Jan Lukas krasse Bachelorarbeit

Jan Lukas Bosse*

4. Juni 2018

Hier ist wohl noch etwas zu tun... So eine hübsche Frontseite wäre doch was!

1 Allgemeines Gelaber über Shearlets

Satz 1.1 ($\mathcal{S}_f(a,s,t)$ misst $WF(f)$)
Sei $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ wobei $\mathcal{D}_1 = \{\, (t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1,1] \big|\ |\mathcal{S}_f(a,s,t)| = O(a^k)$ gleichmäßig $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U$ Umgebung von $(t_0, s_0)\,\}$ und $\mathcal{D}_2$ analog für $\psi^{(v)}$

Dann gilt $WF(f)^c = \mathcal{D}$

diesen Satz richtig hin schreiben und ordentlich setzen

Korollar 1.2 (WF(f) misst $sing\ supp(\psi)$)
Sei $\mathcal{R} = \{\, t_0 \in \mathcal{R}^2 \big|\ |\mathcal{S}_f(a,s,t)| = O(a^k)\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U$ Umgebung von $t_0\,\}$

Dann gilt $sing\ supp(\psi)^c = \mathcal{R}$

Stil und Nummerierung für Sätze, Propositionen etc. anpassen

Bemerkung 1.3 (Träger von ψ)
Im Fourierraum ist $\hat{\psi}_{ast}$ gegeben durch

$$\hat{\psi}_{ast}(\xi_1, \xi_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) \right) \tag{1}$$

und es gilt

$$supp(\hat{\psi}) \subset \left\{ \xi \in \hat{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; |\xi_1| \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a} \right], \left| \frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right| \leq \sqrt{a} \right\} \tag{2}$$

*Georg-August Universitt Göttingen

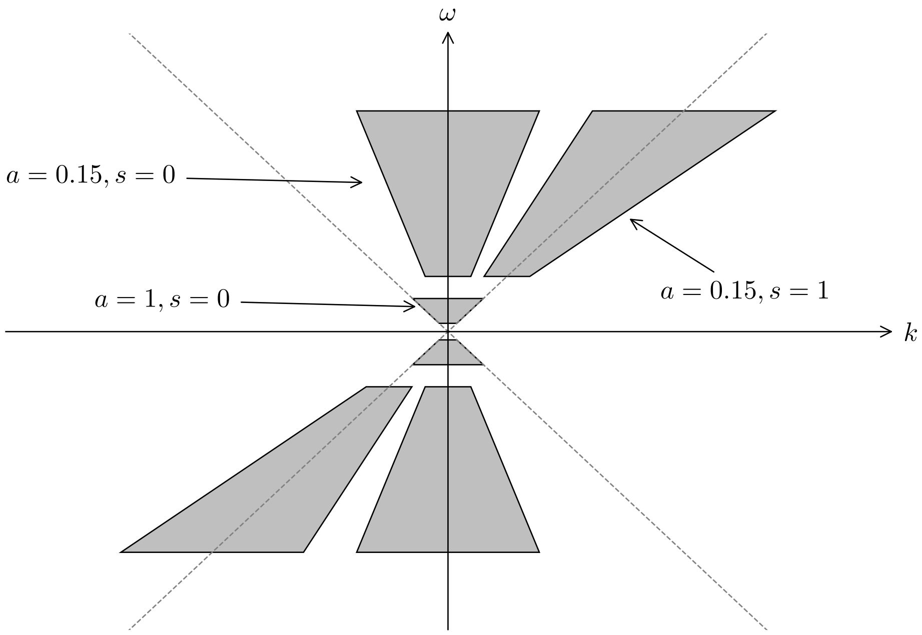

Abbildung 1: Der Träger von $\hat{\psi}_{ast}$ für verschiedene a, s. Man sieht gut, wie $supp(\hat{\psi}_{ast})$ für kleinere a in immer kleineren Kegeln liegt.

2 Zwei nützliche Substitionen für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$

Zunächst werden wir zwei verschiedene Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ im Fourierraum herleiten, welche sich im dann folgenden als nützlich erweisen werden.

Sei also ψ ein Shearlet wie in Korollar 1.3. Sei f die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in $\mathcal{D}\prime(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\mathcal{S}_f(ast)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \psi_{ast}, f \rangle &= \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{f} \right\rangle \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) \right) \hat{f}(\xi) \, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

und nach „entscheren“ und „deskalieren“, also der Substitution

etnscheiden, was mit dem fehlenden Faktor $\frac{1}{(2\pi)^n}$ geschieht

$$\begin{aligned} a\xi_1 &= k_1 \\ a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) &= \frac{k_2}{k_1} \end{aligned} \quad \iff \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{k_1}{a} \\ \xi_2 &= \frac{k_1 s}{a} + a^{-\frac{1}{2}} k_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2 = a^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}k_1 \, \mathrm{d}k_2$$

ergibt sich folgendes für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$:

$$= \iint a^{-\frac{3}{4}} \; \hat{\psi}_1(k_1) \; \hat{\psi}_2\left(\tfrac{k_2}{k_1}\right) \; \hat{f}\left(\tfrac{k_1}{a}, \tfrac{k_1 s}{a} + \tfrac{k_2}{\sqrt{a}}\right) \; e^{-i\frac{k_1}{a}(t_1+t_2 s) - i\frac{k_2 t_2}{\sqrt(a)}} \, \mathrm{d}k_1 \, \mathrm{d}k_2 \tag{3}$$

herausfinden, wie die Gleichungen auch Kapitelnummern erhalten

Alternativ kann auch folgende Substitution

$$\begin{aligned} a\xi_1 &= k_1 \\ a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right) &= k_2 \end{aligned} \qquad \iff \qquad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{k_1}{a} \\ \xi_2 &= \left(a^{\frac{1}{2}} k_2 + s\right) \frac{k_1}{a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2 = a^{-\frac{3}{2}} k_1 \, \mathrm{d}k_1 \, \mathrm{d}k_2$$

gewählt werden, wodurch alle Parameter aus den Argumenten von ψ_1, ψ_2 verschwinden und sich

$$= \iint a^{-\frac{3}{4}} \; k_1 \; \hat{\psi}_1(k_1) \; \hat{\psi}_2(k_2) \; \hat{f}\left(\tfrac{k_1}{a}, k_1\left(a^{-\frac{1}{2}} k_2 + s a^{-1}\right)\right) \; e^{-ik_1\left(\frac{t_1 + s t_2}{a} + \frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}\right)} \, \mathrm{d}k_1 \, \mathrm{d}k_2 \tag{4}$$

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulässig ist, obwohl sie die Oriertierung nicht erhält und nicht keine Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nämlich $\xi_1 = 0$, liegt nicht im Träger von ψ.

Grafik basteln, die *supp* ψ vor und nach der Substitution zeigt.

3 Die Wellenfrontmenge von Δ_m

Die massive Zweipunktfunktion ist die Fouriertransformierte der $1m$-Massenschale positiver Energie:

Quelle dafür zitiesfdren...

$$\Delta_m(t, x) = \int \delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(\omega) e^{-i\omega t + ikx} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k \tag{5}$$

woraus sich $\hat{\Delta}_m$ direkt zu $\delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(\omega)$ ablesen lässt.

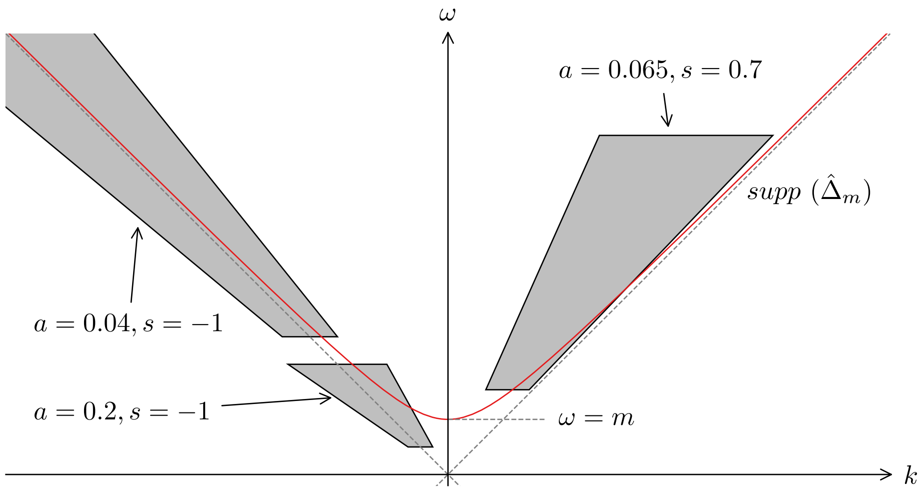

Abbildung 2: Die Träger von $\hat{\Delta}_m$ und $\hat{\psi}_{ast}$. Es ist zu sehen, dass für $a \to 0$ und $s \neq \pm 1$ die Träger schließlich disjunkt sind

Fall $s \neq \pm 1$

Hier gibt es nicht viel zu tun, denn für a klein genug gilt $supp(\hat{\Delta}_m) \cap supp(\hat{\psi}_{ast}) = \varnothing$ wie man Abb. 2 entnehmen kann. Also gilt $\langle \psi_{ast}, \Delta_m \rangle = 0 = O(a^k)\ \forall k$ für a klein genug. Dies gilt für alle $(t', x') \in \mathbb{R}^2$

hier noch blöde Abschätzerei machen, warum das tatsächlich gilt, oder stehen lassen. Oder im Kapitel Shearlets ne Bemerkung machen, warum wir in immer engeren Kegeln landen?

Fall $s = 1$

Intuition Für $s = -1$ schneidet die Diagonale $supp(\hat{\psi}_{ast})$ auf der ganzen Länge. Der Betrag von $\hat{\psi}_{ast}$ skaliert mit $a^{\frac{3}{4}}$ und die Länge von $supp(\hat{\psi}_{ast})$ mit a^{-1}. Also erwarten wir schlimmstenfalls $\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{\Delta}_m \right\rangle = O(a^{-\frac{1}{4}})$. Aber nur wenn die Wellenfronten von $e^{-i\omega t' + ikx'}$ parallel zu der Singularität und damit der Diagonalen liegen. Andernfalls erwarten wir, dass die immer schneller werdenden Oszillationen der Phase sich gegenseitig auslöschen/wegheben.

Fleißige Analysis

$$\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{\Delta}_m \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{k}{\omega}-1\right)\right)\delta(\omega^2-k^2-m^2)\theta(\omega)e^{-i\omega t'+ikx'}d\omega\,\mathrm{d}k$$

$$\begin{aligned}
&\underline{\text{Nullstellen von } \delta:}\\
&\omega^2-k^2-m^2=0 \Leftrightarrow k=\pm\sqrt{\omega^2-m^2}\\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-m^2}};\ \text{wobei nur „+" in } supp(\hat{\psi}_2) \text{ liegt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\omega^2-m^2}}{\omega}-1\right)\right)e^{-i\omega t'+i\sqrt{\omega^2-m^2}x'}\,\mathrm{d}\omega\\
&= a^{\frac{3}{4}}a^{-1} \int \hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2\underbrace{\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{a\omega^2-m^2}}{\omega}-1\right)\right)}_{=\frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{2\omega^2}+O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}e^{-i\frac{\omega}{a}t'+i\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2}-m^2}x'}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

Der Integrand lässt sich nun durch $\hat{\psi}_1(\omega)\left\|\hat{\psi}_2\right\|_\infty$ majorisieren und wir dürfen Lebesgue verwenden um Integral und Grenzwert $a \to 0$ zu vertauschen

$$\begin{aligned}
&= a^{-\frac{1}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2(0)e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)}\\
&= a^{-\frac{1}{4}}\hat{\psi}_2(0)\psi_1\left(\frac{t'-x'}{a}\right)\\
&\sim O\left(a^{-\frac{1}{4}}\right); \quad \text{falls } x'=t'\\
&\sim O\left(a^{k}\right)\ \forall k; \quad \text{sonst}
\end{aligned}$$

Das analoge Ergebnis erhält man mit gleicher Rechnung auch für $s=-1$ und $t'=-x'$ Dies bestätigt das intuitiv erwartete Ergebnis. Insgesamt erhalten wir also für die Wellenfrontmenge:

	$(t',x')=(0,0)$	$t'=x'$	$t'=-x'$	$t'\neq\pm x'$
s = 1	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	a^k
s = -1	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k
$s\neq\pm1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tabelle 1: Konvergenzordnung von $\mathcal{S}_{\Delta_m}(a,s,(t',x'))$ im Limit $a\to 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t',x')

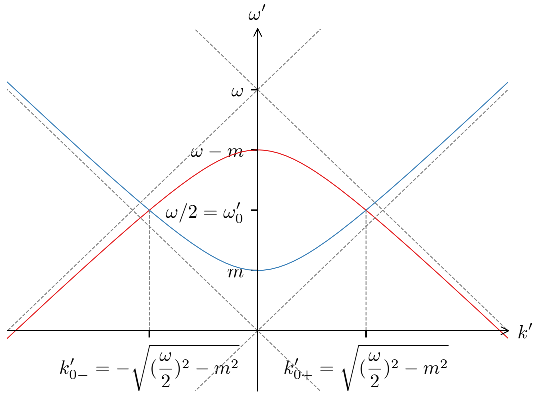

Abbildung 3: Das zu berechnende Integral aus (6) visualisiert

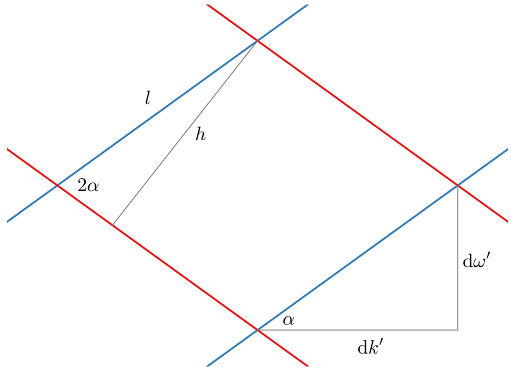

Abbildung 4: Die Kreuzungstelle bei k'_{0+} von ganz nah angeschaut

4 Die Wellenfrontmenge von Δ_m^2

4.1 $\hat{\Delta}^{*2}$ berechnen

Bevor wir die Wellenfrontmenge von Δ_m^2 berechnen können, benötigen wir einen Ausdruck dafür, oder besser noch einen für die Fouriertransformierte davon. Gemäß dem Faltungssatz gilt $\widehat{\Delta_m^2} = \widehat{\Delta}_m * \widehat{\Delta}_m = \widehat{\Delta}_m^{*2}$. Wir müssen also die Faltung von $\widehat{\Delta}_m$ mit sich selber ausrechnen.

$$\widehat{\Delta_m^{*2}}(\omega, k) = \int \theta(\omega')\delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2)\theta(\omega - \omega')\delta((\omega - \omega')^2 - (k - k')^2 - m^2)\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}k' \quad (6)$$

An Abbildung 3 sehen wir schon, dass das Faltungsintegral nur dann ungleich null ist, wenn (ω, k) in der $2m$-Massenschale liegen. Es ist also insbesondere $\omega > 0$. Da Δ_m Poincare-invariant ist, sind Δ_m^2 und $\widehat{\Delta_m^{*2}}$ es auch. Es genügt also $\widehat{\Delta_m^{*2}}$ für $k = 0$ und positive ω zu berechnen. Alle anderen Werte holen wir uns dann aus der Poincare-Invarianz.

Um nun das Integral über zwei sich schneidende lineare[1] δ-Distributionen zu berechnen bedienen wir uns eines Physikertricks und stellen uns die δ-Distribution als Grenzwert $(h \to 0)$ einer $\frac{1}{h}$-hohen und h breiten Rechtecksfunktion vor. Dann ist das Integral über die sich schneidenden Rechteckfunktionen proportional zu der Schnittfläche und damit zu $l \cdot h$ in Abb. 4. Außerdem schneiden sich die beiden Hyperbeln für $\omega \to +\infty$ in einem rechten Winkel, das Faltungsintegral ergibt also 2.

Wie erklärt man das besser, ohne an Anschaulichkeit oder Rigorosität zu verlieren

[1]Linear in dem Sinne, dass die Distribution entlang einer Linie getragen ist. Nicht das es eine lineare Distribution ist

Aus Abb. 4 lesen wir ab:

$$\tan(\alpha) = \frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'} \quad \text{und} \quad \frac{h}{l} = \sin(2\alpha)$$

$$\Rightarrow l = \frac{h}{\sin\left(2\arctan\left(\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'}\right)\right)} = \frac{h\left(\left(\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'}\right)^2 + 1\right)}{2\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'}} \tag{7}$$

außerdem gilt

$$\omega' = \sqrt{k'^2 + m^2} \implies \frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'} = \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + m^2}} \tag{8}$$

Wenn wir nun (7) und (8) sowie die vorhergehden Gedanken kombinieren erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta_m}^{*2}(\omega, 0) &= C\frac{(\mathrm{d}\omega'/\,\mathrm{d}k')^2\Big|_{k_0'} + 1}{\mathrm{d}\omega'/\,\mathrm{d}k'|_{k_0'}} = C\frac{\sqrt{k_0'^2 + m^2}(2k_0'^2 + m^2)}{2k_0'(k_0^2 + m^2)} \\
&= C\frac{\sqrt{\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2}(\omega^2 - 4m^2 + m^2)}{\sqrt{\omega^2 - 4m^2}(\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2)} \\
&= C\frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} = 2\frac{\omega^2 - 3m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}}
\end{aligned}$$

5 Berechnen von $WF(G_F)$

5.1 Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$

Ab jetzt werden wir der Namenskonvention der Physiker in der SRT folgen und unsere Ortsraumvariablen mit $x = (t, x)$ und unsere Impulsraumvariablen mit $\xi = (\omega, k)$ bezeichnen sowie konsequenterweise das Minkowskiskalarprodukt $x \cdot \xi = \omega t - kx$ verwenden. Des weiteren wird der Verschiebungsparameter mit $t = (t', x')$ bezeichnet.

Die massive skalare Zweipunktfunktion bzw. der Feynmanpropagator im Impulsraum ist dann gegeben durch (Schwartz [1], (6.34))

$$\hat{G}_F(\omega, k) = \frac{1}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \tag{9}$$

Setzen wir dies in unsere Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ aus (3) bzw. (4) ergibt sich, unter Verwendung des Minkowskiskalaprodukts,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat\psi_{ast}, \hat G_F \right\rangle &= \int \hat\psi_{ast}(\omega,t)\ \hat G_F(\omega,t)\ \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat\psi_1(a\omega)\ \hat\psi_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\frac{k}{\omega}-s\right)\ e^{-i\omega t'+ikx'}}{m^2-\omega^2+k^2-i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat\psi_1(\omega)\ \hat\psi_2\left(\frac{k}{w}\right)\ e^{-i\omega\frac{t'-sx'}{a}+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2-\left(\frac{\omega}{a}\right)^2+\left(\frac{\omega s}{a}+\frac{k}{\sqrt{a}}\right)^2-i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \iint\limits_{\substack{\omega\in[-2,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},2]\\ \left|\frac{k}{2}-s\right|\le\sqrt{ax}}} \frac{\hat\psi_1(\omega)\ \hat\psi_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\frac{t'-sx'}{a}+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2+a^{-2}\omega^2(s^2-1)+a^{-\frac{3}{2}}2s\omega k+a^{-1}k-i0^+}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Integral hübsch machen. Größeres Integralzeichen?

und mit der anderen Substitution analog

$$
\left\langle \hat\psi_{ast}, \hat G_F \right\rangle = a^{-\frac{3}{4}} \iint\limits_{\substack{|\omega|\,\in\,[\frac{1}{2},2]\\ k\,\in\,[-1,1]}} \frac{\omega\ \hat\psi_1(\omega)\ \hat\psi_2(k) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}+\frac{kx'}{\sqrt{a}}\right)}}{m^2-\omega^2(a^{-2}(1-s^2)-a^{-1}k^2-2ksa^{-\frac{3}{2}})}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \tag{11}
$$

wobei sich die Integrationsbereiche aus den Forderungen an den Träger von ψ (vgl. (2)) ergeben.

Nach Satz (1.1) genügt es zu bestimmen, an welchen Punkten (t', x') und in welche Richtungen s $\mathcal{S}_f(a, s, (t', x'))$ nicht schnell-fallend in a^{-1} ist, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen. Da wir keine explizite erzeugende Funktion ψ angegeben haben, werden wir uns dabei Argumente bedienen, die alleine auf den allgemeinen Eigenschaften von ψ_{ast} beruhen, aber nicht einer expliziten Form.

In Textform beschreiben, was die grobe Strategie ist, also wie der Integrand vernünfitg vereinfacht wird und welche Eigenschaften von ψ wie eingehen.

Das allgemeine Vorgehen wird dabei folgendes sein: Die Ausdrücke in (10) und (11) genau anstarren, um zu sehen für welche Werte von (t', x') und s potentiell interessante Dinge geschehen, also z.B. Terme im Nenner weg fallen, oder die Phase konstant wird. Dann werden diese Werte von (t', x') und s eingesetzt und alles so weit vereinfacht und genähert – im Rahmen des Erlaubten, ohne das Verhalten für $a \to 0$ zu ändern –, bis die a-Abhängigkeit abgelesen werden kann. Entscheidende Zutaten sind dabei der beschränkte Träger von $\hat\psi$ und der schnelle Abfall von ψ.

Hier schon die Ergebnisse als Satz angeben, und dann Beweis

Fall $s = 1, t' = 0 = x'$

Nach (11) erhalten wir mit $s = 1, t' = 0 = x'$

$$\left\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \right\rangle = \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{m^2 + \omega^2(a^{-1}k^2 + a^{-\frac{3}{2}}2k)} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k$$
$$= \int a^{\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + \omega^2(a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2k)} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k$$

Da aber $|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2]$ und $k \in [-1, 1]$ ist, ist für hinreichend kleine a (und für genau die interessieren wir uns ja)

$$\left| \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{k\omega^2} \right| \geq \left| \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k + 2k\omega^2} \right|$$

eine integrierbare (im Sinne des Cauchy-Hauptwertes) Majorante für den Integranden.

Wir dürfen uns also des Lebesgueschen Konvergenzsatzes bedienen und schreiben

Warum ist Cauchy-Hauptwert hier erlaubt? Weiter ausführe, warum es diese Majorante tut?

$$\lim_{a \to 0} \left\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{2k\omega^2} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \sim O(a^{\frac{3}{4}}) \tag{12}$$

Für $s = -1$ erhalten wir genau das selbe Ergebniss, da ja der $\omega^2(1-s^2)$-Term im Nenner genauso wieder verschwindet.

Fall $s \neq \pm 1, t' = 0 = x'$

In diesem Fall verschwindet der $\omega^2(1-s^2)$-Term im Nenner nicht und dementsprechend folgt

$$\left\langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \right\rangle = \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{m^2 - \omega^2((1-s^2) - a^{-1}k^2 - a^{-\frac{3}{2}}2k)} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k$$
$$= \int a^{\frac{5}{4}} \frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2 + \omega^2(s^2-1) + a\omega^2k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2 ks} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k$$

Analog zum vorigen Teil ist, diesmal sogar ohne den Cauchy-Hauptwert bemühen zu müssen,

Überall wo es sein muss $\lim_{a\to 0}$ dazu schreiben, oder sagen dass der Limit überall impliziert ist

$$\left|\frac{2\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)}\right| \geq \left|\frac{\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2+\omega^2(s^2-1)+a\omega^2k^2+a^{\frac{1}{2}}2\omega^2ks}\right|$$

dass eine integrierbare Majorante ist (in der Tat ja sogar in $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$) Damit können wir folgende Abschätzung treffen:

$$\lim_{a\to 0}\left\langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F\right\rangle = a^{\frac{5}{4}}\int \frac{2\omega\ \hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \sim O(a^{\frac{5}{4}})$$

<u>**Fall** $s \neq \pm 1, (t', s') \neq 0$</u>

In diesem Fall benutzen wir wieder die erste Substitution (10) und klammern wie schon in den beiden vorigen Teilen die höchste negative Potenz von a im Nenner aus.

$$\Rightarrow\ \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F\right\rangle = a^{\frac{5}{4}}\int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^2m^2-\omega^2(1-s^2)+a^{\frac{1}{2}}s\omega k+ak^2}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \qquad (13)$$

und da immer noch $0 \notin supp(\psi_1)$ gilt ist ein weiteres mal eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$2\frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \qquad (14)$$

In der Tat ist sogar

$$\hat{f}(\omega,k) := \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2-1)} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}}^2) \qquad (15)$$

da ψ_1 und ψ_2 getragen sind. Demnach ist die Fourierinverse von $\hat{f}$, $f := \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, also schnell fallend. Damit können wir schließlich abschätzen

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle\right| &= a^{\frac{5}{4}} \left| \int \hat{f}(\omega, k)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \right| \\
&= a^{\frac{5}{4}} \left| f\left(\frac{t'-sx}{a}, \frac{x'}{\sqrt{a}}\right) \right| \leq a^{\frac{5}{4}} C_k \left(1 + \left\| {}^{(t'-sx')/a}_{x'/\sqrt{a}} \right\|\right)^{-k} \\
&\leq a^{\frac{5}{4}} \frac{C_k}{2} a^{\frac{k}{2}} \left\| {}^{(t'-sx')}_{x'} \right\|^{-k} \sim O\left(a^{\frac{5/2+k}{2}}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \left|\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle\right| \sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{16}
$$

Fall $\underline{s = 1, (t', x') \neq 0}$

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder den ersten Ausdruck für $\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle$ aus (10) und sorgen wir auch bisher jedes Mal dafür, dass wir im Nenner nur noch positive Potenzen von a und einen von a unabhängigen Term haben. Dann sieht das ganze so aus:

$$
\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^{\frac{3}{2}} m^2 + a^{\frac{1}{2}} k^2 + 2\omega k}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k
$$

wo wir im $\lim_{a \to 0}$ wieder doe a-Potenzen im Nenner weg fallen lassen und auch dieses Mal dafür wieder den Cauchy-Hauptwert bemühen müssen, um den Lebesgueschen Konvergenzsatz benutzen zu dürfen. Weiter geht's:

$$
\begin{aligned}
&= a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\ \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)+ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2\omega k}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \\
&= a^{\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)\ e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2k\omega}\, \mathrm{d}k \right\}}_{=:\hat{f}_a(\omega)} \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)}\, \mathrm{d}\omega
\end{aligned} \tag{17}
$$

und um hier weiter zu kommen, schauen wir uns $\hat{f}_a$ genauer an. Sei dazu $\Psi_2(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \psi_2(\omega')\, \mathrm{d}\omega' - \int_{\omega}^{+\infty} \psi_2(\omega')\, \mathrm{d}\omega'$ eine Stammfunktion von ψ_2. Dies ist offenbar C^∞ und beschränkt, da $\hat{\psi}_2 \in C_c^\infty$. Mithilfe von Fourieridentitäten und Substitution können wir nun weiter rechnen:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_a(\omega) &= \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{2k\omega} e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}\omega \\
&\overset{i)}{=} \int \frac{\hat{\psi}_2(k)}{2k} e^{ik\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}\omega \\
&\overset{ii)}{=} \frac{i}{2}\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)
\end{aligned}
$$

Hier wurde in $i)$ einfach $k \to \omega k$ substituiert und im Schritt $ii)$ wurde genutzt, dass $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \leftrightarrow \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k}$. Nun stecken wir diese Erkenntnisse in unseren vorigen Ausdruck und erhalten

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle &= \frac{ia^{\frac{3}{4}}}{2} \int \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)\ \hat{\psi}_1(\omega)\ e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\
&\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right) \qquad ;\text{ für } t' = x' \\
&\sim O\left(a^{k}\right)\ \forall k \in \mathbb{N} \quad ;\text{ andernfalls}
\end{aligned} \tag{18}
$$

Im letzten Schritt wurde wieder genutzt, dass $\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)\ \hat{\psi}_1(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, und demnach eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

Das analoge Ergebnis erhält man auch für $s = -1$ und $t' = -x'$

Literatur

[1] Matthew D. Schwartz. Quantum Field Theory and the Standard Model -. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1-107-03473-0.