t_0,s_0)\ \right\}$ und $\mathcal{D}_2$ analog für $\psi^{(v)}$

Dann gilt $WF(f)^c = \mathcal{D}$

diesen Satz richtig hin schreiben und ordentlich setzen

Korollar 1.2 (WF(f) misst *sing supp*(ψ))
Sei $\mathcal{R} = \left\{\ t_0 \in \mathcal{R}^2 \middle| \ |\mathcal{S}_f(a,s,t)| = O(a^k)\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } t_0\ \right\}$

Dann gilt *sing supp*$(\psi)^c = \mathcal{R}$

Bemerkung 1.3 (Träger von ψ)
Im Fourierraum ist $\hat{\psi}_{ast}$ gegeben durch

Stil und Nummerierung für Sätze, Propositionen etc. anpassen

$$\hat{\psi}_{ast}(\xi_1, \xi_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi\cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right)\right) \tag{1}$$

und es gilt

*Georg-August Universitt Göttingen

$$supp(\hat{\psi}) \subset \left\{ \xi \in \hat{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; |\xi_1| \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right], \left|\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right| \leq \sqrt{a} \right\} \tag{2}$$

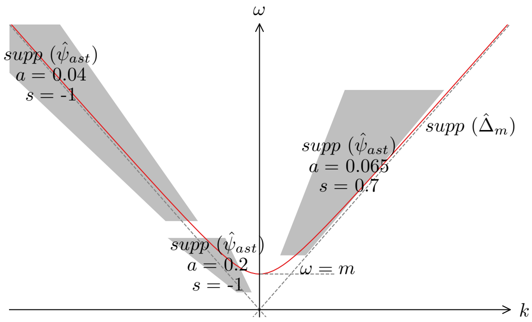

Abbildung 1: Jup, ne Bildunterschrift

2 Allgemeine Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$

Zunächst werden wir zwei verschiedene Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ im Fourierraum herleiten, welche sich im dann folgenden als nützlich erweisen werden.

Sei also ψ ein Shearlet wie in Korollar 1.3. Sei f die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in $\mathcal{D}\prime(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\mathcal{S}_f(ast)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \psi_{ast}, f \rangle &= \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{f} \right\rangle \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) \right) \hat{f}(\xi) \, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

und nach „entscheren“ und „deskalieren“, also der Substitution

etnscheiden, was mit dem fehlenden Faktor $\frac{1}{(2\pi)^n}$ geschieht

$$\begin{aligned} a\xi_1 &= k_1 \\ a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) &= \frac{k_2}{k_1} \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{k_1}{a} \\ \xi_2 &= \frac{k_1 s}{a} + a^{-\frac{1}{2}} k_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2 = a^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}k_1 \, \mathrm{d}k_2$$

ergibt sich folgendes für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$:

$$= \iint a^{-\frac{3}{4}}\ \hat{\psi}_1(k_1)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)\ \hat{f}\left(\frac{k_1}{a}, \frac{k_1 s}{a} + \frac{k_2}{\sqrt{a}}\right)\ e^{-i\frac{k_1}{a}(t_1+t_2 s)-i\frac{k_2 t_2}{\sqrt{(a)}}}\, \mathrm{d}k_1\, \mathrm{d}k_2 \tag{3}$$

herausfinden, wie die Gleichungen auch Kapitelnummern erhalten

Alternativ kann auch folgende Substitution

$$\begin{aligned} a\xi_1 &= k_1 \\ a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right) &= k_2 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{k_1}{a} \\ \xi_2 &= \left(a^{\frac{1}{2}} k_2 + s\right)\frac{k_1}{a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2 = a^{-\frac{3}{2}} k_1\, \mathrm{d}k_1\, \mathrm{d}k_2$$

gewählt werden, wodurch alle Parameter aus den Argumenten von ψ_1, ψ_2 verschwinden und sich

$$= \iint a^{-\frac{3}{4}}\ k_1\ \hat{\psi}_1(k_1)\ \hat{\psi}_2(k_2)\ \hat{f}\left(\frac{k_1}{a}, k_1\left(a^{-\frac{1}{2}}k_2 + sa^{-1}\right)\right)\ e^{-ik_1\left(\frac{t_1+st_2}{a}+\frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}\right)}\, \mathrm{d}k_1\, \mathrm{d}k_2 \tag{4}$$

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulässig ist, obwohl sie die Orientierung nicht erhält und nicht keine Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nämlich $\xi_1 = 0$, liegt nicht im Träger von ψ.

Grafik basteln, die *supp* ψ vor und nach der Substitution zeigt.

2.1 Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$

Ab jetzt werden wir der Namenskonvention der Physiker in der SRT folgen und unsere Ortsraumvariablen mit $x = (t, x)$ und unsere Impulsraumvariablen mit $\xi = (\omega, k)$ bezeichnen sowie konsequenterweise das Minkowskiskalarprodukt $x \cdot \xi = \omega t - kx$ verwenden. Des weiteren wird der Verschiebungsparameter mit $t = (t', x')$ bezeichnet.

Die massive skalare Zweipunktfunktion bzw. der Feynmanpropagator im Impulsraum ist dann gegeben durch (Schwartz [2], (6.34))

$$\hat{G}_F(\omega, k) = \frac{1}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \tag{5}$$

Setzen wir dies in unsere Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ aus (3) bzw. (4) ergibt sich, unter Verwendung des Minkowskiskalaprodukts,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle &= \int \hat{\psi}_{ast}(\omega, t)\ \hat{G}_F(\omega, t)\ \ \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(a\omega)\ \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}} \frac{k}{\omega} - s\right)\ e^{-i\omega t' + ikx'}}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{w}\right)\ e^{-i\omega \frac{t'-sx'}{a} + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{\omega s}{a} + \frac{k}{\sqrt{a}}\right)^2 - i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint\limits_{\substack{\omega\in[-2,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},2] \\ \left|\frac{k}{2}-s\right|\leq\sqrt{ax}}} \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{w}\right)\ e^{-i\omega \frac{t'-sx'}{a} + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 + a^{-2}\omega^2(s^2-1) + a^{-\frac{3}{2}} 2s\omega k + a^{-1}k - i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k
\end{aligned}
\tag{6}
$$

und mit der anderen Substitution analog

Integral hübsch machen. Größeres Integralzeichen?

$$
\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{-\frac{3}{4}} \iint\limits_{\substack{|\omega|\ \in\ [\frac{1}{2},2] \\ k\ \in\ [-1,1]}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + \frac{kx'}{\sqrt{a}}\right)}}{m^2 - \omega^2(a^{-2}(1-s^2) - a^{-1}k^2 - 2ksa^{-\frac{3}{2}})}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \tag{7}
$$

wobei sich die Integrationsbereiche aus den Forderungen an den Träger von ψ (vgl. (2)) ergeben.

3 Berechnen von $WF(G_F)$

Nach Satz (1.1) genügt es zu bestimmen, an welchen Punkten (t', x') und in welche Richtungen s $\mathcal{S}_f(a, s, (t', x'))$ nicht schnell-fallend in a^{-1} ist, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen. Da wir keine explizite erzeugende Funktion ψ angegeben haben, werden wir uns dabei Argumente bedienen, die alleine auf den allgemeinen Eigenschaften von ψ_{ast} beruhen, aber nicht einer expliziten Form.

In Textform beschreiben, was die grobe Strategie ist, also wie der Integrand vernünfitg vereinfacht wird und welche Eigenschaften von ψ wie eingehen.

Das allgemeine Vorgehen wird dabei folgendes sein: Die Ausdrücke in (6) und (7) genau anstarren, um zu sehen für welche Werte von (t', x') und s potentiell interessante Dinge geschehen, also z.B. Terme im Nenner weg fallen, oder die Phase konstant wird. Dann werden diese Werte von (t', x') und s eingesetzt und alles so weit vereinfacht und genähert – im Rahmen des Erlaubten, ohne das Verhalten für $a \to 0$ zu ändern –, bis die a-Abhängigkeit abgelesen werden kann. Entscheidende Zutaten sind dabei der beschränkte Träger von $\hat{\psi}$ und der schnelle Abfall von ψ.

Hier schon die Ergebnisse

Fall $s = 1, t' = 0 = x'$

Nach (7) erhalten wir mit $s = 1, t' = 0 = x'$

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \right\rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{m^2 + \omega^2(a^{-1}k^2 + a^{-\frac{3}{2}}2k)} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + \omega^2(a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2k)} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k\end{aligned}$$

Da aber $|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2]$ und $k \in [-1, 1]$ ist, ist für hinreichend kleine a (und für genau die interessieren wir uns ja)

$$\left| \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{k\omega^2} \right| \geq \left| \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k + 2k\omega^2} \right|$$

eine integrierbare (im Sinne des Cauchy-Hauptwertes) Majorante für den Integranden.

Warum ist Cauchy-Hauptwert hier erlaubt? Weiter ausführe, warum es diese Majorante tut?

Wir dürfen uns also des Lebesgueschen Konvergenzsatzes bedienen und schreiben

$$\lim_{a \to 0} \left\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{2k\omega^2} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \sim O(a^{\frac{3}{4}}) \tag{8}$$

Für $s = -1$ erhalten wir genau das selbe Ergebniss, da ja der $\omega^2(1-s^2)$-Term im Nenner genauso wieder verschwindet.

Fall $s \neq \pm 1, t' = 0 = x'$

In diesem Fall verschwindet der $\omega^2(1 - s^2)$-Term im Nenner nicht und dementsprechend folgt

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \right\rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{m^2 - \omega^2((1 - s^2) - a^{-1}k^2 - a^{-\frac{3}{2}}2k)} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\ &= \int a^{\frac{5}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2 ks} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k\end{aligned}$$

Analog zum vorigen Teil ist, diesmal sogar ohne den Cauchy-Hauptwert bemühen zu müssen,

$$\left| \frac{2\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} \right| \geq \left| \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2+\omega^2(s^2-1)+a\omega^2k^2+a^{\frac{1}{2}}2\omega^2ks} \right|$$

Überall wo es sein muss $\lim_{a\to 0}$ dazu schreiben, oder sagen dass der Limit überall impliziert ist

dass eine integrierbare Majorante ist (in der Tat ja sogar in $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$) Damit können wir folgende Abschätzung treffen:

$$\lim_{a\to 0} \left\langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{2\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \sim O(a^{\frac{5}{4}})$$

<u>**Fall** $s \neq \pm 1, (t', s') \neq 0$</u>

In diesem Fall benutzen wir wieder die erste Substitution (6) und klammern wie schon in den beiden vorigen Teilen die höchste negative Potenz von a im Nenner aus.

$$\Rightarrow \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^2m^2-\omega^2(1-s^2)+a^{\frac{1}{2}}s\omega k+ak^2}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \tag{9}$$

und da immer noch $0 \notin supp(\psi_1)$ gilt ist ein weiteres mal eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$2\frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \tag{10}$$

In der Tat ist sogar

$$\hat{f}(\omega,k) := \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}}^2) \tag{11}$$

da ψ_1 und ψ_2 getragen sind. Demnach ist die Fourierinverse von $\hat{f}$, $f := \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, also schnell fallend. Damit können wir schließlich abschätzen

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle\right| &= a^{\frac{5}{4}} \left| \int \hat{f}(\omega, k)\; e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \right| \\
&= a^{\frac{5}{4}} \left| f\left(\frac{t'-sx}{a}, \frac{x'}{\sqrt{a}}\right) \right| \leq a^{\frac{5}{4}} C_k \left(1 + \left\| \begin{smallmatrix} (t'-sx')/a \\ x'/\sqrt{a} \end{smallmatrix} \right\| \right)^{-k} \\
&\leq a^{\frac{5}{4}} \frac{C_k}{2} a^{\frac{k}{2}} \left\| \begin{smallmatrix} (t'-sx') \\ x' \end{smallmatrix} \right\|^{-k} \sim O\left(a^{\frac{5/2+k}{2}}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \left|\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle\right| \sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{12}
$$

Fall $s = 1, (t', x') \neq 0$

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder den ersten Ausdruck für $\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle$ aus (6) und sorgen wir auch bisher jedes Mal dafür, dass wir im Nenner nur noch positive Potenzen von a und einen von a unabhängigen Term haben. Dann sieht das ganze so aus:

$$
\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\; \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\; e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^{\frac{3}{2}} m^2 + a^{\frac{1}{2}} k^2 + 2\omega k}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k
$$

wo wir im $\lim_{a\to 0}$ wieder doe a-Potenzen im Nenner weg fallen lassen und auch dieses Mal dafür wieder den Cauchy-Hauptwert bemühen müssen, um den Lebesgueschen Konvergenzsatz benutzen zu dürfen. Weiter geht's:

$$
\begin{aligned}
&= a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\; \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\; e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2\omega k}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \\
&= a^{\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\; e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2k\omega}\, \mathrm{d}k \right\}}_{=:\hat{f}_a(\omega)} \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)}\, \mathrm{d}\omega
\end{aligned} \tag{13}
$$

und um hier weiter zu kommen, schauen wir uns $\hat{f}_a$ genauer an. Sei dazu $\Psi_2(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \psi_2(\omega')\, \mathrm{d}\omega' - \int_{\omega}^{+\infty} \psi_2(\omega')\, \mathrm{d}\omega'$ eine Stammfunktion von ψ_2. Dies ist offenbar C^∞ und beschränkt, da $\hat{\psi}_2 \in C_c^\infty$. Mithilfe von Fourieridentitäten und Substitution können wir nun weiter rechnen:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_a(\omega) &= \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{2k\omega} e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}\, \mathrm{d}\omega \\
&\overset{i)}{=} \int \frac{\hat{\psi}_2(k)}{2k} e^{ik\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}}\, \mathrm{d}\omega \\
&\overset{ii)}{=} \frac{i}{2}\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)
\end{aligned}
$$

Hier wurde in $i)$ einfach $k \to \omega k$ substituiert und im Schritt $ii)$ wurde genutzt, dass $f(x) = \mathrm{sgn}(x) \leftrightarrow \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k}$. Nun stecken wir diese Erkenntnisse in unseren vorigen Ausdruck und erhalten

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle &= \frac{ia^{\frac{3}{4}}}{2} \int \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)\ \hat{\psi}_1(\omega)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \\
&\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right) \qquad ;\text{ für } t' = x' \\
&\sim O\left(a^k\right)\ \forall k \in \mathbb{N} \quad ;\text{ andernfalls}
\end{aligned} \tag{14}
$$

Im letzten Schritt wurde wieder genutzt, dass $\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)\ \hat{\psi}_1(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, und demnach eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

Das analoge Ergebnis erhält man auch für $s = -1$ und $t' = -x'$

Literatur

[1] Gitta Kutyniok und Demetrio Labate. “Resolution of the wavefront set using continuous shearlets”. In: Transactions of the American Mathematical Society 361.05 (2008), S. 2719–2754. URL: https://doi.org/10.1090/s0002-9947-08-04700-4.

[2] Matthew D. Schwartz. Quantum Field Theory and the Standard Model -. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1-107-03473-0.