

Bachelorarbeit

Zur Auflösung der Wellenfrontmenge mittels Shearlets

Resolution of the wavefrontset using shearlets

angefertigt von

Jan Lukas Bosse

aus Freiburg im Breisgau

am Institut für Mathematik

Bearbeitungszeit: 15. Februar 2018 bis 30. Juli 2018

Erstgutachter/in: Prof. Dr. Dorothea Bahns

**Zweitgutach-
ter/in:** Prof. Dr. Ingo Witt

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung für Mathematiker	3
2	Einleitung für Physiker	5
3	Mathematische und Physikalische Grundlagen	7
3.1	Fouriertransformation, mikrolokale Analysis und all die Mathematik	7
3.1.1	Nomenklatur und $2\pi = 1$	7
3.1.2	Die Wellenfrontmenge	8
3.2	Zweipunktfunktionen, Sternprodukte und all die Physik	10
3.2.1	Die Zweipunktfunktionen und warum wir sie potenzieren wollen	10
3.2.2	Sternprodukte und getwistete Faltungen	11
3.3	Wavelettransformation und die Wellenfrontmenge	13
3.3.1	Wavelettransformation	14
3.3.2	Verallgemeinerte, gerichtete Wavelets	15
3.3.3	Konstruktion und Eigenschaften der Shearlets	17
3.3.4	Shearlets lösen die Wellenfrontmenge auf	22
4	Rechnungen und Ergebnisse	31
4.1	Zwei nützliche Substitutionen für $\langle f, \psi_{ast} \rangle$ und ein Lemma	31
4.2	Die Wellenfrontmenge von Δ_m	35
4.2.1	Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse	38
4.3	Die Wellenfrontmenge von Θ	38
4.3.1	Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse	40
4.4	Die Wellenfrontmenge von Δ_m^2	40
4.4.1	$\hat{\Delta}^{*2}$ berechnen	41
4.4.2	... und nun zur Wellenfrontmenge	43

4.4.3	Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse	49
4.5	Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m^{*M^2}$	50
4.5.1	$\hat{\Delta}_m^{*\Omega^2}$ berechnen	50
4.5.2	... und nun zur Wellenfrontmenge von $\hat{\Delta}_m^{*\Omega^2}$	52
4.5.3	Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse	57
4.6	Berechnen von $WF(G_F)$	57
4.6.1	Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$	57
4.6.2	Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse	63
5	Fazit und Ausblick	65
5.1	Ausblick	65
5.1.1	Ausdehnen von Theorem 3.12 auf \mathcal{S}'	65
5.1.2	Hörmanders Kriterium abschwächen	68
5.1.3	Höherdimensionale Shearlets	68
5.1.4	Berechnung des Skalengrads mittels Shearlets	69
5.2	Fazit für Physiker	71
5.3	Fazit für Mathematiker	72

1 Einleitung für Mathematiker

Ursprünglich in der Bildbearbeitung und -kompression wurde erkannt und genutzt, dass die (stetige) Wavelettransformationen einer Funktion f schnell abfällt an Punkten, an denen f glatt ist und langsam an den Singularitäten. Bekanntestes Beispiel dafür ist die JPEG-Kompression, welche auf der Wavelettransformation basiert.

Allerdings ist die klassische Wavelettransformation mit gleichmäßiger Skalierung in alle Richtungen nicht in der Lage, die Orientierung der Singularitäten zu erkennen. Deshalb wurden verschiedene Verallgemeinerungen von Wavelets mit anisotroper Skalierung entwickelt ([6] [8] [1]), die in der Lage sind auch die Orientierung der Singularitäten zu erkennen. Im Fourierraum bedeutet anisotrope Skalierung, dass der Träger der Wavelets mit feiner werdendem Skalenparameter in immer engeren Kegeln liegt. Im Realraum entspricht dies immer flacher werdenden „Wellenpaketen“ als Testfunktionen. Bei isotroper Skalierung hingegen wird der Träger im Realraum in alle Richtungen gleichmäßig kleiner.

Dies ist eng verwandt mit dem Konzept der *Wellenfrontmenge* aus der *mikrolokalen Analysis*. Die Wellenfrontmenge misst, vereinfacht gesagt, die Lage und Orientierung der Singularitäten von nicht nur Funktionen, sondern auch Distributionen. Das Versprechen in [8] ist, dass es mit anisotrop skalierenden Wavelettransformationen möglich ist Wellenfrontmengen zu berechnen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, genauer zu untersuchen inwiefern die Shearlettransformation von Kutyniok und Labate [8] geeignet ist, um Wellenfrontmengen zu bestimmen. Dazu werden die Wellenfrontmengen von physikalisch motivierten Distributionen berechnet. Außerdem füllen wir eine kleine Lücke in [8], geben einen Ansatz, wie die Ergebnisse von Kutyniok und Labate [8]

auf temperierte Distributionen ausgedehnt werden können und erklären, warum sie nicht auf alle Distributionen ausgedehnt werden können. Des weiteren wird noch eine kurze Diskussion gegeben, welche weiteren Größen der mikrolokalen Analysis mithilfe von Shearlets berechnet werden können und welche Möglichkeiten es für höherdimensionale Shearlets gibt.

2 Einleitung für Physiker

Einer der Zugänge zur Renormierung in der Quantenfeldtheorie ist die Fortsetzung der auftretenden Produkte von Distributionen¹ auf ganz \mathbb{R}^{1+d} . Um zu bestimmen, wo und mit welchen Freiheiten diese fortgesetzt werden können, müssen die Wellenfrontmengen der Faktoren bestimmt werden. Leider ist es notorisch schwierig Wellenfrontmengen für Distributionen, die komplizierter sind als die δ -Distribution und Ableitungen, direkt zu bestimmen. Unter anderem in Modellen der *nichtkommutativen Quantenfeldtheorie* [4, 3, 12] treten Distributionen auf, deren Wellenfrontmengen mit den bisherigen Methoden nicht bestimmt werden konnten.

noch $WF(\Theta)$ ausrechnen und dann zeigen wo bei Hörmander die Probleme liegen?

Ursprünglich in der Bildbearbeitung und -kompression wurde erkannt und zur Kompression genutzt, dass Wavelettransformationen in der Lage sind, die Singularitätsstruktur von Bildern zu erkennen. D.h. dass die Wavelettransformation mit feiner werdendem Skalenparameter an Singularitäten nicht schnell abfällt, überall sonst aber schon. Wie Kutyniok und Labate [8], Candès und Donoho [1] und Do und Vetterli [2] in ihren respektiven Arbeiten gezeigt haben, lassen sich diese Erkenntnisse auf Distributionen ausweiten und mit anisotropen und gerichteten Wavelets Wellenfrontmengen ausrechnen.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir am Beispiel der *Shearlets* untersuchen, wie praktikabel diese Methoden sind, um Wellenfrontmengen komplizierterer Distributionen auszurechnen. Dazu ziehen wir als Beispiele die massive Zweipunktfunktion Δ_m , ihre (getwisteten) Quadrate $\Delta_m^{(\star)2}$ und die Heaviside-Funktion Θ heran. Diese sind von besonderem Interesse, da der Feynmanpropagator und Potenzen davon als zentrale zu renormierende Distribution der QFT ein Produkt von Zweipunktfunktion und Heaviside-Funktion ist.

¹Wir erinnern uns, dass allgemeine Produkte von Distributionen nicht unbedingt immer definiert sind. Was zum Beispiel soll δ^2 sein?

Daneben gibt es noch eine kurze Diskussion, ob und wie es möglich ist, die Ergebnisse auf mehr als nur zwei Dimensionen auszuweiten. Des Weiteren wird skizziert, welche weiteren Größen der *mikrolokalen Analysis*, wie z.B. der Skalengrad, mithilfe von Shearlets berechnet werden können. Der Skalengrad einer Distribution ist eng verwandt mit dem abzählen der Potenzen (engl. „power counting“) in der QFT.

Wir kommen zu dem Ergebnis, dass die Shearlettransformation in zwei Dimensionen zwar eine theoretische Möglichkeit ist, Wellefrontmengen zu berechnen, aber deutlich mehr Arbeit als weniger direkte Methoden. In höheren – und damit physikalisch relevanteren – Dimensionen sind noch keine Verallgemeinerung bekannt, aber die konkreten Rechnungen werden sicher nicht übersichtlicher als in zwei Dimensionen.

3 Mathematische und Physikalische Grundlagen

3.1 Fouriertransformation, mikrolokale Analysis und all die Mathematik

Im folgenden gehen wir davon aus, dass die grundlegenden Eigenschaften der Fouriertransformation (Faltungssatz, Parsevals Satz etc.) bekannt sind und führen nur die Begriffe ein, die über das Grundstudium hinaus gehen und nicht vorausgesetzt werden können.

3.1.1 Nomenklatur und $2\pi = 1$

Da in der gesamten vorliegenden Arbeit so gut wie immer vor allem von Belang ist, wie schnell gewisse Integrale mit einem gewissen Parameter gegen 0 gehen, es dafür aber vollkommen unerheblich ist, ob in den Abschätzungen noch Faktoren von 2π durch den Faltungssatz fehlen oder ob man für die richtige Abschätzung noch einmal mit 2 multiplizieren sollten, sind wir in der gesamten Arbeit sehr großzügig damit, wie genau wir Buch führen mit solchen Vorfaktoren. Unser Faltungssatz liest sich also

$$\widehat{fg}(k) = \hat{f} * \hat{f}(k),$$

obwohl wir die Fouriertransformation

$$\hat{f}(k) := \int f(x)e^{-ikx} dx$$

Ist das so akzeptabel? Oder wird in einer BA doch erwartet, dass man etwas mehr sorgfältig walten lässt?

mit der, konsequenterweise nur bis auf einen Faktor 2π , Inversen

$$f(x) := \int \hat{f}(k) e^{ikx} dx$$

verwenden. Des weiteren verwenden wir für die inverse Fouriertransformation den inversen Hut, also $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) =: f^\vee(x)$. Alternativ kann man sich statt jedes dk auch stattdessen $\frac{dk}{2\pi}$ denken.

Wie üblichen in derartigen Arbeiten, arbeiten wir in natürlichen Einheiten, also $\hbar = c = 1$.

3.1.2 Die Wellenfrontmenge

Anschaulich sagt uns die Wellenfrontmenge wo und in welche Richtungen eine Distribution singulär ist. So ist z.B. die Wellenfrontmenge der δ -Distribution $\{(0, \mathbb{R}^n \setminus 0)\}$ oder die der 2-dimensionalen Heaviside-Funktion $1(x) \cdot \Theta(y)$ ist $\{(x, 0), (0, 1) \cdot \mathbb{R} \setminus 0\}$.

Definition 3.1 (high frequency set)

Sei $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakt getragene Distribution. Dann definieren wir die *Richtungen hoher Frequenzen* als

$$\Sigma(v) = \left\{ k \in \hat{\mathbb{R}}^n \mid k \text{ hat keine kegelförmige Umgebung } U \text{ s.d.} \right. \\ \left. |\hat{v}(k')| \leq C_N (1 + |k|)^{-N} \forall k \in U, \forall N \in \mathbb{N} \right\}$$

und darauf basierend definieren wir noch eine punktweise Variante:

Sei $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Distribution. Sei \mathcal{D}_x die Menge der kompakt getragenen glatten Funktionen, die an x nicht verschwinden. Dann ist die *singuläre Faser* von f an x definiert als

$$\Sigma_x(f) = \bigcap_{\phi \in \mathcal{D}_x} \Sigma(\underbrace{\phi f}_{\in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)})$$

Damit können wir die Wellenfrontmenge definieren:

Definition 3.2 (Wellenfrontmenge)

Sei $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Distribution. Dann ist ihre *Wellenfrontmenge* definiert als

$$WF(f) := \left\{ (x, k) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) \mid k \in \Sigma_x(f) \right\}$$

Aber weshalb ist die Wellenfrontmenge interessant für uns? Unter anderem liefert sie ein Kriterium, wann das Produkt zweier Distributionen wohldefiniert ist. Und zwar mittels folgendem Satz:

Satz 3.3 (Hörmanders Kriterium)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ Distributionen und es gelte $(x, k) \in WF(f) \Rightarrow (x, -k) \notin WF(g)$. Es sei außerdem $\text{diag} : \Omega \rightarrow \Omega \times \Omega$; $x \mapsto (x, x)$. Dann kann das Produkt von f und g definiert werden über den Pullback mit diag , also

$$fg := \text{diag}^*(f \otimes g)$$

und es gilt

$$WF(fg) \subset \left\{ (x, k + k') \mid (x, k) \in WF(f) \text{ oder } k = 0, \right. \\ \left. (x, k') \in WF(g) \text{ oder } k' = 0 \right\}$$

Der Beweis findet sich in Hörmander [7].

Eine gute Anschauung, warum es dieses Kriterium tut, sowie auch dafür warum es eigentlich zu scharf ist, erhält man, wenn man das Produkt (zumindest lokal) über die Faltung der Fouriertransformierten definiert. Dann muss dafür gesorgt werden, dass $\hat{f}(k')\hat{g}(k - k')$ für $|k'| \rightarrow \infty$ in alle Richtungen schnell genug abfällt, damit

$$\widehat{fg}(k) = \int \hat{f}(k')\hat{g}(k - k') dk'$$

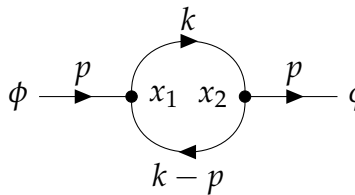
für alle k existiert. „Schnell genug“ ist aber nicht nur exponentieller Abfall, sondern sogar schon $o(k'^{-n})$. Mehr dazu in Abschnitt 5.1.2.

3.2 Zweipunktfunktionen, Sternprodukte und all die Physik

In diesem Kapitel wollen wir motivieren, warum die Multiplikation von Distributionen auch für Physiker eine relevante Fragestellung ist, was getwistete Produkte sind und was sie mit nicht-kommutativer Raumzeit zu tun haben.

3.2.1 Die Zweipunktfunktionen und warum wir sie potenzieren wollen

In der störungstheoretischen Quantenfeldtheorie entsprechen schon einfache Feynmandiagramme, wie z.B. das in Abb. 3.1 (formal) Integralen über Produkte von Distributionen, in diesem Fall dem Feynman-Propagator.



$$= \int G_F(x_1, x_2) G_F(x_2, x_1) e^{ik(x_1-x_2)} e^{i(p-k)(x_2-x_1)} dx_1 dx_2 dk$$

Abb. 3.1: Ein einfaches Feynman-Diagramm aus der skalaren ϕ^3 -Theorie und das entsprechende Integral über Feynman-Propagatoren

Der Feynman-Propagator in zwei Dimensionen kann geschrieben werden als zeitgeordnete Zweipunktfunktion (vgl. Michael Reed [10]), also

$$G_F(t, x) = \Theta(t)\Delta_m(t, x) + \Theta(-t)\Delta_m(-t, -x) \quad (3.2.1)$$

Wobei Θ die Heaviside-Funktion bezeichnet und als $\Theta(t) \cdot 1(x)$ zu verstehen ist. Also sind Potenzen des Feynman-Propagators gegeben durch Potenzen der Zweipunktfunktion und der Heaviside-Funktion. Um zu wissen, wo diese Produkte definiert werden können, muss man deren Wellenfrontmengen kennen;

dann liefert Hörmanders Kriterium 3.3 ein Kriterium für die Wohldefiniertheit.

In all dem kann die Zweipunktfunktion Δ_m geschrieben werden als Fouriertransformierte eines positiven Maßes auf der negativen Massenschale H_m (vgl. Schwartz [14], 24.69):

$$\Delta_m(t, x) = \int \delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \Theta(-\omega) e^{-i\omega t + ikx} d\omega dk \quad (3.2.2)$$

Deshalb ist Δ_m und seine (getwisteten) Potenzen das Hauptbeispiel, an welchem wir untersuchen, inwiefern die Shearlettransformation praktikabel ist um Wellenfrontmengen zu berechnen.

3.2.2 Sternprodukte und getwistete Faltungen

Die *nicht kommutative Quantenfeldtheorie* beschäftigt sich mit Quantenfeldtheorien in der Größenordnung der *Planck-Skala*. Bei diesen Größenordnungen wird erwartet, dass die Geometrie der Raumzeit nicht mehr kommutativ ist, sich also Ort und Zeit nicht mehr mit beliebiger Präzision messen lassen. Das physikalische Argument (nach Doplicher, Fredenhagen und Roberts [3]) für diese *Raumzeitunschärferelation* basiert auf Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie und Heisenbergs Unschärferelation: Wenn wir ein Raumzeit-Ereignis mit Genauigkeit a messen, haben wir eine Impuls-Unschärfe von der Größenordnung $\frac{1}{a}$. Also wurde Energie der Größenordnung $\frac{1}{a}$ auf das System übertragen und zu einem Zeitpunkt in der gemessenen Ortsregion konzentriert. Diese Energie erzeugt ein Gravitationsfeld, welches um so stärker ist, je kleiner die Region in der die Energie konzentriert ist. Sobald dieses so stark ist, dass kein Licht mehr die Region verlassen kann (wir also ein schwarzes Loch erzeugt haben), erhalten wir keine Information aus der Raumzeitregion, eine Messung ist also nicht möglich. Das bedeutet, dass die Genauigkeit mit der wir die Lokalisation eines Ereignisses in der Raumzeit messen können beschränkt ist durch die Energiedichte, ab der wir ein schwarzes Loch erzeugen. Diese Schranken in der Messgenauigkeit lassen sich als Unschärferelation zwischen Zeit und Ort

verstehen, ganz analog zur klassischen Unschärferelation zwischen Ort und Impuls.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, solche nicht-kommutativen Raumzeiten zu konstruieren. Ihnen allen ist gemein, dass das kommutative punktweise Produkt von Funktionen ersetzt wird durch ein nicht-kommutatives *Sternrprodukt*. Auf der κ -Minkowski-Raumzeit (vgl. Freidel, Kowalski-Glikman und Nowak [4]) wird es beispielsweise ersetzt durch

$$f \star_{\kappa} g(t, x) = \int \hat{f}(\omega, k) \hat{g}(\omega', k') e^{i \langle k + e^{-\frac{\omega}{\kappa}} k', x \rangle - i(\omega + \omega')t} d\omega dk d\omega' dk'.$$

Dieses Produkt ist äquivalent zu den Vertauschungsrelationen

$$[t, x_i] = -\frac{i}{\kappa} x_i.$$

Ein anderer Ansatz verwendet das Moyal-Produkt [11] aus der Deformationsquantisierung. Hier wird das kommutative Produkt von Funktionen auf dem Phasenraum so deformiert, dass es danach die kanonischen Vertauschungsrelationen aus der Quantenmechanik erfüllt, also

$$[x_k, p_l] = i\delta_{kl}.$$

Diese Vertauschungsrelationen sind äquivalent zu dem Moyal-Produkt für Funktionen auf dem flachen Phasenraum:

$$f \star_M g(x) = \int \hat{f}(k) \hat{g}(k') e^{\frac{i}{2}(k, \Omega_{\text{can}} k')} e^{ikx} e^{ik'x} dk dk'. \quad (3.2.3)$$

Dabei ist Ω_{can} die kanonische symplektische Form auf \mathbb{R}^{2n} und $x \in \mathbb{R}^{2n}$, also ein Punkt im Phasenraum und *nicht* nur die Ortskoordinate.

Da das Moyalprodukt als Fourier-Multiplikator geschrieben werden kann, korrespondiert es auch zu einer getwisteten Faltung $*_{\Omega}$ für die Fouriertransfor-

mieren, s.d. der Faltungssatz

$$\widehat{f \star_M g}(k) = \hat{f} *_{\Omega} \hat{g}(k)$$

gilt.

Definition 3.4 (getwistete Faltung)

Seien $\hat{f}, \hat{g} \in$ „passender Funktionen-/Distributionenraum“. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ die kanonische symplektische Matrix. Dann ist die getwistete Faltung $(\hat{f} *_{\Omega} \hat{g})(k)$ definiert als

$$(f *_{\Omega} g)(k) := \int f(k') g(k - k') e^{\frac{i}{2}(k, \Omega_{\text{can}} k')} dk' \quad (3.2.4)$$

Die getwistete Faltung ist also einfach die gewöhnliche Faltung, die noch mit einem ortsabhängigen Phasenfaktor verziert wurde.

Ganz analog dazu ersetzen Doplicher, Fredenhagen und Roberts [3] das kommutative Produkt auf der Raumzeit durch das Moyal-Produkt. Zeit und Ort erfüllen also die Vertauschungsrelation

$$[t, x] = i$$

und man erhält als Produkt das selbe wie in Gleichung (3.2.3), nur dass jetzt x kein Punkt im Phasenraum ist, sondern einer in der Raumzeit.

3.3 Wavelettransformation und die Wellenfrontmenge

Die klassische Fouriertransformation $f(x) \mapsto \int f(x) e^{-ikx} dx$ zerlegt eine Funktion in ihre verschiedenen Frequenzanteile und misst nach dem Satz von Payley-Wiener dabei auch die Regularität der Funktion. Es gilt nämlich $f \in C^N(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f}(k) = O(k^N)$ für $|k| \rightarrow \infty$. Leider „sieht“ die Fouriertransformation aber nicht, an welchen Punkten x die Funktion f singulär (= nicht glatt)

ist. Das hängt damit zusammen, dass die „Basisfunktionen“, die ebenen Wellen, nicht lokalisiert sind. Das Argument der Fouriertransformation k kontrolliert die Richtung und Skala, die von der Basisfunktion e^{-ikx} aufgelöst werden. Zusätzliche Ortsauflösung der Singularitäten gibt uns die

3.3.1 Wavelettransformation

Einen Schritt in die richtige Richtung, nämlich die Ortsauflösung der Singularitäten, macht die Wavelettransformation. Hier wird eine Familie von Basisfunktionen für $L^2(\mathbb{R}^n)$ erzeugt von einem *Mutterwavelet* ψ . Anders als die ebenen Wellen ist ψ aber lokalisiert – häufig sogar kompakt getragen – und die Basis wird erzeugt durch Verschieben *und* Skalieren des Mutterwavelets.

Eine Hamel-Basis für $L^2(\mathbb{R}^n)$ die aus Funktionen der Form

$$\left\{ \psi_{at}(x) = a^{-\frac{n}{2}} \psi \left(a^{-1}(x - t) \right) \mid t \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R} \right\}$$

mit einem *Mutterwavelet* $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ besteht heißt *stetige Waveletbasis* für $L^2(\mathbb{R}^n)$. Der Parameter t heißt *Verschiebungsparameter* und verschiebt das Wavelet an alle Orte des \mathbb{R}^n während der *Skalierungsparameter* a für $a \rightarrow 0$ ψ immer genauer lokalisiert. Der Faktor $a^{-\frac{n}{2}}$ sorgt dafür, dass die L^2 -Norm aller ψ_{at} gleich ist. In der Fourierdomäne wird die Verschiebung zum Phasenfaktor und der Träger mit verschwindendem a immer *größer*.

Analog zur Definition der Fouriertransformation ist die stetige Wavelettransformation von f die Projektion auf die Basisfunktionen:

$$\mathcal{W}_f(a, t) = \langle f, \psi_{at} \rangle = a^{-\frac{n}{2}} \int f(x) \psi \left(a^{-1}(x - t) \right) dx \quad (3.3.1)$$

Ist ψ eine glatte Funktion und f bei t glatt, so fällt $\mathcal{W}_f(a, t)$ schnell ab für $a \rightarrow 0$. Umgekehrt fällt auch $\mathcal{W}_f(a, t)$ *genau dann* nicht schnell ab, wenn f bei t *nicht* glatt ist. Also löst die Wavelettransformation die Lage der Singularitäten von f auf. Allerdings sind die klassischen Wavelettransformationen mit isotroper Skalierung (heißt: Skalierung in alle Richtungen gleich schnell) nicht in der

Kurze Plausibel machen, warum dem so ist?

Lage die Orientierung der Singularitäten aufzulösen. Sie besitzen ja gar keinen Orientierungsparameter.

Um auch die Orientierung aufzulösen, muss einerseits ein Richtungsparameter eingeführt werden und andererseits dafür gesorgt werden, dass die Basisfunktionen mit immer feinerer Skala immer orientierter werden. Deshalb gibt es

3.3.2 Verallgemeinerte, gerichtete Wavelets

Beispiele solcher gerichteter Wavelets sind die *Curvelets* von Candès und Donoho [1], die *Shearlets* von Kutyniok und Labate [8] sowie *Contourlets* von Do und Vetterli [2]. Die mit feiner werdender Skala schärfer werdende Orientierung wird in den ersten beiden Fällen durch parabolische Skalierung implementiert. D.h. in Richtung der Orientierung im Fourierraum wird mit a skaliert, während in den Richtungen senkrecht dazu mit \sqrt{a} skaliert wird. In zwei Dimensionen gibt es nur eine weitere senkrechte Richtung, aber später wird deutlich werden, dass dies in mehr Dimensionen die richtige Verallgemeinerung der parabolischen Skalierung sein muss.

Die Richtung der *Curvelets* wird durch Drehmatrizen implementiert, die auf die Variablen (x_1, x_2) wirken, während bei den *Shearlets* die Variablen (x_1, x_2) geschert werden.

Beide Ansätze sind in der Lage, die Wellenfrontmenge einer Distribution zu identifizieren. Allerdings sind die Rechnungen bei den *Shearlets* in der praktischen Umsetzung einfacher, wenn auch von einem ästhetischen Standpunkt nicht ganz so befriedigend, da sie nicht inhärent rotationsinvariant sind, also nicht alle Symmetrien unseres Raumes abbilden. Aber nach allzu viel Ästhetik sollte man in dieser Arbeit, mit Hinblick auf die Rechnungen ab Abschnitt 4.2, ohnehin nicht fragen.

Bevor wir die konkrete Konstruktion der *Shearlets* widmen, brauchen wir noch ein kleines bisschen Theorie, welche Möglichkeiten wir überhaupt haben, um die Konstruktion der Wavelets zu verallgemeinern. Die weitestgehende Verallgemeinerung von „verschiebe und skaliere ein Mutterwavelet“ um ein reproduzierendes System zu erhalten ist „verschiebe es und lasse eine beliebige

invertierbare Matrix auf die Koordinaten wirken“. Wir definieren also eine Wirkung der affinen Gruppe \mathbb{A}^n auf Funktionen $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ via

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ ((M, t), \psi(x)) &\mapsto |\det M|^{-\frac{1}{2}} \psi(M^{-1}(x - t)) =: \psi_{M,t}(x) \end{aligned}$$

mit

$$(M, t) \in \mathbb{A}^n = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$$

Im Allgemeinen wird man aber nicht die ganze affine Gruppe benötigen, um ein reproduzierendes System zu erhalten, sondern nur alle Verschiebungen und eine Untermenge¹ der $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Wann ein Mutterwavelet und die Wirkung einer solchen Untermenge ein reproduzierendes System erzeugen, sagt uns der nächste Satz:

Satz 3.5 (Zulässigkeitskriterium)

Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Sei $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $d\mu(M)$ ein Maß auf G , im Falle einer Untergruppe z.B. das Haarmaß, und es gelte

$$\Delta(\psi)(k) = \int_G |\hat{\psi}(M^t k)|^2 |\det M| d\mu(M) = 1 \quad (3.3.2)$$

für fast alle $k \in \hat{\mathbb{R}}^2$. Dann ist $(\psi, G \ltimes \mathbb{R}^n)$ ein reproduzierendes System für $L^2(\mathbb{R}^n)$, also gilt für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$f = \int_{\mathbb{R}^n} \int_G \langle \psi_{M,t}, f \rangle \psi_{M,t} d\mu(M) dt \quad (3.3.3)$$

In einer Dimension entspricht das Zulässigkeitskriterium genau Calderons Kriterium:

Bemerkung 3.6 (3.5 ist Calderon)

Für $n = 1$ ist $\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ mit dem Haarmaß $d\mu(a) = \frac{d\lambda(a)}{a}$ und Gleichung (3.3.2) wird zu

¹Auch nicht notwendigerweise Untergruppe

$$\int_0^\infty |\hat{\psi}(ak)|^2 \frac{d\lambda(a)}{a} = 1, \quad \text{für fast alle } k \in \hat{\mathbb{R}} \quad (3.3.4)$$

Gleichung (3.3.2) ist also das mehrdimensionale Analogon zu Calderons Kriterium [9, S. 105].

Jetzt aber mehr Details zur Konstruktion der Shearlets und deren Eigenschaften:

3.3.3 Konstruktion und Eigenschaften der Shearlets

Der folgende Abschnitt basiert größtenteils auf der Arbeit von Kutyniok und Labate [8]. Da wir später auch komplexwertige Distributionen analysieren wollen, deren Wellenfrontmenge nicht zwingend punktsymmetrisch um den Ursprung (in der Richtung, nicht im Ort) sind, werden wir Shearlets verwenden, deren Fouriertransformierte asymmetrischen Träger hat, indem wir die Shearlets aus [8] jeweils in zwei Shearlets aufteilen, eines mit Träger im Frequenzbereich „nach vorne“, und eines mit Träger „nach hinten“.

Definition 3.7 (Shearlettransformation)

Seien

$$\psi_1 \in L^2(\mathbb{R}) \text{ mit } \text{supp}(\hat{\psi}_1) \subseteq \left[\frac{1}{2}, 2\right] \text{ und } \psi_1 \text{ erfülle Gleichung (3.3.4)}^2 \quad (3.3.5)$$

$$\psi_2 \in L^2(\mathbb{R}) \text{ mit } \text{supp}(\hat{\psi}_1) \subseteq [-1, 1] \text{ und } \|\psi_2\|_2 = 1 \quad (3.3.6)$$

und $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ implizit definiert durch

$$\hat{\psi}(k_1, k_2) = \hat{\psi}_1(k_1) \hat{\psi}_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right). \quad (3.3.7)$$

Sei des weiteren

$$G = \left\{ M_{as} \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) \mid M_{as} = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{as} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}, a \in [0, 1], s \in [-2, 2] \right\} \quad (3.3.8)$$

²mit $G = (\mathbb{R}^*, \cdot), |\det M| d\lambda(M) = \frac{da}{a}$

Dann ist für $t \in \mathbb{R}^n$, $M_{as} \in G$ die Shearlettransformation von f bezüglich ψ definiert als

$$S_f(a, s, t) = \langle D_{M_{as}} T_t \psi, f \rangle = a^{-\frac{3}{4}} \int f(x) \psi \left(\begin{pmatrix} a & -\sqrt{as} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}^{-1} (x-t) \right) dx \quad (3.3.9)$$

Bevor es mit dem Text weiter geht, noch eine kurze Bemerkung zu Vereinfachung der Notation:

Bemerkung 3.8 (Notation)

Der Kompaktheit halber schreiben wir auch

$$\psi_{ast}(x_1, x_2) := a^{-\frac{3}{4}} \psi \left(\begin{pmatrix} a & -\sqrt{as} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}^{-1} (x-t) \right)$$

Offenbar können ψ_1 und ψ_2 in Definition 3.7 problemlos auch so gewählt werden, dass $\hat{\psi}_1$ und $\hat{\psi}_2$ glatt sind; wir stellen in Gleichungen (3.3.5) und (3.3.6) ja keine allzu restriktiven Anforderungen an sie. Dann ist ψ_{ast} eine Schwartz-Funktion für alle (a, s, t) und die Shearlettransformation temperierter Distributionen ist wohldefiniert. Die Anforderungen aus Gleichungen (3.3.5) und (3.3.6) sind genau so gewählt, dass Gleichung (3.3.2) von ψ erfüllt wird, und gleichzeitig die konkreten Rechnungen zur Bestimmung der Wellenfrontmenge auch analytisch möglich sind.

Der kompakte Träger von $\hat{\psi}$ in der Frequenzdomäne erlaubt einfachere Abschätzungen von Ausdrücken der Form $\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast} \rangle$, ist aber m.E. *nicht* zwingend notwendig, um mit diesem Shearlet die Wellenfrontmenge zu bestimmen.

Die Wirkung der Scher- und Skalierungsmatrizen aus Gleichung (3.3.8) versteht man am besten in der Frequenzdomäne. Mit $a \rightarrow 0$ wird $\hat{\psi}$ immer weiter „weg vom Ursprung“ geschoben in der Frequenzdomäne und der Träger liegt gleichzeitig in immer engeren Kegeln. Dies ist genau die Anisotropie, die uns erlaubt, nicht nur die Position der Singularitäten, sondern auch ihre Orientierung zu erkennen. Der Parameter s bestimmt die Scherung des Trägers von ψ . Für $s = 0$ ist der Träger um $k = 0$ herum lokalisiert, für $s = \pm 1$ um die Diagonale bzw. Antidiagonale. Das ist dargestellt in Abb. 3.2 und Bemerkung 3.9.

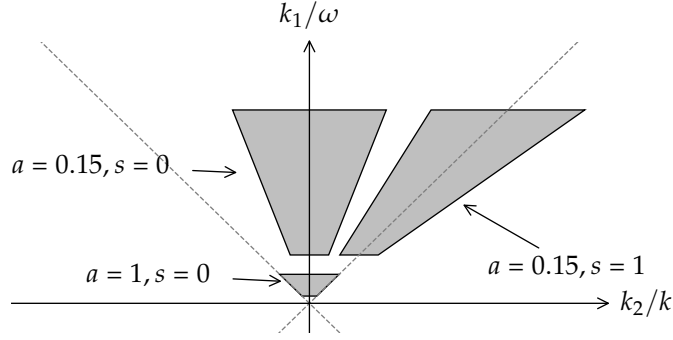


Abb. 3.2: Der Träger von $\hat{\psi}_{ast}$ für verschiedene a, s . Man sieht gut, wie $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$ für kleinere a in immer spitzeren Kegeln liegt. Da wir in den konkreten Rechnungen später $(k_1, k_2) = (\omega, k)$ nennen werden und Minkowski-Diagramme üblicherweise mit ω auf der y -Achse dargestellt werden, haben wir hier beide Namen eingetragen und alles an der Diagonale gespiegelt.

Bemerkung 3.9 (Eigenschaften von $\hat{\psi}_{ast}$)

Im Fourierraum ist $\hat{\psi}_{ast}$ gegeben durch

$$\hat{\psi}_{ast}(k_1, k_2) = a^{\frac{3}{4}} e^{-ikx} \hat{\psi}_1(ak_1) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k_2}{k_1} - s\right)\right) \quad (3.3.10)$$

und es gilt

$$\text{supp}(\hat{\psi}) \subset \left\{ k \in \mathbb{R}^2 \mid k_1 \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right], \left|\frac{k_2}{k_1} - s\right| \leq \sqrt{a} \right\} \quad (3.3.11)$$

Eine weitere Eigenschaft, die aus dieser Definition der Shearlets folgt, ist der schnelle Abfall der Shearlets abseits von t :

Proposition 3.10 (ψ_{ast} fällt schnell ab)

Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ein Shearlet wie in Definition 3.7 und M_{as} wie in Gleichung (3.3.8). Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$, dass es eine konstante C_N gibt s.d. für alle $t \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
 |\psi_{ast}(x_1, x_2)| &\leq C_k |\det M_{as}|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \left| M_{as}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - t_1 \\ x_2 - t_2 \end{pmatrix} \right|^2 \right)^{-N} \\
 &= C_k a^{-\frac{3}{4}} \left(1 + a^{-2} (x_1 - t_1)^2 + 2a^{-2}s (x_1 - t_1)(x_2 - t_2) \right. \\
 &\quad \left. + a^{-1} (1 + a^{-1}s^2) (x_2 - t_2)^2 \right)^{-N}
 \end{aligned}$$

Und insbesondere ist $C_N = \frac{15}{2} \frac{\sqrt{a+s}}{a^2} (\|\hat{\psi}\|_\infty + \|\triangle^N \hat{\psi}\|_\infty)$

Wer bis hier aufmerksam mitgelesen hat und sich Abb. 3.2 genau angeschaut hat, wird bemerkt haben, dass $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$ für alle a und s quasi nur im Quadranten $x_1^2 \geq x_2^2$ und $x_2 \geq 0$ liegt. Mit den Namen der Physik $(k_1, k_2) = (\omega, k)$ entspricht das dem „Vorwärtslichtkegel“. Glücklicherweise liegen alle analysierten Distributionen im gleich definierten $L(C)^\vee$. Wie der folgende Satz zeigt, erzeugt ψ auch nur für solche f ein reproduzierendes System.

Satz 3.11 (ψ reproduziert $L^2(C)^\vee$)

Sei

$$C := \left\{ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \mid k_1 \geq 2 \text{ und } \left| \frac{k_2}{k_1} \right| \leq 1 \right\}$$

und

$$L^2(C)^\vee := \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid \text{supp}(\hat{f}) \subset C\} \quad (3.3.12)$$

Dann ist ψ aus Definition 3.7 ein reproduzierendes System für $L^2(C)^\vee$, also gilt für alle $f \in L^2(C)^\vee$:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-2}^2 \int_0^1 \langle f, \psi_{ast} \rangle \psi_{ast}(x) \frac{da}{a^3} ds dt. \quad (3.3.13)$$

Um nun nicht nur ein reproduzierendes System für $L^2(C)^\vee$, sondern für ganz $L^2(\mathbb{R}^2)$ zu erhalten, muss $\hat{\psi}_{ast}$ noch in den rechten, linken und rückwärts liegenden Kegel gedreht und geschoben werden. Zusätzlich muss noch eine weitere Funktion W gefunden werden, welche die groben Skalen (also $|k_1|, |k_2| \leq 2$) auflöst.

hier ne eigene Definition draus machen?

Wir definieren also

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{ast}^{(1)}(k_1, k_2) &:= \hat{\psi}_{ast}(k_1, k_2), & \hat{\psi}_{ast}^{(3)}(k_1, k_2) &:= \hat{\psi}_{ast}(-k_1, -k_2), \\ \hat{\psi}_{ast}^{(2)}(k_1, k_2) &:= \hat{\psi}_{ast}(k_2, k_1), & \hat{\psi}_{ast}^{(4)}(k_1, k_2) &:= \hat{\psi}_{ast}(-k_2, -k_1)\end{aligned}\quad (3.3.14)$$

Des Weiteren gibt es ein $W(x)$ s.d. $\hat{W}(k) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\langle f, T_t W \rangle|^2 dt + \sum_{i=1}^4 \int |\langle f, \psi_{ast} \rangle|^2 d\mu(a, s, t)$$

und somit erhalten wir (dank Parseval) ein reproduzierendes System für ganz L^2 , da ja $L^2(\mathbb{R}^2) = L^2(\text{grobe Skalen})^\vee \oplus \sum_{i=1}^4 L^2(C^{(i)})^\vee$ ist. Mehr Details dazu finden sich in [8, S. 28 ff].

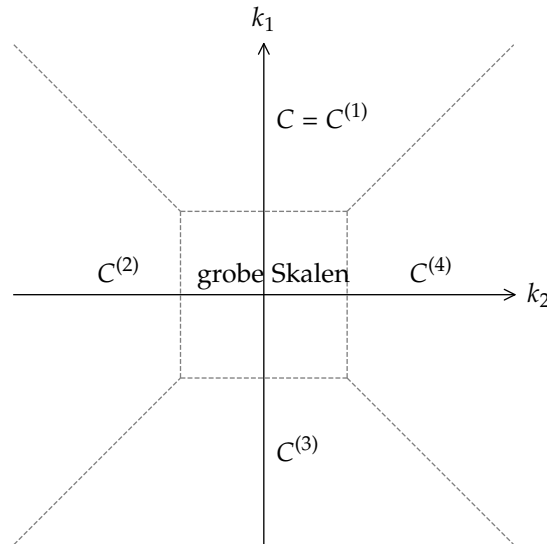


Abb. 3.3: Aufteilung des Fourierraums in vier Quadranten plus einen Teil für die groben Skalen. Die Quadranten $C^{(i)}$ entsprechen den Unterräumen von $L^2(\mathbb{R}^2)$ die von $\hat{\psi}_{ast}^{(i)}$ reproduziert werden.

3.3.4 Shearlets lösen die Wellenfrontmenge auf

Das große Versprechen der Shearlettransformation war ja, dass sie in der Lage ist nicht nur Position, sondern auch Orientierung der Singularitäten aufzulösen. Dass dem auch so ist, ist Aussage des folgenden Satzes:

Satz 3.12 ($\mathcal{S}_f(a, s, t)$ misst $WF(f)$)

Sei $f \in \mathcal{S}'(C)^\vee \cap B(C)^\vee$ (wobei $\mathcal{S}(C)^\vee$ analog zu $L^2(C)^\vee$ definiert ist). Sei \mathcal{D} die Menge der (s, t) s.d. $\mathcal{S}(a, s, t)$ schnell verschwindet. Genauer

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left\{ (s_0, t_0) \in \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \mid \text{für } (s, t) \text{ in einer Umgebung } U \text{ von } (t_0, s_0) : \right. \\ &\quad \left. |\mathcal{S}_f(a, s, t)| = O(a^k) \text{ für } a \rightarrow 0, \forall k \in \mathbb{N} \text{ mit } O(\cdot) \text{ gleichmäßig über } (s, t) \in U \right\} \end{aligned}$$

Dann gilt $WF(f)^c = \mathcal{D}$

Bemerkung 3.13

Die Einschränkung, dass f beschränkt ist ($f \in B(\mathbb{R}^2)$) ist gravierend und bedeutet zunächst, dass die Shearlettransformation nur bedingt geeignet ist, um Wellenfrontmengen auszurechnen. In Abschnitt 5.1 soll aber ein Ansatz gegeben werden, wie der Beweis von Satz 3.12 hoffentlich auf ganz $\mathcal{S}'(C)^\vee$ ausgedehnt werden kann. Des Weiteren zeigen ja auch die konkreten Rechnungen an Distributionen mit bereits bekannter Wellenfrontmenge, dass die Shearlettransformation diese korrekt erkennt.

Wenn wir die Wellenfrontmenge einer Distribution kennen, kennen wir auch ihren singulären Träger:

Korollar 3.14 ($\mathcal{S}_f(a, s, t)$ misst $\text{sing supp}(\psi)$)

Sei f wie oben und \mathcal{R} die Projektion von \mathcal{D} auf die Ortskomponente. Also

$$\mathcal{R} = \pi(\mathcal{D}) ; \quad \pi : (t, s) \mapsto t$$

Dann gilt $\text{sing supp}(f)^c = \mathcal{R}$

In [8] wird nur der Beweis von Korollar 3.14 im Detail ausgeführt. Der Beweis von Satz 3.12 wird nur skizziert. Deshalb wollen wir diese Lücke hier füllen, wobei das Vorgehen sich natürlich an dem Beweis von Korollar 3.14 orientiert.

Bevor wir mit dem Beweis beginnen können, benötigen wir noch ein paar technische Lemmata. Beweise für diese finden sich, wenn nicht gegeben, in [8].

Lemma 3.15

Sei $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ mit $\|g\|_\infty < \infty$. Nehme an, dass $\text{supp}(g) \subset U$ für ein $U \subset \mathbb{R}^2$ und setze $(U^\delta)^c := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, U) > \delta\}$. Dann fällt

$$\hat{h}(k) := \int_0^1 \int_{(B^\delta)^c} \int_{-2}^2 \langle g, \psi_{ast} \rangle \hat{\psi}_{ast}(k) \, d\mu(a, s, t)$$

schnell ab für $\|k\| \rightarrow \infty$.

Der Beweis findet sich in [8] und verwendet die selben Tricks, wie wir bei unserem Beweis von Lemma 3.17.

Das nächste Lemma ist im wesentlichen nur eine Umformulierung von Proposition 3.10:

Lemma 3.16

Sei $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ mit $\|g\|_\infty < \infty$. Nehme an, dass $\text{supp}(g) \subset U$ für ein $U \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$|\langle f, \psi_{ast} \rangle| \leq C_N C(s)^2 \|g\|_\infty a^{\frac{1}{4}} \left(1 + C(s) a^{-1} d(t, U)^2\right)^{-N}$$

$$\text{mit } C(s) = \left(1 + \frac{s^2}{2} + \left(s^2 + \frac{s^2}{4}\right)\right).$$

Das nächste Lemma ist eine Verfeinerung von Lemma 5.5 in Kutyniok und Labate [8], der Beweis wird deshalb erbracht.

Lemma 3.17

Seien $B(s_0, \Delta) \subset [-2, 2]$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt. Nehme an, dass $G(a, s, t)$ schnell abfällt für $a \rightarrow 0$ gleichmäßig über $(s, t) \in B(s_0, \Delta) \times U$. Dann fällt

$$\hat{h}(k) = \int_0^1 \int_U \int_{-2}^2 G(a, s, t) \hat{\psi}_{ast}(k) \, ds \, dt \frac{da}{a^3}$$

schnell ab, für $\|k\| \rightarrow \infty$ und $\frac{k_2}{k_1} \in B(s_0, \Delta/2)$.

Beweis

Es sei

$$\Gamma_k = \left\{ a \in [0, 1], s \in [-2, 2] \mid \frac{1}{2} \leq a|k| \leq 2, \left| s - \frac{k_2}{k_1} \right| \leq \sqrt{a} \right\},$$

also die Menge der a, s s.d. $\psi_{ast}(k) \neq 0$.

Dann können wir dank Gleichung (3.3.11) abschätzen

$$|\hat{\psi}_{ast}(k)| \leq C' a^{\frac{3}{4}} \chi_{\Gamma_k},$$

und nach Voraussetzung gilt auch für alle $(s, t) \in B(s_0, \Delta) \times U$

$$|G(a, s, t)| \leq C_N a^N, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Außerdem sei $S = B(s_0, \Delta/2)$.

Um $\hat{h}(k)$ abzuschätzen, teilen wir das Integral in die Bereiche auf, in dem $G(a, s, t)$ schnell abfällt und in dem es nicht schnell abfällt:

$$\hat{h}(k) = \underbrace{\int_0^1 \int_U \int_S G(a, s, t) \hat{\psi}_{ast}(k) \, ds \, dt \frac{da}{a^3}}_{i)} + \underbrace{\int_0^1 \int_U \int_{[-2, 2] \setminus S} G(a, s, t) \hat{\psi}_{ast}(k) \, ds \, dt \frac{da}{a^3}}_{ii)}$$

zu i)

$$\begin{aligned}
 i) &\leq \int_0^1 \int_U \int_S |G(a, s, t)| |\hat{\psi}_{ast}(k)| \, ds \, dt \frac{da}{a^3} \\
 &\leq C_N C' \int_0^1 \int_U \int_S a^{\frac{3}{4}} a^N \chi_{\Gamma_k} \, ds \, dt \frac{da}{a^3} \\
 &\leq C_N \int_{\frac{1}{2|k|}}^{\frac{2}{|k|}} a^{N-\frac{9}{4}} \, da \leq C_N |k|^{-N+\frac{7}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\implies i) \xrightarrow[a \rightarrow 0]{\text{schnell}} 0$$

zu ii)

$$\begin{aligned}
 ii) &\leq \int_0^1 \int_U \int_{[-2,2] \setminus S} |G(a, s, t)| |\hat{\psi}_{ast}(k)| \, ds \, dt \frac{da}{a^3} \\
 &\leq C' \int_0^1 \int_U \int_{[-2,2] \setminus S} |G(a, s, t)| \chi_{\Gamma_k} a^{\frac{3}{4}} \, ds \, dt \frac{da}{a^3}
 \end{aligned}$$

Für alle hinreichend großen k ist aber $\Gamma_k \subset S$, also $\Gamma_k \cap [-1, 1] \setminus S = \emptyset$ und demnach das Integral 0. Also

$$ii) = 0, \quad \text{für alle } k \text{ groß genug}$$

Noch ein letztes Lemma, bevor wir mit dem Beweis beginnen können:

Lemma 3.18 (Abschätzungen für $\langle \phi \psi_{a_0 s t}, \psi_{a_1 s' t'} \rangle$)

Sei $\phi \in C_0^\infty(B(t, \delta))$. Dann gilt für alle $N > 0$

1. Falls $0 \leq \sqrt{a_0} \leq \sqrt{a_1} \leq \delta \leq 1$

$$|\langle \phi \psi_{a_0 s t}, \psi_{a_1 s' t'} \rangle| \leq C_N \left(1 + \frac{a_1}{a_0}\right)^{-N} \left(1 + \frac{|s - s'|^2}{a_1}\right)^{-N} \left(1 + \frac{\|t - t'\|^2}{a_1}\right)^{-N}$$

2. Falls $0 \leq \sqrt{a_0} \leq \delta \leq \sqrt{a_1} \leq 1$

$$|\langle \phi \psi_{a_0 s t}, \psi_{a_1 s' t'} \rangle| \leq C_N \left(1 + \frac{a_1}{a_0}\right)^{-N} \left(1 + \frac{|s - s'|^2}{\delta^2}\right)^{-N} \left(1 + \frac{\|t - t'\|^2}{a_1}\right)^{-N}$$

3. Falls $\sqrt{a_0} \leq \delta \leq a_1 \leq \sqrt{a_1} \leq 1$

$$|\langle \phi \psi_{a_0 s t}, \psi_{a_1 s' t'} \rangle| \leq C_N \left(1 + \frac{\delta}{a_0}\right)^{-N} \left(1 + \frac{\|t - t'\|^2}{\delta}\right)^{-N}$$

Kommen wir nun zu dem Beweis unseres Hauptsatzes:

Beweis (von 3.12)

Zunächst die einfachere Richtung, nämlich $WF(f)^c \subseteq \mathcal{D}$. Wir nehmen also einen gerichteten regulären Punkt $(s_0, t_0) \in WF(f)^c$ und zeigen, dass er auch in \mathcal{D} liegt. Dazu zerlegen wir f zunächst wie folgt: Da f bei t_0 in Richtung s_0 regulär ist, gibt es per Definition der Wellenfrontmenge ein $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ s.d. $\phi = 1$ in einer Umgebung von t_0 und für alle $N \in \mathbb{N}$ $\widehat{\phi f} = O(1 + |k|)^{-N}$ für $\frac{k_2}{k_1}$ in einer Umgebung von s_0 . Dementsprechend ist $(1 - \phi)f = 0$ in einer Umgebung von t_0 und es gilt

$$\mathcal{S}_f(a, s, t) = \langle \psi_{ast}, \phi f \rangle + \langle \psi_{ast}, (1 - \phi)f \rangle \quad (3.3.15)$$

Da $(1 - \phi)f$ in einer Umgebung von t_0 verschwindet und nach Lemma 3.16 Shearlets außerhalb von t schnell abfallen für $a \rightarrow 0$ fällt auch der zweite Term von Gleichung (3.3.15) für $t \neq t_0$ schnell ab. Für den ersten Term überzeugen wir uns anhand von Abb. 3.2 und Gleichung (3.3.11), dass für a klein genug $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$ schließlich in jedem noch so kleinen Kegel um s liegt. In einem solchen um s_0 fällt aber $\widehat{\phi f}$ rapide ab nach Voraussetzung und damit auch der erste Term in (3.3.15).

3.3 Wavelettransformation und die Wellenfrontmenge

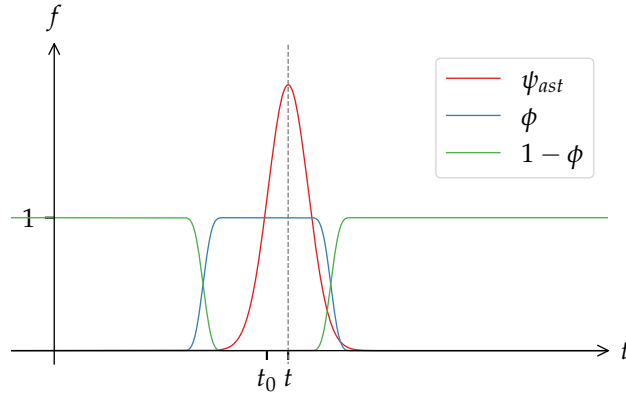


Abb. 3.4: Die Zerlegung von f um (t_0, x_0) herum visualisiert

Die beiden entscheidenden Zutaten waren hier also die Tatsache, dass die Shearlets außerhalb von t rapide abfallen und damit bei immer feineren Skalen a immer besser lokalisiert werden sowie die Tatsache, dass für $a \rightarrow 0$ der Träger im Frequenzbereich in immer engeren Kegeln liegt.

Deutlich schwieriger ist die umgekehrte Inklusion, nämlich dass die Shearlettransformation tatsächlich die ganze Wellenfrontmenge erkennt. Hier geht jetzt auch die Reproduktionseigenschaft der Transformation ein.

Für die umgekehrte Inklusion $\mathcal{D} \subseteq WF(f)^c$ haben wir zu zeigen, dass falls $S_f(a, s, t)$ schnell abfällt in einer Umgebung U von (s_0, t_0) für $a \rightarrow 0$ dann auch $\widehat{\phi f}(k)$ schnell abfällt für $\|(k)\| \rightarrow \infty$ für $\frac{k_2}{k_1}$ in einer Umgebung von s_0 und ein ϕ getragen in einer Umgebung von t_0 .

Sei also $S_f(a, s, t) \xrightarrow[a \rightarrow 0]{\text{schnell}} 0$ für $(s, t) \in B(s_0, 2\Delta) \times B(t_0, 2\delta) =: S \times U^3$. Sei $\phi \in C_0^\infty(B(t_0, \delta))$ und $\phi \equiv 1$ in einer Umgebung von t_0 . Dann müssen wir zeigen, dass $\widehat{\phi f}(k) \xrightarrow[a \rightarrow 0]{\text{schnell}} 0$ für $\frac{k_2}{k_1} \in S$

³Falls das ganze gilt für (s, t) in einer offenen Umgebung von (s_0, t_0) , dann auch in solchen Bällen mit passenden Δ, δ

$$\begin{aligned}
 \widehat{\phi f}(k) &= \int \phi(x) f(x) e^{-ikx} dx \\
 &\stackrel{(3.11)}{=} \iint \langle \psi_{ast}, \phi f \rangle \psi_{ast}(x) d\mu(a, s, t) e^{-ikx} dx \\
 &= \int \langle \psi_{ast'}, \phi f \rangle \hat{\psi}_{ast}(k) d\mu(a, s, t) \\
 &= \underbrace{\int_{U \times [-2,2] \times [0,1]} \langle \psi_{ast}, \phi f \rangle \hat{\psi}_{ast}(k) d\mu(a, s, t)}_{i)} \\
 &\quad + \underbrace{\int_{U^c \times [-2,2] \times [0,1]} \langle \psi_{ast}, \phi f \rangle \hat{\psi}_{ast}(k) d\mu(a, s, t)}_{ii)}
 \end{aligned}$$

zu ii)

Per Konstruktion von ϕ gilt $d(\text{supp}(\phi f, U^c)) = \delta > 0$. Also fällt ii) nach Lemma 3.15 schnell ab.

zu i)

Falls $\langle \psi_{ast}, \phi f \rangle \xrightarrow[a \rightarrow 0]{\text{schnell}} 0$ für $(s, t) \in S \times U$, dann fällt ii) schnell ab, falls $\frac{k_2}{k_2} \in B(s_0, \Delta)$ nach Lemma 3.17. Wir zeigen also, dass $\langle \psi_{ast}, \phi f \rangle \xrightarrow[a \rightarrow 0]{\text{schnell}} 0$ für $(s, t) \in S \times U$.

$$\begin{aligned}
 \langle \phi f, \psi_{ast} \rangle &= \int \phi f \psi_{ast} dx \\
 &= \int \phi(x) \int \langle f, \psi_{a's't'} \rangle \psi_{a's't'}(x) d\mu(a', s', t') \psi_{ast}(x) dx \\
 &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-2}^2 \langle \phi \psi_{ast}, \psi_{a's't'} \rangle \langle f, \psi_{a's't'} \rangle ds' dt' \frac{da'}{a'^3}
 \end{aligned}$$

Für $a < \delta^4$ teilen wir die Integration über s' auf in die drei Fälle a) $0 < a' < a < \delta$, b) $a < a' < \delta$ und c) $\delta < a'$ und nutzen Lemma 3.18. Außerdem teilen wir die Integration über t' auf in die Fälle $t' \in U$ und $t' \in U^c$

Zu a), $t' \in U^c$

Hier gilt im Integrationsbereich $\|t' - t\| \geq \delta > 0$. Mit Lemma 3.18.1) können wir für alle $N \in \mathbb{N}$ abschätzen wie folgt:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_{U^c} \int_{-2}^2 \langle \phi \psi_{ast}, \psi_{a's't'} \rangle \langle f, \psi_{a's't'} \rangle ds' dt' \frac{da'}{a'^3} \\ & \leq \int_0^a \int_{U^c} \int_{-2}^2 C_N |\langle f, \psi_{a's't'} \rangle| \left(1 + \frac{\|t - t'\|^2}{a}\right)^{-N} d\mu(a', s', t') \\ & \leq \int_0^a \int_{U^c} \int_{-2}^2 C_N |\langle f, \psi_{a's't'} \rangle| a^N \|t - t'\|^{-N} d\mu(a', s', t') \\ & \leq C_N a^N \int_0^a \int_{U^c} \int_{-2}^2 |\langle f, \psi_{a's't'} \rangle| \|t - t'\|^{-N} d\mu(a', s', t') \end{aligned}$$

Wobei das letzte Integral endlich ist, da $\|t - t'\| \geq \delta$ im Integrationsbereich und $|\langle f, \psi_{a's't'} \rangle|$ beschränkt, da f beschränkt ist. Für kleinere a kann es nur kleiner werden.

Zu a), $t' \in U$

Eine kurze Erinnerung: Falls $(s', t') \in S \times U$, gilt nach Voraussetzung für alle $N \in \mathbb{N}$: $|\langle f, \psi_{a's't'} \rangle| \leq C_N a^N$. Außerdem gilt für $s' \notin B(s_0, \Delta)$: $|s - s'| \geq \Delta$ für alle s die wir hier betrachten. Also:

⁴Und da wir uns für kleine a interessieren, dürfen wir das auch direkt annehmen

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_U \int_{-2}^2 \langle \phi \psi_{ast}, \psi_{a's't'} \rangle \langle f, \psi_{a's't'} \rangle d\mu(a', s', t') \\
&= \int_0^a \int_U \int_{B(s_0, \Delta)} \langle \phi \psi_{ast}, \psi_{a's't'} \rangle \langle f, \psi_{a's't'} \rangle d\mu(a', s', t') + \int_0^a \int_U \int_{B(s_0, \Delta)^c} \langle \phi \psi_{ast}, \psi_{a's't'} \rangle \langle f, \psi_{a's't'} \rangle d\mu(a', s', t') \\
&= \int_0^a \int_U \int_{B(s_0, \Delta)} C_N a^N d\mu(a', s', t') \\
&\quad + \int_0^a \int_U \int_{B(s_0, \Delta)^c} |\langle f, \psi_{a's't'} \rangle| \left(1 + \frac{|s - s'|^2}{a} \right)^{-N} d\mu(a', s', t') \\
&\leq C_N a^N + \int_0^a \int_U \int_{B(s_0, \Delta)^c} \langle f, \psi_{a's't'} \rangle a^N \Delta^{-2N} d\mu(a', s', t') \\
&\leq C_N a^N
\end{aligned}$$

Mit analogen Abschätzungen und Lemma 3.18 erhalten wir auch noch, dass auch die Integrale zu b) und c) schnell abfallen in a .

QED

4 Rechnungen und Ergebnisse

Bemerkung 4.1 (Notation)

Da wir ab jetzt Distributionen aus der Physik betrachten, für die es üblich ist als Variablen (t, x) und als Variablen im Fourierraum (ω, k) zu verwenden, schreiben wir statt (x_1, x_2) ab jetzt (t, x) und statt (k_1, k_2) schreiben wir (ω, k) . Außerdem verwenden wir das Minkowski-Skalarprodukt für die Fouriertransformation d.h.

$$\hat{f}(\omega, k) := \int f(t, x) e^{-i\omega t + ikx} dt dx,$$

wieder um den Konventionen in der Physik gerecht zu werden.

4.1 Zwei nützliche Substitutionen für $\langle f, \psi_{ast} \rangle$ und ein Lemma

Um die Shearlettransformation und damit Wellenfrontmengen auszurechnen, müssen wir Ausdrücke der Form $\lim_{a \rightarrow 0} \int f(t, x) \psi_{ast}^\dagger(t, x) dt dx$ abschätzen. Da kein expliziter Ausdruck für $\psi_{ast}(x)$ gegeben ist, aber zumindest der Träger der Fouriertransformierten $\hat{\psi}_{ast}(\omega, k)$ bekannt ist, ist es einfacher $\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast} \rangle$ statt $\langle f, \psi_{ast} \rangle$ zu berechnen. Das hat dann die Form

$$\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast} \rangle = \int a^{\frac{3}{4}} \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{\omega} - s \right) \right) \hat{f}(\omega, k) e^{-i\omega t + ikx} d\omega dk. \quad (4.1.1)$$

Punktweise konvergiert der Integrand gegen 0, da $\hat{\psi}$ kompakt getragen ist. Für $a \rightarrow 0$ wird aber der Träger des Integranden immer weiter „nach außen“ verschoben (vgl. Abb. 3.2), ohne aber (notwendigerweise) im Betrag abzunehmen.

4 Rechnungen und Ergebnisse

Deshalb existiert auch keine integrierbare Majorante, die unabhängig von a ist. Also verschieben wir den Integrationsbereich mittels Substitution so, dass der Integrationsbereich für $a \rightarrow 0$ immer der selbe bleibt und wir \hat{f} „immer weiter draußen“ anschauen. Diese Substitutionen werden was immer Ausgangspunkt unserer Abschätzungen sein.

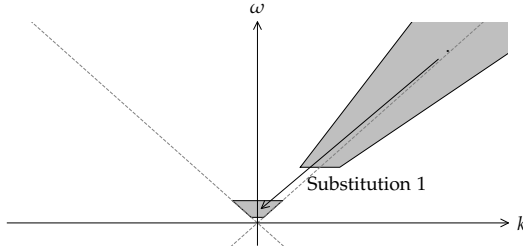


Abb. 4.1: Der Träger von $\hat{\psi}$ vor und nach der Substitution aus Gleichung (4.1.2)

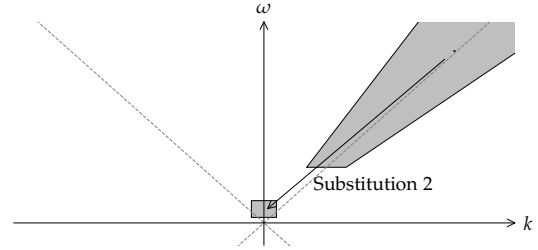


Abb. 4.2: Der Träger von $\hat{\psi}$ vor und nach der Substitution aus Gleichung (4.1.4)

Sei also ψ ein Shearlet wie in Bemerkung 3.9. Sei f die zu analysierende fouriertransformierbare Funktion (oder Distribution) in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $S_f(ast)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle f, \psi_{ast} \rangle &= \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast} \rangle \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} e^{-i\omega t + ikx} \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega} - s\right)\right) \hat{f}(\omega, k) d\omega dk \end{aligned}$$

und nach „entscheren“ und „deskalisieren“, also der Substitution

$$\begin{aligned} a\omega_1 = \omega' & \iff \omega = \frac{\omega'}{a} \\ a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega} - s\right) = \frac{k'}{\omega'} & \iff k = \frac{\omega' s}{a} + a^{-\frac{1}{2}}k' \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$\Rightarrow d\omega dk = a^{-\frac{3}{2}} d\omega' dk'$$

ergibt sich folgendes für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$:

4.1 Zwei nützliche Substitutionen für $\langle f, \psi_{ast} \rangle$ und ein Lemma

$$\begin{aligned} \langle f, \psi_{ast} \rangle &= \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast} \rangle \\ &= \iint a^{-\frac{3}{4}} \hat{\psi}_1(\omega') \hat{\psi}_2\left(\frac{k'}{\omega'}\right) \hat{f}\left(\frac{\omega'}{a}, \frac{\omega's}{a} + \frac{k'}{\sqrt{a}}\right) e^{-i\frac{\omega'}{a}(t'+sx') - i\frac{k'x'}{\sqrt{a}}} d\omega' dk' \end{aligned}$$

(Substitution 1, (4.1.3))

Wie man sieht, tauchen in den Argumente von $\hat{\psi}_1$ und $\hat{\psi}_2$ nun die Parameter a, s, t gar nicht mehr auf, und wir können nun verwenden, was wir aus (3.3) über deren Träger wissen. Alternativ und mit ähnlichem Ergebnis kann auch folgende Substitution

$$\begin{aligned} a\omega = \omega' & \iff \omega = \frac{\omega'}{a} \\ a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega} - s\right) = k' & \iff k = \left(a^{\frac{1}{2}}k' + s\right) \frac{\omega'}{a} \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

$$\Rightarrow d\omega dk = a^{-\frac{3}{2}} \omega d\omega' dk'$$

gewählt werden, wodurch wieder alle Parameter (a, s, t) aus den Argumenten von $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ verschwinden und sich

$$\langle f, \psi_{ast} \rangle = \iint a^{-\frac{3}{4}} k_1 \hat{\psi}_1(\omega') \hat{\psi}_2(k') \hat{f}\left(\frac{\omega'}{a}, \omega' \left(a^{-\frac{1}{2}}k' + sa^{-1}\right)\right) e^{-i\omega' \left(\frac{t'+sx'}{a} + \frac{k'x'}{\sqrt{a}}\right)} d\omega' dk'$$

(Substitution 2, (4.1.5))

ergibt. Dabei ist zu beachten, dass diese Substitution zulässig ist, obwohl sie die Orientierung *nicht* erhält und *keine* Bijektion ist. Aber der kritische Bereich, nämlich $\omega = 0$, liegt nicht im Träger von $\hat{\psi}$.

Beiden Substitution gemein ist aber, dass danach $0 = \omega \notin \text{supp}(\hat{\psi})$ und dass $\text{supp}(\psi)$ sowohl in k als auch in ω beschränkt ist. ω kann also sowohl nach unten als auch nach oben durch eine Konstante abgeschätzt werden, wann immer dies der Sache dienlich ist. Auch k kann, zumindest nach oben, immer durch eine Konstante abgeschätzt werden.

Wie man Gleichungen (Substitution 1, (4.1.3)) und (Substitution 2, (4.1.5)) ansieht, haben wir schließlich einen Ausdruck der Form $\lim_{a \rightarrow 0} \int \hat{f}(a, k) e^{ik \frac{x}{a}} dk$ abzuschätzen. Eine Möglichkeit für diese Abschätzungen liefert das folgende Lemma:

Lemma 4.2 ($\int \hat{f}(a, k) e^{ik \frac{x}{a}} dk$ abschätzen)

Sei $\hat{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$; $(a, k) \mapsto \hat{f}(a, k)$ kompakt getragen in k und s.d.

$$\hat{f}(a, k) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \hat{f}_n(k)$$

für alle hinreichend kleinen a und $\hat{f}_n \in C_c^{N_n}(\mathbb{R}^n)$. Die Potenzreihe sei punktweise absolut konvergent¹. Sei $\delta > 0$ und $\mathbb{R}^n \ni x \neq 0$. Sei des weiteren $p = \sup\{n + N_n \delta | n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt:

$$\int \hat{f}(a, k) e^{ik \frac{x}{a^\delta}} dk = O(a^p), \quad \text{für } a \rightarrow 0$$

Beweis

Da $\hat{f}_n \in C_c^{N_n}(\mathbb{R}^n)$ ist, gilt auch $f_n(x) = O(x^{-N_n})$ für $|x| \rightarrow \infty$, wobei wie erwartet $f(x) = \hat{f}^\vee(x)$ ist. Dann können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \int \hat{f}(a, k) e^{ik \frac{x}{a^\delta}} dk &= \sum_n a^n \int \hat{f}_n(k) e^{ik \frac{x}{a^\delta}} dk \\ &= \sum_n a^n \underbrace{f\left(\frac{x}{a^\delta}\right)}_{O\left(\left(\frac{x}{a^\delta}\right)^{-N_n}\right)} = \sum_n O(a^n a^{N_n \delta}) = O(a^p) \end{aligned}$$

Bevor wir dann mit den konkreten Rechnungen beginnen können, brauchen wir noch ein letztes Lemma über das Verhalten der Wellenfrontmengen Lorentz-invarianter Distributionen unter Lorentz-Transformationen.

Lemma 4.3 (Wellenfrontmengen Lorentz-invarianter Distributionen)

Sei $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+d})$ lorentz-invariant und $\Lambda \in \text{SO}(d, 1)$. Sei des weiteren $\phi_{x_0} : \mathbb{R}^{1+d} \rightarrow \mathbb{R}$ eine bei $x_0 \in \mathbb{R}^{1+d}$ lokalisierte Testfunktion im Sinne von Definition 3.1.

¹Wie es z.B. innerhalb des Konvergenzradius von Taylorreihen gegeben ist.

Dann ist $\phi_{\Lambda x_0}(\cdot) := \phi_{x_0}(\Lambda^{-1}\cdot)$ eine bei Λx_0 lokalisierte Testfunktion und es gilt für alle $k \in \mathbb{R}^{1+d}$

$$\widehat{f\phi_{x_0}}(k) = \widehat{f\phi_{\Lambda x_0}}(\Lambda k).$$

Korollar 4.4

Seien f, Λ, x_0, k wie eben. Dann gilt

$$(x_0, k) \in WF(f) \iff (\Lambda x_0, \Lambda k) \in WF(f)$$

Beweis

Mit formaler Rechnung folgt:

$$\begin{aligned} \widehat{f\phi_{x_0}}(k) &= \int f(x) \phi_{x_0}(x) e^{-ik \cdot x} dx = \int f(\Lambda^{-1}x) \phi_{x_0}(\Lambda^{-1}x) e^{-ik \cdot \Lambda^{-1}x} dx \\ &= \int f(x) \phi_{\Lambda x_0}(x) e^{-i\Lambda k \cdot x} dx = \widehat{f\phi_{\Lambda x_0}}(\Lambda k) \end{aligned}$$

4.2 Die Wellenfrontmenge von Δ_m

Nach Gleichung (3.2.2) gilt

$$\Delta_m(t, x) = \int \delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \Theta(-\omega) e^{-i\omega t + ikx} d\omega dk$$

woraus sich $\widehat{\Delta}_m$ direkt als $\delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \Theta(-\omega)$ ablesen lässt.

Offensichtlich ist $\text{supp}(\widehat{\Delta}_m) \subset C^{(3)}$, d.h. der entscheidende Beitrag der Shearlet-transformation ist

$$\langle f, \psi_{ast}^{(3)} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast}^{(3)} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{ast}^{(1)}(-\omega, -k) \rangle = \langle \hat{f}(-\omega, -k), \hat{\psi}_{ast} \rangle, \quad (4.2.1)$$

da nach Gleichung (3.3.14) gilt $\hat{\psi}_{ast}^{(3)}(\omega, k) = \hat{\psi}_{ast}^{(1)}(-\omega, -k)$. Berechnen wir also letzteres:

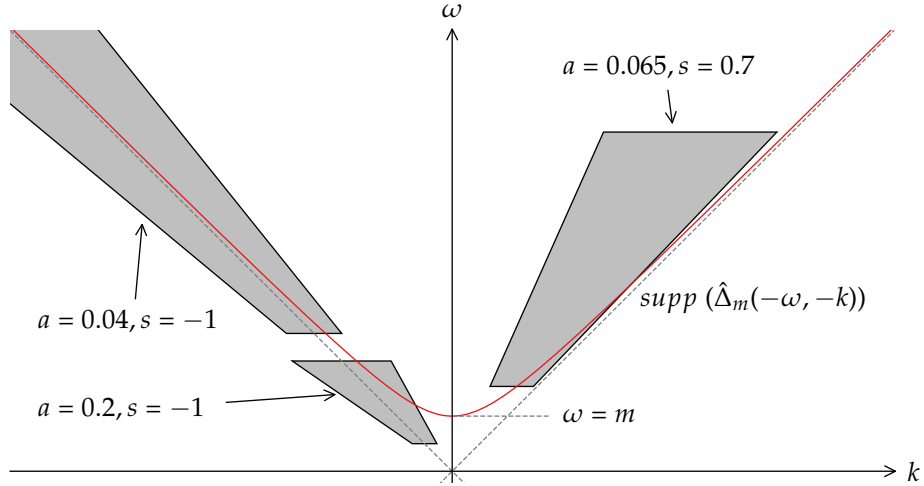


Abb. 4.3: Die Träger von $\hat{\Delta}_m$ und $\hat{\psi}_{ast}$. Es ist zu sehen, dass für $a \rightarrow 0$ und $s \neq \pm 1$ die Träger schließlich disjunkt sind

Fall $s \neq \pm 1$

Hier gibt es nicht viel zu tun, denn für a klein genug gilt $\text{supp}(\hat{\Delta}_m(-\cdot)) \cap \text{supp}(\hat{\psi}_{ast}) = \emptyset$ wie man Abb. 4.3 entnehmen kann. Also gilt

$$\begin{aligned} \langle \Delta_m, \psi_{ast}^{(3)} \rangle &= \langle \hat{\Delta}_m(-\cdot), \hat{\psi}_{ast} \rangle \\ &= 0 \\ &= O(a^k) \quad \forall k, \quad \text{für } a \text{ klein genug} \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Dies gilt für alle $(t', x') \in \mathbb{R}^2$

Fall $s = 1$

Intuition Für $s = 1$ schneidet die Diagonale $\{\omega = k\}$ den Träger $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$ auf der ganzen Länge. Der Betrag von $\hat{\psi}_{ast}$ skaliert mit $a^{\frac{3}{4}}$ (vgl. Gleichung (3.3.10)) und die Länge von $\text{supp}(\hat{\psi}_{ast})$ entlang der Diagonalen mit a^{-1} (vgl. Gleichung (3.3.10)). Also erwarten wir schlimmstenfalls $\langle \hat{\Delta}_m, \hat{\psi}_{ast} \rangle = O\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)$. Aber

nur wenn die Wellenfronten von $e^{-i\omega t' + ikx'}$ parallel zu der Singularität und damit der Diagonalen liegen. Andernfalls erwarten wir, dass die immer schneller werdenden Oszillationen der Phase sich gegenseitig auslöschen.

Fleißige Analysis

$$\langle \hat{\Delta}_m(-\cdot), \hat{\psi}_{a1t} \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{\omega} - 1 \right) \right) \delta(\omega^2 - k^2 - m^2) \theta(\omega) e^{-i\omega t' + ikx'} d\omega dk$$

Nullstellen von δ :

$$\omega^2 - k^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\omega^2 - m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{d\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}}; \text{ wobei nur „+“ in } \text{supp}(\hat{\psi}_2) \text{ liegt}$$

$$\begin{aligned} &= a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - m^2}}{\omega} - 1 \right) \right) \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - m^2}} e^{-i\omega t' + i\sqrt{\omega^2 - m^2} x'} d\omega \\ &= a^{\frac{3}{4}} a^{-1} \int \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2 \left(\underbrace{a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - a^2 m^2}}{\omega} - 1 \right)}_{= \frac{a^{\frac{3}{2}} m^2}{2\omega^2} + O\left(\frac{7}{a^{\frac{7}{2}}}\right)} \right) \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - a^2 m^2}} e^{-i\frac{\omega}{a} t' + i\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - m^2} x'} d\omega \end{aligned}$$

Der Integrand lässt sich nun durch $\hat{\psi}_1(\omega) \cdot \|\hat{\psi}_2\|_\infty$ majorisieren und wir dürfen Lebesgue verwenden um Integral und Grenzwert $a \rightarrow 0$ zu vertauschen:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\Delta}_m(-\cdot), \hat{\psi}_{a1t} \rangle &= a^{-\frac{1}{4}} \int \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(0) e^{-i\omega \left(\frac{t' - x'}{a} \right)} \\ &= a^{-\frac{1}{4}} \hat{\psi}_2(0) \hat{\psi}_1 \left(\frac{t' - x'}{a} \right) \\ &\sim O \left(a^{-\frac{1}{4}} \right), \text{ falls } x' = t' \\ &\sim O \left(a^k \right) \forall k, \text{ sonst} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Das analoge Ergebnis erhält man mit gleicher Rechnung auch für $s = -1$ und $t' = -x'$ Dies bestätigt das intuitiv erwartete Ergebnis.

4.2.1 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Fassen wir die Ergebnisse aus Gleichungen (4.2.2) und (4.2.3) noch einmal tabellarisch zusammen:

	$(t', x') = (0, 0)$	$t' = x'$	$t' = -x'$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{-\frac{1}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	a^k
$s = -1$	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k
$s \neq \pm 1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tab. 4.1: Konvergenzordnung von $\langle \Delta_m, \psi_{as(t', x')}^{(3)} \rangle$ im Limit $a \rightarrow 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

Dies deckt sich auch mit den Ergebnissen von Schulz [13] und Hörmander [7], welche jeweils erhalten:

$$WF_{(SG)}(\Delta_m) = \{ \langle 0, 0; -|k|, k \rangle \mid k \in \hat{\mathbb{R}} \} \cup \{ \langle \pm|x|, x; -\lambda|k|, \mp k \rangle \mid k \in \hat{\mathbb{R}}, \lambda > 0 \}$$

Zusätzlich zu der Wellenfrontmenge erhalten wir aber mit dem Exponenten von a auch noch eine Information „wie schlimm“ die entsprechende Richtung ist. Ein Vergleich mit entsprechenden Begriffen der mikrolokalen Analysis wird in Abschnitt 5.1 diskutiert.

4.3 Die Wellenfrontmenge von Θ

Wie in Abschnitt 3.2.1 erklärt, sind Potenzen des Feynmanpropagators gegeben durch Potenzen der Zweipunktfunktion Δ_m und der Heaviside-Funktion Θ . Dementsprechend, muss auch die Wellenfrontmenge von Θ berechnet werden, aber dies ist glücklicherweise auch mit unseren Shearlet-Methoden relativ einfach.

Da Θ die Stammfunktion von δ (im distributionellen Sinne) ist, können wir die Fouriertransformierte dank der üblichen Fourierrechenregeln direkt hinschreiben:²

²Wieder nur korrekt bis auf Vorfaktoren von 2π

$$\widehat{\Theta(t) \otimes 1(x)}(\omega, k) = \widehat{\Theta}(\omega) \otimes \widehat{\delta}(k) = \left(\delta(\omega) + \frac{i}{\omega} \right) \delta(k) \quad (4.3.1)$$

.

Fall $s \neq 0$

$$\text{supp}(\widehat{\Theta(t) \otimes 1(x)}) = \{(\omega, k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = 0\}$$

und nach Gleichung (3.3.11)

$$\text{supp}(\hat{\psi}) \subset \left\{ k \in \mathbb{R}^2 \mid k_1 \in \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a} \right], \left| \frac{k_2}{k_1} - s \right| \leq \sqrt{a} \right\}$$

.

Also gilt für hinreichend große a :

$$\text{supp}(\hat{\psi}_{ast}) \cap \text{supp}(\widehat{\Theta(t) \otimes 1(x)}) = \emptyset \implies \left\langle \widehat{\Theta(t) \otimes 1(x)}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle = 0 \quad (4.3.2)$$

Fall $s = 0$

Mit Gleichung (4.3.1) können $\langle \widehat{\Theta} \otimes \hat{1}, \hat{\psi}_{ast} \rangle$ direkt berechnen mit dem Ausdruck für $\hat{\psi}_{ast}$ aus Bemerkung 3.9:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\Theta} \otimes \hat{1}, \hat{\psi}_{ast} \rangle &= a^{\frac{3}{4}} \int \hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2 \left(a^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{\omega} \right) \right) \left(\delta(\omega) + \frac{i}{\omega} \right) \delta(k) e^{-i\omega t' + ikx'} d\omega dk \\
 &= \underbrace{a^{\frac{3}{4}} \hat{\psi}_1(0) \hat{\psi}_2(0)}_{=0, \text{ da } \hat{\psi}_1(0)=0} + ia^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(0)}{\omega} e^{-i\omega t'} d\omega \\
 &= ia^{\frac{3}{4}} \hat{\psi}_2(0) \int \underbrace{\frac{\psi_1(\omega)}{\omega}}_{\in C_c^\infty} e^{-i\omega \frac{t'}{a}} d\omega \\
 &= O \left(a^{\frac{3}{4}} \right), \text{ falls } t = 0 \\
 &= O \left(a^k \right) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ falls } t \neq 0.
 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Wobei im letzten Schritt genutzt wurde, dass $\hat{\psi}_1(0) = 0$, $\frac{\hat{\psi}_1(\omega)}{\omega}$ also glatt ist und somit eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

Genau die selben Ergebnisse erhält man mit beinahe genau den selben Rechnungen für $\langle \Theta \otimes 1, \psi_{ast}^{(3)} \rangle$.

4.3.1 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Und einmal der vollständig halber, die Ergebnisse aus Gleichungen (4.3.2) und (4.3.3) tabellarisch dargestellt:

	$t' = 0$	$t' \neq 0$
$s = 0$	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k
$s \neq 0$	a^k	a^k

Tab. 4.2: Konvergenzordnung von $\langle \Theta \otimes 1, \psi_{as(t',x')} \rangle$ im Limit $a \rightarrow 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

4.4 Die Wellenfrontmenge von Δ_m^2

Bevor wir die Wellenfrontmenge von Δ_m^2 berechnen können benötigen wir einen Ausdruck dafür, oder besser noch für die Fouriertransformierte davon.

4.4.1 $\widehat{\Delta}^{*2}$ berechnen

Gemäß dem Faltungssatz gilt $\widehat{\Delta}_m^2 = \widehat{\Delta}_m * \widehat{\Delta}_m = \widehat{\Delta}_m^{*2}$. Wir müssen also die Faltung von $\widehat{\Delta}_m$ mit sich selber ausrechnen. Dabei gilt (kurze Rechnung):

$$\widehat{\Delta}_m * \widehat{\Delta}_m(-\omega, -k) = \left(\widehat{\Delta}_m(-\cdot) * \widehat{\Delta}_m(-\cdot) \right) (\omega, k)$$

und wir berechnen also letzteren Ausdruck. Das Faltungsintegral ist

$$\widehat{\Delta}_m^{*2}(-\omega, -k) = \int \Theta(\omega') \delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2) \Theta(\omega - \omega') \delta((\omega - \omega')^2 - (k - k')^2 - m^2) d\omega' dk' \quad (4.4.1)$$

noch schnell
sage, warum
wir hier Fal-
tungssatz
für Distri-
butionen
anwenden?
(Also das
Hörmander
"jupßagt?)

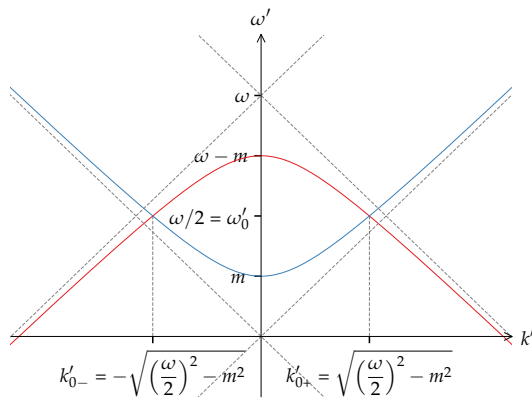


Abb. 4.4: Das zu berechnende Integral aus Gleichung (4.4.1) visualisiert für $k = 0$

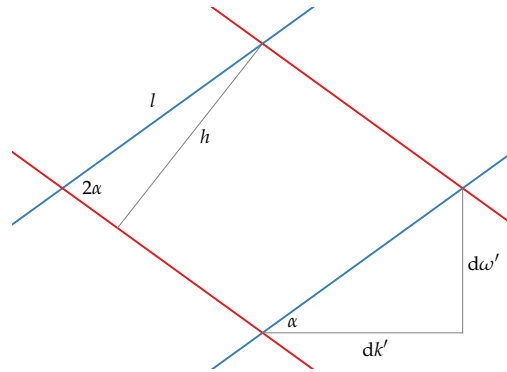


Abb. 4.5: Die Kreuzungstelle bei k'_{0+} von ganz nah angeschaut

Da Δ_m Lorentz-invariant ist, sind Δ_m^2 und $\widehat{\Delta}_m^{*2}$ es auch. Es genügt also $\widehat{\Delta}_m^{*2}$ für $k = 0$ und positive ω zu berechnen. Alle anderen Werte holen wir uns dann aus der Lorentz-Invarianz. An Abb. 4.4 sehen wir schon, dass das Faltungsintegral (4.4.1) nur dann ungleich null ist, wenn (ω, k) oberhalb oder auf der $2m$ -Massenschale liegen. Es ist also insbesondere $\omega > 0$.

Um nun das Integral über zwei sich schneidende lineare³ δ -Distributionen zu berechnen bedienen wir uns eines Physikertricks und stellen uns die δ -Distribution

³Linear in dem Sinne, dass die Distribution entlang einer Linie getragen ist. Nicht das es eine lineare Distribution ist

4 Rechnungen und Ergebnisse

als Grenzwert ($h \rightarrow 0$) einer $\frac{1}{h}$ -hohen und h -breiten Rechtecksfunktion vor. Dann ist das Integral über die sich schneidenden Rechteckfunktionen proportional zu der Schnittfläche und damit zu $l \cdot h$ in Abb. 4.5. Außerdem schneiden sich die beiden Hyperbeln für $\omega \rightarrow +\infty$ in einem rechten Winkel, das Faltungsintegral ergibt hier also 2, da es zwei Schnittpunkte gibt.

Aus Abb. 4.5 lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{d\omega'}{dk'} \quad \text{und} \quad \frac{h}{l} = \sin(2\alpha) \\ \Rightarrow l &= \frac{h}{\sin\left(2 \arctan\left(\frac{d\omega'}{dk'}\right)\right)} = \frac{h \left(\left(\frac{d\omega'}{dk'}\right)^2 + 1 \right)}{2 \frac{d\omega'}{dk'}} \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

außerdem gilt

$$\omega' = \sqrt{k'^2 + m^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega'}{dk'} = \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + m^2}} \quad (4.4.3)$$

Wenn wir nun Gleichungen (4.4.2) und (4.4.3) sowie die vorhergehenden Gedanken kombinieren erhalten wir

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_m^{*2}(-\omega, 0) &= (4.4.1) \\ &= C \frac{(\frac{d\omega'}{dk'})^2 \Big|_{k'_0} + 1}{\frac{d\omega'}{dk'} \Big|_{k'_0}} \Theta(\omega^2 - (2m)^2) \\ &= C \frac{\sqrt{k'_0{}^2 + m^2}(2k'_0{}^2 + m^2)}{k'_0(k'_0{}^2 + m^2)} \Theta(\dots) \\ &= C \frac{\sqrt{\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2}(\omega^2 - 3m^2 + m^2)}{\sqrt{\omega^2 - 4m^2}(\frac{1}{4}\omega^2 - m^2 + m^2)} \Theta(\dots) \\ &= C \frac{\omega^2 - 2m^2}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \Theta(\dots) \stackrel{C=2}{=} 2 \frac{\omega^2 - 2m^2}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \Theta(\dots) \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

4.4 Die Wellenfrontmenge von Δ_m^2

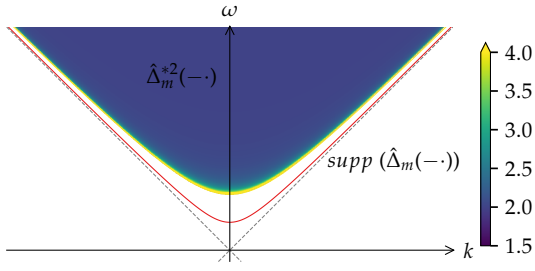


Abb. 4.6: Plot von $\hat{\Delta}_m^{*2}(-\cdot)$ und $\hat{\Delta}_m(-\cdot)$.
Je weiter wir uns von der $2m$ -Massenschale wegbewegen, desto konstanter wird $\hat{\Delta}_m^{*2}(-\cdot)$ und ist singulär genau auf der $2m$ -Massenschale

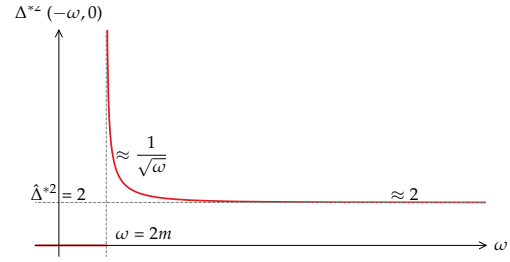


Abb. 4.7: Plot von $\hat{\Delta}_m^{*2}(-\cdot)|_{k=0}$ um das asymptotische Verhalten für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ zu verdeutlichen

Jetzt erhalten wir $\hat{\Delta}_m^{*2}(\omega, k)$ für beliebige $k \neq 0$ noch aus der Lorenz-Invarianz:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_m^{*2}(-\omega, -k) &\stackrel{(\omega, k)}{\sim} \stackrel{(\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0)}{=} \hat{\Delta}_m^{*2}(\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) \\ &= 2 \frac{\omega^2 - k^2 - 2m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2} \sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}} \Theta(\omega^2 - k^2 - 4m^2) \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Es ist zu beachten, dass die Heaviside-Funktion genau bei der ersten Nullstelle der zweiten Wurzel im Nenner abschneidet und alle weiteren Nullstellen sowohl des Nenners als auch des Zählers außerhalb der $2m$ -Massenschale, und damit außerhalb des Trägers der Heaviside-Funktion, liegen.

4.4.2 ...und nun zur Wellenfrontmenge

Mit diesem Ausdruck für $\hat{\Delta}_m^{*2}$ können wir uns nun der Wellenfrontmenge widmen.

Fall $|s| > 1$

Genau wie im Fall $s \neq 1$ bei der massiven Zweipunktfunktion (vgl. Abschnitt 4.2) ist hier nichts zu tun, da für a klein genug wieder

$$\text{supp}(\hat{\psi}_{ast}^{(3)}) \cap \text{supp}(\hat{\Delta}_m^{*2}) = \emptyset \implies \left\langle \hat{\Delta}_m^{*2}, \hat{\psi}_{ast}^{(3)} \right\rangle = 0 \quad (4.4.6)$$

gilt.

Fall $|s| < 1$

Hier bedienen wir uns direkt bei Substitution 2, (4.1.5) und schreiben

$$\left\langle \hat{\Delta}_m^{*2}, \hat{\psi}_{ast}^{(3)} \right\rangle = \left\langle \hat{\Delta}_m^{*2}(-\cdot), \hat{\psi}_{ast} \right\rangle \quad (4.4.7)$$

$$\begin{aligned} &= 2a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{\omega} - s\right)\right) (\omega^2 - k^2 - 2m^2)}{\sqrt{\omega^2 - k^2} \sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}} \\ &\quad \cdot \Theta\left(\omega^2 - k^2 - 4m^2\right) e^{-i\omega t' + ikx'} \omega \, d\omega \, dk \quad (4.4.8) \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}}k + sa^{-1}\right)^2 - 2m^2\right)}{\sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}}k + sa^{-1}\right)^2} \sqrt{\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}}k + sa^{-1}\right)^2 - 4m^2}} \\ &\quad \cdot \Theta\left(\omega^2 a^{-2} - \omega^2 \left(a^{-\frac{1}{2}}k + sa^{-1}\right)^2 - 4m^2\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a} + k\frac{x'}{\sqrt{a}}\right)} \omega \, d\omega \, dk \\ &\stackrel{\Delta s := 1-s^2 > 0}{=} 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 \left(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2\right) - 2a^2m^2\right) e^{\dots} \Theta(\dots)}{\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}}\omega^2 ks - a\omega^2 k^2 - 4a^2m^2}} \, d\omega \, dk \end{aligned}$$

An dieser Stelle bedienen wir uns nun bei Lemma 4.2 mit

$$\hat{f}(\sqrt{a}, \omega, k) = \frac{\omega^2 \left(\Delta s - 2\sqrt{a}ks - \sqrt{a}^2 k^2 \right) - 2\sqrt{a}^4 m^2}{\sqrt{\Delta s - 2\sqrt{a}ks - \sqrt{a}^2 k^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2\sqrt{a}\omega^2 ks - \sqrt{a}^2 \omega^2 k^2 - 4\sqrt{a}^4 m^2}} \cdot \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \Theta(\Delta s \omega^2 - 2\sqrt{a}\omega^2 ks - \sqrt{a}^2 \omega^2 k^2 - 4\sqrt{a}^4 m^2)$$

Für a klein genug gilt $\text{supp}(\hat{\psi}) \subset \text{supp}(\Theta(\dots))$, $\Theta(\dots)$ spielt also keine Rolle. $\omega = 0 \notin \text{supp}(\hat{\psi}_1)$. Der Nenner ist offensichtlich als Polynom analytisch in (\sqrt{a}, ω, k) . Der Zähler ist analytisch, da $\omega = 0$ ausgeschlossen ist und $\sqrt{a} \mapsto \alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{a}^2 + \gamma$ sowie $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\delta+x}}$ für $\delta > 0$ sowie Verknüpfungen analytischer Funktionen analytisch sind. Also können wir für kleine \sqrt{a} schreiben

$$\hat{f}(\sqrt{a}, \omega, k) = \sum_{n=0} \sqrt{a}^n \hat{f}_n(\omega, k)$$

mit glatten \hat{f}_n .

Für $(t', x') \neq 0$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta_m^2, \psi_{ast}^{(3)} \right\rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \psi \left(\frac{t' - sx'}{a}, \frac{x'}{a} \right) \\ &\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{falls } (t', x') \neq 0 \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

nach Lemma 4.2.

Für $(t' = 0 = x')$ erhalten wir in führender Ordnung in a :

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta_m^2, \psi_{ast}^{(3)} \right\rangle &\sim 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{f}_0(\omega, k) e^{-i\omega \left(\frac{0-s0}{a} + k \frac{0}{\sqrt{a}} \right)} d\omega dk \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\omega^2 \Delta s}{\sqrt{\Delta s} \sqrt{\omega^2 \Delta s}} \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) d\omega dk \\ &\sim O \left(a^{-\frac{3}{4}} \right), \quad \text{falls } x' = 0 = t' \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

Fall $s = -1$

$$\left\langle \widehat{\Delta}_m^{*2}(-\cdot), \hat{\psi}_{ast} \right\rangle \quad (4.4.11)$$

$$\begin{aligned} &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 \left(a^{-2}(1-s^2) - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2 \right) - 2m^2 \right)}{\sqrt{\omega^2 \left(a^{-2}(1-s^2) - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2 \right)} \sqrt{\omega^2 \left(a^{-2}(1-s^2) - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2 \right) - 4m^2}} \\ &\quad \cdot \Theta \left(\omega^2 \left(a^{-2}(1-s^2) - 2a^{-\frac{3}{2}}ks - a^{-1}k^2 \right) - 4m^2 \right) e^{-i\omega \left(\frac{t'-sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \cdot \omega \, d\omega \, dk \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) a^{\frac{3}{2}} \left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}2m^2 \right)}{a^{\frac{3}{2}}\omega \sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2} \sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2}} \\ &\quad \cdot \Theta \left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2 \right) \cdot e^{-i\omega \left(\frac{t'+x'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} \omega \, d\omega \, dk \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \left\{ \underbrace{\int \frac{\hat{\psi}_2(k) \left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}2m^2 \right) \Theta(\dots) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2} \sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2}} \, dk}_{=: \hat{g}_{a,x'}(\omega)} \right\} \\ &\quad \cdot \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \left(\frac{t'+x'}{a} \right)} \, d\omega \\ &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{g}_{a,x'}(\omega) \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \left(\frac{t'+x'}{a} \right)} \, d\omega \quad (4.4.12) \end{aligned}$$

Nun müssen wir also $\hat{g}_{a,x'}(\omega)$ genauer betrachten: $\hat{\psi}_2(k) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Θ schneidet genau bei der ersten Nullstelle des Nenners ab. Deshalb verschieben wir durch eine Substitution $k \rightarrow k'$ den Integrationsbereich genau so, dass diese Nullstelle bei $k' = 0$ liegt.

Sei also $k_0 := \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4a^2m^2}}{\sqrt{a}\omega}$ die relevante Nullstelle des Nenners am Integrationsbereich. Dann ist die a -Abhängigkeit von k_0 in erster Näherung gegeben durch $0 < k_0 = \frac{2m^2}{\omega^2} a^{\frac{3}{2}} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) =: c_\omega a^{\frac{3}{2}} + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)$ und mit $k' = k - k_0$ gelten folgende Ausdrücke für den Nenner und den Zähler:

Zähler

$$\begin{aligned}
 2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}2m^2 &= 2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}}2m^2 \\
 &= 2\omega^2 k' + 2\omega^2 \frac{2m^2}{\omega^2} a^{\frac{3}{2}} + 2\omega^2 O\left(a^{\frac{7}{2}}\right) \\
 &\quad - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}}2m^2 \\
 &= 2\omega^2 k' + 2a^{\frac{3}{2}}m^2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)
 \end{aligned}$$

Nenner

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}}k^2} \sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}}4m^2} &= \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0)} \sqrt{k' + k_0} \\
 &\quad \cdot \underbrace{\sqrt{-a^{\frac{1}{2}}\omega^2 \left(k' - \frac{2\sqrt{\omega^2 - 4a^2 m^2}}{\sqrt{a}\omega}\right)}}_{= \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}} \sqrt{k'}
 \end{aligned}$$

Mit diesen Ausdrücken für Nenner und Zähler können wir nun eine integrierbare Majorante für den Integranden in $\hat{g}_{a,x'}$ finden, die unabhängig von a ist.

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{\hat{\psi}_2(k' + k_0) \left(2\omega^2 k' + 2a^{\frac{3}{2}}m^2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)\right)}{\sqrt{k'} \sqrt{k' + k_0} \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0)} \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2 k' + O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)}} \Theta(k') \right| \\
 &\leq \frac{\text{const } \hat{\psi}_2(k' + k_0)}{\sqrt{k'}} \frac{2\omega^2 k' + 2a^{\frac{3}{2}}m^2 - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2 + O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}{\sqrt{k' + k_0} \sqrt{2} \sqrt{2}} \Theta(k') \\
 &\leq \frac{\text{const } \hat{\psi}_2(k' + k_0)}{\sqrt{k'}} \left(\frac{\omega^2 k'}{\sqrt{k'}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^2}{\sqrt{k' + k_0}} + \frac{2a^{\frac{3}{2}}m^2}{\sqrt{k' + k_0}} + \frac{O\left(a^{\frac{7}{2}}\right)}{\sqrt{k_0}} \right) \Theta(k') \\
 &= \frac{\text{const } \hat{\psi}_2(k' + k_0)}{\sqrt{k'}} \left(\omega^2 \sqrt{k'} - a^{\frac{1}{2}}\omega^2(k' + k_0)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{\frac{2a^{\frac{3}{2}}m^2}{\sqrt{\frac{2m^2}{\omega^2} a^{\frac{3}{2}} + O(a^{\frac{7}{2}})}}}_{O\left(a^{\frac{3}{4}}\right)} + \dots \right) \Theta(k') \\
 &\leq \frac{\text{const } \hat{\psi}_2(k' + k_0)}{\sqrt{k'}} \Theta(k')
 \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

4 Rechnungen und Ergebnisse

Der letzte Ausdruck ist eine integrierbare Majorante und in den Abschätzungen wurde u.a. verwendet, dass $\hat{\psi}_2$ kompakt getragen und beschränkt ist. In „const“ wurden immer notwendige, aber letzten Endes irrelevante, Vorfaktoren gesammelt.

Also haben wir

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left| \left\langle \hat{\Delta}_m^{*2}(-\cdot), \hat{\psi}_{ast} \right\rangle \right| \leq \lim_{a \rightarrow 0} 2a^{-\frac{3}{4}} \int \hat{g}_{a,x'}(\omega) \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \left(\frac{t'+x'}{a} \right)} d\omega \quad (4.4.14)$$

$$\frac{\hat{\psi}_2(k) \left(2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 2m^2 \right) \Theta(\dots) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{2k - a^{\frac{1}{2}} k^2} \sqrt{2\omega^2 k - a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k^2 - a^{\frac{3}{2}} 4m^2}} \rightarrow \hat{\psi}_2(k) \omega \Theta(k) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}} \quad (4.4.15)$$

und wir können also schreiben

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\omega) &\rightarrow \hat{f}_0(\omega) = \int \omega \hat{\psi}_2(k) \Theta(k) e^{-i\omega k \frac{x'}{\sqrt{a}}} dk \\ &= \omega (\hat{\psi}_2 \cdot \Theta)^\vee(-\omega x' / \sqrt{a}) \\ &= \omega (\hat{\psi}_2^\vee * \Theta^\vee)(-\omega x' / \sqrt{a}) \\ &= \omega (\psi_2 * (\delta + i\mathcal{P}(1/x)))(-\omega x' / \sqrt{a}) \\ &= \omega \left[\underbrace{\psi_2(-\omega x' / \sqrt{a})}_{O(a^k) \forall k \in \mathbb{N}} + i \underbrace{(\psi_2 * \mathcal{P}(1/x))(-\omega x' / \sqrt{a})}_{O(x^{-1})} \right] \quad (4.4.16) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{O((-\omega x' / \sqrt{a})^{-1}) = O\left(a^{\frac{1}{2}}\right)} \\ &\sim O\left(a^{\frac{1}{2}}\right), \quad \text{falls } x' \neq 0 \\ &\sim \text{const}, \quad \text{falls } x' = 0 \end{aligned}$$

Wir dürfen also, falls $x' \neq 0$, folgende Abschätzung für $\hat{f}_a(\omega)$ für $a \rightarrow 0$ machen:

$$\hat{f}_a(\omega) = \omega C a^{\frac{1}{2}} + o\left(a^{\frac{1}{2}}\right)$$

Setzen wir dies nun wieder in unseren letzten Ausdruck in Gleichung (4.4.11) ein, erhalten wir endlich

$$\begin{aligned}
 \left\langle \widehat{\Delta}_m^{*2}, \hat{\psi}_{ast} \right\rangle &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\omega C a^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}_1(\omega)}_{\in C_c^\infty(\mathbb{R})} e^{-i\omega \left(\frac{t'+x'}{a} \right)} d\omega \\
 &= 2a^{-\frac{1}{4}} C \left(\omega \hat{\psi}_1(\omega) \right)^\vee \left(-\frac{t'+x'}{a} \right) \\
 &\sim O(a^{-\frac{1}{4}}), \quad \text{falls } t' = -x' \neq 0 \\
 &\sim O(a^{-\frac{3}{4}}), \quad \text{falls } t' = 0 = x' \\
 &\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}
 \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

hier fehlen wenn man es ganz genau nimmt noch $O(a^{\frac{7}{2}})$ -Terme. Wird da noch eine Bemerkung zu geschrieben, oder nehme ich die ganz brav mit?

4.4.3 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Wenn wir die Ergebnisse aus Gleichungen (4.4.6) und (4.4.17) und ?? zusammenfassen, erhalten wir für die Wellenfrontmenge von $\widehat{\Delta}_m^{*2}$:

	$(t', x') = 0$	$t' = x' \neq 0$	$t' = -x' \neq 0$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k	a^k
$s = -1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	a^k	$a^{-\frac{1}{4}}$	a^k
$ s < 1$	$a^{-\frac{3}{4}}$	a^k	a^k	a^k
$ s > 1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tab. 4.3: Konvergenzordnung von $\left\langle \Delta_m^2, \psi_{as(t',x')}^{(3)} \right\rangle$ im Limit $a \rightarrow 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

Erfreulicherweise deckt sich dies wieder mit den Ergebnissen von Schulz [13, Cor. 3.70], welcher für allgemeine Potenzen von Δ_m folgendes erhält:

$$WF_{SG}^\psi(\Delta_m^k) \subset WF_{SG}^\psi(\Delta_m) \cup \{ \langle 0, 0; -\lambda, |x| \rangle \mid |x| \in \hat{\mathbb{R}}, \lambda > |x| \}$$

4.5 Die Wellenfrontmenge von $\Delta_m^{*M^2}$

Bevor wir uns aber der Wellenfrontmenge widmen können, brauchen wir einen Ausdruck für die Fouriertransformierte $\widehat{\Delta_m^{*M^2}}$ von $\Delta_m^{*M^2}$.

4.5.1 $\widehat{\Delta_m^{*M^2}}$ berechnen

Auch für die getwistete Faltung ist schnell nachgerechnet, dass

$$\widehat{\Delta_m} *_\Omega \widehat{\Delta_m}(-\omega, -k) = \overline{\left(\widehat{\Delta_m}(-\cdot) *_\Omega \widehat{\Delta_m}(-\cdot) \right)}(\omega, k).$$

Wie wir später sehen werden, ist die komplexe Konjugation irrelevant, da alles reell.

$$\widehat{\Delta_m}(-\cdot) = \delta(\omega^2 - k^2 - m^2)\Theta(\omega) \quad (4.5.1a)$$

die Fouriertransformierte der massiven Zweipunktfunktion

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5.1b)$$

die kanonische symplektische Matrix auf \mathbb{R}^n

mit Definition 3.4 und Gleichungen (4.5.1a) und (4.5.1b) erhalten wir also

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta_m^{*M^2}}(-\omega, -k) &= \int \delta(\omega'^2 - k'^2 - m^2) \delta((\omega' - \omega)^2 - (k - k')^2 - m^2) \\ &\quad \cdot \Theta(\omega') \Theta(\omega - \omega') e^{\frac{i}{2}(\omega'k - \omega k')} d\omega' dk' \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

und damit das selbe Integral wie in Gleichung (4.4.1) bis auf einen zusätzlichen Phasenfaktor. Nachdem wir gezeigt haben, dass auch dieser Lorentz-Invariant ist, können wir das Integral mit dem selben Trick wie in Abschnitt 4.4.1 berechnen.

Proposition 4.5 (Ω_{std} ist Lorentz-invariant für $n = 2$)

Ω_{std} ist Lorentz-invariant für $n = 2$

Beweis

Eine einfache Rechnung zeigt

$$\begin{pmatrix} \cosh \beta & \sinh \beta \\ -\sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \beta & -\sinh \beta \\ \sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\beta \in \mathbb{R}$.

Mit Proposition 4.5 ist $\widehat{\Delta}_m^{*\Omega^2}$ Lorentz-Invariant und es reicht aus $\widehat{\Delta}_m^{*\Omega^2}(\omega, 0)$ zu berechnen.

Die beiden Kreuzungspunkte der δ -Distributionen liegen bei (vgl. Abb. 4.4)

$$(\omega'_0, k'_{0\pm}) = \left(\frac{\omega}{2}, \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 - m^2} \right)$$

Die „Fläche“ der Kreuzungspunkte der δ -Distributionen wurde in Abschnitt 4.4.1 berechnet und ist

$$A = \frac{\omega^2 - m^2}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}}.$$

Der Phasenfaktor nimmt bei den Kreuzungspunkten folgende Werte an:

$$e^{\frac{i}{2}\Omega((\omega, k), (\omega'_0, k'_{0\pm}))} = e^{\pm \frac{i}{2} \left(-\omega^2 \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{\omega^2}} \right)}$$

Kombinieren wir also die vorhergehenden Resultate erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \hat{\Delta}_m^{*\Omega^2}(-\omega, 0) &= A e^{\frac{i}{2}\Omega((\omega, k), (\omega'_0, k'_{0+}))} + A e^{\frac{i}{2}\Omega((\omega, k), (\omega'_0, k'_{0-}))} \\
 &= \frac{\omega^2 - 2m^2}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \left\{ e^{-\frac{i}{2}\omega^2 \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{\omega^2}}} + e^{\frac{i}{2}\omega^2 \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{\omega^2}}} \right\} \Theta(\omega^2 - 4m^2) \\
 &= 2 \frac{\omega^2 - 2m^2}{\omega \sqrt{\omega^2 - 4m^2}} \cos(\varphi(\omega^2)) \Theta(\omega^2 - 4m^2),
 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt noch implizit $\varphi(\omega^2)$ definiert wurde. Und mit Lorentz-Invarianz erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
 \hat{\Delta}_m^{*\Omega^2}(-\omega, -k) &= \hat{\Delta}_m^{*\Omega^2}(-\sqrt{\omega^2 - k^2}, 0) \\
 &= 2 \frac{\omega^2 - k^2 - 3m^2}{\sqrt{\omega^2 - k^2} \sqrt{\omega^2 - k^2 - 4m^2}} \cos\left(\frac{k^2 - \omega^2}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{k^2 - \omega^2}}\right) \\
 &\quad \cdot \Theta(\omega^2 - k^2 - 4m^2) \\
 &= \hat{\Delta}_m^{*2}(\omega, k) \cos(\varphi(\omega^2 - k^2)) \Theta(\omega^2 - k^2 - 4m^2), \tag{4.5.3}
 \end{aligned}$$

4.5.2 ... und nun zur Wellenfrontmenge von $\hat{\Delta}_m^{*\Omega^2}$

Fall $|s| > 1$

Wir bedienen uns wieder genau des selben Arguments, wie in Gleichung (4.4.6) und dürfen direkt schreiben:

$$\left\langle \hat{\Delta}_m^{*\Omega^2}, \hat{\psi}_{ast}^{(3)} \right\rangle = \left\langle \hat{\Delta}_m^{*\Omega^2}(-\cdot), \hat{\psi}_{ast} \right\rangle = 0, \quad \text{für alle } a \text{ klein genug} \tag{4.5.4}$$

4.5 Die Wellenfrontmenge von Δ_m^{*M2}

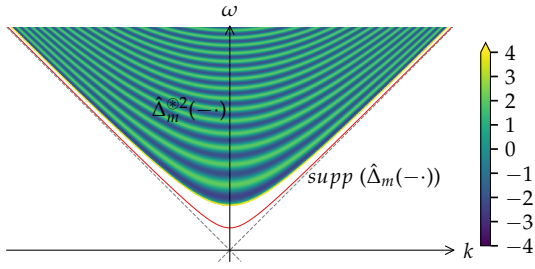


Abb. 4.8: Plot von $\hat{\Delta}_m^{*\Omega^2}(-\cdot)$ und $\hat{\Delta}_m(-\cdot)$.
Wieder liegt der Träger von $\hat{\Delta}_m^{*\Omega^2}(-\cdot)$ oberhalb der $2m$ -Massenschale.

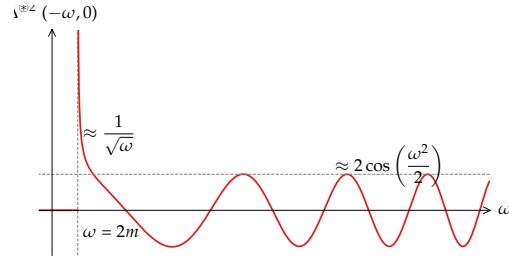


Abb. 4.9: Plot von $\hat{\Delta}_m^{*\Omega^2}|_{k=0}(-\cdot)$ um das asymptotische Verhalten für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ zu verdeutlichen

Fall $|s| < 1, (x, t) \neq 0$

Da $\hat{\Delta}_m^{*\Omega^2} = \hat{\Delta}_m^{*2} \cos(\dots)$ können wir direkt mit dem Ausdruck (4.4.7) $\cdot \cos$ weiter arbeiten und genau die selben Abschätzungen machen. $\cos(\varphi)$ ist bekanntermaßen beschränkt.

$$\begin{aligned}
 \left\langle \hat{\Delta}_m^{*\Omega^2}, \hat{\psi}_{ast}^{(3)} \right\rangle &= \left\langle \hat{\Delta}_m^{*\Omega^2}(-\cdot), \hat{\psi}_{ast} \right\rangle \\
 &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) \left(\omega^2 \left(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2 \right) - 2a^2 m^2 \right)}{\sqrt{\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}} k s - a k^2} \sqrt{\Delta s \omega^2 - 2a^{\frac{1}{2}} \omega^2 k s - a \omega^2 k^2 - 4a^2 m^2}} \\
 &\quad \cdot \Theta(\dots) \cos(\varphi(\omega^2 - k^2)) e^{-i\omega \left(\frac{t-sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} d\omega dk \\
 &\leq 2a^{-\frac{3}{4}} \int \omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega \left(\frac{t-sx'}{a} + k \frac{x'}{\sqrt{a}} \right)} d\omega dk \\
 &\sim O(a^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}
 \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

Fall $|s| < 1, (x, t) = 0$

In diesem Fall lassen wir den \cos -Faktor in Gleichung (4.5.5) in der ersten Ungleichung nicht heraus fallen, dafür wird der e^{\dots} -Faktor 1. Den \cos -Faktor schreiben wir als Summe von e -Funktionen und erhalten

4 Rechnungen und Ergebnisse

$$\begin{aligned}
& \left\langle \widehat{\Delta}_m^{*\Omega^2}(-\cdot), \widehat{\psi}_{ast} \right\rangle \tag{4.5.6} \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \omega \widehat{\psi}_1(\omega) \widehat{\psi}_2(k) \left\{ \exp \left(ia^{-2} \frac{\omega^2(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{a^2m^2}{\omega^2(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \exp(-i \dots) \right\} d\omega dk \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \sqrt{\omega} \widehat{\psi}_1(\sqrt{\omega}) \widehat{\psi}_2(k) \left\{ \exp \left(ia^{-2} \frac{\omega(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{a^2m^2}{\omega(\Delta s - 2a^{\frac{1}{2}}ks - ak^2)}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \text{c.c.} \right\} \frac{d\omega dk}{\sqrt{\omega}} \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \left\{ \int \widehat{\psi}_1(\sqrt{\omega}) \left\{ \exp \left(ia^{-2} \left(\frac{\omega \Delta s}{4} + O\left(a^{\frac{1}{2}}\right) \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \text{c.c.} \right\} d\omega \right\} \widehat{\psi}_2(k) dk \\
&= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ (\widehat{\psi}_1 \circ \sqrt{\cdot})^\vee \left(\frac{\Delta s}{4a^2} \right) + (\widehat{\psi}_1 \circ \sqrt{\cdot})^\vee \left(-\frac{\Delta s}{4a^2} \right) + \text{c.c.} \right\}}_{\sim O(a^k) \ \forall k \in \mathbb{N}} \psi_2(k) dk \\
&\sim O(a^k) \ \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

wobei bei der Substitution $\omega \rightarrow \sqrt{\omega}$ in der zweiten Zeile wichtig ist, dass $0 \notin \text{supp}(\widehat{\psi}_1)$, also auch nach der Substitution noch $\widehat{\psi}_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ist.

Fall $s = -1$

Da $\widehat{\Delta}_m^{*\Omega^2} = \widehat{\Delta}_m^{*2} \cos(\dots)$ ist, haben wir bis auf den cos-Faktor die selben Analysis zu betreiben, wie für $\widehat{\Delta}_m^{*2}$.

$$\left\langle \widehat{\Delta}_m^{*\Omega^2}(-\cdot), \widehat{\psi}_{a-1t} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \underbrace{\frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k' + k_0) \left(2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}} \omega^2(k' + k_0)^2 - a^{\frac{3}{2}} 2m^2 \right) \Theta(k')}{\sqrt{k'} \sqrt{k' + k_0} \sqrt{2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0)} \sqrt{-a^{\frac{1}{2}} \omega^2 \left(k' - \frac{2\sqrt{\omega^2 - 4a^2 m^2}}{\sqrt{a}\omega} \right)}}}_{i)} \\
 &\quad \cdot \underbrace{\cos \left(\frac{2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}} \omega^2(k' + k_0)^2}{2a^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^{\frac{3}{2}} m^2}{2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}} \omega^2(k' + k_0)^2}} \right)}_{ii)} \\
 &\quad \cdot e^{-i\omega \left(\frac{t' + x'}{a} + \frac{(k' + k_0)x'}{\sqrt{a}} \right)} d\omega dk' \tag{4.5.7}
 \end{aligned}$$

Genau wie in Gleichung (4.4.13) können wir für $i)$ wieder abschätzen⁴

$$i) \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{k'}} \Theta(k')$$

Damit dürfen wir wieder Lebesgue anwenden, um den Grenzwert $a \rightarrow 0$ des Integrals zu berechnen. Des Weiteren ist analog zu Gleichung (4.4.15)

$$i) \xrightarrow{\text{punktweise f.ü.}} \omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k') \Theta(k'). \tag{4.5.8}$$

Widmen wir uns also dem Argument des Kosinus $ii)$:

$$\begin{aligned}
 &\frac{2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}} \omega^2(k' + k_0)^2}{2a^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^{\frac{3}{2}} m^2}{2\omega^2(k' + k_0) - a^{\frac{1}{2}} \omega^2(k' + k_0)^2}} \\
 &= \frac{\omega^2(k' + k_0)(2 - a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0))}{2a^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^{\frac{3}{2}} m^2}{\omega^2(k' + k_0)(a^{\frac{1}{2}}(k' + k_0) - 2)}} \\
 &\xrightarrow{\text{punktweise, außer } k'=0} \frac{\omega^2 k' a^{-\frac{3}{2}}}{2} \\
 &\implies \cos(ii) \xrightarrow{\text{punktweise, außer } k'=0} \cos \left(\frac{\omega^2 k' a^{-\frac{3}{2}}}{2} \right) \tag{4.5.9}
 \end{aligned}$$

⁴Da \cos beschränkt ist, spielt er bei den Abschätzungen keine Rolle

Einsetzen von Gleichungen (4.5.8) und (4.5.9) in Gleichung (4.5.7) ergibt mit Lebesgue

$$\begin{aligned}
 & \lim_{a \rightarrow 0} \left\langle \widehat{\Delta}_m^{*\Omega^2}(-\cdot), \widehat{\psi}_{a-1t} \right\rangle \\
 &= 2a^{-\frac{3}{4}} \int \omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k') \cos \left(a^{-\frac{3}{2}} \frac{\omega^2 k'}{2} \right) e^{-i\omega k' \frac{x'}{\sqrt{a}}} e^{-i\omega \frac{t'+x'}{a}} d\omega dk' \\
 &= a^{-\frac{3}{4}} \int \left\{ \underbrace{\int \hat{\psi}_2(k') \Theta(k') \left(e^{ia^{-\frac{3}{2}} \frac{\omega^2 k'}{2}} + e^{-i\cdots} \right) e^{-i\omega k' \frac{x'}{\sqrt{a}}} dk'}_{=: \hat{f}_a(\omega)} \right\} \cdot \omega \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \frac{t'+x'}{a}} d\omega
 \end{aligned}$$

Nun betrachten wir $\hat{f}_a(\omega)$ und erhalten analog zu Gleichung (4.4.16)

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_a(\omega) &= \int \hat{\psi}_2(k') \Theta(k') \left(e^{ia^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\omega^2 k'}{2} + O(a^1) \right)} + e^{-i\cdots} \right) dk' \\
 &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \int \hat{\psi}_2(k') \Theta(k') \left(e^{ia^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\omega^2 k'}{2} \right)} + \text{c.c} \right) dk' \\
 &= \left[\underbrace{\psi_2 \left(-\frac{\omega^2}{2a^{\frac{3}{2}}} \right)}_{O(a^k) \ \forall k \in \mathbb{N}} + i \underbrace{(\psi_2 * \mathcal{P}(1/x)) \left(-\frac{\omega^2}{2a^{\frac{3}{2}}} \right)}_{O(x^{-1})} + \text{c.c} \right] \\
 &\quad \underbrace{\quad}_{O \left(\left(-\frac{\omega^2}{2a^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} \right) = O \left(a^{\frac{3}{2}} \right)} \\
 &\sim O \left(a^{\frac{3}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

Also dürfen wir für $a \rightarrow 0$ schreiben $\hat{f}_a(\omega) = Ca^{\frac{3}{2}} + o \left(a^{\frac{3}{2}} \right)$ und landen bei

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow 0} \left\langle \widehat{\Delta}_m^{*\Omega^2}, \widehat{\psi}_{a-1t}^{(3)} \right\rangle &= a^{-\frac{3}{4}} \int Ca^{\frac{3}{2}} \omega \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega \frac{t'+x'}{a}} d\omega \\
 &\sim O \left(a^{\frac{3}{4}} \right), \quad \text{falls } t' = -x' \\
 &\sim O \left(a^k \right) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}
 \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

4.5.3 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Fassen wir die Ergebnisse aus Gleichungen (4.5.4) bis (4.5.6) und (4.5.10) wieder in einer Übersichtstabelle zusammen:

	$(t', x') = 0$	$t' = x' \neq 0$	$t' = -x' \neq 0$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{\frac{3}{4}}$	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k	a^k
$s = -1$	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k
$ s < 1$	a^k	a^k	a^k	a^k
$ s > 1$	a^k	a^k	a^k	a^k

Tab. 4.4: Konvergenzordnung von $\langle \Delta_m^{*2}, \psi_{ast}^{(3)} \rangle$ im Limit $a \rightarrow 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

Auch diesmal stimmen die Ergebnisse mit denen von Schulz [13, Prop. 3.72]⁵ überein, welcher für alle Potenzen des getwisteten Produkts Δ_m^{*k} erhält:

$$\langle t, x; \omega, k \rangle \in WF(\Delta_m^{*k}) \Rightarrow -\omega \geq |k|$$

Das getwistete Produkt ist also bei 0 in weniger Richtungen singulär, als das ungetwistete. Insbesondere muss G_F^2 auf dieser nicht-kommutativen Raumzeit nicht renormiert werden, da das Produkt $\Theta \Delta_m^{*M^2}$ wohldefiniert ist:

Korollar 4.6 ($\Theta \Delta_m^{*M^2}$ ist wohldefiniert)

Nach Tabelle 4.4 ist $\Delta_m^{*M^2}$ nur in lichtartige Richtungen singulär, während nach Tabelle 4.2 $\Theta \otimes 1$ nur in ∂_t -Richtung singulär ist. Also ist deren Produkt nach Hörmanders Kriterium Satz 3.3 wohldefiniert.

4.6 Berechnen von $WF(G_F)$

4.6.1 Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, G_F \rangle$

Der Feynmanpropagator ist einerseits definiert durch Gleichung (3.2.1), kann aber im Impulsraum auch geschrieben werden als (Schwartz [14], (6.34))

⁵So weit sie gegeben wurden

$$\hat{G}_F(\omega, k) = \frac{1}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \quad (4.6.1)$$

Setzen wir dies in unsere Ausdrücke für $\langle \psi_{ast}, f \rangle$ aus **Substitution 1, (4.1.3)** bzw. **Substitution 2, (4.1.5)** ergibt sich, unter Verwendung des Minkowskiskalaprodukts,

$$\begin{aligned} \langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{ast} \rangle &= \int \hat{\psi}_{ast}(\omega, t) \hat{G}_F(\omega, t) \, d\omega \, dk \\ &= a^{\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2\left(a^{-\frac{1}{2}} \frac{k}{\omega} - s\right) e^{-i\omega t' + ikx'}}{m^2 - \omega^2 + k^2 - i0^+} \, d\omega \, dk \\ &= a^{-\frac{3}{4}} \iint \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{\omega s}{a} + \frac{k}{\sqrt{a}}\right)^2 - i0^+} \, d\omega \, dk \\ &= a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{\omega \in [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2] \\ \left|\frac{k}{2} - s\right| \leq \sqrt{ax}}} \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega \frac{t' - sx'}{a} + ik \frac{x'}{\sqrt{a}}}}{m^2 + a^{-2}\omega^2(s^2 - 1) + a^{-\frac{3}{2}}2s\omega k + a^{-1}k^2 - i0^+} \, d\omega \, dk \quad (4.6.2) \end{aligned}$$

Integral
hübsch ma-
chen. GröÙe-
res Integral-
zeichen?

und mit der anderen Substitution analog

$$\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{ast} \rangle = a^{-\frac{3}{4}} \iint_{\substack{|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2] \\ k \in [-1, 1]}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k) e^{-i\omega \left(\frac{t' - sx'}{a} + \frac{kx'}{\sqrt{a}}\right)}}{m^2 - \omega^2(a^{-2}(1 - s^2) - a^{-1}k^2 - 2ksa^{-\frac{3}{2}})} \, d\omega \, dk \quad (4.6.3)$$

wobei sich die Integrationsbereiche aus den Forderungen an den Träger von ψ (vgl. (3.3.11)) ergeben.

Fall $s = 1, t' = 0 = x'$

Nach (4.6.3) erhalten wir mit $s = 1, t' = 0 = x'$

$$\begin{aligned}\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{a10} \rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 + \omega^2(a^{-1}k^2 + a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + \omega^2(a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2k)} d\omega dk\end{aligned}$$

Da aber $|\omega| \in [\frac{1}{2}, 2]$ und $k \in [-1, 1]$ ist, ist für hinreichend kleine a (und für genau die interessieren wir uns ja)

$$\left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{k\omega^2} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}\omega^2k + 2k\omega^2} \right|$$

eine integrierbare (im Sinne des Cauchy-Hauptwertes) Majorante für den Integranden.

Wir dürfen uns also des Lebesgueschen Konvergenzsatzes bedienen und schreiben

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}_{a10}, \hat{G}_F \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{2k\omega^2} d\omega dk \sim O(a^{\frac{3}{4}}) \quad (4.6.4)$$

Für $s = -1$ erhalten wir genau das selbe Ergebniss, da ja der $\omega^2(1 - s^2)$ -Term im Nenner genauso wieder verschwindet.

Fall $s \neq \pm 1, t' = 0 = x'$

In diesem Fall verschwindet der $\omega^2(1 - s^2)$ -Term im Nenner nicht und dementsprechend folgt

$$\begin{aligned}\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{as0} \rangle &= \int a^{-\frac{3}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{m^2 - \omega^2((1-s^2) - a^{-1}k^2 - a^{-\frac{3}{2}}2k)} d\omega dk \\ &= \int a^{\frac{5}{4}} \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2 m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2 k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2 ks} d\omega dk\end{aligned}$$

Analog zum vorigen Teil ist, diesmal sogar ohne den Cauchy-Hauptwert bemühen zu müssen,

Überall wo es sein muss $\lim_{a \rightarrow 0}$ dazu schreiben, oder sagen dass der Limit überall impliziert ist

$$\left| \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} \right| \geq \left| \frac{\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{a^2 m^2 + \omega^2(s^2 - 1) + a\omega^2 k^2 + a^{\frac{1}{2}}2\omega^2 ks} \right|$$

dass eine integrierbare Majorante ist (in der Tat ja sogar in $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$) Damit können wir folgende Abschätzung treffen:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{as0} \rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{2\omega \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(k)}{\omega^2(1-s^2)} d\omega dk \sim O(a^{\frac{5}{4}}) \quad (4.6.5)$$

Fall $s \neq \pm 1, (t', s') \neq 0$

In diesem Fall benutzen wir wieder die erste Substitution (4.6.2) und klammern wie schon in den beiden vorigen Teilen die höchste negative Potenz von a im Nenner aus.

$$\Rightarrow \langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{ast} \rangle = a^{\frac{5}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^2 m^2 - \omega^2(1-s^2) + a^{\frac{1}{2}}s\omega k + ak^2} d\omega dk \quad (4.6.6)$$

und da immer noch $0 \notin \text{supp}(\psi_1)$ gilt ist ein weiteres mal eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$2 \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2 - 1)} \quad (4.6.7)$$

In der Tat ist sogar

$$\hat{f}(\omega, k) := \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{\omega^2(s^2 - 1)} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}}^2) \quad (4.6.8)$$

da ψ_1 und ψ_2 getragen sind. Demnach ist die Fourierinverse von \hat{f} , $f := (\hat{f})^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, also schnell fallend. Damit können wir schließlich abschätzen

$$\begin{aligned} |\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{ast} \rangle| &= a^{\frac{5}{4}} \left| \int \hat{f}(\omega, k) e^{-i\omega\left(\frac{t'-sx'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega dk \right| \\ &= a^{\frac{5}{4}} \left| f\left(\frac{t'-sx'}{a}, \frac{x'}{\sqrt{a}}\right) \right| \leq a^{\frac{5}{4}} C_k \left(1 + \left\| \frac{(t'-sx')/a}{x'/\sqrt{a}} \right\| \right)^{-k} \\ &\leq a^{\frac{5}{4}} \frac{C_k}{2} a^{\frac{k}{2}} \left\| \frac{(t'-sx')}{x'} \right\|^{-k} \sim O\left(a^{\frac{5/2+k}{2}}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow |\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{ast} \rangle| &\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

Fall $s = 1, (t', x') \neq 0$

Auch in diesem Fall nutzen wir wieder den ersten Ausdruck für $\langle \hat{\psi}_{a1t}, \hat{G}_F \rangle$ aus (4.6.2) und sorgen wir auch bisher jedes Mal dafür, dass wir im Nenner nur noch positive Potenzen von a und einen von a unabhängigen Term haben. Dann sieht das ganze so aus:

$$\langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{a1t} \rangle = a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{a^{\frac{3}{2}}m^2 + a^{\frac{1}{2}}k^2 + 2\omega k} d\omega dk$$

wo wir im $\lim_{a \rightarrow 0}$ wieder die a -Potenzen im Nenner weg fallen lassen und auch dieses Mal dafür wieder den Cauchy-Hauptwert bemühen müssen, um den Lebesgueschen Konvergenzsatz benutzen zu dürfen. Weiter geht's:

$$\begin{aligned}
 &= a^{\frac{3}{4}} \int \frac{\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right) + ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2\omega k} d\omega dk \\
 &= a^{\frac{3}{4}} \int \underbrace{\left\{ \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right) e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}}}{2k\omega} dk \right\}}_{=: \hat{f}_a(\omega)} \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} d\omega \quad (4.6.10)
 \end{aligned}$$

und um hier weiter zu kommen, schauen wir uns \hat{f}_a genauer an. Sei dazu $\Psi_2(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \psi_2(\omega') d\omega' - \int_{\omega}^{+\infty} \psi_2(\omega') d\omega'$ eine Stammfunktion von ψ_2 . Dies ist offenbar C^∞ und beschränkt, da $\hat{\psi}_2 \in C_c^\infty$. Mithilfe von Fourieridentitäten und Substitution können wir nun weiter rechnen:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_a(\omega) &= \int \frac{\hat{\psi}_2\left(\frac{k}{\omega}\right)}{2k\omega} e^{ik\frac{x'}{\sqrt{a}}} d\omega \\
 &\stackrel{i)}{=} \int \frac{\hat{\psi}_2(k)}{2k} e^{ik\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}} d\omega \\
 &\stackrel{ii)}{=} \frac{i}{2} \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right)
 \end{aligned}$$

Hier wurde in *i)* einfach $k \rightarrow \omega k$ substituiert und im Schritt *ii)* wurde genutzt, dass $f(x) = \text{sgn}(x) \leftrightarrow \hat{f}(k) \sim \frac{1}{k}$. Nun stecken wir diese Erkenntnisse in unseren vorigen Ausdruck und erhalten

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{G}_F, \hat{\psi}_{a1t} \rangle &= \frac{ia^{\frac{3}{4}}}{2} \int \Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \hat{\psi}_1(\omega) e^{-i\omega\left(\frac{t'-x'}{a}\right)} d\omega dk \quad (4.6.11) \\
 &\sim O\left(a^{\frac{3}{4}}\right), \quad \text{für } t'=x' \\
 &\sim O\left(a^k\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{sonst}
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde wieder genutzt, dass $\Psi_2\left(\frac{x'\omega}{\sqrt{a}}\right) \hat{\psi}_1(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, und demnach eine schnell fallende Fouriertransformierte hat.

	$(t', x') = (0, 0)$	$t' = x'$	$t' = -x'$	$t' \neq \pm x'$
$s = 1$	$a^{\frac{3}{4}}$	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k	a^k
$s = -1$	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k	$a^{\frac{3}{4}}$	a^k
$s \neq \pm 1$	$a^{\frac{5}{4}}$	a^k	a^k	a^k

Tab. 4.5: Konvergenzordnung von $\mathcal{S}_{G_F}(a, s, (t', x'))$ im Limit $a \rightarrow 0$ für alle interessanten Kombinationen von s und (t', x')

4.6.2 Zusammenfassung und Vergleich der Ergebnisse

Fassen wir wie bisher schon die Ergebnisse aus Gleichungen (4.6.4), (4.6.5), (4.6.9) und (4.6.11) wieder in einer Übersichtstabelle zusammen:

Das analoge Ergebnis erhält man auch für $s = -1$ und $t' = -x'$

5 Fazit und Ausblick

5.1 Ausblick

5.1.1 Ausdehnen von Satz 3.12 auf \mathcal{S}'

Wie in Bemerkung 3.13 angesprochen, zeigt der Beweis von Kutyniok und Labate [8] Satz 3.12 nur für beschränkte Funktionen und nicht für allgemeine temperierte Distributionen. So werden alle Hilfslemmata für den Beweis von Satz 3.12 nur für solche Funktionen bewiesen. Wir glauben aber, dass sich der Beweis auf alle temperierten Distributionen ausdehnen lässt, dank der Tatsache dass „temperierte Distributionen polynomiell beschränkt sind“:

Satz 5.1 (Struktursatz für temperierte Distributionen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f \in \mathcal{S}'(\Omega)$. Dann gibt es ein $F \in C(\Omega)$ und $C \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}$ s.d. für alle $x \in \Omega$

$$|F(x)| \leq C(1 + |x|)^N$$

(also F polynomiell beschränkt ist) und

$$f = \partial^\alpha F$$

als distributionelle Ableitung

Beweis

Der Beweis findet sich in Friedlander u. a. [5, S. 97].

Leider fehlt aufgrund des stetigen Studienfortschritts die Zeit, diesen Beweis komplett auszuarbeiten. Der Beweis der auf temperierte Distributionen aus-
geweiteten Lemma 3.16 und wie der Struktursatz eingeht soll hier aber bei-
spielhaft skizziert werden. Mit ähnlichen Tricks lassen sich hoffentlich auch alle
anderen Hilfslemmata auf temperierte Distributionen ausweiten.

Lemma 5.2 (Verfeinerung von Lemma 3.16)

Sei $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ und $\text{supp}(f) \subset U$. Sei $t \notin U$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|\langle f, \psi_{ast} \rangle| \leq C_k \left(1 + a^{-1}d(t, U)\right)^{-k}$$

ab einem hinreichend kleinen a .

Vor dem Beweis zwei Worte zur Bedeutung des Lemmas: Der hauptsächliche
Nutzen des Lemmas ist die Aussage, dass wir mit Shearlets, also Schwartzfunk-
tionen und damit *nicht zwingend kompakt getragenen* Funktionen, die lokalen
Eigenschaften von temperierten Distributionen untersuchen können, da wir
alles was δ -weit von t entfernt geschieht exponentiell schnell (in a) nicht mehr
sehen. Dies ist möglich, da temperierte Distributionen in einem geeigneten Sinn
nur polynomiell schnell wachsen.

Beweis

Nach Satz 5.1 gibt es ein polynomiell beschränktes $F \in C(\mathbb{R}^2)$ s.d. $f = \partial^\alpha F$. O.B.d.A können wir annehmen, dass f auf $B(0, \delta)$ verschwindet (im
distributionellen Sinne) und damit o.B.d.A auch F . Dann zeigen wir die
Aussage für $t = 0$:

$$\begin{aligned} |\langle f, \psi_{as0} \rangle| &\stackrel{\text{formal}}{=} \left| \int f(x) \psi \left(\begin{pmatrix} a & -\sqrt{as} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}^{-1} (x - 0) \right) dx \right| \\ &= \left| \int F(x) \partial^\alpha \left[\psi \left(\begin{pmatrix} a^{-1} & \frac{s}{\sqrt{a}} \\ 0 & a^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-1} x \right) \right] dx \right| \\ &\leq \int_{|x| \geq \delta} C(1 + |x|)^N a^{-|\alpha|} \underbrace{\left[|\partial_{x_1}^{|\alpha|}| + |\partial^\alpha \psi| \right]}_{=: \phi \in \mathcal{S}} \begin{pmatrix} a^{-1} & \frac{s}{\sqrt{a}} \\ 0 & a^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{|x| \geq \delta} C(1+|x|)^N a^{-|\alpha|} C_k \left(1 + \left| \begin{pmatrix} a^{-1} & \frac{s}{\sqrt{a}} \\ 0 & a^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} x \right| \right)^{-k} dx \\
&\leq \int_{|x| \geq \delta} CC_k a^{-|\alpha|} (1+|x|)^N (1+a^{-1}|x|)^{-k} dx \\
&\leq CC_k a^{-|\alpha|} \int_{|x| \geq \delta} (1+a^{-1}|x|)^{N-k} dx \\
&= CC_k a^{-|\alpha|} 2\pi \int_{\delta}^{\infty} (1+a^{-1}r)^{N-k} dr \\
&= CC_k a^{-|\alpha|} 2\pi \frac{(a+\delta) \left(1+\frac{\delta}{a}\right)^{N-k} (a+(k-N-1)\delta)}{(k-N-1)(k-N-2)} \\
&\leq C'_k \left(1+\frac{\delta}{a}\right)^{N-k-|\alpha|}
\end{aligned}$$

Was die Aussage für $N-k-|\alpha|$ und damit auch für alle k zeigt.

Neben der Ausweitung der Hilfslemmata auf temperierte Distributionen muss auch noch erklärt werden, was die richtige Verallgemeinerung der Reproduktionseigenschaft in Satz 3.11 ist. Die kanonische Verallgemeinerung ist

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\{a,s,t\}} \langle f, \psi_{ast} \rangle \psi_{ast}(x) \phi(x) d\mu(a, s, t) dx.$$

Für alle Schwartzfunktionen ϕ und alle temperierten Distributionen $f \in \mathcal{S}'(C)^\vee$, wobei $\mathcal{S}'(C)^\vee$ analog zu Gleichung (3.3.12) definiert ist.

In den Beweis von Lemma 5.2 ging der Struktursatz für temperierte Distributionen entscheidend ein. Deshalb ist eine Ausweitung der Ergebnisse auf ganz $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ nicht möglich. In der Tat sind die Shearlets ψ_{ast} ja gar nicht kompakt getragen. Ob eine analoge Konstruktion von Shearlets die kompakt getragen sind möglich ist, ist a priori nicht klar.

5.1.2 Hörmanders Kriterium abschwächen

raus nehmen, weil letzten Endes für temperierte Distributionen nicht ganz passend?

Um die Wellenfrontmenge einer Distribution zu bestimmen, muss man diese per Definition erst einmal mit einer kompakt getragenen Funktion lokalisieren, um eine kompakt getragene Distribution zu erhalten, deren Fouriertransformation sich berechnen lässt. Ist der Ansatz aus Abschnitt 5.1.1 erfolgreich, so zeigt dies, dass temperierte Distributionen mit *nicht* kompakt getragenen Funktionen lokalisiert werden können; exponentieller Abfall ist genug, um die Wellenfrontmenge zu bestimmen.

Nach der Anschauung aus Abschnitt 3.1.2 ist Hörmanders Kriterium zwar hinreichend, um das punktweise Produkt zweier Distributionen zu definieren über die Faltung ihrer Fouriertransformierten, aber nicht notwendig. Ein Beispiel dafür ist die Heaviside-Funktion. Offenbar existiert $\Theta(x)^2$, aber Hörmanders Kriterium wird an der 0 verletzt, da $\hat{\Theta}(k) = \frac{i}{k} + \delta(k)$. Es ist ausreichend, wenn die lokalisierten Fouriertransformierten in entgegengesetzter im Produkt mit $|k|^{-d-\epsilon}$ abfallen, damit das Faltungsintegral existiert. Allerdings ist damit nur sicher gestellt, dass $f \cdot g \in \mathcal{D}'$, noch nicht $f \cdot g \in \mathcal{S}'$.

Die Hoffnung ist also, dass man an der a -Potenz mit der $\langle f, \psi_{ast} \rangle$ für $a \rightarrow 0$ skaliert ablesen kann, wie schnell $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{\phi f}(k)$ abfällt für $\frac{k_2}{k_1} = s$ und ϕ beliebig nah um t lokalisiert.

Der Ansatz dabei wäre es, zunächst einmal diese a -Potenzen bei gut verstandenen Distributionen, z.B. Polynomen oder Ableitungen der δ -Distribution auszurechnen und mit dem Abfallverhalten der lokalisierten Fouriertransformierten zu vergleichen, um dann den genauen Zusammenhang zu raten. Dann wird man versuchen diesen mit den Techniken und Lemmata aus Abschnitt 3.3.4 zu beweisen.

5.1.3 Höherdimensionale Shearlets

Eine offensichtliche weitere Frage ist: Wie steht es denn damit, das ganze Geschäft der Shearlets mal auf höhere Dimensionen auszudehnen und auch

dort eine Technik zum Berechnen von Wellenfrontmengen zu erhalten?

Guo u. a. [6] diskutieren Verallgemeinerungen der Schergruppe in höheren Dimensionen und entwickeln daraus auch diskrete Shearlets. Aus Abb. 4.3 wird auch deutlich, was die richtige Verallgemeinerung der parabolischen Skalierung ist. Nämlich

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

denn diese sorgt wieder dafür, dass der Träger von ψ_{ast} im Fourierraum für $a \rightarrow 0$ wieder einer immer spitzer werdenden Nadel gleicht. Die Wahl \sqrt{a} statt a^δ für irgendein anderes $a < 1$ ist ziemlich willkürlich. Kutyniok und Labate [8] schreiben auch, dass sie für $\delta \neq \frac{1}{2}$ die Wellenfrontmenge an Beispielen genau so gut bestimmen konnten, wie für $\delta = \frac{1}{2}$. Tatsächlich geht $\delta = \frac{1}{2}$ nur bei dem Beweis von Lemma 3.18 explizit ein. Aber sicher lässt sich Satz 3.12 auch mit einem Lemma 3.18 beweisen, das leicht andere Exponenten hat.¹

5.1.4 Berechnung des Skalengrads mittels Shearlets

Eine weitere Größe der mikrolokalen Analysis, die eventuell durch die Shearlettransformation bestimmt werden kann ist der Skalengrad. Er ist definiert wie folgt:

Definition 5.3 (Skalengrad)

Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist der Skalengrad $sd(u)$ definiert als

$$sd(u) := \inf_{\omega} \left\{ \lambda^\omega \langle u_\lambda, \phi \rangle \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0, \text{ für alle } \phi \right\}$$

¹Stellt sich nur die Frage, warum man das überhaupt wollte. $\delta = \frac{1}{2}$ ist doch eine ziemlich schöne Wahl.

5 Fazit und Ausblick

wobei u_λ definiert ist über

$$\langle u_\lambda, \phi \rangle = \lambda^{-n} \langle u, \phi \left(\frac{\cdot}{\lambda} \right) \rangle,$$

also falls $u \in C^\infty$:

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x)$$

Eine einfache Rechnung zeigt z.B. für die δ -Distribution und ihre Ableitungen, dass

$$sd(\delta^{(\alpha)}) = n + |\alpha|.$$

Mit der Shearlettransformation erhalten wir aber

$$\begin{aligned} \left\langle \delta_{x_1}^{(\alpha)} \otimes \delta_{x_2}, \psi_{a00} \right\rangle &= \partial_{x_1}^\alpha \left(a^{-\frac{3}{4}} \psi \left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{\sqrt{a}} \right) \right) \Big|_{x=0} \\ &= a^{-\frac{3}{4}} a^{-\alpha} \partial_{x_1}^\alpha \psi(0) \sim a^{-\alpha - \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

und bei Ableitung in die andere Richtung

$$\begin{aligned} \left\langle \delta_{x_1} \otimes \delta_{x_2}^{(\alpha)}, \psi_{a00} \right\rangle &= \partial_{x_2}^\alpha \left(a^{-\frac{3}{4}} \psi \left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{\sqrt{a}} \right) \right) \Big|_{x=0} \\ &= a^{-\frac{3}{4}} a^{-\frac{\alpha}{2}} \partial_{x_2}^\alpha \psi(0) \sim a^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Und falls wir $s \neq 0$ wählen wird das ganze nur noch unübersichtlicher, da wir Mischterme erhalten. Dieses Beispiel legt also nahe, dass es einen Zusammenhang zwischen dem Skalengrad einer Distribution und dem Abfallverhalten der Shearlettransformation bei $t = 0$ gibt. Aber die parabolische Skalierung in a und Scherung in s sorgen dafür, dass sie sich nicht mehr ganz einfach ablesen lässt.

5.2 Fazit für Physiker

Die Berechnungen in Abschnitte 4.2, 4.4 und 4.5 und Abschätzungen wie Gleichung (4.4.11) zeigen deutlich, dass Satz 3.12 zwar eine theoretische Möglichkeit liefert Wellenfrontmengen auszurechnen, es aber kein sehr praktikabler Ansatz ist. So wurde auch ψ_{ast} nie konkret angegeben, sondern nur darauf hingewiesen, dass es Funktionen gibt, die all das erfüllen, was wir brauchen (also schneller Abfall und gewisse Eigenschaften des Trägers der Fouriertransformierten). Eins würden diese Funktionen aber sicher *nicht* erfüllen: Dass $\int \psi_{ast}(x) f(x) dx$ für eine größere Klasse von Funktionen tatsächlich analytisch zu berechnen ist, und nicht nur gewisse Schranken für den Abfall in a gegeben werden können.

Ähnlich sieht es bei der Berechnung des Skalengrads mithilfe von Shearlets aus (vgl. Abschnitt 5.1.4): Es sieht so aus, als sei es theoretisch möglich. Aber mit gewissem Aufwand bei den Abschätzungen verbunden.

Umso erfreulicher ist, dass die Ergebnisse für die berechneten Wellenfrontmengen mit den bisher bekannten übereinstimmen. Im Falle des getwisteten Produkts der Zweipunktfunktion konnte das Ergebnis von Schulz [13] ja sogar verschärft und gezeigt werden, dass das getwistete Produkt bei 0 nicht ganz so singulär ist, wie das ungetwistete.

Höherdimensionale Verallgemeinerungen der Shearlets müssten mit noch mehr Scherparametern arbeiten – im drei dimensional Fall 3, in 4D schon 6 – welche dann in den Ausdrücken auftauchen. Dann müsste man schlau erkennen, für welche Kombinationen dieser Scherparameter an welchen Orten $t \langle f, \psi_{ast} \rangle$ nicht schnell abfällt und abschätzen, wie schnell genau es abfällt. Wenn die Verzweiflung also sehr groß ist, man viel Zeit, Papier und höherdimensionale Shearlets zur Verfügung hat *könnte* die Shearlettransformation eine theoretische Möglichkeit sein Wellenfrontmengen temperierter Distributionen auszurechnen. Aber eigentlich eher nicht.

Oder natürlich wir haben etwas ganz wichtiges übersehen, und es ist doch alles nicht so hoffnungslos.

5.3 Fazit für Mathematiker

was noch?
Sieht nach
etwas wenig
aus...

Erfreulicherweise² stimmen die Ergebnisse für berechneten Wellenfrontmengen mit denen in der Literatur überein. Über die Wellenfrontmenge hinaus erhalten wir mit dem Exponenten von a auch noch weitere Informationen wie langsam die lokalisierte Fouriertransformierte in eine gewisse Richtung abfällt. Größtenteils offen ist, inwiefern diese zusätzlichen Informationen genutzt werden können. Allerdings finden sich in Abschnitte 5.1.2 und 5.1.4 schon Ansätze.

In den Komplikationen und langen Abschätzungen in Abschnitte 4.2, 4.4 und 4.5 zeigt sich, dass die Shearlettransformation nur bedingt geeignet ist, um Wellenfrontmengen von temperierten Distributionen zu berechnen. Insbesondere war es immer entscheidend, einen expliziten Ausdruck für die Fouriertransformierte Distribution zu haben. Also sind die Shearletmethoden auf alle temperierten Distributionen, deren Fouriertransformierte nicht explizit ausgerechnet werden kann, nicht anwendbar!

Die Ausweitung von

Dennoch sind im Ausblick mit der Ausweitung von Satz 3.12 auf temperierte Distributionen und der Konstruktion höherdimensionaler Shearlets interessante Fragen aufgekommen, bei deren Bearbeitung sicher temperierte Distributionen und auch etwas Geometrie besser verstanden werden können.

²und glücklicherweise, sonst hätten wir uns ja verrechnet

Literatur

- [1] Emmanuel J. Candès und David L. Donoho. „Continuous curvelet transform: I. Resolution of the wavefront set“. In: *Applied and Computational Harmonic Analysis* 19.2 (2005), S. 162–197. ISSN: 10635203.
- [2] M. N. Do und M. Vetterli. „The Contourlet Transform: An Efficient Directional Multiresolution Image Representation“. In: *Trans. Img. Proc.* 14.12 (Dez. 2005), S. 2091–2106. ISSN: 1057-7149. URL: <https://doi.org/10.1109/TIP.2005.859376>.
- [3] Sergio Doplicher, Klaus Fredenhagen und John E. Roberts. „The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields“. In: *Communications in Mathematical Physics* 172.1 (Aug. 1995), S. 187–220. URL: <https://doi.org/10.1007/bf02104515>.
- [4] L. Freidel, J. Kowalski-Glikman und S. Nowak. „From noncommutative κ -Minkowski to Minkowski space time“. In: *Physics Letters B* 648 (Apr. 2007), S. 70–75. eprint: [hep-th/0612170](https://arxiv.org/abs/hep-th/0612170).
- [5] F. G. Friedlander u. a. *Introduction to the Theory of Distributions* -. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. ISBN: 978-0-521-64971-1.
- [6] Kanghui Guo u. a. „Wavelets with composite dilations and their MRA properties“. In: *Applied and Computational Harmonic Analysis* 20.2 (März 2006), S. 202–236. URL: <https://doi.org/10.1016/j.acha.2005.07.002>.
- [7] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators* -. Berlin, Heidelberg: Springer, 1985. ISBN: 978-0-387-12104-8.
- [8] Gitta Kutyniok und Demetrio Labate. „Resolution of the wavefront set using continuous shearlets“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 361.05 (Okt. 2008), S. 2719–2754. URL: <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-08-04700-4>.

- [9] Stephane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing - The Sparse Way*. Amsterdam, Boston: Academic Press, 2008. ISBN: 978-0-080-92202-7.
- [10] Barry Simon Michael Reed. *Methods of mathematical physics. Fourier analysis, self-adjointness*. Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 2. Academic Press, 1975. ISBN: 9780125850025,0125850026.
- [11] J. E. Moyal und M. S. Bartlett. „Quantum mechanics as a statistical theory“. In: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 45 (1949), S. 99.
- [12] J. Mund, B. Schroer und J. Yngvason. „String-Localized Quantum Fields and Modular Localization“. In: *Communications in Mathematical Physics* 268 (Dez. 2006), S. 621–672. eprint: [math-ph/0511042](https://arxiv.org/abs/math-ph/0511042).
- [13] Rene M. Schulz. „Microlocal Analysis of Tempered Distributions“. Diss. Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen: Georg-August University School of Science, 2014.
- [14] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model* -. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1-107-03473-0.

Erklärung Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken entnommene Stellen habe ich unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht. Die Richtlinien zur Sicherung der guten wissenschaftlichen Praxis an der Universität Göttingen wurden von mir beachtet. Eine gegebenenfalls eingereichte digitale Version stimmt mit der schriftlichen Fassung überein. Mir ist bewusst, dass bei Verstoß gegen diese Grundsätze die Prüfung mit nicht bestanden bewertet wird.

Göttingen, den 6. Juli 2018

(Jan Lukas Bosse)