

# Berechnen der Wellenfrontmenge der massiven Zweipunktfunktion mittels Shearlets

Jan Lukas Bosse\*

27. Mai 2018

Im folgenden werden wir die Wellenfrontmenge der massiven Zweipunktfunktionen mittels der Methoden von Kutyniok und Labate [1] ausrechnen.

## 1 Allgemeines Gelaber über Shearlets

**Satz 1.1** ( $\mathcal{S}_f(a, s, t)$  misst  $WF(f)$ )

Sei  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$  wobei  $\mathcal{D}_1 = \{ (t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \mid |\mathcal{S}_f(a, s, t)| = O(a^k) \text{ gleichmäßig } \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } (t_0, s_0) \}$  und  $\mathcal{D}_2$  analog für  $\psi^{(v)}$

Dann gilt  $WF(f)^c = \mathcal{D}$

**Korollar 1.2** ( $WF(f)$  misst  $\text{sing supp}(\psi)$ )

Sei  $\mathcal{R} = \{ t_0 \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathcal{S}_f(a, s, t)| = O(a^k) \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in U \text{ Umgebung von } t_0 \}$

Dann gilt  $\text{sing supp}(\psi)^c = \mathcal{R}$

**Bemerkung 1.3** (Träger von  $\psi$ )

Im Fourierraum ist  $\hat{\psi}_{ast}$  gegeben durch

$$\hat{\psi}_{ast}(\xi_1, \xi_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2 \left( a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) \right) \quad (1)$$

und es gilt

diesen Satz richtig hin schreiben und ordentlich setzen

Stil und Nummerierung für Sätze, Propositionen etc. anpassen

---

\*Georg-August Universität Göttingen

$$\text{supp}(\hat{\psi}) \subset \left\{ \xi \in \hat{\mathbb{R}}^2 \mid |\xi_1| \in \left[ \frac{1}{2}, 2 \right], \left| \frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right| \leq \sqrt{a} \right\} \quad (2)$$

## 2 Allgemeine Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$

Zunächst werden wir zwei verschiedene Ausdrücke für  $\langle \psi_{ast}, f \rangle$  im Fourierraum herleiten, welche sich im dann folgenden als nützlich erweisen werden.

Sei also  $\psi$  ein Shearlet wie in Korollar 1.3. Sei  $f$  die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ . Dann ist  $\mathcal{S}_f(ast)$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \psi_{ast}, f \rangle &= \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{f} \rangle \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\xi \cdot t} \hat{\psi}_1(a\xi_1) \hat{\psi}_2 \left( a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) \right) \hat{f}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

und nach „entscheren“ und „deskalisieren“, also der Substitution

$$\begin{aligned} a\xi_1 = k_1 & \iff \xi_1 = \frac{k_1}{a} \\ a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) = \frac{k_2}{k_1} & \iff \xi_2 = \frac{k_1 s}{a} + a^{-\frac{1}{2}} k_2 \\ \Rightarrow d\xi_1 d\xi_2 &= a^{-\frac{3}{2}} dk_1 dk_2 \end{aligned}$$

entscheiden,  
was mit  
dem  
fehlenden  
Faktor  
 $\frac{1}{(2\pi)^n}$   
geschieht

ergibt sich folgendes für  $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ :

$$= \iint a^{-\frac{3}{4}} \hat{\psi}_1(k_1) \hat{\psi}_2 \left( \frac{k_2}{k_1} \right) \hat{f} \left( \frac{k_1}{a}, \frac{k_1 s}{a} + \frac{k_2}{\sqrt{a}} \right) e^{-i \frac{k_1}{a} (t_1 + t_2 s) - i \frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}} dk_1 dk_2 \quad (3)$$

Alternativ kann auch folgende Substitution

$$\begin{aligned} a\xi_1 = k_1 & \iff \xi_1 = \frac{k_1}{a} \\ a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} - s \right) = k_2 & \iff \xi_2 = \left( a^{\frac{1}{2}} k_2 + s \right) \frac{k_1}{a} \\ \Rightarrow d\xi_1 d\xi_2 &= a^{-\frac{3}{2}} k_1 dk_1 dk_2 \end{aligned}$$

herausfinden,  
wie die  
Gleichun-  
gen auch  
Kapitel-  
nummern  
erhalten

gewählt werden, wodurch alle Parameter aus den Argumenten von  $\psi_1, \psi_2$  verschwinden und sich

$$= \iint a^{-\frac{3}{4}} k_1 \hat{\psi}_1(k_1) \hat{\psi}_2(k_2) \hat{f}\left(\frac{k_1}{a}, k_1 \left(a^{-\frac{1}{2}} k_2 + s a^{-1}\right)\right) e^{-ik_1 \left(\frac{t_1 + s t_2}{a} + \frac{k_2 t_2}{\sqrt{a}}\right)} dk_1 dk_2 \quad (4)$$

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulässig ist, obwohl sie die Orientierung nicht erhält und nicht eine Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nämlich  $\xi_1 = 0$ , liegt nicht im Träger von  $\psi$ .

## 2.1 Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$

Ab jetzt werden wir der Namenskonvention der Physiker in der SRT folgen und unsere Ortsraumvariablen mit  $x = (t, x)$  und unsere Impulsraumvariablen mit  $\xi = (\omega, k)$  bezeichnen sowie konsequenterweise das Minkowskiskalarprodukt  $x \cdot \xi = \omega t - kx$  verwenden. Des weiteren wird der Verschiebungsparameter mit  $t = (t', x')$  bezeichnet.

Die massive skalare Zweipunktfunktion bzw. der Feynmanpropagator im Impulsraum ist dann gegeben durch (Schwartz [2], (6.34))

$$\hat{G}_F(\omega, k) = \frac{1}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \quad (5)$$

Setzen wir dies in unsere Ausdrücke für  $\langle \psi_{ast}, f \rangle$  aus (3) bzw. (4) ergibt sich, unter Verwendung des Minkowskiskalaprodukts,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \rangle &= \int \hat{\psi}_{ast}(\omega, t) \hat{G}_F(\omega, t) d\omega dk \\ &= a^{\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}} \frac{k}{\omega} - s\right) e^{-i\omega t' + ikx'}}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} d\omega dk \\ &= a^{-\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{\omega s}{a} + \frac{k}{\sqrt{a}}\right)^2 - i0^+} d\omega dk \\ &= a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{\omega \in [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2] \\ |\frac{k}{2} - s| \leq \sqrt{ax}}} \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 + a^{-2}\omega^2(s^2 - 1) + a^{-\frac{3}{2}}2s\omega k + a^{-1}k - i0^+} d\omega dk \quad (6) \end{aligned}$$

Grafik bas-teln, die *supp*  $\psi$  vor und nach der Substitution zeigt.

und mit der anderen Substitution analog

$$\left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2] \\ k \in [-1, 1]}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega \left( \frac{t'-sx'}{a} + \frac{kx'}{\sqrt{a}} \right)}}{m^2 - \omega^2(a^{-2}(1-s^2) - a^{-1}k^2 - 2ksa^{-\frac{3}{2}})} d\omega dk \quad (7)$$

wobei sich die Integrationsbereiche aus den Forderungen an den Träger von  $\psi$  (vgl. (2)) ergeben.

### 3 Berechnen von $WF(G_F)$

Nach Satz (1.1) genügt es zu bestimmen, an welchen Punkten  $(t', x')$  und in welche Richtungen  $s$   $\mathcal{S}_f(a, s, (t', x'))$  nicht schnell-fallend in  $a^{-1}$  ist, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen. Da wir keine explizite erzeugende Funktion  $\psi$  angegeben haben, werden wir uns dabei Argumente bedienen, die alleine auf den allgemeinen Eigenschaften von  $\psi_{ast}$  beruhen, aber nicht einer expliziten Form.

Das allgemeine Vorgehen wird dabei folgendes sein: Die Ausdrücke in (6) und (7) genau anstarren, um zu sehen für welche Werte von  $(t', x')$  und  $s$  potentiell interessante Dinge geschehen, also z.B. Terme im Nenner weg fallen, oder die Phase konstant wird. Dann werden diese Werte von  $(t', x')$  und  $s$  eingesetzt und alles so weit vereinfacht und genähert – im Rahmen des Erlaubten, ohne das Verhalten für  $a \rightarrow 0$  zu ändern –, bis die  $a$ -Abhängigkeit abgelesen werden kann. Entscheidende Zutaten sind dabei der beschränkte Träger von  $\hat{\psi}$  und der schnelle Abfall von  $\psi$ .

**Fall**  $s = 1, t' = 0 = x'$

Nach (7) erhalten wir mit  $s = 1, t' = 0 = x'$

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \right\rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 + \omega^2(a^{-1}k^2 + a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + \omega^2(a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2k)} d\omega dk \end{aligned}$$

Da aber  $|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2]$  und  $k \in [-1, 1]$  ist, ist für hinreichend kleine  $a$  (und für genau die interessieren wir uns ja)

Integral hübsch machen. Größeres Integralzeichen?

In Textform beschreiben, was die grobe Strategie ist, also wie der Integrand vernünftig vereinfacht wird und welche Eigenschaften von  $\psi$  wie eingehen.

Hier schon die Ergebnisse als Satz angeben, und dann Beweis hinschreiben?

Bemerkung einfügen, warum dass auch ziemlich unmöglich ist

$$\left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{k\omega^2} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}\omega^2k + 2k\omega^2} \right|$$

eine integrierbare (im Sinne des Cauchy-Hauptwertes) Majorante für den Integranden.

Wir dürfen uns also des Lebesgueschen Konvergenzsatzes bedienen und schreiben

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{2k\omega^2} d\omega dk \sim O(a^{\frac{3}{4}}) \quad (8)$$

Für  $s = -1$  erhalten wir genau das selbe Ergebniss, da ja der  $\omega^2(1-s^2)$ -Term im Nenner genauso wieder verschwindet.

**Fall**  $s \neq \pm 1, t' = 0 = x'$

In diesem Fall verschwindet der  $\omega^2(1-s^2)$ -Term im Nenner nicht und dementsprechend folgt

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 - \omega^2((1-s^2) - a^{-1}k^2 - a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{5}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2ks} d\omega dk \end{aligned}$$

Analog zum vorigen Teil ist, diesmal sogar ohne den Cauchy-Hauptwert bemühen zu müssen,

$$\left| \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2ks} \right|$$

dass eine integrierbare Majorante ist (in der Tat ja sogar in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ) Damit können wir folgende Abschätzung treffen:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{as0}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} d\omega dk \sim O(a^{\frac{5}{4}})$$

Warum ist Cauchy-Hauptwert hier erlaubt? Weiter ausführe, warum es diese Majorante tut?

Überall wo es sein muss  $\lim_{a \rightarrow 0}$  dazu schreiben, oder sagen dass der Limit überall impliziert ist

**Fall**  $s \neq \pm 1, (t', s') \neq 0$

In diesem Fall benutzen wir wieder die erste Substitution (6) und klammern wie schon in den beiden vorigen Teilen die höchste negative Potenz von  $a$  im Nenner aus.

$$\Rightarrow \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^2 m^2 - \omega^2(1-s^2) + a^{\frac{1}{2}} s \omega k + a k^2} d\omega dk \quad (9)$$

und da immer noch  $0 \notin \text{supp}(\psi_1)$  gilt ist ein weiteres mal eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$2 \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2 - 1)} \quad (10)$$

In der Tat ist sogar

$$\hat{f}(\omega, k) := \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2 - 1)} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}}^2) \quad (11)$$

da  $\psi_1$  und  $\psi_2$  getragen sind. Demnach ist die Fourierinverse von  $\hat{f}$ ,  $f := \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , also schnell fallend. Damit können wir schließlich abschätzen

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle \right| &= a^{\frac{5}{4}} \left| \int \hat{f}(\omega, k) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega dk \right| \\ &= a^{\frac{5}{4}} \left| f\left(\frac{t'-sx}{a}, \frac{x'}{\sqrt{a}}\right) \right| \leq a^{\frac{5}{4}} C_k \left(1 + \left\| \frac{(t'-sx')/a}{x'/\sqrt{a}} \right\| \right)^{-k} \\ &\leq a^{\frac{5}{4}} \frac{C_k}{2} a^{\frac{k}{2}} \left\| \frac{(t'-sx')}{x'} \right\|^{-k} \sim O\left(a^{\frac{5/2+k}{2}}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \left| \left\langle \hat{\psi}_{ast}, \hat{G}_F \right\rangle \right| &\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (12)$$

**Fall**  $s = 1, (t', x') \neq 0$

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder den ersten Ausdruck für  $\left\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \right\rangle$  aus (6) und sorgen wir auch bisher jedes Mal dafür, dass wir im Nenner nur noch positive Potenzen von  $a$  und einen von  $a$  unabhängigen Term haben. Dann sieht das ganze so aus:

$$\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2\omega k} d\omega dk$$

wo wir im  $\lim_{a \rightarrow 0}$  wieder die  $a$ -Potenzen im Nenner weglassen lassen und auch dieses Mal dafür wieder den Cauchy-Hauptwert bemühen müssen, um den Lebesgueschen Konvergenzsatz benutzen zu dürfen. Weiter geht's:

$$\begin{aligned} &= a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2\omega k} d\omega dk \\ &= a^{\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2k\omega} dk \right\}}_{=: \hat{f}_a(\omega)} \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} d\omega \end{aligned} \quad (13)$$

und um hier weiter zu kommen, schauen wir uns  $\hat{f}_a$  genauer an. Sei dazu  $\Psi_2(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \psi_2(\omega') d\omega' - \int_{\omega}^{+\infty} \psi_2(\omega') d\omega'$  eine Stammfunktion von  $\psi_2$ . Dies ist offenbar  $C^\infty$  und beschränkt, da  $\hat{\psi}_2 \in C_c^\infty$ . Mithilfe von Fourieridentitäten und Substitution können wir nun weiter rechnen:

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\omega) &= \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{2k\omega} e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega \\ &\stackrel{i)}{=} \int \frac{\hat{\psi}_2(k)}{2k} e^{ik\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}} d\omega \\ &\stackrel{ii)}{=} \frac{i}{2} \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \end{aligned}$$

Hier wurde in  $i)$  einfach  $k \rightarrow \omega k$  substituiert und im Schritt  $ii)$  wurde genutzt, dass  $f(x) = \text{sgn}(x) \leftrightarrow \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k}$ . Nun stecken wir diese Erkenntnisse in unseren vorigen Ausdruck und erhalten

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle &= \frac{ia^{\frac{3}{4}}}{2} \int \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} d\omega dk \\ &\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right) \quad ; \text{ für } t' = x' \\ &\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad ; \text{ andernfalls} \end{aligned} \quad (14)$$

Im letzten Schritt wurde wieder genutzt, dass  $\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \hat{\psi}_1(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist, und demnach eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

Das analoge Ergebnis erhält man auch für  $s = -1$  und  $t' = -x'$

## Literatur

- [1] Gitta Kutyniok und Demetrio Labate. “Resolution of the wavefront set using continuous shearlets”. In: Transactions of the American Mathematical Society 361.05 (2008), S. 2719–2754. URL: <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-08-04700-4>.
- [2] Matthew D. Schwartz. Quantum Field Theory and the Standard Model -. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1-107-03473-0.