

Berechnen der Wellenfrontmenge der massiven Zweipunktfunktion mittels Shearlets

Jan Lukas Bosse*

22. Mai 2018

Im folgenden werden wir die Wellenfrontmenge der massiven Zweipunktfunktionen mittels der Methoden von Kutyniok und Labate [1] ausrechnen.

1 Allgemeines Gelaber über Shearlets

Satz 1.1 ($\mathcal{S}_f(a, s, t)$ misst $WF(f)$)

Sei $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ wobei $\mathcal{D}_1 = \{ (t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \mid |\mathcal{S}_f(a, s, t)| = O(a^k) \text{ gleichmäßig } \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } (t_0, s_0) \}$ und \mathcal{D}_2 analog für $\psi^{(v)}$

Dann gilt $WF(f)^c = \mathcal{D}$

Korollar 1.2 ($WF(f)$ misst $\text{sing supp}(\psi)$)

Sei $\mathcal{R} = \{ t_0 \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathcal{S}_f(a, s, t)| = O(a^k) \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } t_0 \}$

Dann gilt $\text{sing supp}(\psi)^c = \mathcal{R}$

Bemerkung 1.3 (Träger von ψ)

Im Fourierraum ist $\hat{\psi}_{ast}$ gegeben durch

$$\hat{\psi}_{ast}(\xi_1, \xi_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2\left(a^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s\right)\right) \quad (1)$$

und es gilt

diesen Satz richtig hin schreiben und ordentlich setzen

Stil und Nummerierung für Sätze, Propositionen etc. anpassen

*Georg-August Universität Göttingen

$$\text{supp}(\hat{\psi}) \subset \left\{ \xi \in \hat{\mathbb{R}}^2 \mid |\xi_1| \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right], \left| \frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right| \leq \sqrt{a} \right\} \quad (2)$$

2 Allgemeine Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$

Zunächst werden wir zwei verschiedene Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ im Fourierraum herleiten, welche sich im dann folgenden als nützlich erweisen werden.

Sei also ψ ein Shearlet wie in Korollar 1.3. Sei f die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\mathcal{S}_f(ast)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \psi_{ast}, f \rangle &= \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{f} \rangle \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) \right) \hat{f}(\xi) \, d\xi \end{aligned}$$

und nach „entscheren“ und „deskalisieren“, also der Substitution

$$\begin{aligned} a\xi_1 = k_1 & \iff \xi_1 = \frac{k_1}{a} \\ a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) = \frac{k_2}{k_1} & \iff \xi_2 = \frac{k_1 s}{a} + a^{-\frac{1}{2}} k_2 \\ \Rightarrow d\xi_1 d\xi_2 &= a^{-\frac{3}{2}} dk_1 dk_2 \end{aligned}$$

entscheiden,
was mit
dem
fehlenden
Faktor
 $\frac{1}{(2\pi)^n}$
geschieht

ergibt sich folgendes für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$:

$$= \iint a^{-\frac{3}{4}} \hat{\psi}_1(k_1) \hat{\psi}_2 \left(\frac{k_2}{k_1} \right) \hat{f} \left(\frac{k_1}{a}, \frac{k_1 s}{a} + \frac{k_2}{\sqrt{a}} \right) e^{-i \frac{k_1}{a} (t_1 + t_2 s) - i \frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}} dk_1 dk_2 \quad (3)$$

Alternativ kann auch folgende Substitution

$$\begin{aligned} a\xi_1 = k_1 & \iff \xi_1 = \frac{k_1}{a} \\ a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) = k_2 & \iff \xi_2 = \left(a^{\frac{1}{2}} k_2 + s \right) \frac{k_1}{a} \\ \Rightarrow d\xi_1 d\xi_2 &= a^{-\frac{3}{2}} k_1 dk_1 dk_2 \end{aligned}$$

herausfinden,
wie die
Gleichun-
gen auch
Kapitel-
nummern
erhalten

gewählt werden, wodurch alle Parameter aus den Argumenten von ψ_1, ψ_2 verschwinden und sich

$$= \iint a^{-\frac{3}{4}} k_1 \hat{\psi}_1(k_1) \hat{\psi}_2(k_2) \hat{f}\left(\frac{k_1}{a}, k_1 \left(a^{-\frac{1}{2}} k_2 + s a^{-1}\right)\right) e^{-ik_1 \left(\frac{t_1 + s t_2}{a} + \frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}\right)} dk_1 dk_2 \quad (4)$$

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulässig ist, obwohl sie die Orientierung nicht erhält und nicht eine Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nämlich $\xi_1 = 0$, liegt nicht im Träger von ψ .

2.1 Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$

Ab jetzt werden wir der Namenskonvention der Physiker in der SRT folgen und unsere Ortsraumvariablen mit $x = (t, x)$ und unsere Impulsraumvariablen mit $\xi = (\omega, k)$ bezeichnen sowie konsequenterweise das Minkowskiskalarprodukt $x \cdot \xi = \omega t - kx$ verwenden. Des weiteren wird der Verschiebungsparameter mit $t = (t', x')$ bezeichnet.

Die massive skalare Zweipunktfunktion bzw. der Feynmanpropagator im Impulsraum ist dann gegeben durch (Schwartz [2], (6.34))

$$\hat{G}_F(\omega, k) = \frac{1}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \quad (5)$$

Setzen wir dies in unsere Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ aus (3) bzw. (4) ergibt sich, unter Verwendung des Minkowskiskalaprodukts,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle &= \int \hat{\psi}_{ast}(\omega, t) \hat{G}_F(\omega, t) d\omega dk \\ &= a^{\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}} \frac{k}{\omega} - s\right) e^{-i\omega t' + ikx'}}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} d\omega dk \\ &= a^{-\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{\omega s}{a} + \frac{k}{\sqrt{a}}\right)^2 - i0^+} d\omega dk \\ &= a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{\omega \in [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2] \\ |\frac{k}{2} - s| \leq \sqrt{ax}}} \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 + a^{-2}\omega^2(s^2 - 1) + a^{-\frac{3}{2}}2s\omega k + a^{-1}k - i0^+} d\omega dk \quad (6) \end{aligned}$$

Grafik bas-teln, die *supp* ψ vor und nach der Substitution zeigt.

und mit der anderen Substitution analog

$$\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2] \\ k \in [-1, 1]}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega \left(\frac{t'-sx'}{a} + \frac{kx'}{\sqrt{a}} \right)}}{m^2 - \omega^2(a^{-2}(1-s^2) - a^{-1}k^2 - 2ksa^{-\frac{3}{2}})} d\omega dk \quad (7)$$

Integral
hübsch
machen.
Größeres
Integral-
zeichen?

wobei sich die Integrationsbereiche aus den Forderungen an den Träger von ψ (vgl. (2)) ergeben.

3 Berechnen von $WF(G_F)$

Nach Satz (1.1) genügt es zu bestimmen, an welchen Punkten (t', x') und in welche Richtungen s $\mathcal{S}_f(a, s, (t', x'))$ nicht schnell-fallend in a^{-1} ist, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen. Da wir keine explizite erzeugende Funktion ψ angegeben haben, werden wir uns dabei Argumente bedienen, die alleine auf den allgemeinen Eigenschaften von ψ_{ast} beruhen, aber nicht einer expliziten Form.

Das allgemeine Vorgehen wird dabei folgendes sein: Die Ausdrücke in (6) und (7) genau anstarren, um zu sehen für welche Werte von (t', x') und s potentiell interessante Dinge geschehen, also z.B. Terme im Nenner weg fallen, oder die Phase konstant wird. Dann werden diese Werte von (t', x') und s eingesetzt und alles so weit vereinfacht und genähert – im Rahmen des Erlaubten, ohne das Verhalten für $a \rightarrow 0$ zu ändern –, bis die a -Abhängigkeit abgelesen werden kann. Entscheidende Zutaten sind dabei der beschränkte Träger von $\hat{\psi}$ und der schnelle Abfall von ψ .

Fall $s = 1, t' = 0 = x'$

Nach (7) erhalten wir mit $s = 1, t' = 0 = x'$

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \right\rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 + \omega^2(a^{-1}k^2 + a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + \omega^2(a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2k)} d\omega dk \end{aligned}$$

Da aber $|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2]$ und $k \in [-1, 1]$ ist, ist für hinreichend kleine a (und für genau die interessieren wir uns ja)

In Text-
form be-
schrei-
ben, was
die grobe
Strategie
ist, also
wie der
Integrand
vernünftig
verein-
facht wird
und wel-
che Eigen-
schaften
von ψ wie
eingehen.

Hier schon
die Er-
gebnisse
als Satz
angeben,
und dann
Beweis
hinschrei-
ben?

Bemerkung
einfügen,
warum
dass auch
ziemlich
unmöglich
ist

$$\left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{k\omega^2} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}\omega^2k + 2k\omega^2} \right|$$

eine integrierbare (im Sinne des Cauchy-Hauptwertes) Majorante für den Integranden.

Wir dürfen uns also des Lebesgueschen Konvergenzsatzes bedienen und schreiben

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{2k\omega^2} d\omega dk \sim O(a^{\frac{3}{4}}) \quad (8)$$

Für $s = -1$ erhalten wir genau das selbe Ergebniss, da ja der $\omega^2(1-s^2)$ -Term im Nenner genauso wieder verschwindet.

Fall $s \neq \pm 1, t' = 0 = x'$

In diesem Fall verschwindet der $\omega^2(1-s^2)$ -Term im Nenner nicht und dementsprechend folgt

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 - \omega^2((1-s^2) - a^{-1}k^2 - a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{5}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2ks} d\omega dk \end{aligned}$$

Analog zum vorigen Teil ist, diesmal sogar ohne den Cauchy-Hauptwert bemühen zu müssen, folgt

$$\left| \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2ks} \right|$$

dass eine integrierbare Majorante ist (in der Tat ja sogar in $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$) Damit können wir folgende Abschätzung treffen:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} d\omega dk \sim O(a^{\frac{5}{4}})$$

Warum ist Cauchy-Hauptwert hier erlaubt? Weiter ausführe, warum es diese Majorante tut?

Überall wo es sein muss $\lim_{a \rightarrow 0}$ dazu schreiben, oder sagen dass der Limit überall impliziert ist

Fall $s \neq \pm 1, (t', s') \neq 0$

In diesem Fall benutzen wir wieder die erste Substitution (6) und klammern wie schon in den beiden vorigen Teilen die höchste negative Potenz von a im Nenner aus.

$$\Rightarrow \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^2 m^2 - \omega^2(1-s^2) + a^{\frac{1}{2}} s \omega k + a k^2} d\omega dk \quad (9)$$

und da immer noch $0 \notin \text{supp}(\psi_1)$ gilt ist ein weiteres mal eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$2 \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2 - 1)} \quad (10)$$

In der Tat ist sogar

$$\hat{f}(\omega, k) := \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2 - 1)} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}}^2) \quad (11)$$

da ψ_1 und ψ_2 getragen sind. Demnach ist die Fourierinverse von \hat{f} , $f := \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, also schnell fallend. Damit können wir schließlich abschätzen

$$\begin{aligned} \left| \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle \right| &= a^{\frac{5}{4}} \left| \int \hat{f}(\omega, k) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega dk \right| \\ &= a^{\frac{5}{4}} \left| f\left(\frac{t'-sx}{a}, \frac{x'}{\sqrt{a}}\right) \right| \leq a^{\frac{5}{4}} C_k \left(1 + \left\| \frac{(t'-sx')/a}{x'/\sqrt{a}} \right\| \right)^{-k} \\ &\leq a^{\frac{5}{4}} \frac{C_k}{2} a^{\frac{k}{2}} \left\| \frac{(t'-sx')}{x'} \right\|^{-k} \sim O\left(a^{\frac{5/2+k}{2}}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \left| \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle \right| &\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (12)$$

Fall $s = 1, (t', s') \neq 0$

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder den ersten Ausdruck für $\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle$ aus (6) und sorgen wir auch bisher jedes Mal dafür, dass wir im Nenner nur noch positive Potenzen von a und einen von a unabhängigen Term haben. Dann sieht das ganze so aus:

$$\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2\omega k} d\omega dk$$

wo wir im $\lim_{a \rightarrow 0}$ wieder die a -Potenzen im Nenner weglassen lassen und auch dieses Mal dafür wieder den Cauchy-Hauptwert bemühen müssen, um den Lebesgueschen Konvergenzsatz benutzen zu dürfen. Weiter geht's:

$$\begin{aligned} &= a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2\omega k} d\omega dk \\ &= a^{\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2k\omega} dk \right\}}_{=: \hat{f}_a(\omega)} \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} d\omega \end{aligned} \quad (13)$$

und um hier weiter zu kommen, schauen wir uns \hat{f}_a genauer an. Sei dazu $\Psi_2(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \psi_2(\omega') d\omega' - \int_{\omega}^{+\infty} \psi_2(\omega') d\omega'$ eine Stammfunktion von ψ_2 . Dies ist offenbar C^∞ und beschränkt, da $\hat{\psi}_2 \in C_c^\infty$. Mithilfe von Fourieridentitäten und Substitution können wir nun weiter rechnen:

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\omega) &= \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{2k\omega} e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega \\ &\stackrel{i)}{=} \int \frac{\hat{\psi}_2(k)}{2k} e^{ik\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}} d\omega \\ &\stackrel{ii)}{=} \frac{i}{2} \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \end{aligned}$$

Hier wurde in $i)$ einfach $k \rightarrow \omega k$ substituiert und im Schritt $ii)$ wurde genutzt, dass $f(x) = \text{sgn}(x) \leftrightarrow \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k}$. Nun stecken wir diese Erkenntnisse in unseren vorigen Ausdruck und erhalten

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle &= \frac{ia^{\frac{3}{4}}}{2} \int \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} d\omega dk \\ &\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right) \quad ; \text{ für } t' = x' \\ &\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad ; \text{ andernfalls} \end{aligned} \quad (14)$$

Im letzten Schritt wurde wieder genutzt, dass $\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \hat{\psi}_1(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, und demnach eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

Das analoge Ergebnis erhält man auch für $s = -1$ und $t' = -x'$

Literatur

- [1] Gitta Kutyniok und Demetrio Labate. “Resolution of the wavefront set using continuous shearlets”. In: Transactions of the American Mathematical Society 361.05 (2008), S. 2719–2754. URL: <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-08-04700-4>.
- [2] Matthew D. Schwartz. Quantum Field Theory and the Standard Model -. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1-107-03473-0.