GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

Bachelorarbeit

Zur Auflösung der Wellenfrontmenge mittels Shearlets

Resolution of the wavefrontset using shearlets

angefertigt von

Jan Lukas Bosse

aus Freiburg im Breisgau

am Institut für Mathematik

Bearbeitungszeit: 15. Februar 2018 bis 30. Juli 2018

Erstgutachter/in: Prof. Dr. Dorothea Bahns

Zweitgutachter/in: Prof. Dr. Ingo Witt

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Einer der Zugänge zur Renormierung in der Quantenfeldtheorie ist die Fortsetzung der auftretenden Produkte von Distributionen[1] auf ganz $\mathbb{R}^{1+d}$. Um zu bestimmen, wo und mit welchen Freiheiten diese fortgesetzt werden können, müssen die Wellenfrontmengen der Faktoren bestimmt werden. Leider ist es notorisch schwierig Wellenfrontmengen für Distributionen, die komplizierter sind als die δ-Distribution und Ableitungen, direkt zu bestimmen. Unter anderem in Modellen der *nichtkommutativen Quantenfeldtheorie* [5, 4, 13] treten Distributionen auf, deren Wellenfrontmengen mit den bisherigen Methoden nicht bestimmt werden konnten.

Ursprünglich in der Bildbearbeitung und -kompression wurde erkannt und zur Kompression genutzt, dass Wavelettransformationen in der Lage sind, die Singularitätsstruktur von Bildern zu erkennen. D.h. dass die Wavelettransformation mit feiner werdendem Skalenparameter an Singularitäten nicht schnell abfällt, überall sonst aber schon. Wie Kutyniok und Labate [9], Candès und Donoho [2] und Do und Vetterli [3] in ihren respektiven Arbeiten gezeigt haben, lassen sich diese Erkenntnisse auf Distributionen ausweiten und mit anisotropen und gerichteten Wavelets Wellenfrontmengen ausrechnen.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir am Beispiel der *Shearlets* untersuchen, wie praktikabel diese Methoden sind, um Wellenfrontmengen komplizierterer Distributionen auszurechnen. Dazu ziehen wir als Beispiele die massive Zweipunktfunktion Δ_m, ihre (getwisteten) Quadrate $\Delta_m^{(\star)2}$ und die Heaviside-Funktion Θ heran. Diese sind von besonderem Interesse, da der Feynmanpropagator und Potenzen davon als zentrale zu renormierende Distribution der QFT ein Produkt von Zweipunktfunktion und Heaviside-Funktion ist.

Daneben gibt es noch eine kurze Diskussion, ob und wie es möglich ist, die Ergebnisse auf mehr als nur zwei Dimensionen auszuweiten. Des Weiteren wird skizziert, welche

[1] Wir erinnern uns, dass allgemeine Produkte von Distributionen nicht unbedingt immer definiert sind. Was zum Beispiel soll δ^2 sein?

weiteren Größen der *mikrolokalen Analysis*, wie z.B. der Skalengrad, mithilfe von Shearlets berechnet werden können. Der Skalengrad einer Distribution ist eng verwandt mit dem Abzählen der Potenzen (engl. „power counting“) in der QFT.

Wir kommen zu dem Ergebnis, dass die Shearlettransformation in zwei Dimensionen zwar eine theoretische Möglichkeit ist, Wellefrontmengen zu berechnen, aber deutlich mehr Arbeit als weniger direkte Methoden. In höheren – und damit physikalisch relevanteren – Dimensionen sind noch keine Verallgemeinerung bekannt, aber die konkreten Rechnungen werden sicher nicht übersichtlicher als in zwei Dimensionen.

2 Mathematische und Physikalische Grundlagen

2.1 Fouriertransformation, mikrolokale Analysis und all die Mathematik

Im folgenden gehen wir davon aus, dass die grundlegenden Eigenschaften der Fouriertransformation (Faltungssatz, Parsevals Satz etc.) bekannt sind und führen nur die Begriffe ein, die über das Grundstudium hinaus gehen und nicht vorausgesetzt werden können.

2.1.1 Nomenklatur und Konventionen

Für die Fouriertransformation verwenden wir die Konvention

$$\hat{f}(k) = \int f(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x$$

mit der Inversen

$$f^{\vee}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int f(k)\, e^{ikx}\, \mathrm{d}k.$$

Der Faltunssatz liest sich also

$$(2\pi)^d\, \widehat{f \cdot g}\,(k) = (\hat{f} * \hat{g})\,(k)$$

Trotz aller Vorsicht kann es aber gut sein, dass an der ein oder anderen Stelle doch Vorfaktoren von 2π vergessen wurden, das ist aber nicht wirklich tragisch, da wir in der gesamten Arbeit doch vor allem an asymptotischen Proportionalitäten interessiert sind.

Wie üblichen in derartigen Arbeiten, arbeiten wir in natürlichen Einheiten, also $\hbar = c = 1$, mit Ausnahme von Abschnitt 2.2.2; dort brauchen wir $\hbar$ als Buchhaltungsparameter.

2.1.2 Die Wellenfrontmenge

Anschaulich sagt uns die Wellenfrontmenge wo und in welche Richtungen eine Distribution singulär ist. So ist z.B. die Wellenfrontmenge der δ-Distribution $\{(0, \mathbb{R}^n \setminus 0)\}$ oder die der 2-dimensionalen Heaviside-Funktion $1(x) \cdot \Theta(y)$ ist $\{((x, 0), (0, 1) \cdot \mathbb{R} \setminus 0)\}$.

Definition 2.1 (Richtungen hoher Frequenzen)
Sei $v \in \mathcal{E}'(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakt getragene Distribution. Dann definieren wir die *Richtungen hoher Frequenzen* als

$$\Sigma(v) = \Big\{ k \in \hat{\mathbb{R}}^n \mid k \text{ hat } \textit{keine} \text{ kegelförmige Umgebung } U \text{ s.d.} \\ |\hat{v}(k')| \leq C_N (1 + |k|)^{-N} \, \forall k \in U, \, \forall N \in \mathbb{N} \Big\}$$

und darauf basierend definieren wir noch eine punktweise Variante:

Sei $f \in \mathcal{D}'(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Distribution. Sei $\mathcal{D}_x$ die Menge der kompakt getragenen glatten Funktionen, die an x nicht verschwinden. Dann ist die *singuläre Faser* von f an x definiert als

$$\Sigma_x(f) = \bigcap_{\phi \in \mathcal{D}_x} \Sigma(\underbrace{\phi f}_{\in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)})$$

Damit können wir die Wellenfrontmenge definieren:

Definition 2.2 (Wellenfrontmenge)
Sei $f \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Distribution. Dann ist ihre *Wellenfrontmenge* definiert als

$$WF(f) \coloneqq \Big\{ (x, k) \in \Omega \times (\hat{\mathbb{R}}^n \setminus 0) \,\Big|\, k \in \Sigma_x(f) \Big\}$$

Aber weshalb ist die Wellenfrontmenge interessant für uns? Unter anderem liefert sie ein Kriterium, wann das Produkt zweier Distributionen wohldefiniert ist. Und zwar mittels folgendem Satz:

Satz 2.3 (Hörmanders Kriterium)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ Distributionen und es gelte $(x, k) \in WF(f) \Rightarrow (x, -k) \notin WF(g)$. Es sei außerdem $\mathrm{diag} : \Omega \to \Omega \times \Omega;\ x \mapsto (x, x)$. Dann kann das Produkt von f und g definiert werden über den Pullback mit diag, also

$$fg \coloneqq \mathrm{diag}^*(f \otimes g)$$

und es gilt

$$WF(fg) \subset \{(x, k+k') \mid (x,k) \in WF(f) \text{ oder } k = 0,$$
$$(x, k') \in WF(g) \text{ oder } k' = 0\}$$

Der Beweis findet sich in Hörmander [8].

Eine gute Anschauung, warum es dieses Kriterium tut, sowie auch dafür warum es eigentlich zu scharf ist, erhält man, wenn man das Produkt (zumindest lokal) über die Faltung der Fouriertransformierten definiert. Dann muss dafür gesorgt werden, dass $\hat{f}(k')\hat{g}(k-k')$ für $|k'| \to \infty$ in alle Richtungen schnell genug abfällt, damit

$$(2\pi)^d \, \widehat{f \cdot g}\,(k) = \int \hat{f}(k')\hat{g}(k-k')\,\mathrm{d}k'$$

für alle k existiert. „Schnell genug“ ist aber nicht nur exponentieller Abfall, sondern sogar schon $o(k'^{-n})$. Mehr dazu in Abschnitt 4.1.2.

2.2 Zweipunktfunktionen, Sternprodukte und all die Physik

In diesem Kapitel wollen wir motivieren, warum die Multiplikation von Distributionen auch für Physiker eine relevante Fragestellung ist, was getwistete Produkte sind und was sie mit nicht-kommutativer Raumzeit zu tun haben.

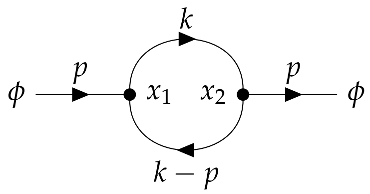
2.2.1 Die Zweipunktfunktionen und warum wir sie potenzieren wollen

In der störungstheoretischen Quantenfeldtheorie entsprechen schon einfache Feynmandiagramme, wie z.B. das in Abb. 2.1 (formal) Integralen über Produkte von Distributionen, in diesem Fall dem Feynman-Propagator.

Der Feynman-Propagator in zwei Dimensionen kann geschrieben werden als zeitgeordnete Zweipunktfunktion (vgl. Michael Reed [11]), also

$$G_F(t,x) = \Theta(t)\Delta_m(t,x) + \Theta(-t)\Delta_m(-t,-x) \tag{2.2.1}$$

wobei Θ die Heaviside-Funktion bezeichnet und als $\Theta(t) \cdot 1(x)$ zu verstehen ist. Also sind Potenzen des Feynman-Propagators gegeben durch Potenzen der Zweipunktfunktion und der Heaviside-Funktion. Um zu wissen, wo diese Produkte definiert werden



$$= \int G_F(x_1, x_2)\, G_F(x_2, x_1) e^{ik(x_1 - x_2)} e^{i(p-k)(x_2 - x_1)}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}k$$

Abb. 2.1: Ein einfaches Feynman-Diagramm aus der skalaren ϕ^3-Theorie und das entsprechende Integral über Feynman-Propagatoren

können, muss man deren Wellenfrontmengen kennen; dann liefert Hörmanders Kriterium 2.3 ein Kriterium für die Wohldefiniertheit.

In all dem kann die Zweipunktfunktion Δ_m geschrieben werden als Fouriertransformierte eines positiven Maßes auf der negativen Massenschale H_m (vgl. Schwartz [15], 24.69):

$$\Delta_m(t, x) = \int \delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(-\omega) e^{-i\omega t + ikx}\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k \tag{2.2.2}$$

Deshalb sind Δ_m und seine (getwisteten) Potenzen das Hauptbeispiel, an welchem wir untersuchen, inwiefern die Shearlettransformation praktikabel ist um Wellenfrontmengen zu berechnen.

2.2.2 Sternprodukte und getwistete Faltungen

Die *nicht kommutative Quantenfeldtheorie* beschäftigt sich mit Quantenfeldtheorien in der Größenordnung der *Planck-Skala*. Bei diesen Größenordnungen wird erwartet, dass die Geometrie der Raumzeit nicht mehr kommutativ ist, sich also Ort und Zeit nicht mehr mit beliebiger Präzision messen lassen. Das physikalische Argument (nach Doplicher, Fredenhagen und Roberts [4]) für diese *Raumzeitunschärferelation* basiert auf Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie und Heisenbergs Unschärferelation: Wenn wir ein Raumzeit-Ereignis mit Genauigkeit a messen, haben wir eine Impuls-Unschärfe von der Größenordnung $\frac{1}{a}$. Also wurde Energie der Größenordnung $\frac{1}{a}$ auf das System übertragen und zu einem Zeitpunkt in der gemessenen Ortsregion konzentriert. Diese Energie erzeugt ein Gravitationsfeld, welches um so stärker ist, je kleiner die Region in der die Energie konzentriert ist. Sobald dieses so stark ist, dass kein Licht mehr die Region verlassen kann (wir also ein schwarzes Loch erzeugt haben), erhalten wir keine Information aus der Raumzeitregion, eine Messung ist also nicht möglich. Das bedeutet, dass die Genauigkeit mit der wir die Lokalisation eines Ereignisses in der Raumzeit messen können beschränkt ist durch die Energiedichte, ab der wir ein schwarzes Loch erzeugen. Diese Schranken in der Messgenauigkeit lassen sich als Unschärferelation zwischen Zeit und Ort verstehen, ganz analog zur klassischen Unschärferelation zwischen Ort und Impuls.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, solche nicht-kommutativen Raumzeiten zu konstruieren. Ihnen allen ist gemein, dass das kommutative punktweise Produkt von Funktionen ersetzt wird durch ein nicht-kommutatives *Sternrprodukt*. Auf der κ-Minkowski-Raumzeit (vgl. Freidel, Kowalski-Glikman und Nowak [5]) wird es beispielsweise ersetzt durch

$$f \star_\kappa g(t,x) = \int \hat{f}(\omega,k)\hat{g}(\omega',k')e^{i\hbar\left\langle k+e^{-\frac{\omega}{\kappa}}k',x\right\rangle - i\hbar(\omega+\omega')t}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}k'. \tag{2.2.3}$$

Dieses Produkt ist in erster Ordnung in $\hbar$ äquivalent zu den Vertauschungsrelationen

$$[t,x_i] = -\frac{i\hbar}{\kappa}x_i.$$

Ein anderer Ansatz verwendet das Moyal-Produkt [12] aus der Deformationsquantisierung. Hier wird das kommutative Produkt von Funktionen auf dem Phasenraum so deformiert, dass es danach die kanonischen Vertauschungsrelationen aus der Quantenmechanik erfüllt, also

$$[x_k, p_l] = i\hbar\delta_{kl}.$$

Diese Vertauschungsrelationen sind in erster Ordnung in $\hbar$ äquivalent zu dem Moyal-Produkt für Funktionen auf dem flachen Phasenraum:

$$f \star_M g\,(x) = \int \hat{f}(k)\,\hat{g}(k')\,e^{\frac{i\hbar}{2}(k,\Omega_{\mathrm{can}}k')}\,e^{ikx}\,e^{ik'x}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}k'. \tag{2.2.4}$$

Dabei ist Ω_{can} die kanonische symplektische Form auf $\mathbb{R}^{2n}$ und $x \in \mathbb{R}^{2n}$, also ein Punkt im Phasenraum und *nicht* nur die Ortskoordinate.

Da das Moyalprodukt als Fourier-Multiplikator geschrieben werden kann, korrespondiert es auch zu einer getwisteten Faltung $*_\Omega$ für die Fouriertransformierten, s.d. der Faltungssatz

$$2\pi\,\widehat{f \star_M g}(k) = \widehat{f} *_\Omega \widehat{g}(k)$$

gilt.

Definition 2.4 (getwistete Faltung)
Seien $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{D}'$ s.d. die Summenabbildung $\Sigma(k, k') = k + k'$ eigentlich [1] ist, wenn eingeschränkt auf $supp(\hat{f}) \times supp(\hat{g})$. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ die kanonische symplektische Matrix. Dann ist die getwistete Faltung $(\hat{f} *_\Omega \hat{g})(k)$ definiert als

$$(\hat{f} *_\Omega \hat{g})\,(k) := \int \hat{f}(k')\hat{g}(k-k')e^{\frac{i}{2}(k,\,\Omega_{\text{can}}k')}\,\mathrm{d}k' \tag{2.2.5}$$

Die getwistete Faltung ist also einfach die gewöhnliche Faltung, die noch mit einem ortsabhängigen Phasenfaktor verziert wurde.

Ganz analog dazu ersetzen Doplicher, Fredenhagen und Roberts [4] das kommutative Produkt auf der Raumzeit durch das Moyal-Produkt. Zeit und Ort erfüllen also die Vertauschungsrelation

$$[t, x] = i$$

und man erhält als Produkt das selbe wie in Gleichung (2.2.4), nur dass jetzt x kein Punkt im Phasenraum ist, sondern einer in der Raumzeit.

2.3 Wavelettransformation und die Wellenfrontmenge

Die klassische Fouriertransformation $f(x) \mapsto \int f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$ zerlegt eine Funktion in ihre verschiedenen Frequenzanteile und misst nach dem Satz von Payley-Wiener dabei auch die Regularität der Funktion. Es gilt nämlich $f \in C^N(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f}(k) = O(k^N)$ für $|k| \to \infty$. Leider „sieht“ die Fouriertransformation aber nicht, an welchen Punkten x die Funktion f singulär (= nicht glatt) ist. Das hängt damit zusammen, dass die „Basisfunktionen“, die ebenen Wellen, nicht lokalisiert sind. Das Argument der Fouriertransformation k kontrolliert die Richtung und Skala, die von der Basisfunktion e^{-ikx} aufgelöst werden. Zusätzliche Ortsauflösung der Singularitäten gibt uns die

2.3.1 Wavelettransformation

Einen Schritt in die richtige Richtung, nämlich die Ortsauflösung der Singularitäten, macht die Wavelettransformation. Hier wird eine Familie von Basisfunktionen für $L^2(\mathbb{R}^n)$ erzeugt von einem *Mutterwavelet* ψ. Anders als die ebenen Wellen ist ψ aber lokalisiert – häufig sogar kompakt getragen – und die Basis wird erzeugt durch Verschieben *und* Skalieren des Mutterwavelets.

Eine Hamel-Basis für $L^2(\mathbb{R}^n)$ die aus Funktionen der Form

$$\left\{\psi_{at}(x) = a^{-\frac{n}{2}}\psi\left(a^{-1}(x-t)\right) \mid t \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}\right\}$$

mit einem *Mutterwavelet* $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ besteht heißt *stetige Waveletbasis* für $L^2(\mathbb{R}^n)$. Der Parameter t heißt *Verschiebungsparameter* und verschiebt das Wavelet an alle Orte des $\mathbb{R}^n$ während der *Skalierungsparameter* a für $a \to 0$ ψ immer genauer lokalisiert. Der Faktor $a^{-\frac{n}{2}}$ sorgt dafür, dass die L^2-Norm aller ψ_{at} gleich ist. In der Fourierdomäne wird die Verschiebung zum Phasenfaktor und der Träger mit verschwindendem a immer *größer*.

Analog zur Definition der Fouriertransformation ist die stetige Wavelettransformation von f die Projektion auf die Basisfunktionen:

$$\mathcal{W}_f(a,t) = \langle f, \psi_{at}\rangle = a^{-\frac{n}{2}} \int f(x)\psi\left(a^{-1}(x-t)\right) \mathrm{d}x \tag{2.3.1}$$

Ist ψ eine glatte Funktion und f bei t glatt, so fällt $\mathcal{W}_f(a,t)$ schnell ab für $a \to 0$. Umgekehrt fällt auch $\mathcal{W}_f(a,t)$ *genau dann* nicht schnell ab, wenn f bei t *nicht* glatt ist. Also löst die Wavelettransformation die Lage der Singularitäten von f auf. Allerdings sind die klassischen Wavelettransformationen mit isotroper Skalierung (heißt: Skalierung in alle Richtungen gleich schnell) nicht in der Lage die Orientierung der Singularitäten aufzulösen. Sie besitzen ja gar keinen Orientierungsparameter.

Um auch die Orientierung aufzulösen, muss einerseits ein Richtungsparameter eingeführt werden und andererseits dafür gesorgt werden, dass die Basisfunktionen mit immer feinerer Skala immer orientierter werden. Deshalb gibt es

2.3.2 Verallgemeinerte, gerichtete Wavelets

Beispiele solcher gerichteter Wavelets sind die *Curvelets* von Candès und Donoho [2], die *Shearlets* von Kutyniok und Labate [9] sowie *Contourlets* von Do und Vetterli [3]. Die mit feiner werdender Skala schärfer werdende Orientierung wird in den ersten beiden Fällen durch parabolische Skalierung implementiert. D.h. in Richtung der Orientierung im Fourierraum wird mit a skaliert, während in den Richtungen senkrecht dazu mit $\sqrt{a}$ skaliert wird. In zwei Dimensionen gibt es nur eine weitere senkrechte Richtung, aber später wird deutlich werden, dass dies in mehr Dimensionen die richtige Verallgemeinerung der parabolischen Skalierung sein muss.

Die Richtung der Curvelets wird durch Drehmatrizen implementiert, die auf die Variablen (x_1, x_2) wirken, während bei den Shearlets die Variablen (x_1, x_2) geschert werden.

Beide Ansätze sind in der Lage, die Wellenfrontmenge einer Distribution zu identifizieren. Allerdings sind die Rechnungen bei den *Shearlets* in der praktischen Umsetzung einfacher, wenn auch von einem ästhetischen Standpunkt nicht ganz so befriedigend, da sie nicht inhärent rotationsinvariant sind, also nicht alle Symmetrien unseres Raumes abbilden. Aber nach allzu viel Ästhetik sollte man in dieser Arbeit, mit Hinblick auf die Rechnungen ab Abschnitt 3.2, ohnehin nicht fragen.

Bevor wir die konkrete Konstruktion der Shearlets widmen, brauchen wir noch ein kleines bisschen Theorie, welche Möglichkeiten wir überhaupt haben, um die Konstruktion der Wavelets zu verallgemeinern. Die weitestgehende Verallgemeinerung von „verschiebe und skaliere ein Mutterwavelet“ um ein reproduzierendes System zu erhalten ist „verschiebe es und lasse eine beliebge invertierbare Matrix auf die Koordinaten wirken“. Wir definieren also eine Wirkung der affinen Gruppe $\mathbb{A}^n$ auf Funktionen $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ via

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) &\to L^2(\mathbb{R}^n)\\
((M,t), \psi(x)) &\mapsto |\det M^{-\frac{1}{2}}|\psi\left(M^{-1}(x-t)\right) =: \psi_{M,t}(x)
\end{aligned}$$

mit

$$(M,t) \in \mathbb{A}^n = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$$

Im Allgemeinen wird man aber nicht die ganze affine Gruppe benötigen, um ein reproduzierendes System zu erhalten, sondern nur alle Verschiebungen und eine Untermenge[1] der $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Wann ein Mutterwavelet und die Wirkung einer solchen Untermenge ein reproduzierendes System erzeugen, sagt uns der nächste Satz:

Satz 2.5 (Zulässigkeitskriterium)
Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Sei $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{d}\mu(M)$ ein Maß auf G, im Falle einer Untergruppe z.B. das Haarmaß, und es gelte

$$\Delta(\psi)(k) = \int_G |\hat{\psi}(M^t k)|^2 |\det M| \mathrm{d}\mu(M) = 1 \tag{2.3.2}$$

für fast alle $k \in \hat{\mathbb{R}}^2$. Dann ist $(\psi, G \ltimes \mathbb{R}^n)$ ein reproduzierendes System für $L^2(\mathbb{R}^n)$,

[1] Auch nicht notwendigerweise Untergruppe

also gilt für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$f = \int_{\mathbb{R}^n} \int_G \langle \psi_{M,t}, f \rangle \, \psi_{M,t} \, \mathrm{d}\mu(M) \, \mathrm{d}t \tag{2.3.3}$$

In einer Dimension entspricht das Zulässigkeitskriterium genau Calderons Kriterium:

Bemerkung 2.6 (2.5 ist Calderon)
Für $n = 1$ ist $\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ mit dem Haarmaß $\mathrm{d}\mu(a) = \frac{\mathrm{d}\lambda(a)}{a}$ und Gleichung (2.3.2) wird zu

$$\int_0^\infty \left|\hat{\psi}(ak)\right|^2 \frac{\mathrm{d}\lambda(a)}{a} = 1, \quad \text{für fast alle } k \in \hat{\mathbb{R}} \tag{2.3.4}$$

Gleichung (2.3.2) ist also das mehrdimensionale Analogon zu Calderons Kriterium [10, S. 105].

Jetzt aber mehr Details zur Konstruktion der Shearlets und deren Eigenschaften:

2.3.3 Konstruktion und Eigenschaften der Shearlets

Der folgende Abschnitt basiert größtenteils auf der Arbeit von Kutyniok und Labate [9]. Da wir später auch komplexwertige Distributionen analysieren wollen, deren Wellenfrontmenge nicht zwingend punktsymmetrisch um den Ursprung (in der Richtung, nicht im Ort) sind, werden wir – anders als Kutyniok und Labate [9] – Shearlets verwenden, deren Fouriertransformierte asymetrischen Träger hat, indem wir die Shearlets aus [9] jeweils in zwei Shearlets aufteilen, eines mit Träger im Frequenzbereich „nach vorne", und eines mit Träger „nach hinten".

Definition 2.7 (Shearlettransformation)
Seien

$$\psi_1 \in L^2(\mathbb{R}) \text{ mit } supp(\hat{\psi}_1) \subseteq \left[\frac{1}{2}, 2\right] \text{ und } \psi_1 \text{ erfülle Gleichung (2.3.4)}^2 \tag{2.3.5}$$

$$\psi_2 \in L^2(\mathbb{R}) \text{ mit } supp(\hat{\psi}_1) \subseteq [-1, 1] \text{ und } \|\psi_2\|_2 = 1 \tag{2.3.6}$$

und $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ implizit definiert durch

$$\hat{\psi}(k_1, k_2) = \hat{\psi}_1(k_1)\hat{\psi}_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right). \tag{2.3.7}$$

[2] mit $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $|\det M| d\lambda(M) = \frac{\mathrm{d}a}{a}$

Sei des weiteren

$$G = \left\{ M_{as} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \;\middle|\; M_{as} = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{a}s \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}, a \in [0,1], s \in [-2,2] \right\} \tag{2.3.8}$$

Dann ist für $t \in \mathbb{R}^n, M_{as} \in G$ die Shearlettransformation von f bezüglich ψ definiert als

$$\mathcal{S}_f(a,s,t)) = \langle D_{M_{as}} T_t \psi, f \rangle = a^{-\frac{3}{4}} \int f(x) \psi \left(\begin{pmatrix} a & -\sqrt{a}s \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}^{-1} (x - t) \right) \mathrm{d}x \tag{2.3.9}$$

Bevor es mit dem Text weiter geht, noch eine kurze Bemerkung zu Vereinfachung der Notation:

Bemerkung 2.8 (Notation)
Der Kompaktheit halber schreiben wir auch

$$\psi_{ast}(x_1, x_2) := a^{-\frac{3}{4}} \psi \left(\begin{pmatrix} a & -\sqrt{a}s \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}^{-1} (x - t) \right)$$

Offenbar können ψ_1 und ψ_2 in Definition 2.7 problemlos auch so gewählt werden, dass $\hat{\psi}_1$ und $\hat{\psi}_2$ glatt sind; wir stellen in Gleichungen (2.3.5) und (2.3.6) ja keine allzu restriktiven Anforderungen an sie. Dann ist ψ_{ast} eine Schwartz-Funktion für alle (a, s, t) und die Shearlettransformation temperierter Distributionen ist wohldefiniert. Die Anforderungen aus Gleichungen (2.3.5) und (2.3.6) sind genau so gewählt, dass Gleichung (2.3.2) von ψ erfüllt wird, und gleichzeitig die konkreten Rechnungen zur Bestimmung der Wellenfrontmenge auch analytisch möglich sind.

Der kompakte Träger von $\hat{\psi}$ in der Frequenzdomäne erlaubt einfachere Abschätzungen von Ausdrücken der Form $\left\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle$, ist aber m.E. *nicht* zwingend notwendig, um mit diesem Shearlet die Wellenfrontmenge zu bestimmen.

Die Wirkung der Scher- und Skalierungsmatrizen aus Gleichung (2.3.8) versteht man am besten in der Frequenzdomäne. Mit $a \to 0$ wird $\hat{\psi}$ immer weiter „weg vom Ursprung“ geschoben in der Frequenzdomäne und der Träger liegt gleichzeitig in immer engeren Kegeln. Dies ist genau die Anisotropie, die uns erlaubt, nicht nur die Position der Singularitäten, sondern auch ihre Orientierung zu erkennen. Der Parameter s bestimmt die Scherung des Trägers von ψ. Für $s = 0$ ist der Träger um $k = 0$ herum lokalisiert, für $s = \pm 1$ um die Diagonale bzw Antidiagonale. Das ist dargestellt in Abb. 2.2 und Bemerkung 2.9.

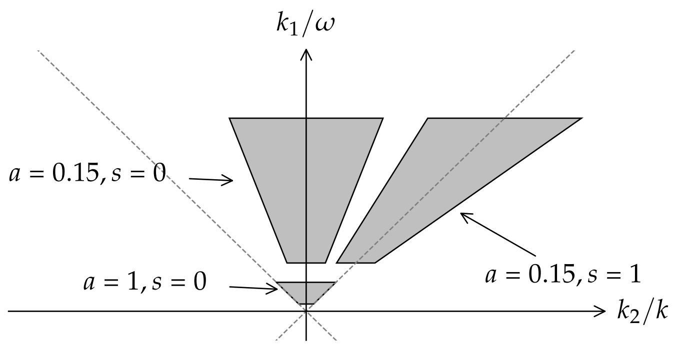


Abb. 2.2: Der Träger von $\hat{\psi}_{ast}$ für verschiedene a, s. Man sieht gut, wie $supp(\hat{\psi}_{ast})$ für kleinere a in immer spitzeren Kegeln liegt. Da wir in den konkreten Rechnungen später $(k_1, k_2) = (\omega, k)$ nennen werden und Minkowski-Diagramme üblicherweise mit ω auf der y-Achse dargestellt werden, haben wir hier beide Namen eingetragen und alles an der Diagonale gespiegelt.

Bemerkung 2.9 (Eigenschaften von $\hat{\psi}_{ast}$)
Im Fourierraum ist $\hat{\psi}_{ast}$ gegeben durch

$$\hat{\psi}_{ast}(k_1, k_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-ikx} \hat{\psi}_1(ak_1) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k_2}{k_1} - s \right) \right) \tag{2.3.10}$$

und es gilt

$$supp(\hat{\psi}) \subset \left\{ k \in \hat{\mathbb{R}}^2 \,\middle|\, k_1 \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a} \right], \left| \frac{k_2}{k_1} - s \right| \leq \sqrt{a} \right\} \tag{2.3.11}$$

Eine weitere Eigenschaft, die aus dieser Definition der Shearlets folgt, ist der schnelle Abfall der Shearlets abseits von t:

Proposition 2.10 (ψ_{ast} fällt schnell ab)
Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ein Shearlet wie in Definition 2.7 und M_{as} wie in Gleichung (2.3.8). Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$, dass es eine konstante C_N gibt s.d. für alle $t \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
|\psi_{ast}(x_1, x_2)| &\leq C_k \left|\det M_{as}\right|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \left| M_{as}^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x_1 - t_1 \\ x_2 - t_2 \end{smallmatrix} \right) \right|^2 \right)^{-N} \\
&= C_k a^{-\frac{3}{4}} \Big(1 + a^{-2} (x_1 - t_1)^2 + 2a^{-2} s (x_1 - t_1)(x_2 - t_2) \\
&\qquad + a^{-1} \left(1 + a^{-1} s^2 \right) (x_2 - t_2)^2 \Big)^{-N}
\end{aligned}$$

Und insbesondere ist $C_N = \frac{15}{2} \frac{\sqrt{a}+s}{a^2} \left(\|\hat{\psi}\|_\infty + \|\triangle^N \hat{\psi}\|_\infty \right)$

Wer bis hier aufmerksam mitgelesen hat und sich Abb. 2.2 genau angeschaut hat, wird bemerkt haben, dass $supp(\hat{\psi}_{ast})$ für alle a und s quasi nur im Quadranten $x_1^2 \geq x_2^2$ und $x_2 \geq 0$ liegt. Mit den Namen der Physik $(k_1, k_2) = (\omega, k)$ entspricht das dem „Vorwärtslichtkegel“. Glücklicherweise liegen alle analysierten Distributionen im gleich definierten $L(C)^\vee$. Wie der folgende Satz zeigt, erzeugt ψ auch nur für solche f ein reproduzierendes System.

Satz 2.11 (ψ reproduziert $L^2(C)^\vee$)
Sei

$$C \coloneqq \left\{ (k_1, k_2) \in \hat{\mathbb{R}}^2 \middle| k_1 \geq 2 \text{ und } \left| \frac{k_2}{k_1} \right| \leq 1 \right\}$$

und

$$L^2(\mathrm{C})^\vee \coloneqq \{ f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid supp(\hat{f}) \subset C \} \tag{2.3.12}$$

Dann ist ψ aus Definition 2.7 ein reproduzierendes System für $L^2(\mathrm{C})^\vee$, also gilt für alle $f \in L^2(\mathrm{C})^\vee$:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-2}^{2} \int_{0}^{1} \langle f, \psi_{ast} \rangle \, \psi_{ast}(x) \frac{\mathrm{d}a}{a^3} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t. \tag{2.3.13}$$

Um nun nicht nur ein reproduzierendes System für $L^2(\mathrm{C})^\vee$, sondern für ganz $L^2(\mathbb{R}^2)$ zu erhalten, muss $\hat{\psi}_{ast}$ noch in den rechten, linken und rückwärts liegenden Kegel gedreht und geschoben werden. Zusätzlich muss noch eine weitere Funktion W gefunden werden, welche die groben Skalen (also $|k_1|, |k_2| \leq 2$) auflöst.

Wir definieren also

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{ast}^{(1)}(k_1, k_2) &\coloneqq \hat{\psi}_{ast}(k_1, k_2), & \hat{\psi}_{ast}^{(3)}(k_1, k_2) &\coloneqq \hat{\psi}_{ast}(-k_1, -k_2), \\ \hat{\psi}_{ast}^{(2)}(k_1, k_2) &\coloneqq \hat{\psi}_{ast}(k_2, k_1), & \hat{\psi}_{ast}^{(4)}(k_1, k_2) &\coloneqq \hat{\psi}_{ast}(-k_2, -k_1) \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Des Weiteren gibt es ein $W(x)$ s.d. $\hat{W}(k) \in C^\infty(\hat{\mathbb{R}}^2)$ und

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\langle f, T_t W \rangle|^2 \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{4} \int |\langle f, \psi_{ast} \rangle| \, \mathrm{d}\mu(a, s, t)$$

und somit erhalten wir (dank Parseval und Polarisation) ein reproduzierendes System für ganz L^2, da ja $L^2(\mathbb{R}^2) = L^2(\text{grobe Skalen})^\vee \oplus \sum_{i=1}^4 L^2 \left(\mathrm{C}^{(i)}\right)^\vee$ ist. Mehr Details dazu finden sich in [9, S. 28 ff].

Das große Versprechen der Shearlettransformation war ja, dass sie in der Lage ist nicht nur Position, sondern auch Orientierung der Singularitäten aufzulösen. Dass dem auch

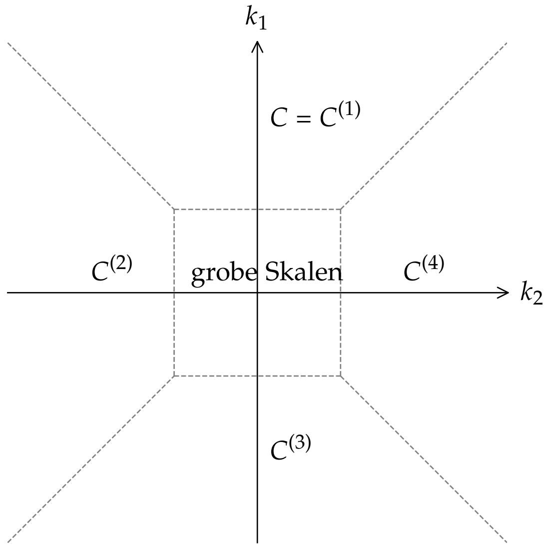


Abb. 2.3: Aufteilung des Fourierraums in vier Quadranten plus einen Teil für die groben Skalen. Die Quadranten $C^{(i)}$ entsprechen den Unterräumen von $L^2(\hat{\mathbb{R}}^2)$ die von $\hat{\psi}^{(i)}_{ast}$ reproduziert werden.

so ist, ist Aussage des folgenden Satzes:

Satz 2.12 ($\mathcal{S}_f(a,s,t)$ misst $WF(f)$)
Sei $f \in \mathcal{S}'(C)^\vee \cap B(C)^\vee$ (wobei $\mathcal{S}(C)^\vee$ analog zu $L^2(C)^\vee$ definiert ist). Sei $\mathcal{D}$ die Menge der (s,t) s.d. $\mathcal{S}(a,s,t)$ schnell verschwindet. Genauer

$$\mathcal{D} = \Big\{(s_0,t_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1,1] \;\Big|\; \text{für } (s,t) \text{ in einer Umgebung } U \text{ von } (t_0,s_0): \\ |S_f(a,s,t)| = O(a^k) \text{ für } a \to 0, \forall k \in \mathbb{N} \text{ mit } O(\cdot) \text{ gleichmäßig über } (s,t) \in U\Big\}$$

Dann gilt $WF(f)^c = \mathcal{D}$

Bemerkung 2.13
Die Einschränkung, dass f beschränkt ist ($f \in B(\mathbb{R}^2)$) ist gravierend und bedeutet zunächst, dass die Shearlettransformation nur bedingt geeignet ist, um Wellenfrontmengen auszurechnen. In Abschnitt 4.1 soll aber ein Ansatz gegeben werden, wie der Beweis von Satz 2.12 hoffentlich auf ganz $\mathcal{S}'(C)^\vee$ ausgedehnt werden kann. Des Weiteren zeigen ja auch die konkreten Rechnungen an Distributionen mit bereits bekannter Wellefrontmenge, dass die Shearlettransformation diese korrekt erkennt.

Wenn wir die Wellenfrontmenge einer Distribution kennen, kennen wir auch ihren singulären Träger:

Korollar 2.14 ($\mathcal{S}_f(a,s,t)$ misst *sing supp*(ψ))
Sei f wie eben und $\mathcal{R}$ die Projektion von $\mathcal{D}$ auf die Ortskomponente. Also

$$\mathcal{R} = \pi(\mathcal{D}) \ \ ; \quad \pi : (t,s) \mapsto t$$

Dann gilt $sing\ supp(f)^c = \mathcal{R}$

Der Beweis findet sich in [9].

3 Rechnungen und Ergebnisse

Bemerkung 3.1 (Notation)
Da wir ab jetzt Distributionen aus der Physik betrachten, für die es üblich ist als Variablen (t, x) und als Variablen im Fourierraum (ω, k) zu verwenden, schreiben wir statt (x_1, x_2) ab jetzt (t, x) und statt (k_1, k_2) schreiben wir (ω, k). Außerdem verwenden wir das Minkowski-Skalarprodukt für die Fouriertransformation d.h.

$$\hat{f}(\omega, k) := \int f(t, x) e^{-i\omega t + ikx} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x,$$

wieder um den Konventionen in der Physik gerecht zu werden.

3.1 Nützliche Substitionen für $\langle f, \psi_{ast} \rangle$ und Lemmata

Um die Shearlettransformation und damit Wellenfrontmengen auszurechnen, müssen wir Ausdrücke der Form $\lim_{a \to 0} \int f(t, x) \psi_{ast}(t, x) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x$ abschätzen. Da kein expliziter Ausdruck für $\psi_{ast}(x)$ gegeben ist, aber zumindest der Träger der Fouriertransformierten $\hat{\psi}_{ast}(\omega, k)$ bekannt ist, ist es einfacher $\left\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle$ statt $\langle f, \psi_{ast} \rangle$ zu berechnen. Das hat dann die Form

$$\left\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle = \int a^{\frac{3}{4}} \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{\omega} - s \right) \right) \hat{f}(\omega, k) e^{-i\omega t + ikx} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k. \tag{3.1.1}$$

Punktweise konvergiert der Integrand gegen 0, da $\hat{\psi}$ kompakt getragen ist. Für $a \to 0$ wird aber der Träger des Integranden immer weiter „nach außen“ verschoben (vgl. Abb. 2.2), ohne aber (notwendigerweise) im Betrag abzunehmen. Deshalb existiert auch keine integrierbare Majorante, die unabhängig von a ist. Also verschieben wir den Integrationsbereich mittels Substitution so, dass der Integrationsbereich für $a \to 0$ immer der selbe bleibt und wir $\hat{f}$ „immer weiter draußen“ anschauen (siehe Abb. 3.1 und Gleichung (Substitution 2, (3.1.5))). Diese Substituionen werden fast immer Ausgangspunkt unserer Abschätzungen sein.

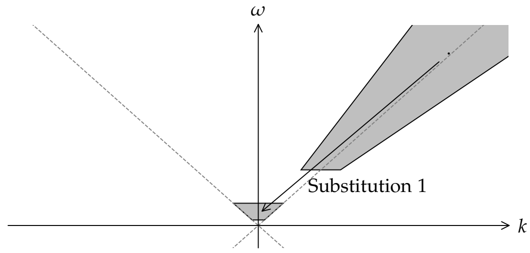


Abb. 3.1: Der Träger von $\hat{\psi}$ vor und nach der Substitution aus Gleichung (3.1.2)

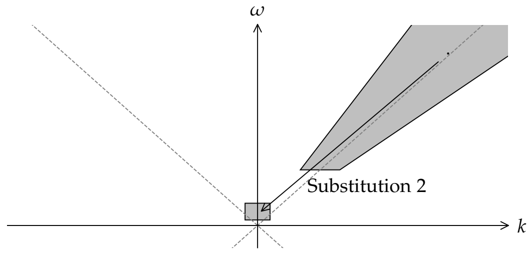


Abb. 3.2: Der Träger von $\hat{\psi}$ vor und nach der Substitution aus Gleichung (3.1.4)

Sei also ψ ein Shearlet wie in Bemerkung 2.9. Sei f die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\mathcal{S}_f(a,s,t)$ gegeben durch

$$
\begin{aligned}
2\pi\mathcal{S}_f(a,s,t) &= 2\pi\left\langle f, \psi_{ast}\right\rangle = \left\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast}\right\rangle \\
&= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\omega t + ikx} \hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega} - s\right)\right)\hat{f}(\omega,k)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k
\end{aligned}
$$

und nach „entscheren“ und „deskalieren“, also der Substitution

$$
\begin{aligned}
a\omega_1 &= \omega' \\
a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega} - s\right) &= \frac{k'}{\omega'}
\end{aligned}
\quad\Longleftrightarrow\quad
\begin{aligned}
\omega &= \frac{\omega'}{a} \\
k &= \frac{\omega' s}{a} + a^{-\frac{1}{2}}k'
\end{aligned}
\tag{3.1.2}
$$

$$
\Rightarrow \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k = a^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}k'
$$

ergibt sich folgendes für $\langle \psi_{ast}, f\rangle$:

$$
\begin{aligned}
2\pi\left\langle f, \psi_{ast}\right\rangle &= \left\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast}\right\rangle \\
&= \iint a^{-\frac{3}{4}}\;\hat{\psi}_1(\omega')\;\hat{\psi}_2\left(\tfrac{k'}{\omega'}\right)\;\hat{f}\left(\tfrac{\omega'}{a}, \tfrac{\omega' s}{a} + \tfrac{k'}{\sqrt{a}}\right)\;e^{-i\frac{\omega'}{a}(t'+sx') - i\frac{k'x'}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}k'
\end{aligned}
$$

(Substitution 1, (3.1.3))

Wie man sieht, tauchen in den Argumente von $\hat{\psi}_1$ und $\hat{\psi}_2$ nun die Parameter a, s, t gar nicht mehr auf, und wir können nun verwenden, was wir aus (2.3) über deren Träger wissen. Alternativ und mit ähnlichem Ergebnis kann auch folgende Substitution

$$\begin{array}{c} a\omega = \omega' \\ a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega} - s\right) = k' \end{array} \iff \begin{array}{c} \omega = \dfrac{\omega'}{a} \\ k = \left(a^{\frac{1}{2}}k' + s\right)\dfrac{\omega'}{a} \end{array} \tag{3.1.4}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k = a^{-\frac{3}{2}}\omega\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}k'$$

gewählt werden, wodurch wieder alle Parameter (a, s, t) aus den Argumenten von $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ verschwinden und sich

$$2\pi \langle f, \psi_{ast} \rangle = \iint a^{-\frac{3}{4}}\, k_1\, \hat{\psi}_1(\omega')\, \hat{\psi}_2(k')\, \hat{f}\left(\tfrac{\omega'}{a}, \omega'\left(a^{-\frac{1}{2}}k' + sa^{-1}\right)\right)\, e^{-i\omega'\left(\frac{t'+sx'}{a} + \frac{k'x'}{\sqrt{a}}\right)}\, \mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}k' \tag{Substitution 2, (3.1.5)}$$

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulässig ist, obwohl sie die Orientierung *nicht* erhält und *keine* Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nämlich $\omega = 0$, liegt nicht im Träger von $\hat{\psi}$.

Beiden Substitution gemein ist aber, dass danach $0 = \omega \notin supp(\hat{\psi})$ und dass $supp(\psi)$ sowohl in k als auch in ω beschränkt ist. ω kann also sowohl nach unten als auch nach oben durch eine Konstante abgeschätzt werden, wann immer dies der Sache dienlich ist. Auch k kann, zumindest nach oben, immer durch eine Konstante abgeschätzt werden.

Wie man Gleichungen (Substitution 1, (3.1.3)) und (Substitution 2, (3.1.5)) ansieht, haben wir schließlich einen Ausdruck der Form $\lim_{a\to 0} \int \hat{f}(a,k)e^{ik\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}k$ abzuschätzen. Eine Möglichkeit für diese Abschätzungen liefert das folgende Lemma:

> **Lemma 3.2 ($\int \hat{f}(a,k)e^{ik\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}k$ abschätzen)**
> Sei $\hat{f} : \mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}}^m \to \mathbb{C}; \quad (a,k) \mapsto \hat{f}(a,k)$ kompakt getragen in k und s.d.
>
> $$\hat{f}(a,k) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \hat{f}_n(k)$$
>
> für alle hinreichend kleinen a und $\hat{f}_n \in C_c^{N_n}(\hat{\mathbb{R}}^n)$. Die Potenzreihe sei punktweise absolut konvergent[1]. Sei $\delta > 0$ und $\mathbb{R}^n \ni x \neq 0$. Sei des weiteren $p = \inf\{n + (N_n +$

[1] Wie es z.B. innerhalb des Konvergenzradius von Taylorreihen gegeben ist.

$1)\delta|n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt:

$$\int \hat{f}(a,k) e^{ik\frac{x}{a^\delta}}\,\mathrm{d}k = O(a^p), \quad \text{für } a \to 0$$

Beweis
Da $\hat{f}_n \in C_c^{N_n}(\hat{\mathbb{R}}^n)$ ist, gilt auch $f_n(x) = O(x^{-N_n-1})$ für $|x| \to \infty$, wobei wie erwartet $f(x) = \hat{f}^\vee(x)$ ist. Dann können wir abschätzen:

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0} = \int \hat{f}(a,k) e^{ik\frac{x}{a^\delta}}\,\mathrm{d}k &= \sum_n a^n \int \hat{f}_n(k) e^{ik\frac{x}{a^\delta}}\,\mathrm{d}k \\ = \sum_n a^n \underbrace{f_n\left(\frac{x}{a^\delta}\right)}_{O\left(\left(\frac{x}{a^\delta}\right)^{-(N_n+1)}\right)} &= \sum_n O(a^n a^{(N_n+1)\,\delta}) = O(a^p)\end{aligned}$$

Da in den späteren Rechnungen für die getwisteten Produkte die Phasenfunktion nicht einfach von der Form $\frac{kx}{a^\delta}$ ist, zeigen wir noch Lemma für die Abschätzung solcher Integrale mit komplizierterere a-Abhängigkeit in der Phase:

Lemma 3.3 ($\int \hat{f}(k) e^{ia^{-\delta}kh(a,x)}\,\mathrm{d}k$ abschätzen)
Sei $\hat{f} : \hat{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ kompakt getragen und C^N. Sei $\delta > 0$ Sei $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad (a,x) \mapsto h(a,x)$ s.d.

$$h(a,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n h_n(x)$$

mit nicht-verschwindendem h_0 und der Potenzreihe absolut konvergent für alle a klein genug. Dann gilt

$$\lim_{a\to 0} \int \hat{f}(k) e^{ia^{-\delta}h(a,x)\,k}\,\mathrm{d}k \sim O(a^{(N+1)\delta})$$

Beweis
Für a klein genug setzen wir die Potenzreihe für h ein und integrieren formal$N+2$-mal partiell. Da $\hat{f} \in C^N(\hat{\mathbb{R}})$ ist, kann $\hat{f}^{(N+1)}$ eine Sprungstelle haben.

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0}\left|\int \hat{f}(k) e^{ia^{-\delta}kh(a,x)}\,\mathrm{d}k\right| &= \lim\left|\int \hat{f}(k) e^{ia^{-\delta}k\sum a^n h_n(x)}\,\mathrm{d}k\right| \\ &= \lim\left|(-1)^{(N+1)} \int \hat{f}^{(N+1)}(k) \frac{e^{ia^{-\delta}k\sum a^n h_n(x)}}{a^{-\delta(N+1)}\underbrace{(i\sum a^n h_n(x))^{N+1}}_{\to h_0(x)^{N+1}\neq 0}}\,\mathrm{d}k\right|\end{aligned}$$

$$\leq \lim a^{(N+1)\delta} \int \left| \frac{\hat{f}^{(N+1)}(k)}{(i \sum a^n h_n(x))^{N+1}} \right| \mathrm{d}k \sim O(a^{(N+1)\delta})$$

Bemerkung 3.4

- Offenbar kann man die beiden vorhergehenden Lemmata auch kombinieren. Um dann
$$\lim_{a \to 0} \int \hat{f}(a,k) e^{ia^{-\delta} h(a,x) k} \, \mathrm{d}k$$
abzuschätzen, muss man bestimmen, welches $\hat{f}_n$ in der Entwicklung von $\hat{f}(a,k)$ nach Lemma 3.2 der dominierende Term ist, also für welches n_0 der Exponent $n + N_n \delta$ minimal wird. Dann ist
$$\lim_{a \to 0} \int \hat{f}(a,k) e^{ia^{-\delta} h(a,x) k} \, \mathrm{d}k \sim O(a^{n_0 + \delta \cdot N_{n_0}})$$
- Falls $\hat{f}^{(N+1)}$ nur endlich hohe Sprunstellen hat (z.B. $\Theta^{(-1+1)}$), kann man auch noch ein weiteres mal partiell integrieren und erhält dann sogar $N+2$.

Bevor wir dann mit den konkreten Rechnungen beginnnen können, brauchen wir noch ein letztes Lemma über das Verhalten der Wellenfrontmengen lorentz-invarianter Distributionen unter Lorentz-Transformationen:

Lemma 3.5 (Wellenfrontmengen Lorentz-invarianter Distributionen)
Sei $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+d})$ lorentz-invariant und $\Lambda \in SO(1,d)$. Sei des Weiteren $\phi_{x_0} : \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{R}$ eine bei $x_0 \in \mathbb{R}^{1+d}$ lokalisierte Testfunktion.

Dann ist $\phi_{\Lambda x_0}(\cdot) := \phi_{x_0}(\Lambda^{-1} \cdot)$ eine bei Λx_o lokalisierte Testfunktion und es gilt für alle $k \in \hat{\mathbb{R}}^{1+d}$
$$\widehat{f\phi_{x_0}}(k) = \widehat{f\phi_{\Lambda x_0}}(\Lambda k).$$

Korollar 3.6
Seien f, Λ, x_0, k wie eben. Dann gilt
$$(x_0, k) \in WF(f) \quad \Longleftrightarrow \quad (\Lambda x_0, \Lambda k) \in WF(f)$$

Beweis
Mit formaler Rechnung folgt:
$$\begin{aligned} \widehat{f\phi_{x_0}}(k) &= \int f(x) \, \phi_{x_0}(x) \, e^{-ik \cdot x} \, \mathrm{d}x = \int f(\Lambda^{-1}x) \, \phi_{x_0}(\Lambda^{-1}x) \, e^{-ik \cdot \Lambda^{-1} x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int f(x) \, \phi_{\Lambda x_0}(x) \, e^{-i\Lambda k \cdot x} \, \mathrm{d}x = \widehat{f\phi_{\Lambda x_0}}(\Lambda k) \end{aligned}$$

3.2 Die Wellenfrontmenge von Δ_m

Nach Gleichung (2.2.2) gilt

$$\Delta_m(t,x) = \int \delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(-\omega)e^{-i\omega t + ikx}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k$$

woraus sich $\widehat{\Delta}_m$ direkt als $\delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(-\omega)$ ablesen lässt.

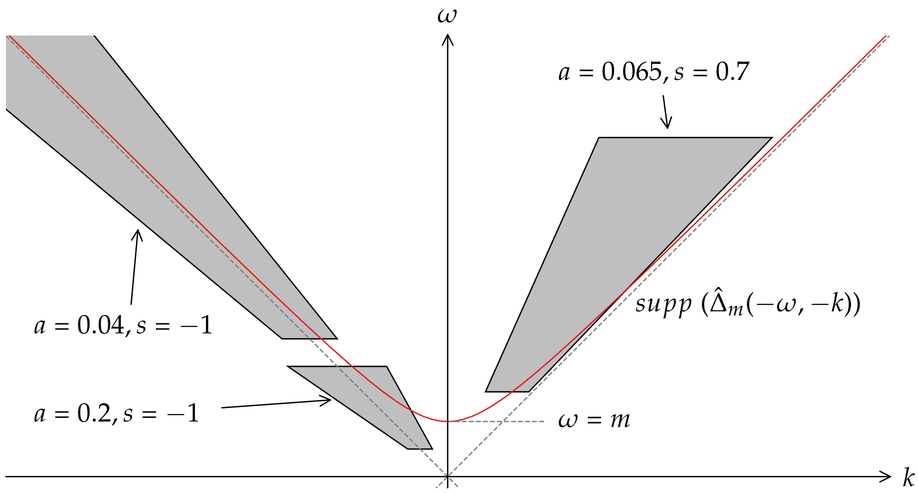


Abb. 3.3: Die Träger von $\hat{\Delta}_m(-\cdot)$ und $\hat{\psi}_{ast}$. Es ist zu sehen, dass für $a \to 0$ und $s \neq \pm 1$ die Träger schließlich disjunkt sind

Offensichtlich ist $supp(\hat{\Delta}_m) \subset C^{(3)}$, d.h. der entscheidende Beitrag der Shearlettransformation ist

$$\left\langle f, \psi_{ast}^{(3)} \right\rangle = \left\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast}^{(3)} \right\rangle = \left\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast}^{(1)}(-\omega,-k) \right\rangle = \left\langle \hat{f}(-\omega,-k), \hat{\psi}_{ast} \right\rangle, \tag{3.2.1}$$

da nach Gleichung (2.3.14) gilt $\hat{\psi}_{ast}^{(3)}(\omega,k) = \hat{\psi}_{ast}^{(1)}(-\omega,-k)$. Berechnen wir also letzteres:

Fall $s \neq \pm 1$

Hier gibt es nicht viel zu tun, denn für a klein genug gilt $supp(\hat{\Delta}_m(-\cdot)) \cap supp(\hat{\psi}_{ast}) = \varnothing$ wie man Abb. 3.3 entnehmen kann. Also gilt

$$2\pi \left\langle \Delta_m, \psi^{(3)}_{ast} \right\rangle = \left\langle \widehat{\Delta}_m(-\cdot), \hat{\psi}_{ast} \right\rangle = 0 = O(a^k)\ \forall k, \quad \text{für } a \text{ klein genug} \tag{3.2.2}$$

Dies gilt für alle $(t', x') \in \mathbb{R}^2$

Fall $s = 1$

Intuition Für $s = 1$ schneidet die Diagonale $\{\omega = k\}$ den Träger $supp(\hat{\psi}_{ast})$ auf der ganzen Länge. Der Betrag von $\hat{\psi}_{ast}$ skaliert mit $a^{\frac{3}{4}}$ (vgl. Gleichung (2.3.10)) und die Länge von $supp(\hat{\psi}_{ast})$ entlang der Diagonalen mit a^{-1} (vgl. Gleichung (2.3.10)). Also erwarten wir schlimmstenfalls $\langle \hat{\Delta}_m, \hat{\psi}_{a1t} \rangle = O\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)$. Aber nur wenn die Wellenfronten von $e^{-i\omega t' + ikx'}$ parallel zu der Singularität und damit der Diagonalen liegen. Andernfalls erwarten wir, dass die immer schneller werdenden Oszillationen der Phase sich gegenseitig auslöschen.

Rechnungen

$$\left\langle \hat{\Delta}_m(-\cdot), \hat{\psi}_{a1t} \right\rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega} - 1\right)\right)\delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\theta(\omega)e^{-i\omega t' + ikx'} d\omega\, \mathrm{d}k$$

Nullstellen von δ :

$$\omega^2 - k^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\omega^2 - m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}}; \text{ wobei nur „+“ in } supp(\hat{\psi}_2) \text{ liegt}$$

$$= a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\omega} - 1\right)\right)\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}} e^{-i\omega t' + i\sqrt{\omega^2 - m^2}x'}\, \mathrm{d}\omega$$

$$= a^{\frac{3}{4}}a^{-1} \int \underbrace{\hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2\underbrace{\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\omega^2 - a^2m^2}}{\omega} - 1\right)\right)}_{= \frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{2\omega^2} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - a^2m^2}}}_{=: \hat{f}(a,\omega)} e^{-i\frac{\omega}{a}t' + i\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - m^2}x'}\, \mathrm{d}\omega$$

Der Integrand vor der Phase lässt sich nun wie in Lemma 3.2 schreiben als

$$\hat{f}(a, \omega) = \sum_{n=0} a^n \hat{f}_n(\omega)$$

mit glatten $\hat{f}_n$ und die Phase als

$$-\frac{\omega}{a}t' + \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - m^2}x' = a^{-1}\omega(t'-x') + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right).$$

Dann können wir Lemma 3.2 und Lemma 3.3 gleichzeitig anwenden und erhalten in führender Ordnung:

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to o}\left\langle \hat{\Delta}_m(-\cdot), \hat{\psi}_{a1t}\right\rangle &= a^{-\frac{1}{4}} \int \underbrace{\hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2(0)}_{=\hat{f}_0(\omega)} e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} \\
&= a^{-\frac{1}{4}}\hat{\psi}_2(0)\psi_1\left(\frac{t'-x'}{a}\right) \\
&\sim O\left(a^{-\frac{1}{4}}\right), \quad \text{falls } x' = t' \\
&\sim O\left(a^k\right)\ \forall k, \quad \text{sonst}
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Das analoge Ergebnis erhält man mit gleicher Rechnung auch für $s = -1$ und $t' = -x'$. Dies bestätigt das intuitiv erwartete Ergebnis.

3.2.1 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Fassen wir die Ergebnisse aus Gleichungen (3.2.2) und (3.2.3) noch einmal tabellarisch zusammen:

	$(t',x')=(0,0)$	$t'=x'$	$t'=-x'$	$t'\neq\pm x'$
s = 1	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	a^k
s = -1	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k
$s\neq\pm1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tab. 3.1: Konvergenzordnung von $\left\langle \Delta_m, \psi^{(3)}_{as(t',x'))}\right\rangle$ im Limit $a\to 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t',x')

Dies deckt sich auch mit den Ergebnissen von Schulz [14] und Hörmander [8], welche jeweils erhalten:

$$WF(\Delta_m) = \{\langle 0,0;-|k|,k\rangle \ \ |k\in\hat{\mathbb{R}}\} \cup \{\langle \pm|x|,x;-\lambda|k|,\mp k\rangle \ \ |k\in\hat{\mathbb{R}},\lambda>0\}$$

Zusätzlich zu der Wellenfrontmenge erhalten wir aber mit dem Exponenten von a auch noch eine Information „wie schlimm“ die entsprechende Richtung ist. Ein Vergleich mit entsprechenden Begriffen der mikrolokalen Analysis wird in Abschnitt 4.1 diskutiert.

3.3 Die Wellenfrontmenge von Θ

Wie in Abschnitt 2.2.1 erklärt, sind Potenzen des Feynmanpropagators gegeben durch Potenzen der Zweipunktfunktion Δ_m und der Heaviside-Funktion Θ. Dementsprechend, muss auch die Wellenfrontmenge von Θ berechnet werden, aber dies ist glücklicherweise auch mit unseren Shearlet-Methoden relativ einfach.

Da Θ die Stammfunktion von δ (im distributionellen Sinne) ist, können wir die Fouriertransformierte dank der üblichen Fourierrechenregeln direkt hinschreiben:[2]

$$\widehat{\Theta(t) \otimes 1(x)}(\omega, k) = \widehat{\Theta}(\omega) \otimes \hat{\delta}(k) = \left(\pi\, \delta(\omega) + \frac{i}{\omega}\right) \otimes 2\pi\, \delta(k) \tag{3.3.1}$$

.

Fall $s \neq 0$

$$supp(\widehat{\Theta(t) \otimes 1(x)}) = \{(\omega, k) \in \hat{\mathbb{R}} | k = 0\}$$

und nach Gleichung (2.3.11)

$$supp(\hat{\psi}) \subset \left\{ k \in \hat{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; k_1 \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right], \left|\frac{k_2}{k_1} - s\right| \leq \sqrt{a} \right\}$$

.

Also gilt für hinreichend große a:

$$supp(\hat{\psi}_{ast}) \cap supp(\widehat{\Theta(t) \otimes 1(x)}) = \varnothing \implies \left\langle \widehat{\Theta(t) \otimes 1(x)}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle = 0 \tag{3.3.2}$$

[2] Wieder nur korrekt bis auf Vorfaktoren von 2π

Fall $s = 0$

Mit Gleichung (3.3.1) können $\left\langle \hat{\Theta} \otimes \hat{1}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle$ direkt berechnen mit dem Ausdruck für $\hat{\psi}_{ast}$ aus Bemerkung 2.9:

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\Theta} \otimes \hat{1}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle &\propto a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\tfrac{k}{\omega} \right) \right) \left(\pi\, \delta(\omega) + \frac{i}{\omega} \right) \delta(k) e^{-i\omega t' + ikx'} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k \\
&= \underbrace{a^{\frac{3}{4}} \pi\, \hat{\psi}_1(0) \hat{\psi}_2(0)}_{=0,\text{ da } \hat{\psi}_1(0)=0} + i a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(0)}{\omega} e^{-i\omega t'} \, \mathrm{d}\omega \\
&= i a^{\frac{3}{4}} \hat{\psi}_2(0) \int \underbrace{\frac{\psi_1(\omega)}{\omega}}_{\in C_c^\infty} e^{-i\omega \frac{t'}{a}} \, \mathrm{d}\omega \\
&= O\left(a^{\frac{3}{4}} \right), \quad \text{falls } t = 0 \\
&= O\left(a^k \right) \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{falls } t \neq 0. \qquad (3.3.3)
\end{aligned}$$

Wobei im letzten Schritt genutzt wurde, dass $\hat{\psi}_1(0) = 0$, $\frac{\hat{\psi}_1(\omega)}{\omega}$ also glatt ist und somit eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

Genau die selben Ergebnisse erhält man mit beinahe genau den selben Rechnungen für $\left\langle \Theta \otimes 1, \psi_{ast}^{(3)} \right\rangle$.

3.3.1 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Und einmal der vollständig halber, die Ergebnisse aus Gleichungen (3.3.2) und (3.3.3) tabellarisch dargestellt:

	$t' = 0$	$t' \neq 0$
$s = 0$	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k
$s \neq 0$	a^k	a^k

Tab. 3.2: Konvergenzordnung von $\langle \Theta \otimes 1, \psi_{as(t',x')} \rangle$ im Limit $a \to 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

3.4 Die Wellenfrontmenge von Δ_m^2

Bevor wir die Wellenfrontmenge von Δ_m^2 berechnen können benötigen wir einen Ausdruck dafür, oder besser noch für die Fouriertransformierte davon.

3.4.1 $\hat{\Delta}^{*2}$ berechnen

Gemäß dem Faltungssatz gilt $\widehat{\Delta_m^2} = \widehat{\Delta_m} * \widehat{\Delta_m} = \widehat{\Delta_m}^{*2}$. Wir müssen also die Faltung von $\widehat{\Delta}_m$ mit sich selber ausrechnen. Dabei gilt (kurze Rechnung):

$$\widehat{\Delta}_m * \widehat{\Delta}_m(-\omega, -k) = \left(\widehat{\Delta}_m(-\cdot) * \widehat{\Delta}_m(-\cdot)\right)(\omega, k)$$

und wir berechnen also letzteren Ausdruck. Das Faltungsintegral ist

$$\widehat{\Delta}_m^{*2}(-\omega, -k) = \int \Theta(\omega')\delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2)\Theta(\omega - \omega')\delta((\omega - \omega')^2 - (k - k')^2 - m^2)\, d\omega'\, dk' \tag{3.4.1}$$

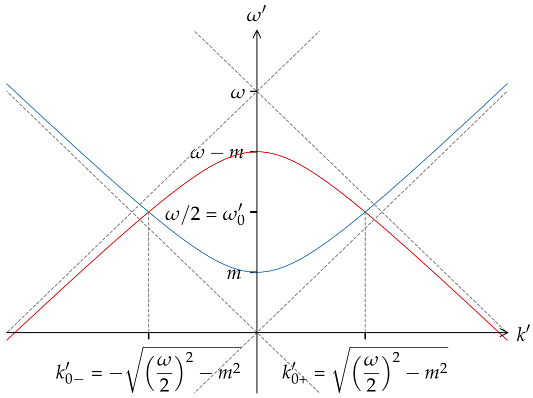


Abb. 3.4: Das zu berechnende Integral aus Gleichung (3.4.1) visualisiert für $k = 0$

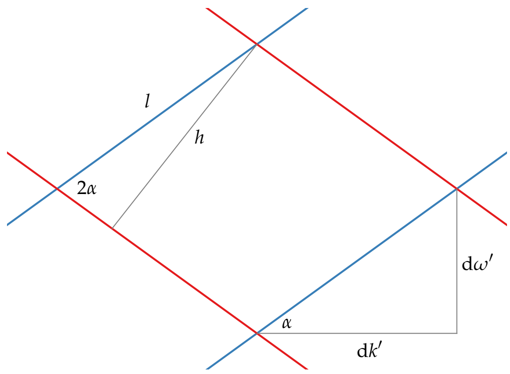


Abb. 3.5: Die Kreuzungstelle bei k'_{0+} von ganz nah angeschaut

Da Δ_m Lorenz-invariant ist, sind Δ_m^2 und $\widehat{\Delta}_m^{*2}$ es auch. Es genügt also $\widehat{\Delta_m^{*2}}$ für $k = 0$ und positive ω zu berechnen. Alle anderen Werte erhalten wir dann aus der Lorentz-Invarianz. An Abb. 3.4 sehen wir schon, dass das Faltungsintegral (3.4.1) nur dann ungleich null ist, wenn (ω, k) oberhalb oder auf der $2m$-Massenschale liegen. Es ist also insbesondere $\omega > 0$.

Um nun das Integral über zwei sich schneidende lineare[3] δ-Distributionen zu berechnen bedienen wir uns eines Physikertricks und stellen uns die δ-Distribution als Grenzwert ($h \to 0$) einer $\frac{1}{h}$-hohen und h-breiten Rechtecksfunktion vor. Dann ist das Integral über die sich schneidenden Rechteckfunktionen proportional zu der Schnittfläche und damit zu $l \cdot h$ in Abb. 3.5. Außerdem schneiden sich die beiden Hyperbeln für $\omega \to +\infty$ in

[3]Linear in dem Sinne, dass die Distribution entlang einer Linie getragen ist. Nicht das es eine lineare Distribution ist

einem rechten Winkel, das Faltungsintegral ergibt hier also 2, da es zwei Schnittpunkte gibt.

Aus Abb. 3.5 lesen wir ab:

$$\tan(\alpha) = \frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'} \quad \text{und} \quad \frac{h}{l} = \sin(2\alpha)$$
$$\Rightarrow l = \frac{h}{\sin\left(2\arctan\left(\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'}\right)\right)} = \frac{h\left(\left(\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'}\right)^2 + 1\right)}{2\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'}} \tag{3.4.2}$$

außerdem gilt

$$\omega' = \sqrt{k'^2 + m^2} \implies \frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}k'} = \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + m^2}} \tag{3.4.3}$$

Wenn wir nun Gleichungen (3.4.2) und (3.4.3) sowie die vorhergehenden Gedanken kombinieren erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta_m}^{*2}(-\omega, 0) &= (3.4.1) \\
&= C\frac{(\mathrm{d}\omega'/\mathrm{d}k')^2\big|_{k_0'} + 1}{\mathrm{d}\omega'/\mathrm{d}k'|_{k_0'}}\Theta(\omega^2 - (2m)^2) \\
&= C\frac{\sqrt{k_0'^2 + m^2}(2k_0'^2 + m^2)}{k_0'(k_0^2 + m^2)}\Theta(\dots) \\
&= C\frac{\sqrt{\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2}(\omega^2 - 3m^2 + m^2)}{\sqrt{\omega^2 - 4m^2}(\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2)}\Theta(\dots) \\
&= C\frac{\omega^2 - 2m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}}\Theta(\dots) \overset{C=2}{=} 2\frac{\omega^2 - 2m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}}\Theta(\dots)
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Jetzt erhalten wir $\widehat{\Delta}_m^{*2}(\omega, k)$ für beliebige $k \neq 0$ noch aus der Lorenz-Invarianz:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta}_m^{*2}(-\omega, -k) &\overset{(\omega,k)\sim(\sqrt{\omega^2-k^2},0)}{=} \widehat{\Delta}_m^{*2}(\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) \\
&= 2\frac{\omega^2 - k^2 - 2m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2}\sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}}\Theta(\omega^2 - k^2 - 4m^2)
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Es ist zu beachten, dass die Heaviside-Funktion genau bei der ersten Nullstelle der zweiten Wurzel im Nenner abschneidet und alle weiteren Nullstellen sowohl des Nenners als auch des Zählers außerhalb der $2m$-Massenschale, und damit außerhalb des Trägers der Heaviside-Funktion, liegen.

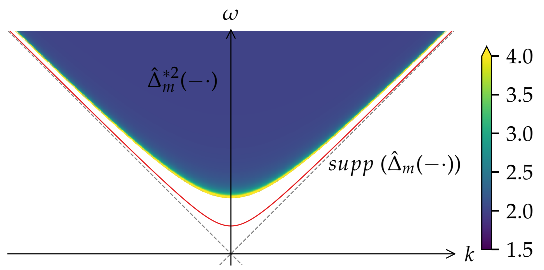


Abb. 3.6: Plot von $\hat{\Delta}_m^{*2}(-\cdot)$ und $\hat{\Delta}_m(-\cdot)$. Je weiter wir uns von der 2m-Massenschale wegbewegen, desto konstanter wird $\hat{\Delta}_m^{*2}(-\cdot)$ und ist singulär genau auf der $2m$-Massenschale

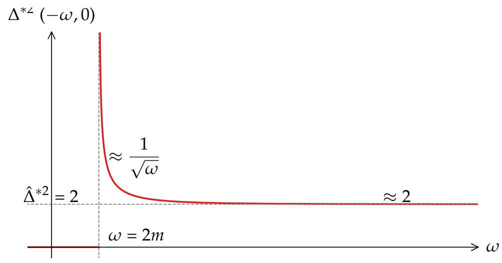


Abb. 3.7: Plot von $\hat{\Delta}_m^{*2}(-\cdot)\big|_{k=0}$ um das asymptotische Verhalten für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ zu verdeutlichen

3.4.2 . . . und nun zur Wellenfrontmenge

Mit diesem Ausdruck für $\widehat{\Delta_m}^{*2}$ können wir uns nun der Wellenfrontmenge widmen.

Fall $|s| > 1$

Genau wie im Fall $s \neq 1$ bei der massiven Zweipunktfunktion (vgl. Abschnitt 3.2) ist hier nichts zu tun, da für a klein genug wieder

$$supp(\hat{\psi}_{ast}^{(3)}) \cap supp(\widehat{\Delta_m}^{*2}) = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \widehat{\Delta_m}^{*2}, \hat{\psi}_{ast}^{(3)} \right\rangle = 0 \tag{3.4.6}$$

gilt.

Fall $|s| < 1$

Der Fall $|s| < 1$ entspricht k im Vorwärtslichtkegel, auf dessen Richtungen die Lorentz-Gruppe SO(1, 1) transitiv operiert. Wir können also dank Lemma 3.5 o.B.d.A nur $s = 0$ betrachten, und erhalten für allgemeines $|s| < 1$ das selbe Ergebnis. Wir bedienen uns direkt bei Substitution 2, (3.1.5) und schreiben

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\Delta}^{*2}_{m}, \widehat{\psi}^{(3)}_{a0t} \right\rangle &= \left\langle \widehat{\Delta}^{*2}_{m}(-\cdot), \widehat{\psi}_{a0t} \right\rangle \qquad (3.4.7)\\
&= 2a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(a\omega)\, \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega}-0\right)\right)\left(\omega^2-k^2-2m^2\right)}{\sqrt{\omega^2-k^2}\sqrt{\omega^2-k^2-4m^2}}\\
&\quad\cdot \Theta\left(\omega^2-k^2-4m^2\right) e^{-i\omega t'+ikx'}\omega\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k\\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\, \hat{\psi}_2(k)\left(\omega^2 a^{-2}-\omega^2\left(a^{-\frac{1}{2}}k+0a^{-1}\right)^2-2m^2\right)}{\sqrt{\omega^2 a^{-2}-\omega^2\left(a^{-\frac{1}{2}}k+0^{-1}\right)^2}\sqrt{\omega^2 a^{-2}-\omega^2\left(a^{-\frac{1}{2}}k+0a^{-1}\right)^2-4m^2}}\\
&\quad\cdot \Theta\left(\omega^2 a^{-2}-\omega^2\left(a^{-\frac{1}{2}}k+0a^{-1}\right)^2-4m^2\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-0x'}{a}+k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)}\omega\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k\\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\, \hat{\psi}_2(k)\cancel{a^{-2}}\left(\omega^2\left(1-ak^2\right)-2a^2m^2\right)\Theta(\dots)e^{\cdots}\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}\cancel{a^{-2}}\sqrt{1-ak^2}\sqrt{1\omega^2-a\omega^2k^2-4a^2m^2}}\mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}k
\end{aligned}$$

An dieser Stelle bedienen wir uns nun bei Lemma 3.2 mit

$$\begin{aligned}
\hat{f}(a,\omega,k) = &\frac{\omega^2\left(1-ak^2\right)-2a^2m^2}{\sqrt{1-ak^2}\sqrt{\omega^2-a\omega^2k^2-4a^2m^2}}\\
&\cdot \hat{\psi}_1(\omega)\, \hat{\psi}_2(k)\, \Theta(\omega^2-a\omega^2k^2-4a^2m^2)
\end{aligned}$$

Für a klein genug gilt $supp(\hat{\psi}) \subset supp(\Theta(\dots))$, $\Theta(\dots)$ spielt also keine Rolle. $\omega = 0 \notin supp(\hat{\psi}_1)$. Der Nenner ist offensichtlich als Polynom analytisch in (a,ω,k). Der Zähler ist analytisch, da $\omega = 0$ ausgeschlossen ist und $a \mapsto \alpha a + \beta a^2 + \gamma$ sowie $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\delta+x}}$ für $\delta > 0$ sowie Verknüpfungen und Produkte analytischer Funktionen analytisch sind. Also können wir für kleine a schreiben

$$\hat{f}(a,\omega,k) = \sum_{n=0} a^n \hat{f}_n(\omega,k) \qquad (3.4.8)$$

mit glatten $\hat{f}_n$; also $N_n = \infty$ für alle n und $p = +\infty$ in Lemma 3.2.

Damit erhalten wir für $(t',x') \neq 0$ und $|s| < 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0}\left\langle \Delta^2_m, \psi^{(3)}_{ast}\right\rangle &= \lim_{a\to 0}\left\langle \Delta^2_m, \psi^{(3)}_{a0t}\right\rangle \sim a^p\\
&\sim O(a^k)\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{falls } (t',x') \neq 0 \qquad (3.4.9)
\end{aligned}$$

Für ($t' = 0 = x'$) erhalten wir in führender Ordnung in a:

$$\begin{aligned}\left\langle \Delta_m^2, \psi_{ast}^{(3)} \right\rangle &\sim 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{f}_0(\omega,k) e^{-i\omega\left(\frac{0-s0}{a}+k\frac{0}{\sqrt{a}}\right)} \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\omega^2 \Delta s}{\sqrt{\Delta s}\sqrt{\omega^2 \Delta s}} \hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2(k)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\ &\sim O\left(a^{-\frac{3}{4}}\right), \quad \text{falls } x' = 0 = t' \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

<u>**Fall** $s = -1$</u>

Auch hier beginnen wir direkt mit Gleichung (Substitution 2, (3.1.5)):

$$\begin{aligned}&\left\langle \widehat{\Delta_m^{*2}}(-\cdot), \hat{\varphi}_{a-1t} \right\rangle \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\,\hat{\psi}_2(k)\left(\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2\right) - 2m^2\right)}{\sqrt{\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2\right)}\sqrt{\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2\right) - 4m^2}} \\ &\quad\cdot \Theta\left(\omega^2\left(a^{-2}\cancel{(1-s^2)} - 2a^{-\frac{3}{2}} - a^{-1}k^2\right) - 4m^2\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}+k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)} \cdot \omega\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega)\,\hat{\psi}_2(k)\cancel{a^{-\frac{3}{2}}}\left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}2m^2\right)}{\cancel{a^{-\frac{3}{2}}}\cancel{\omega}\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2}\sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2}} \\ &\quad\cdot \Theta\left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2\right) \cdot e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}+k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)} \cancel{\omega}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2(k)\ \left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}2m^2\right)\Theta(\ldots)e^{-i\omega k\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2}\sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2}}\,\mathrm{d}k \right\}}_{=:\ \hat{g}_{a,x'}(\omega)} \\ &\quad\cdot \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{g}_{a,x'}(\omega)\,\hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}\right)}\,\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Nun müssen wir also $\hat{g}_{a,x'}(\omega)$ genauer betrachten. Das Ziel ist es, zu zeigen dass $\hat{g}_{a,x'}(\omega)$ für feste x' und hinreichend kleine a glatt ist. Dann ist der letzte Ausdruck in Gleichung (3.4.11) wieder die Fouriertransformierte einer glatten Funktion und wir wissen, was wir wissen wollen. $\hat{\psi}_2(k) \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}})$. Θ schneidet genau bei der ersten Nullstelle des Nenners ab. Deshalb verschieben wir durch eine Substitution $k \to k'$ den Integrationsbereich genau so, dass diese Nullstelle bei $k' = 0$ liegt.

Sei also $k_0(a,\omega) := \frac{\omega-\sqrt{\omega^2-4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega}$ die relevante Nullstelle des Nenners am Integrationsbereich. Dann ist die a-Abhängigkeit von k_0 in erster Näherung gegeben durch $0 < k_0(a,\omega) = \frac{2m^2}{\omega^2}a^{\frac{3}{2}} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)$ und mit $k' = k - k_0$ gelten folgende Ausdrücke für den Nenner und den Zähler:

Zähler

$$\begin{aligned}
2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}2m^2 &= 2\omega^2(k' + k_0(a,\omega)) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0(a,\omega))^2 - a^{\frac{3}{2}}2m^2 \\
&= 2\omega^2 k' + 2\omega^2\frac{2m^2}{\omega^2}a^{\frac{3}{2}} + 2\omega^2 O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) \\
&\quad - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0(a,\omega))^2 - a^{\frac{3}{2}}2m^2 \\
&= 2\omega^2 k' + 2a^{\frac{3}{2}}m^2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0(a,\omega))^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Nenner

$$\begin{aligned}
\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2}\sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2} &= \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0(a,\omega))}\sqrt{k' + k_0(a,\omega)} \\
&\quad \cdot \underbrace{\sqrt{-a^{\frac{1}{2}}\omega^2\left(k' - \frac{2\sqrt{\omega^2-4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega}\right)}}_{=\sqrt{2-a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}}\sqrt{k'}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\hat{g}_{a,x'}(\omega) = \int \frac{\hat{\psi}_2(k' + k_0(a,\omega))\left(2\omega^2 k' + 2a^{\frac{3}{2}}m^2 - a^{-\frac{1}{2}}(k' + k_0(a,\omega))^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)\right)}{\sqrt{k'}\sqrt{k' + k_0(a,\omega)}\sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0(a,\omega))}\sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}}\Theta(k')e^{-i\omega k\frac{x'}{a}}\,\mathrm{d}k' \tag{3.4.12}$$

und wir können nun eine integrierbare Majorante für den Integranden in $\hat{g}_{a,x'}$ finden, die unabhängig von a ist.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\hat{\psi}_2(k' + k_0(a,\omega))\left(2\omega^2 k' + 2a^{\frac{3}{2}}m^2 - a^{-\frac{1}{2}}(k' + k_0(a,\omega))^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)\right)}{\sqrt{k'}\sqrt{k' + k_0(a,\omega)}\sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0(a,\omega))}\sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}}\Theta(k')\right| \\
&\quad\leq \frac{\text{const}\,\hat{\psi}_2(k' + k_0(a,\omega))}{\sqrt{k'}}\frac{\cancel{2}\omega^2 k' + 2a^{\frac{3}{2}}m^2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0(a,\omega))^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}{\sqrt{k' + k_0(a,\omega)}\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\sqrt{2}}}\Theta(k') \\
&\quad\leq \frac{\text{const}\,\hat{\psi}_2(k')}{\sqrt{k'}}\left(\frac{\omega^2 k'}{\sqrt{k'}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0(a,\omega))^2}{\sqrt{k' + k_0(a,\omega)}} + \frac{2a^{\frac{3}{2}}m^2}{\sqrt{k' + k_0(a,\omega)}} + \frac{O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}{\sqrt{k_0(a,\omega)}}\right)\Theta(k')
\end{aligned}$$

$$= \frac{\text{const}\hat{\psi}_2(k')}{\sqrt{k'}}\left(\omega^2\sqrt{k'} - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0(a,\omega))^{\frac{3}{2}} + \underbrace{\frac{2a^{\frac{3}{2}}m^2}{\sqrt{\frac{2m^2}{\omega^2}a^{\frac{3}{2}} + O(a^{\frac{7}{2}})}}}_{O\left(a^{\frac{3}{4}}\right)} + \dots\right)\Theta(k')$$

$$\leq \frac{\text{const}\,\hat{\psi}_2(k')}{\sqrt{k'}}\Theta(k') \tag{3.4.13}$$

Der letzte Ausdruck ist integrierbar und in den Abschätzungen wurde u.a. verwendet, das $\hat{\psi}_2$ kompakt getragen, glatt und beschränkt ist. In „const" wurden immer notwendige, aber letzten Endes irrelevante, Vorfaktoren gesammelt.

Also haben wir dürfen wir Ableitung nach ω und Integration nach k' vertauschen, um zu argumentieren, dass $\hat{g}_{a,x'}(\omega)$ als Funktion von ω im Bereich $\omega \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ für hinreichend kleine a glatt ist: Wir integrieren nur über ein Kompaktum und die Singularität des Integranden $\frac{1}{\sqrt{k'}}$ wird durch Ableiten nach ω nicht schlimmer. Alle inneren Ableitungen $\partial_\omega^N k_0(a,\omega)$ sind für kleine a und $\omega \geq \frac{1}{2}$ beschränkt, genau so wie $\partial_\omega^N \sqrt{k' + k_0(a,\omega)}$ und ohnehin $\partial_\omega^N \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0(a,\omega))}$ oder $\partial_\omega^N \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}$. Damit existieren auch alle Ableitungen $\partial_\omega^N \hat{g}_{a,\omega}(\omega)$, es ist also glatt. Somit können wir schließlich abschätzen:

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0}\left|\left\langle \widehat{\Delta_m^{*2}}(-\cdot), \hat{\psi}_{a-1t}\right\rangle\right| &\leq \lim_{a\to 0} 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\hat{g}_{a,x'}(\omega)\,\hat{\psi}_1(\omega)}_{\in C_c^\infty} e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}\right)}\, d\omega \\
&= \lim_{a\to 0} 2a^{-\frac{3}{4}}(\hat{g}_{a,x'}\hat{\psi}_1)^\vee\left(\frac{-t'-x'}{a}\right) \\
&\sim O\left(a^{-\frac{3}{4}}\right), \quad \text{falls } t' = -x' \\
&\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Zu genau dem selben Ergebnis für $s = 1$ und $t' = x'$ führen auch analoge Rechnungen.

schärfere, leider nicht bewiesene Ergebnisse

In den vorhergehenden Abschätzungen haben wir die schnell oszillierende Phase in Gleichung (3.4.12) nicht verwendet, und erhalten deshalb keinen Unterschied zwischen $0 \neq x' = -t'$ und $x' = 0 = t'$! Schätzt man Gleichung (3.4.12) mit Lemma 3.2 ab und geht davon aus, dass p gegben ist durch den $\hat{f}_0$-Term, sieht man diesen Unterschied und erhielte

$$\left\langle \widehat{\Delta}^{*2}_m, \hat{\psi}^{(3)}_{a-1t} \right\rangle \sim O(a^{-\frac{1}{4}}), \quad \text{falls } t' = -x' \neq 0$$
$$\sim (a^{-\frac{3}{4}}), \quad \text{falls } t' = 0 = x'$$
$$\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}$$

Nur leider ist es nicht möglich, denn Integranden in Gleichung (3.4.12) in einer Taylor- oder Laurentreihe um $a = 0$ zu entwickeln, s.d. dass sich die Differenzierbarkeitsordnung der $\hat{f}_n$ ablesen lässt. Die ersten paar Terme des Bruches[4] sehen aber so aus:

$$\begin{aligned} \frac{\cdots}{\sqrt{\cdots}\sqrt{\cdots}} = &\frac{3\,a^4m^4}{8\,w^3} + \frac{a^{\frac{7}{2}}m^4}{2\,k'w^3} + \frac{a^3m^4}{2\,k'^2w^3} + w + \frac{3\left(k'^4m^4w^2 + 16\,m^6\right)a^{\frac{11}{2}}}{32\,k'w^5} \\ &+ \frac{\left(9\,k'^8m^4w^4 + 624\,k'^4m^6w^2 + 352\,m^8\right)a^7}{512\,k^2w^7} \\ &+ \frac{(5\,k^4m^4w^2 + 16\,m^6)a^5}{32\,k^2w^5} + \frac{(k^8m^4w^4 + 50\,k^4m^6w^2 - 72\,m^8)a^{\frac{13}{2}}}{32\,k^3w^7} \\ &+ \frac{(k^4m^4w^2 - 4\,m^6)a^{\frac{9}{2}}}{4\,k^3w^5} + \frac{(7\,k^8m^4w^4 + 224\,k^4m^6w^2 + 240\,m^8)a^6}{128\,k^4w^7}, \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

haben also immer eine größere Potenz in a als in k'^{-1}, was sich so weit mit der Behauptung deckt, das der dominierende Term für p gegeben ist durch $\hat{f}_0$. Deshalb nehmen wir diese Ergebnisse unter Vorbehalt auch noch mit auf.

3.4.3 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Wenn wir die Ergebnisse aus Gleichungen (3.4.6), (3.4.9), (3.4.14) und () zusammenfassen, erhalten wir für die Wellenfrontmenge von $\widehat{\Delta}^{*2}_m$:

Erfreulicherweise deckt sich dies wieder mit den Ergebnissen von Schulz [14, Cor. 3.70], welcher für allgemeine Potenzen von Δ_m folgendes erhält:

$$WF^{\psi}_{SG}(\Delta^k_m) \subset WF^{\psi}_{SG}(\Delta_m) \cup \{\langle 0, 0; -\lambda, |x|\rangle \mid |x| \in \hat{\mathbb{R}}, \lambda > |x|\}$$

[4] laut dem CAS sage

	$(t',x')=0$	$t'=x'\neq 0$	$t'=-x'\neq 0$	$t'\neq \pm x'$
$s=1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	$a^{-\frac{3}{4}}(a^{-\frac{1}{4}})$	a^k	a^k
$s=-1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	a^k	$a^{-\frac{3}{4}}(a^{-\frac{1}{4}})$	a^k
$\lvert s\rvert<1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	a^k	a^k	a^k
$\lvert s\rvert>1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tab. 3.3: Konvergenzordnung von $\left\langle \Delta_m^2, \psi^{(3)}_{as(t',x')} \right\rangle$ im Limit $a \to 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t',x'). Die vermuteten, aber nicht bewiesenen schärferen Grenzen sind in Klammern.

3.5 Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m^{\star_M 2}$

Bevor wir uns aber der Wellenfrontmenge widmen können, brauchen wir einen Ausdruck für die Fouriertransformierte $\widehat{\Delta_m^{*_\Omega 2}}$ von $\Delta_m^{\star_M 2}$.

3.5.1 $\hat{\Delta}_m^{*_\Omega 2}$ berechnen

Auch für die getwistete Faltung ist schnell nachgerechnet, dass

$$\widehat{\Delta_m} *_\Omega \widehat{\Delta_m}(-\omega,-k) = \overline{\left(\widehat{\Delta_m}(-\cdot) *_\Omega \widehat{\Delta_m}(-\cdot)\right)}(\omega,k).$$

Wie wir später sehen werden, ist die komplexe Konjugation irrelevant, da alles reell. Die Zutaten für die getwistete Faltung sind

$$\widehat{\Delta_m}(-\cdot) = \delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(\omega) \tag{3.5.1a}$$

die Fouriertransformierte der massiven Zweipunktfunktion

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5.1b}$$

die kanonische symplektische Matrix auf $\mathbb{R}^n$.

Mit Definition 2.4 und Gleichungen (3.5.1a) und (3.5.1b) erhalten wir also

$$\widehat{\Delta_m^{*_\Omega 2}}(-\omega,-k) = \int \delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2)\delta((\omega'-\omega)^2 - (k-k')^2 - m^2) \cdot \Theta(\omega')\Theta(\omega-\omega')e^{\frac{i}{2}(\omega' k - \omega k')}\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}k' \tag{3.5.2}$$

und damit das selbe Integral wie in Gleichung (3.4.1) bis auf einen zusätzlichen Phasenfaktor. Nachdem wir gezeigt haben, dass auch dieser lorentz-invariant ist, können wir das Integral mit dem selben Trick wie in Abschnitt 3.4.1 berechnen.

Proposition 3.7 (Ω_{std} ist lorentz-invariant für $n = 2$)
Ω_{std} ist lorentz-invariant für $n = 2$

Beweis
Eine einfache Rechnung zeigt

$$\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ -\sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\beta & -\sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\beta \in \mathbb{R}$.

Mit Proposition 3.7 ist $\widehat{\Delta}_m^{*_\Omega 2}$ lorentz-invariant und es reicht aus $\widehat{\Delta}_m^{*_\Omega 2}(\omega, 0)$ zu berechnen.

Die beiden Kreuzungspunkte der δ-Distributionen liegen bei (vgl. Abb. 3.4)

$$(\omega_0', k_{0\pm}') = \left(\frac{\omega}{2}, \pm\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - m^2} \right)$$

Die „Fläche“ A der Kreuzungspunkte der δ-Distributionen wurde in Abschnitt 3.4.1 berechnet und ist

$$A = \frac{\omega^2 - m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}}.$$

Der Phasenfaktor nimmt bei den Kreuzungspunkten folgende Werte an:

$$e^{\frac{i}{2}\Omega((\omega,k),(\omega_0',k_{0\pm}'))} = e^{\pm\frac{i}{2}\left(-\omega^2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{\omega^2}}\right)}$$

Kombinieren wir also die vorhergehenden Resultate erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta}_m^{*_\Omega 2}(-\omega, 0) &= Ae^{\frac{i}{2}\Omega((\omega,k),(\omega_0',k_{0+}'))} + Ae^{\frac{i}{2}\Omega((\omega,k),(\omega_0',k_{0-}'))} \\
&= \frac{\omega^2 - 2m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \left\{ e^{-\frac{i}{2}\omega^2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{\omega^2}}} + e^{\frac{i}{2}\omega^2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{m^2}{\omega^2}}} \right\} \Theta\left(\omega^2 - 4m^2\right) \\
&= 2\frac{\omega^2 - 2m^2}{\omega\sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \cos\left(\varphi(\omega^2)\right) \Theta\left(\omega^2 - 4m^2\right),
\end{aligned}$$

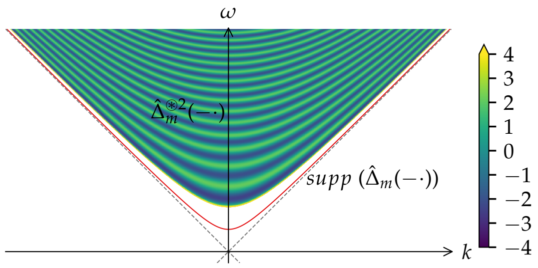


Abb. 3.8: Plot von $\hat{\Delta}_m^{*\Omega 2}(-\cdot)$ und $\hat{\Delta}_m(-\cdot)$. Wieder liegt der Träger von $\hat{\Delta}_m^{*\Omega 2}(-\cdot)$ oberhalb der $2m$-Massenschale.

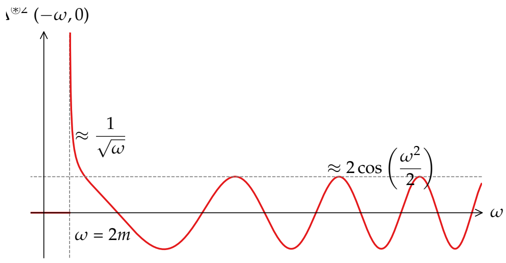


Abb. 3.9: Plot von $\hat{\Delta}_m^{*\Omega 2}\Big|_{k=0}(-\cdot)$ um das asymptotische Verhalten für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ zu verdeutlichen

wobei offenbar

$$\varphi(\omega^2) = \frac{\omega^2}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{\omega^2}}.$$

Und mit Lorentz-Invarianz erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta_m^{*\Omega 2}}(-\omega, -k) &= \widehat{\Delta_m^{*\Omega 2}}(-\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) \\
&= 2\frac{\omega^2 - k^2 - 3m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2}\sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}} \cos\left(\frac{k^2 - \omega^2}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{k^2 - \omega^2}}\right) \\
&\qquad \cdot \Theta\left(\omega^2 - k^2 - 4m^2\right) \\
&= \widehat{\Delta_m^{*2}}(-\omega, -k)\cos(\varphi(\omega^2 - k^2)). \qquad (3.5.3)
\end{aligned}$$

3.5.2 . . . und nun zur Wellenfrontmenge von $\hat{\Delta}_m^{*\Omega 2}$

Da $\widehat{\Delta_m^{*\Omega 2}} = \widehat{\Delta_m^{*2}} \cdot \cos$ ist, sind viele der Abschätzungen genau analog zu Abschnitt 3.4, und wir führen diese nicht noch einmal in aller Ausführlichkeit aus, sondern arbeiten nur heraus, wann der cos-Faktor wie einen Unterschied macht.

Fall $|s| > 1$

Wir bedienen uns wieder genau des selben Arguments, wie in Gleichung (3.4.6) und dürfen direkt schreiben:

$$\left\langle \widehat{\Delta_m^{*\Omega 2}}, \hat{\psi}_{ast}^{(3)} \right\rangle = \left\langle \widehat{\Delta_m^{*\Omega 2}}(-\cdot), \hat{\psi}_{ast} \right\rangle = 0, \quad \text{für alle } a \text{ klein genug} \qquad (3.5.4)$$

Fall $|s|< 1, (x,t) \neq 0$

Auch hier nutzen wir wieder Lemma 3.5 um o.B.d.A nur $s = 0$ zu betrachten, und alle restlichen Fälle aus Lorentz-Invarianz zu erhalten.

Da $\widehat{\Delta_m^{*\Omega 2}} = \widehat{\Delta_m^{*2}} \cos(\dots)$ können wir direkt mit dem Ausdruck (3.4.7) $\cdot \cos$ weiter arbeiten, haben jetzt aber eine kompliziertere Phase:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\Delta_m^{*\Omega 2}}, \widehat{\psi_{a0t}^{(3)}} \right\rangle &= \left\langle \widehat{\Delta_m^{*\Omega 2}}(-\cdot), \widehat{\psi_{a0t}} \right\rangle \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\frac{\hat{\psi}_1(\omega)\, \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 \left(1 - ak^2\right) - 2a^2m^2\right)}{\sqrt{1-ak^2}\sqrt{\omega^2 - a\omega^2k^2 - 4a^2m^2}} \Theta(\cdots)}_{=: \hat{f}(a,\omega,k)} \\
&\quad \cdot \cos\left(\varphi\left(\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{k^2}{a}\right)\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{f}(a,\omega,k) \left(e^{-i\tilde{\varphi}_1(a,\omega,k,t',x')} + e^{-i\tilde{\varphi}_2(a,\omega,k,t',x')}\right) \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}k
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\hat{f}(a,\omega,k) = \sum_{n\geq 0} a^n \hat{f}_n(\omega,k) \tag{3.5.5}
$$

nach den Argumenten vor Gleichung (3.4.8) mit glatten $\hat{f}_n$ und die Phasenfunktionen $\tilde{\varphi}_1$ und $\tilde{\varphi}_2$ durch Ausschreiben des cosinus als e-Funktionen und dann zusammenfassen mit $e^{-i\omega\left(\frac{t'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)}$ entstehen. Wir betrachten im folgenden nur den $\tilde{\varphi}_1$-Term, für den anderen gelten analoge Überlegungen. Es ist

$$
\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_1(a,\omega,k,t',x') &= \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{k^2}{a}\right)\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{a^{-1}k^2 + a^{-2}\omega^2}} + \omega\left(\frac{t'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right) \\
&= a^{-2}\left(\frac{1}{2}\left(\omega^2 + ak^2\right)\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^2m^2}{ak^2 - \omega^2}} + a\omega\left(t' + k\sqrt{a}x'\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.5.6}
$$

Dieses $\tilde{\varphi}_1(a,\omega,k,t',x')$ ist für a klein genug, alle (t',x') und $(\omega,k) \in supp(\hat{\psi}_1(\omega) \cdot \hat{\psi}_2(k))$ glatt und streng monoton steigend in ω. Also existiert für a klein genug, alle (t',x') und $(\omega,k) \in supp(\hat{\psi}_1(\omega) \cdot \hat{\psi}_2(k))$ eine glatte Reparametrisierung $\tilde{\omega}(\omega)$ von ω mit streng positiver Ableitung $\tilde{\omega}'$ s.d.

$$
\tilde{\varphi}_1(a,\omega(\tilde{\omega}),k,t',x') = a^{-2}\,\tilde{\omega}\, h(a,k,t',x') \tag{3.5.7}
$$

mit glattem h. Nach Gleichung (3.5.6) ist $a^2\tilde{\varphi}$ für a klein genug analytisch in a, wir können also h wie in Lemma 3.3 als Potenzreihe in a schreiben: $h(a,k,t',x') = \sum_{n=0} a^n h_n(k,t',x')$. In der Potenzreihenentwicklung Gleichung (3.5.5) von $\hat{f}$ sind alle $\hat{f}_n$ glatt, wir können also in Lemma 3.3 für $\hat{f}$ nur den ersten Term $\hat{f}_0$ verwenden.

$$\lim_{a\to 0}\left\langle \widehat{\Delta_m^{*\Omega 2}}, \widehat{\psi}^{(3)}_{a0t}\right\rangle \sim \lim_{a\to 0}\int \underbrace{\int \hat{f}_0(\omega(\tilde{\omega}),k) e^{i\tilde{\omega}a^{-2}h(a,t',x')}\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}'}}_{\sim O(a^\infty)\text{ nach Lemma 3.3}}\mathrm{d}k$$

$$\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k\in\mathbb{N} \tag{3.5.8}$$

Fall $s = -1$

Da $\widehat{\Delta_m^{*\Omega 2}} = \widehat{\Delta_m^{*2}}\cos(\ldots)$ ist, haben wir bis auf den cos-Faktor die selben Analysis zu betreiben, wie für $\widehat{\Delta_m^{*2}}$.

$$\begin{aligned}
&\left\langle \widehat{\Delta_m^{*\Omega 2}}(-\cdot), \widehat{\psi}_{a-1t}\right\rangle \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}}\int \underbrace{\frac{\hat{\psi}_1(\omega)\hat{\psi}_2(k'+k_0)\left(2\omega^2(k'+k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}}2m^2\right)\Theta(k')}{\sqrt{k'}\sqrt{k'+k_0}\sqrt{2-a^{\frac{1}{2}}(k'+k_0)}\sqrt{-a^{\frac{1}{2}}\omega^2\left(k' - \frac{2\sqrt{\omega^2-4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega}\right)}}}_{=:\hat{f}(a,\omega,k')} \\
&\quad\cdot\cos\left(\frac{2\omega^2(k'+k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0)^2}{2a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{2\omega^2(k'+k_0)-a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0)^2}}\right) \\
&\quad\cdot e^{-i\omega\left(\frac{t'+x'}{a}+\frac{(k'+k_0)x'}{\sqrt{a}}\right)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}k' \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}}\int \underbrace{\int \hat{f}(a,\omega,k')\left(e^{i\tilde{\varphi}_1(a,\omega,k',x')}+e^{i\tilde{\varphi}_2(a,\omega,k',x')}\right)\mathrm{d}k'}_{=:\hat{g}_a(\omega)}\, e^{-i\omega\frac{t'+x'}{a}}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

wobei $k_0(a,\omega) = \frac{\omega-\sqrt{\omega^2-4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega} = \frac{2m^2}{\omega^2}a^{\frac{3}{2}} + O(a^{\frac{7}{2}})$ und $\tilde{\varphi}_1$ und $\tilde{\varphi}_2$ durch Ausschreiben des cos in e-Funktionen und zusammenfassen mit $e^{-i\omega\frac{(k'+k_0)x'}{\sqrt{a}}}$ entstehen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_1(a,\omega,k',x') &= \frac{2\omega^2(k'+k_0) - a^{\frac{1}{2}}(k'+k_0)^2}{2a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{2\omega^2(k'+k_0)-a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0)^2}} - \omega\frac{(k'+k_0)x'}{\sqrt{a}} \\
&= a^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{2\omega^2(k'+k_0) - a^{\frac{1}{2}}(k'+k_0)^2}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{a^{\frac{3}{2}}m^2}{2\omega^2(k'+k_0)-a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k'+k_0)^2}} - a\omega(k'+k_0)x'\right)
\end{aligned}$$

und $\tilde{\varphi}_2$ analog. $\hat{f}(a,\omega,k')$ ist wieder der Integrand von Gleichung (3.4.12), kann also genau so abgeschätzt werden und ist kompakt getragen in (ω,k'). Also existiert $\hat{g}_a(\omega)$ für alle ω und da die inneren Ableitungen $\partial_\omega^N \tilde{\varphi}_1(a,\omega,k',x')$ sowie $\partial_\omega^N \hat{f}(a,\omega,k')$ für a klein genug alle beschränkt sind existiert auch $\partial_\omega^N \hat{g}_a(\omega)$ für alle N, $\hat{g}_a(\omega)$ ist also glatt und kompakt getragen. Damit ist dann

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{\Delta_m}^{*\Omega 2}, \widehat{\psi}_{a-1,t} \right\rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{g}_a(\omega) e^{-i\omega \frac{t'+x'}{a}} \, \mathrm{d}\omega \\ &\sim O(a^k) \;\; \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{falls } t' \neq -x' \\ &\sim O(a^{-\frac{3}{4}}) \;\; \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{falls } t' = -x' \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

Genau das analoge Ergebnis erhält man für $s = 1$ und $t' = x'$.

schärfere, nicht bewiesene Ergebnisse

Wie schon bei der ungetwisteten Zweipunktfunktion, haben wir bei unseren Abschätzungen für $\hat{g}_a(\omega)$ nicht die in k' schnell oszillierende Phase genutzt. Führt man im Gleichung (3.5.6) eine Reparametrisierung $\tilde{k}'(k')$ ein s.d.

$$\tilde{\varphi}_1(a,\omega,k'(\tilde{k}'),x') = a^{-\frac{3}{2}} \tilde{k}' \, h(a,\omega,x')$$

mit $h = \sum_{n=0} a^n h_n$ wie in Lemma 3.3, entwickelt $\hat{f}(a,\omega,k')$ wie in Lemma 3.2 und geht davon aus dass der dominierende Term in Lemma 3.2 durch $\hat{f}_0$ gegeben ist, erhält man das schärfere Ergebnis:

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0} \left\langle \widehat{\Delta_m}^{*\Omega 2}, \widehat{\psi}^{(3)}_{a-1t} \right\rangle &= a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\int \hat{f}_0(k',\omega) e^{-ia^{\frac{3}{2}} k' h(a,t',x')} \, \mathrm{d}k'}_{\sim O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)} \, e^{-i\omega\frac{t'+x'}{a}} \, \mathrm{d}\omega \\ &\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right), \quad \text{falls } t' = -x' \\ &\sim O\left(a^k\right) \;\; \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst} \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

Die ungelöste Schwierigkeit hierbei ist es, wie schon im ungetwisteten Fall, zu zeigen, dass der $\hat{f}_0$-Term tatsächlich der dominierende ist.

3.5.3 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Fassen wir die Ergebnisse aus Gleichungen (3.5.4), (3.5.8), (3.5.10) und (3.5.11) wieder in einer Übersichtstabelle zusammen:

	$(t', x') = 0$	$t' = x' \neq 0$	$t' = -x' \neq 0$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{-\frac{3}{4}}\,(a^{\frac{3}{4}})$	$a^{-\frac{3}{4}}\,(a^{\frac{3}{4}})$	a^k	a^k
$s = -1$	$a^{-\frac{3}{4}}\,(a^{\frac{3}{4}})$	a^k	$a^{-\frac{3}{4}}\,(a^{\frac{3}{4}})$	a^k
$\lvert s\rvert < 1$	a^k	a^k	a^k	a^k
$\lvert s\rvert > 1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tab. 3.4: Konvergenzordnung von $\left\langle \Delta_m^{\star 2}, \psi_{ast}^{(3)} \right\rangle$ im Limit $a \to 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t', x'). Die unbewiesenen schärferen Ergebnisse sind in Klammern angegeben

Auch diesmal stimmen die Ergebnisse mit denen von Schulz [14, Prop. 3.72][5] überein, welcher für alle Potenzen des getwisteten Produkts $\Delta_m^{\star k}$ erhält:

$$\langle t, x; \omega, k \rangle \in WF(\Delta_m^{\star k}) \Rightarrow -\omega \geq |k|$$

Das getwistete Produkt ist also bei 0 in weniger Richtungen singulär, als das ungetwistete. Insbesondere muss G_F^2 auf dieser nicht-kommutativen Raumzeit nicht renormiert werden, da das Produkt $\Theta\Delta_m^{\star_M 2}$ wohldefiniert ist:

Korollar 3.8 ($\Theta\Delta_m^{\star_M 2}$ ist wohldefiniert)
Nach Tabelle 3.4 ist $\Delta_m^{\star_M 2}$ nur in lichtartige Richtungen singulär, während nach Tabelle 3.2 $\Theta \otimes 1$ nur in ∂_t-Richtung singulär ist. Also ist deren Produkt nach Hörmanders Kriterium Satz 2.3 wohldefiniert.

[5]So weit sie gegeben wurden

4 Fazit und Ausblick

4.1 Ausblick

4.1.1 Ausdehnen von Satz 2.12 auf $\mathcal{S}'$

Wie in Bemerkung 2.13 angesprochen, zeigt der Beweis von Kutyniok und Labate [9] Satz 2.12 nur für beschränkte Funtkionen und nicht für allgemeine temperierte Distributionen. So werden alle Hilfslemmata für den Beweis von Satz 2.12 nur für solche Funktionen bewiesen. Wir glauben aber, dass sich der Beweis auf alle temperierten Distributionen ausdehnen lässt, dank der Tatsache dass „temperierte Distributionen polynomiell beschränkt sind“:

Satz 4.1 (Struktursatz für temperierte Distributionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f \in \mathcal{S}'(\Omega)$. Dann gibt es ein $F \in C(\Omega)$ und $C \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}$ s.d. für alle $x \in \Omega$

$$|F(x)| \leq C(1 + |x|)^N$$

(also F polynomiell beschränkt ist) und

$$f = \partial^\alpha F$$

als distributionelle Ableitung

Beweis

Der Beweis findet sich in Friedlander u. a. [6, S. 97].

Leider fehlt aufgrund des stetigen Studienfortschritts die Zeit, diesen Beweis komplett auszuarbeiten. Der Beweis der auf temperierte Distributionen ausgeweiteten **??** und wie der Struktursatz eingeht soll hier aber beispielhaft skizziert werden. Mit ähnlichen Tricks lassen sich hoffentlich auch alle anderen Hilfslemmata auf temperierte Distributionen ausweiten.

Lemma 4.2 (Verfeinerung von ??)
Sei $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ und $supp(f) \subset U$. Sei $t \notin U$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|\langle f, \psi_{ast} \rangle| \leq C_k \left(1 + a^{-1} d(t, U)\right)^{-k}$$

ab einem hinreichend kleinen a.

Vor dem Beweis zwei Worte zur Bedeutung des Lemmas: Der hauptsächliche Nutzen des Lemmas ist die Aussage, dass wir mit Shearlets, also Schwartzfunktionen und damit *nicht zwingend kompakt getragenen* Funktionen, die lokalen Eigenschaften von temperierten Distributionen untersuchen können, da wir alles was δ-weit von t entfernt geschieht exponentiell schnell (in a) nicht mehr sehen. Dies ist möglich, da temperierte Distributionen in einem geeigneten Sinn nur polynomiell schnell wachsen.

Beweis
Nach Satz 4.1 gibt es ein polynomiell beschränktes $F \in C(\mathbb{R}^2)$ s.d. $f = \partial^\alpha F$. O.B.d.A können wir annehmen, dass f auf $B(0, \delta)$ verschwindet (im distributionellen Sinne) und damit o.B.d.A auch F. Dann zeigen wir die Aussage für $t = 0$:

$$\begin{aligned}
|\langle f, \psi_{as0} \rangle| &\overset{\text{formal}}{=} \left| \int f(x) \psi \left(\begin{pmatrix} a & -\sqrt{a}s \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}^{-1} (x - 0) \right) \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int F(x) \partial^\alpha \left[\psi \left(\begin{pmatrix} a^{-1} & \frac{s}{\sqrt{a}} \\ 0 & a^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-1} x \right) \right] \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_{|x| \geq \delta} C(1 + |x|)^N a^{-|\alpha|} \underbrace{\left[\left| \partial_{x_1}^{|\alpha|} \right| + |\partial^\alpha \psi| \right]}_{=:\phi \in \mathcal{S}} \begin{pmatrix} a^{-1} & \frac{s}{\sqrt{a}} \\ 0 & a^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} x \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{|x| \geq \delta} C(1 + |x|)^N a^{-|\alpha|} C_k \left(1 + \left| \begin{pmatrix} a^{-1} & \frac{s}{\sqrt{a}} \\ 0 & a^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} x \right| \right)^{-k} \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{|x| \geq \delta} C C_k a^{-|\alpha|} (1 + |x|)^N (1 + a^{-1}|x|)^{-k} \, \mathrm{d}x \\
&\leq C C_k a^{-|\alpha|} \int_{|x| \geq \delta} (1 + a^{-1}|x|)^{N-k} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= CC_k a^{-|\alpha|} 2\pi \int_{\delta}^{\infty} (1 + a^{-1} r)^{N-k} \, \mathrm{d}r$$

$$= CC_k a^{-|\alpha|} 2\pi \frac{(a+\delta)\left(1+\frac{\delta}{a}\right)^{N-k}(a+(k-N-1)\delta)}{(k-N-1)(k-N-2)}$$

$$\leq C'_k \left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^{N-k-|\alpha|}$$

Was die Aussage für $N - k - |\alpha|$ und damit auch für alle k zeigt.

Neben der Ausweitung der Hilfslemmata auf temperierte Distributionen muss auch noch erklärt werden, was die richtige Verallgemeinerung der Reproduktionseigenschaft in Satz 2.11 ist. Die kanonische Verallgemeinerung ist

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\{a,s,t\}} \langle f, \psi_{ast} \rangle \, \psi_{ast}(x) \, \phi(x) \, \mathrm{d}\mu(a,s,t) \, \mathrm{d}x.$$

Für alle Schwartzfunktionen ϕ und alle temperierten Distributionen $f \in \mathcal{S}'(C)^{\vee}$, wobei $\mathcal{S}'(C)^{\vee}$ analog zu Gleichung (2.3.12) definiert ist.

In den Beweis von Lemma 4.2 ging der Struktursatz für temperierte Distributionen entscheidend ein. Deshalb ist eine Ausweitung der Ergebnisse auf ganz $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ nicht möglich. In der Tat sind die Shearlets ψ_{ast} ja gar nicht kompakt getragen. Ob eine analoge Konstruktion von Shearlets die kompakt getragen sind möglich ist, ist a priori nicht klar.

4.1.2 Hörmanders Kriterium abschwächen

Um die Wellenfrontmenge einer Distribution zu bestimmen, muss man diese per Definition erst einmal mit einer kompakt getragenen Funktion lokalisieren, um eine kompakt getragene Distribution zu erhalten, deren Fouriertransformation sich berechnen lässt. Ist der Ansatz aus Abschnitt 4.1.1 erfolgreich, so zeigt dies, dass temperierte Distributionen mit *nicht* kompakt getragenen Funktionen lokalisert werden können; exponentieller Abfall ist genug, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen.

raus nehmen, weil letzten Endes für temperierte Distributionen nicht ganz passend?

Nach der Anschauung aus Abschnitt 2.1.2 ist Hörmanders Kriterium zwar hinreichend, um das punktweise Produkt zweier Distributionen zu definieren über die Faltung ihrer

Fouriertransformierten, aber nicht notwendig. Ein Beispiel dafür ist die Heaviside-Funktion. Offenbar existiert $\Theta(x)^2$, aber Hörmanders Kriterium wird an der 0 verletzt, da $\hat{\Theta}(k) = \frac{i}{k} + \delta(k)$. Es ist ausreichend, wenn die lokalisierten Fouriertransformierten in entgegengesetzter im Produkt mit $|k|^{-d-\epsilon}$ abfallen, damit das Faltungsintegral existiert. Allerdings ist damit nur sicher gestellt, dass $f \cdot g \in \mathcal{D}'$, noch nicht $f \cdot g \in \mathcal{S}'$.

Die Hoffnung ist also, dass man an der a-Potenz mit der $\langle f, \psi_{ast} \rangle$ für $a \to 0$ skaliert ablesen kann, wie schnell $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{\phi f}(k)$ abfällt für $\frac{k_2}{k_1} = s$ und ϕ beliebig nah um t lokalisiert.

Der Ansatz dabei wäre es, zunächst einmal diese a-Potenzen bei gut verstandenen Distributionen, z.B. Polynomen oder Ableitungen der δ-Distribution auszurechnen und mit dem Abfallverhalten der lokalisierten Fouriertransformierten zu vergleichen, um dann den genauen Zusammenhang zu raten. Dann wird man versuchen diesen mit den Techniken und Lemmata aus **??** zu beweisen.

4.1.3 Höherdimensionale Shearlets

Eine offensichtliche weitere Frage ist: Wie steht es denn damit, das ganze Geschäft der Shearlets mal auf höhere Dimensionen auszudehnen und auch dort eine Technik zum Berechnen von Wellenfrontmengen zu erhalten?

Guo u. a. [7] diskutieren Verallgemeinerungen der Schergruppe in höheren Dimensionen und entwickeln daraus auch diskrete Shearlets. Aus Abb. 3.3 wird auch deutlich, was die richtige Verallgemeinerung der parabolischen Skalierung ist. Nämlich

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

denn diese sorgt wieder dafür, dass der Träger von ψ_{ast} im Fourierraum für $a \to 0$ wieder einer immer spitzer werdenden Nadel gleicht. Die Wahl $\sqrt{a}$ statt a^δ für irgendein anderes $a < 1$ ist ziemlich willkürlich. Kutyniok und Labate [9] schreiben auch, dass sie für $\delta \neq \frac{1}{2}$ die Wellenfrontmenge an Beispielen genau so gut bestimmen konnten, wie für $\delta = \frac{1}{2}$. Tatsächlich geht $\delta = \frac{1}{2}$ in den Beweis von Satz 2.12 in einer Weise ein, dass es m.E. möglich ist auch mit anderen Exponenten zu arbeiten.[1]

[1]Stellt sich nur die Frage, warum man das überhaupt wollte. $\delta = \frac{1}{2}$ ist doch ein ziemlich schöne Wahl.

4.1.4 Berechnung des Skalengrads mittels Shearlets

Eine weitere Größe der mikrolokalen Analysis, die eventuell durch die Shearlettransformation bestimmt werden kann ist der Skalengrad. Er ist definiert wie folgt:

Definition 4.3 (Skalengrad)
Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist der Skalengrad $sd(u)$ definiert als

$$sd(u) := \inf_{\omega} \left\{ \lambda^{\omega} \langle u_\lambda, \phi \rangle \overset{\lambda \to 0}{\to} 0, \quad \text{für alle } \phi \right\}$$

wobei u_λ definiert ist über

$$\langle u_\lambda, \phi \rangle = \lambda^{-n} \left\langle u, \phi \left(\tfrac{\cdot}{\lambda} \right) \right\rangle,$$

also falls $u \in C^\infty$:

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x)$$

Eine einfache Rechnung zeigt z.B. für die δ-Distribution und ihre Ableitungen, dass

$$sd(\delta^{(\alpha)}) = n + |\alpha|.$$

Mit der Shearlettransformation erhalten wir aber

$$\begin{aligned} \left\langle \delta_{x_1}^{(\alpha)} \otimes \delta_{x_2}, \psi_{a00} \right\rangle &= \partial_{x_1}^{\alpha} \left(a^{-\frac{3}{4}} \psi \left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{\sqrt{a}} \right) \right) \Big|_{x=0} \\ &= a^{-\frac{3}{4}} a^{-\alpha} \partial_{x_1}^{\alpha} \psi(0) \sim a^{-\alpha-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

und bei Ableitung in die andere Richtung

$$\begin{aligned} \left\langle \delta_{x_1} \otimes \delta_{x_2}^{(\alpha)}, \psi_{a00} \right\rangle &= \partial_{x_2}^{\alpha} \left(a^{-\frac{3}{4}} \psi \left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{\sqrt{a}} \right) \right) \Big|_{x=0} \\ &= a^{-\frac{3}{4}} a^{-\frac{\alpha}{2}} \partial_{x_2}^{\alpha} \psi(0) \sim a^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Und falls wir $s \neq 0$ wählen wird das ganze nur noch unübersichtlicher, da wir Mischterme erhalten. Dieses Beispiel legt also nahe, dass es einen Zusammenhang zwischen dem Skalengrad einer Distribution und dem Abfallverhalten der Shearlettransformation bei $t = 0$ gibt. Aber die parabolische Skalierung in a und Scherung in s sorgen dafür, dass sie sich nicht mehr ganz einfach ablesen lässt.

4.2 Fazit

Die Berechnungen in Abschnitte 3.2, 3.4 und 3.5 und Abschätzungsungetüme wie Gleichung (3.4.11) zeigen deutlich, dass Satz 2.12 zwar eine theoretische Möglichkeit liefert Wellenfrontmengen auszurechnen, es aber kein sehr praktikabler Ansatz ist. So wurde auch ψ_{ast} nie konkret angegeben, sondern nur darauf hingewiesen, dass es Funktionen gibt, die all das erfüllen, was wir brauchen (also schneller Abfall und gewisse Eigenschaften des Trägers der Fouriertransformierten). Eins würden diese Funktionen aber sicher *nicht* erfüllen: Dass $\int \psi_{ast}(x) f(x) \, dx$ für eine größere Klasse von Funktionen tatsächlich analytisch zu berechnen ist, und nicht nur gewisse Schranken für den Abfall in a gegeben werden können.

Ein weiteres Problem ist, dass die Abschätzungen für $\langle f, \psi_{ast} \rangle$ nur möglich sind, wenn $\hat{f}$ bekannt ist. Dass schließt aber schon Funktionen aus, deren Fouriertransformierte nicht bekannt ist, oder temperierte Distributionen die als oszillierende Integrale gegeben sind.

Ähnlich sieht es bei der Berechnung des Skalengrads mithilfe von Shearlets aus (vgl. Abschnitt 4.1.4): Es sieht so aus, als sei es theoretisch möglich. Aber mit gewissem Aufwand bei den Abschätzungen verbunden.

Umso erfreulicher ist, dass die Ergebnisse für die berechneten Wellenfrontmengen mit den bisher bekannten übereinstimmen. Im Falle des getwisteten Produkts der Zweipunktfunktion konnte das Ergebnis von Schulz [14] ja sogar verschärft und gezeigt werden, dass das getwistete Produkt bei 0 nicht ganz so singulär ist, wie das ungetwistete.

Höherdimensionale Verallgemeinerungen der Shearlets müssten mit noch mehr Scherparametern arbeiten – im drei dimensionalen Fall 3, in 4D schon 6 – welche dann in den Ausdrücken auftauchen. Dann müsste man schlau erkennen, für welche Kombinationen dieser Scherpararemeter an welchen Orten t $\langle f, \psi_{ast} \rangle$ nicht schnell abfällt und abschätzen, wie schnell genau es abfällt. Wenn die Verzweiflung also sehr groß ist, man viel Zeit, Papier und höherdimensionale Shearlets zur Verfügung hat *könnte* die Shearlettransformation eine theoretische Möglichkeit sein Wellenfrontmengen temperierter Distributionen auszurechnen. Aber eigentlich eher nicht.

Oder natürlich wir haben etwas ganz wichtiges übersehen, und es ist doch alles nicht so hoffnungslos.

5 Danksagung

An allerererster Stelle gilt mein Dank meiner Betreuerin Prof. Dorothea Bahns, die geduldig all meine großen und kleinen Fragen beantwortet hat und meine Ideen in realisierbare Bahnen gelenkt hat. Genau so bedanken muss ich mich an dieser Stelle bei Prof. Ingo Witt für die Zweitkorrektur und Interesse an dieser Arbeit.

Nicht (viel) weniger Dank geht an meine Vater Uwe Bosse und an Karim Shedid, die diese Arbeit Korrektur gelesen haben und mir manche neuen Ideen gegeben haben, wie man gewisse Abschätzungen am besten macht. Vor allem letzterem hätte ich viel früher meine Schwierigkeiten schildern sollen. Und bei ersterem muss ich mich natürlich noch für die finanzielle Unterstützung während des gesamten Sutdiums bedanken.

Explizit kein Dank geht an Fabio Bagarello, für seine Serie an Veröffentlichungen über den Quanten-Hall-Effekt, welche im Abstrakt immer mit großartigen Ergebnissen werben um dann im Ausblick auf zukünfitge Paper verweisen, welche dann wieder genau das selbe tun. Das festzustellen, und deshalb das ursprüngliche Thema dieser Arbeit zu verwerfen, hat mich mehr Zeit gekostet, als ich zuzugeben bereit bin.

Literatur

[1] Nicolas Bourbaki. *General Topology*. Berlin: Springer-Verlag Berlin, 1998. ISBN: 978-3-540-64563-4.

[2] Emmanuel J. Candès und David L. Donoho. „Continuous curvelet transform: I. Resolution of the wavefront set“. In: *Applied and Computational Harmonic Analysis* 19.2 (2005), S. 162–197. ISSN: 10635203.

[3] M. N. Do und M. Vetterli. „The Contourlet Transform: An Efficient Directional Multiresolution Image Representation“. In: *Trans. Img. Proc.* 14.12 (Dez. 2005), S. 2091–2106. ISSN: 1057-7149. URL: https://doi.org/10.1109/TIP.2005.859376.

[4] Sergio Doplicher, Klaus Fredenhagen und John E. Roberts. „The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields“. In: *Communications in Mathematical Physics* 172.1 (Aug. 1995), S. 187–220. URL: https://doi.org/10.1007/bf02104515.

[5] L. Freidel, J. Kowalski-Glikman und S. Nowak. „From noncommutative κ-Minkowski to Minkowski space time“. In: *Physics Letters B* 648 (Apr. 2007), S. 70–75. eprint: hep-th/0612170.

[6] F. G. Friedlander u. a. *Introduction to the Theory of Distributions* -. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. ISBN: 978-0-521-64971-1.

[7] Kanghui Guo u. a. „Wavelets with composite dilations and their MRA properties“. In: *Applied and Computational Harmonic Analysis* 20.2 (März 2006), S. 202–236. URL: https://doi.org/10.1016/j.acha.2005.07.002.

[8] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators* -. Berlin, Heidelberg: Springer, 1985. ISBN: 978-0-387-12104-8.

[9] Gitta Kutyniok und Demetrio Labate. „Resolution of the wavefront set using continuous shearlets“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 361.05 (Okt. 2008), S. 2719–2754. URL: https://doi.org/10.1090/s0002-9947-08-04700-4.

[10] Stephane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing - The Sparse Way*. Amsterdam, Boston: Academic Press, 2008. ISBN: 978-0-080-92202-7.

[11] Barry Simon Michael Reed. *Methods of mathematical physics. Fourier analysis, self-adjointness*. Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 2. Academic Press, 1975. ISBN: 9780125850025,0125850026.

[12] J. E. Moyal und M. S. Bartlett. „Quantum mechanics as a statistical theory". In: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 45 (1949), S. 99.

[13] J. Mund, B. Schroer und J. Yngvason. „String-Localized Quantum Fields and Modular Localization". In: *Communications in Mathematical Physics* 268 (Dez. 2006), S. 621–672. eprint: math-ph/0511042.

[14] Rene M. Schulz. „Microlocal Analysis of Tempered Distributions". Diss. Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen: Georg-August University School of Science, 2014.

[15] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model -*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1-107-03473-0.

Erklärung Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken entnommene Stellen habe ich unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht. Die Richtlinien zur Sicherung der guten wissenschaftlichen Praxis an der Universität Göttingen wurden von mir beachtet. Eine gegebenenfalls eingereichte digitale Version stimmt mit der schriftlichen Fassung überein. Mir ist bewusst, dass bei Verstoß gegen diese Grundsätze die Prüfung mit nicht bestanden bewertet wird.

Göttingen, den 10. Juli 2018

(Jan Lukas Bosse)