

Data Analysis and Transformation  
TP1: Fundamentals of Signals and Systems

José Ribeiro (2008112181, jbaia@student.dei.uc.pt)  
Pedro Magalhães (2009117002, pjrosa@student.dei.uc.pt)

March 7, 2012

# Contents

<b>1</b>	<b>Exercise 1</b>	<b>3</b>
1.1	Exercise 1.1 . . . . .	3
1.1.1	Simplification . . . . .	3
1.1.2	Trigonometric identities . . . . .	3
1.1.3	"Proof" of equality . . . . .	4
1.2	Exercise 1.2 . . . . .	4
1.3	Exercise 1.3 . . . . .	5
1.4	Exercise 1.4 . . . . .	5
1.4.1	MATLAB's Symbolic Math Toolbox . . . . .	5
1.4.2	Trapezoidal Rule . . . . .	6
1.4.3	Simpson's Rule . . . . .	7
1.5	Exercise 1.5 . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Exercise 2</b>	<b>8</b>
2.1	Exercise 2.1 . . . . .	8
2.2	Exercise 2.2 . . . . .	8
2.3	Exercise 2.3 . . . . .	9
2.3.1	Análise de linearidade do sistema $\mathbf{y}_1[n]$ . . . . .	10
2.3.2	Análise de linearidade do sistema $\mathbf{y}_2[n]$ . . . . .	10
2.3.3	Análise de linearidade do sistema $\mathbf{y}_3[n]$ . . . . .	11
2.3.4	Análise de linearidade do sistema $\mathbf{y}_4[n]$ . . . . .	11
2.4	Exercise 2.4 . . . . .	12
2.4.1	Análise de invariância no tempo do sistema $\mathbf{y}_1[n]$ . . . . .	12
2.4.2	Análise de invariância no tempo do sistema $\mathbf{y}_2[n]$ . . . . .	12
2.4.3	Análise de invariância no tempo do sistema $\mathbf{y}_3[n]$ . . . . .	12
2.4.4	Análise de invariância no tempo do sistema $\mathbf{y}_4[n]$ . . . . .	13
2.5	Exercise 2.5 . . . . .	13
2.6	Exercise 2.6 . . . . .	14
2.7	Exercise 2.7 . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Exercise 3</b>	<b>15</b>
3.1	Exercise 3.1/3.2 . . . . .	15
3.2	Exercise 3.3 . . . . .	15
3.3	Exercise 3.4 . . . . .	15

## 1 Exercise 1

### 1.1 Exercise 1.1

Após a substituição das variáveis na expressão (assumindo  $G\# = 25$ ), obtém-se a seguinte equação:

$$x_1(t) = 2 \sin(2t) \cos(11t) + 5 \cos^2(8t) \quad (1)$$

Utilizando as identidades trigonométricas referidas em *Trigonometric identities*, procede-se agora à obtenção da expressão equivalente à equação (1) segundo a forma

$$x_1(t) = \sum_i C_i \cos(\omega_i t + \theta_i) \quad (2)$$

#### 1.1.1 Simplification

$$x_1(t) = 2 \sin(2t) \cos(11t) + 5 \cos^2(8t) \quad (3)$$

$$= \sin(2t + 11t) + \sin(2t - 11t) + 5 \cos^2(8t) \quad (4)$$

$$= \sin(13t) + \sin(-9t) + 5 \cos^2(8t) \quad (5)$$

$$= -\cos\left(13t + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-9t + \frac{\pi}{2}\right) + 5 \cos^2(8t) \quad (6)$$

$$= \cos\left(13t + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(-9t + \frac{3\pi}{2}\right) + 5 \cos^2(8t) \quad (7)$$

$$= \cos\left(13t + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(9t + \frac{\pi}{2}\right) + 5 \cos^2(8t) \quad (8)$$

$$= \cos\left(13t + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(9t + \frac{\pi}{2}\right) + 5 \left(\frac{1 + \cos(2 * 8t)}{2}\right) \quad (9)$$

$$= \cos\left(13t + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(9t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{5}{2} \cos(0) + \frac{5}{2} \cos(16t) \quad (10)$$

$$= \frac{5}{2} \cos(0) + \cos\left(9t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(13t + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{5}{2} \cos(16t) \quad (11)$$

#### 1.1.2 Trigonometric identities

A simplificação faz uso das seguintes igualdades<sup>1</sup>:

$$\sin(\theta) \cos(\varphi) = \frac{\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)}{2} \quad (3 \text{ to } 4)$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta) \quad (5 \text{ to } 6)$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta) \quad (6 \text{ to } 7)$$

---

<sup>1</sup>Entre parênteses encontram-se os números dos passos entre os quais foram utilizadas.

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad (7 \text{ to } 8)$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad (8 \text{ to } 9)$$

### 1.1.3 "Proof" of equality

De forma a verificar que nenhum erro havia sido cometido durante a transformação da equação do sinal, um gráfico com a representação segundo as duas fórmulas foi gerado. A fórmula original encontra-se representada a azul; a tracejado vermelho encontra-se sobreposta a representação segundo um somatório de co-senos, segundo a fórmula obtida em *Simplification*.

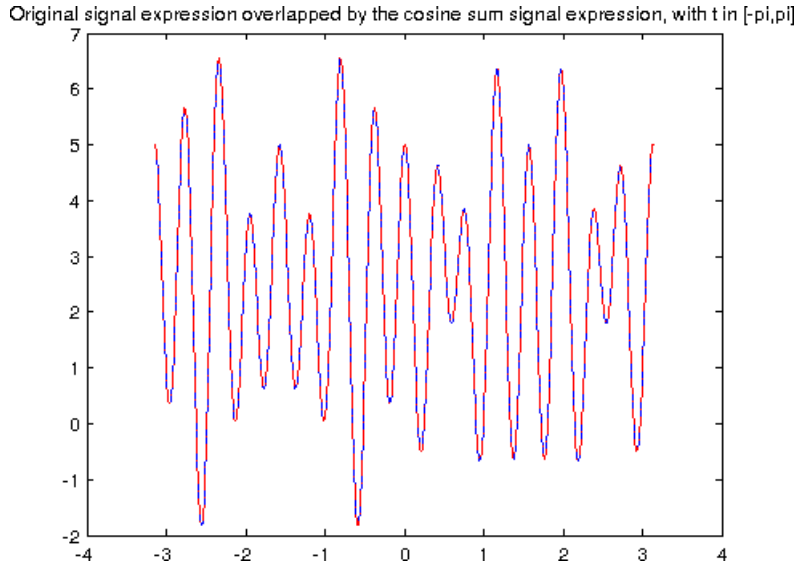


Figure 1: Original signal expression overlapped by the cosine sum signal expression, with  $t \in [-\pi, \pi]$ .

Como é possível observar na figura 1, a sobreposição das representações é perfeita.

## 1.2 Exercise 1.2

Fazendo uma simples substituição de  $t$  por  $nT_s$  na expressão obtida na alínea anterior obtém-se:

$$x_1[n] = x_1(t)|_{t=nT_s} = \frac{5}{2} \cos(0) + \cos\left(9nT_s + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(13nT_s + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{5}{2} \cos(16nT_s) \quad (12)$$

### 1.3 Exercise 1.3

O gráfico seguinte representa o sinal  $x_1(t)$  (a azul), para  $t \in [-\pi, \pi]$  (com 500 elementos), sobreposto com o sinal  $x_1[n]$  (a vermelho) no mesmo intervalo, com um período de amostragem  $T_s = 0.1s$ .

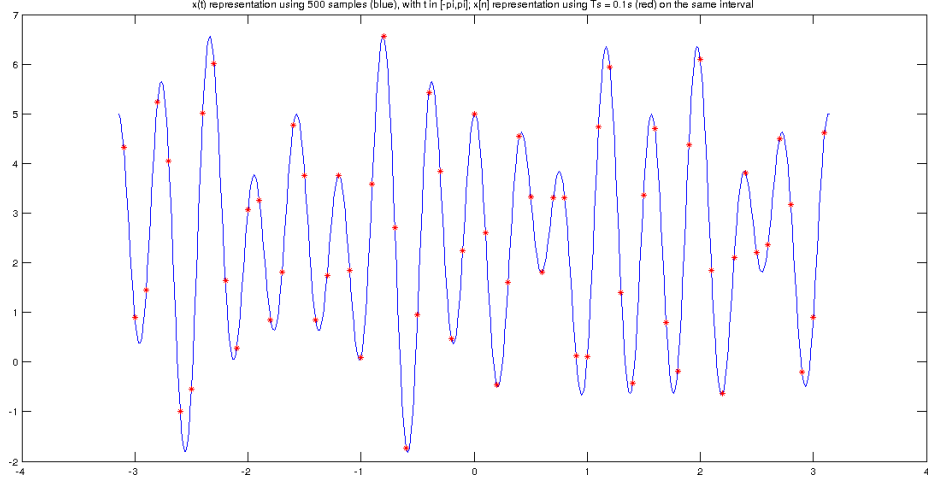


Figure 2:  $x_1(t)$  (blue), for  $t \in [-\pi, \pi]$  (using 500 samples);  $x_1[n]$  (red) in the same interval, using  $T_s = 0.1s$ .

Como é possível observar na figura 2, algumas amostras obtidas em  $x_1[n]$  apresentam um ligeiro desvio quando comparadas com o traçado do sinal  $x_1(t)$ . Após alguma análise (incluindo a soma das diferenças), concluímos que esse desvio se deve exclusivamente à perda de precisão decimal durante a criação do *array* de espaçamento linear utilizado para o cálculo de  $x_1(t)$ .

### 1.4 Exercise 1.4

A energia de um sinal de tempo contínuo é dada, em  $J$  (*joules*), pelo integral do quadrado do seu módulo, isto é:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (13)$$

#### 1.4.1 MATLAB's Symbolic Math Toolbox

Utilizando as funções de cálculo matemático simbólico do MATLAB, foi possível obter o valor exacto da energia; neste caso, o valor é de  $\frac{83\pi}{4} J \approx 65.1880J$ .

### 1.4.2 Trapezoidal Rule

A *Regra do Trapézio* é uma técnica de integração numérica que aproxima um integral calculando a soma da área dos trapézios formados por pontos da função. A aproximação do integral segundo esta regra considerando  $N$  intervalos igualmente espaçados é:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2N} (f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + 2f(x_N) + f(x_{N+1})) \quad (14)$$

Como no enunciado nos é pedida uma aproximação com erro inferior a 0.001, devemos calcular o número de intervalos de forma a garantir essa condição. Existe um número  $\xi$  entre  $a$  e  $b$  em que o erro obtido é dado pela fórmula<sup>2</sup>.

$$error = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi) \quad (15)$$

Como é evidente pela fórmula, o erro em módulo<sup>3</sup> evolui proporcionalmente a  $f''$ . Como tal, é possível concluir que, para que seja possível calcular  $N$  de forma a garantir que *error* seja o erro máximo, será necessário calcular o valor de  $\xi$  para o qual  $f''$  assume o seu valor máximo. Doravante (por motivos de simplificação), iremos assumir que:

$$M \geq f''(\xi) \quad (16)$$

Depois de encontrado  $M$ , e colocando a fórmula em ordem a  $N$ , obtém-se que:

$$N = \left\lceil \sqrt{\left| \frac{(b-a)^3}{12 \max\_error} M \right|} \right\rceil \quad (17)$$

O cálculo da energia do sinal  $x_1(t)$  efectuado com a Regra do Trapézio obteve como resultado o valor de 65.1880J, utilizando um *step* de 0.000499s (correspondente a  $N = 12589$ ). O cálculo demorou, em média<sup>4</sup>, 0.105080s. Por comparação com o integral calculado por cálculo simbólico, o menor  $N$  para o qual se obtém um erro inferior a 0.001 é 5.

---

<sup>2</sup>Fórmula do erro da aproximação do integral pela Regra do Trapézio deduzida por Atkinson em *An Introduction to Numerical Analysis*, 1989, John Wiley & Sons, ISBN 978-0-471-50023-0.

<sup>3</sup>O valor de *error* assume valor positivo ou negativo consoante o integral seja sub ou sobrestimado, respectivamente.

<sup>4</sup>Média de 30 iterações.

### 1.4.3 Simpson's Rule

A *Regra de Simpson* é outra técnica de integração numérica que aproxima um integral calculando a soma da área das parábolas. A aproximação do integral segundo esta regra, considerando  $N$  intervalos igualmente espaçados (onde  $N \in 2\mathbb{Z}$ ) é:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3N} [f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + \dots + 2f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_n)] \quad (18)$$

Como no enunciado nos é pedida uma aproximação com erro inferior a 0.001, devemos calcular o número de intervalos de forma a garantir essa condição. Existe um número  $\xi$  entre  $a$  e  $b$  em que o erro obtido é dado pela fórmula:

$$error = \frac{(b-a)^5}{180N} f^{(IV)}(\xi) \quad (19)$$

Como é evidente pela fórmula, o erro evolui proporcionalmente a  $f^{IV}$ . Como tal, é possível concluir que, para que seja possível calcular  $N$  de forma a garantir que *error* seja o erro máximo, será necessário calcular o valor de  $\xi$  para o qual  $f^{IV}$  assume o seu valor máximo. Iremos assumir que:

$$M \geq f^{(IV)} \quad (20)$$

Depois de obter o  $M$ , podemos colocar a fórmula em ordem  $N$ , obtém-se<sup>5</sup>:

$$N = \left\lceil \sqrt[4]{\left| \frac{(b-a)^5}{180 \max\_error} M \right|} \right\rceil \quad (21)$$

O cálculo da energia do sinal  $x_1(t)$  efectuado com a Regra de Simpson obteve como resultado o valor de 65.1880J, utilizando um *step* de 0.008118s (correspondente a  $N = 776$ ). O cálculo demorou, em média<sup>6</sup>, 0.116167s. Por comparação com o integral calculado por cálculo simbólico, o menor  $N$  para o qual se obtém um erro inferior a 0.001 é 10.

## 1.5 Exercise 1.5

O cálculo da energia de um sinal discreto é dado pela fórmula:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (22)$$

Como tal, para calcular a energia de um sinal  $x[n]$  para  $n$  correspondente ao intervalo  $[a, b]$ , basta calcular o somatório de todos os valores do sinal no intervalo  $n \in \left[ \text{sgn}\left(\frac{a}{T_s}\right) \left\lfloor \left| \frac{a}{T_s} \right| \right\rfloor, \text{sgn}\left(\frac{b}{T_s}\right) \left\lfloor \left| \frac{b}{T_s} \right| \right\rfloor \right]^7$ , onde  $T_s$  é o período de amostragem.

Após a substituição no cálculo do intervalo, obtém-se que  $n$  pertence ao intervalo  $[-31, 31]$ . O valor da energia de  $x_1[n]$  obtido para  $n \in [-31, 31]$  é de aproximadamente 656.6213J.

<sup>5</sup>Deverá somar-se 1 a  $N$  caso  $N$  seja ímpar, de forma a garantir que  $N \in 2\mathbb{Z}$ .

<sup>6</sup>Média de 30 iterações.

<sup>7</sup>Esta fórmula garante que os valores do intervalo (que é  $\subset \mathbb{Z}$ ), quando multiplicados por  $T_s$ , correspondem a valores contidos no intervalo original.

## 2 Exercise 2

### 2.1 Exercise 2.1

O sinal de tempo discreto utilizado foi o seguinte:

$$x[n] = 1.5 \cos[0.025 \pi n](u[n + 40] - u[n - 40]) \quad (23)$$

Após a substituição das variáveis nas expressões (usando  $G\# = 25$ ) obtêm-se as seguintes equações:

$$y_1[n] = 0.4 x[n - 1] + 0.6 x[n - 3] - 0.2 x[n - 4] \quad (24)$$

$$y_2[n] = 1.2 x[2n - 4] \quad (25)$$

$$y_3[n] = x[n - 2] x[n - 3] \quad (26)$$

$$y_4[n] = (n - 2) x[n - 3] \quad (27)$$

Apresentam-se as representações dos mesmos sinais para o intervalo  $-50 \leq n \leq 50$ :

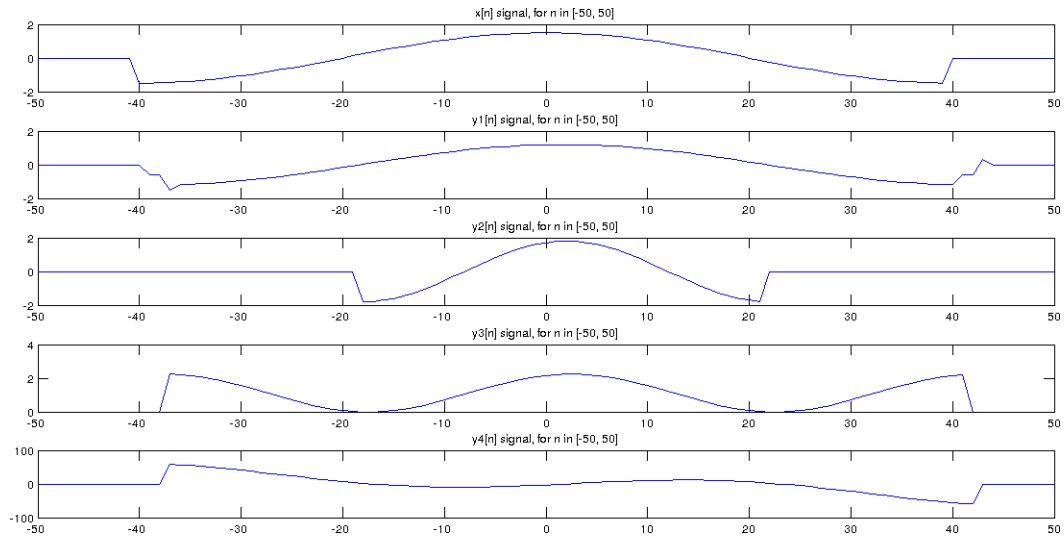


Figure 3: Top-down:  $x[n]$ ,  $y_1[n]$ ,  $y_2[n]$ ,  $y_3[n]$  and  $y_4[n]$  plots, for  $-50 \leq n \leq 50$ .

### 2.2 Exercise 2.2

Na imagem seguinte apresentam-se as entradas  $x[n]$  e  $x[n]$  com ruído uniforme no intervalo  $] -0.2, 0.2[$  (em cima, a azul e vermelho, respectivamente) e a resposta do sistema  $y_1[n]$  a essas mesmas entradas (em baixo, a azul a resposta à entrada  $x[n]$ , a vermelho a resposta à entrada de  $x[n]$  com ruído).



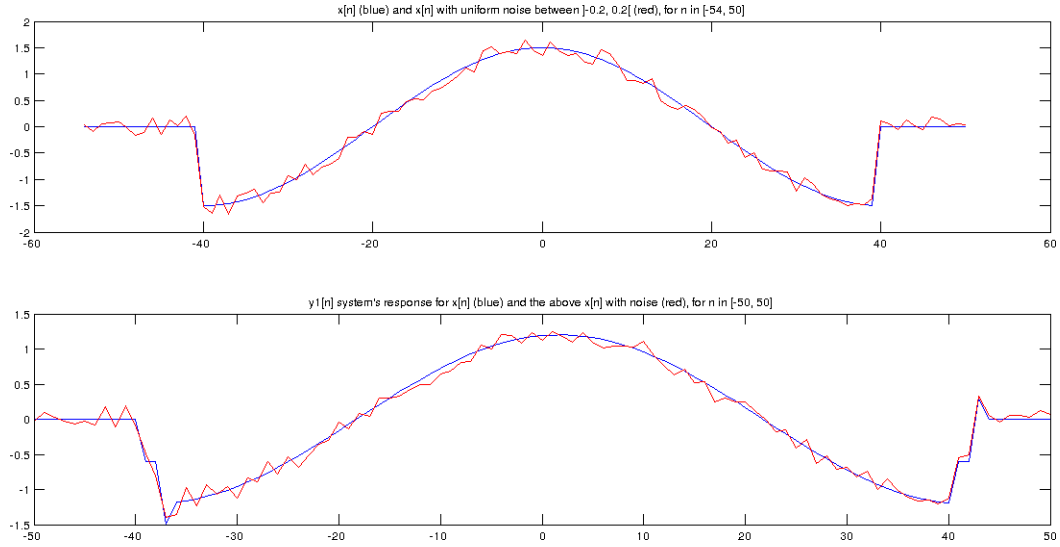


Figure 4: Above:  $x[n]$  (blue) and  $x[n]$  with uniform noise on the  $[-0.2, 0.2]$ ; below:  $y_1[n]$  response to  $x_1[n]$  (blue) and  $y_1[n]$  response to  $x_1[n]$  with noise (red).

### 2.3 Exercise 2.3

Para que um sistema seja linear, este deve verificar duas propriedades: **aditividade** e **homogeneidade**.

Para que um sistema verifique a propriedade de **aditividade**, é necessário que se verifique a seguinte igualdade:

$$\begin{cases} T\{x_1[n]\} = y_1[n] \\ T\{x_2[n]\} = y_2[n] \end{cases} \xrightarrow{\text{aditividade}} T\{x_1[n] + x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n]$$

Para que um sistema verifique a propriedade de **homogeneidade**, é necessário que se verifique

$$T\{x[n]\} = y[n] \xrightarrow{\text{homogeneidade}} T\{a x[n]\} = a y[n]$$

em que  $a$  é uma constante arbitrária.

Em seguida analisa-se a linearidade dos sistemas  $y_1[n]$ ,  $y_2[n]$ ,  $y_3[n]$  e  $y_4[n]$ .

### 2.3.1 Análise de linearidade do sistema $y_1[n]$

#### Aditividade

$$T\{x_1[n]\} = 0.4 x_1[n-1] + 0.6 x_1[n-3] - 0.2 x_1[n-4] \quad (28)$$

$$T\{x_2[n]\} = 0.4 x_2[n-1] + 0.6 x_2[n-3] - 0.2 x_2[n-4] \quad (29)$$

$$\begin{aligned} T\{x_1[n] + x_2[n]\} &= 0.4 (x_1[n-1] + x_2[n-1]) + 0.6 (x_1[n-3] + x_2[n-3]) \\ &\quad - 0.2 (x_1[n-4] + x_2[n-4]) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &= 0.4 x_1[n-1] + 0.4 x_2[n-1] + 0.6 x_1[n-3] + 0.6 x_2[n-3] \\ &\quad - 0.2 x_1[n-4] - 0.2 x_2[n-4] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} &= 0.4 x_1[n-1] + 0.6 x_1[n-3] - 0.2 x_1[n-4] + 0.4 x_2[n-1] + \\ &\quad 0.6 x_2[n-3] - 0.2 x_2[n-4] \end{aligned} \quad (32)$$

Dado que  $T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$ , este sistema **verifica** a propriedade de **aditividade**.

#### Homogeneidade

$$T\{a x[n]\} = 0.4 a x[n-1] + 0.6 a x[n-3] - 0.2 a x[n-4] \quad (33)$$

$$= a (0.4 x[n-1] + 0.6 x[n-3] - 0.2 x[n-4]) \quad (34)$$

Dado que  $T\{a x[n]\} = a T\{x[n]\}$ , este sistema **verifica** a propriedade de **homogeneidade**. Como verifica as duas condições, este sistema é **linear**.

### 2.3.2 Análise de linearidade do sistema $y_2[n]$

#### Aditividade

$$T\{x_1[n]\} = 1.2 x_1[2n-4] \quad (35)$$

$$T\{x_2[n]\} = 1.2 x_2[2n-4] \quad (36)$$

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = 1.2 (x_1[2n-4] + x_2[2n-4]) \quad (37)$$

$$= 1.2 x_1[2n-4] + 1.2 x_2[2n-4] \quad (38)$$

$$T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = 1.2 x_1[2n-4] + 1.2 x_2[2n-4] \quad (39)$$

Dado que  $T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$ , este sistema **verifica** a propriedade de **aditividade**.

#### Homogeneidade

$$T\{a x[n]\} = 1.2 a x[2n-4] \quad (40)$$

$$= a (1.2 x[2n-4]) \quad (41)$$

Dado que  $T\{a x[n]\} = a T\{x[n]\}$ , este sistema **verifica** a propriedade de **homogeneidade**. Como verifica as duas condições, este sistema é **linear**.

### 2.3.3 Análise de linearidade do sistema $y_3[n]$

#### Aditividade

$$T\{x_1[n]\} = x_1[n-2] x_1[n-3] \quad (42)$$

$$T\{x_2[n]\} = x_2[n-2] x_2[n-3] \quad (43)$$

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = (x_1[n-2] + x_2[n-2])(x_1[n-3] + x_2[n-3]) \quad (44)$$

$$= x_1[n-2] x_1[n-3] + x_1[n-2] x_2[n-3] + x_2[n-2] x_1[n-3] + x_2[n-2] x_2[n-3] \quad (45)$$

$$T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = x_1[n-2] x_1[n-3] + x_2[n-2] x_2[n-3] \quad (46)$$

Dado que  $T\{x_1[n] + x_2[n]\} \neq T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$ , este sistema **não verifica** a propriedade de **aditividade**; consequentemente, este sistema **não é linear**.

Procede-se ainda assim à análise da homogeneidade.

#### Homogeneidade

$$T\{a x[n]\} = a x[n-2] a x[n-3] \quad (47)$$

$$= a^2 (x[n-2] a x[n-3]) \quad (48)$$

Dado que  $T\{a x[n]\} \neq a T\{x[n]\}$ , este sistema também **não verifica** a propriedade de **homogeneidade**.

### 2.3.4 Análise de linearidade do sistema $y_4[n]$

#### Aditividade

$$T\{x_1[n]\} = (n-2) x_1[n-3] \quad (49)$$

$$T\{x_2[n]\} = (n-2) x_2[n-3] \quad (50)$$

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = (n-2) (x_1[n-3] + x_2[n-3]) \quad (51)$$

$$= n x_1[n-3] + n x_2[n-3] - 2 x_1[n-3] - 2 x_2[n-3] \quad (52)$$

$$T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = (n-2) x_1[n-3] + (n-2) x_2[n-3] \quad (53)$$

$$= n x_1[n-3] - 2 x_1[n-3] + n x_2[n-3] - 2 x_2[n-3] \quad (54)$$

Dado que  $T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$ , este sistema **verifica** a propriedade de **aditividade**.

## Homogeneidade

$$T\{a x[n]\} = (n-2) a x_1[n-3] \quad (55)$$

$$= a((n-2) x_1[n-3]) \quad (56)$$

Dado que  $T\{a x[n]\} = a T\{x[n]\}$ , este sistema **verifica** a propriedade de **homogeneidade**. Como verifica as duas condições, este sistema é **linear**.

## 2.4 Exercise 2.4

Para que um sistema seja invariante no tempo, é necessário que este verifique a seguinte propriedade:

$$T\{x[n]\} = y[n] \xrightarrow{\text{invariância no tempo}} T\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$$

Segue-se a análise da invariância no tempo dos 4 sinais.

### 2.4.1 Análise de invariância no tempo do sistema $y_1[n]$

$$T\{x[n-n_0]\} = 0.4 x[n-n_0-1] + 0.6 x[n-n_0-3] - 0.2 x[n-n_0-4] \quad (57)$$

$$y[n-n_0] = 0.4 x[n-n_0-1] + 0.6 x[n-n_0-3] - 0.2 x[n-n_0-4] \quad (58)$$

Dado que  $T\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$ , pode-se concluir que o sistema **é invariante no tempo**. Dada a sua linearidade (verificada em *Análise de linearidade do sistema  $y_1[n]$* ), é possível concluir que este é um sistema *SLIT*.

### 2.4.2 Análise de invariância no tempo do sistema $y_2[n]$

$$T\{x[n-n_0]\} = 1.2 x[2n-n_0-4] \quad (59)$$

$$y[n-n_0] = 1.2 x[2(n-n_0)-4] \quad (60)$$

$$= 1.2 x[2n-2n_0-4] \quad (61)$$

Dado que  $T\{x[n-n_0]\} \neq y[n-n_0]$ , pode-se concluir que o sistema **não é invariante no tempo**.

### 2.4.3 Análise de invariância no tempo do sistema $y_3[n]$

$$T\{x[n-n_0]\} = x[n-n_0-2] x[n-n_0-3] \quad (62)$$

$$y[n-n_0] = x[n-n_0-2] x[n-n_0-3] \quad (63)$$

Dado que  $T\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$ , pode-se concluir que o sistema **é invariante no tempo**.

#### 2.4.4 Análise de invariância no tempo do sistema $y_4[n]$

$$T\{x[n - n_0]\} = (n - 2)x[n - n_0 - 3] \quad (64)$$

$$y[n - n_0] = (n - n_0 - 2)x[n - n_0 - 3] \quad (65)$$

Dado que  $T\{x[n - n_0]\} \neq y[n - n_0]$ , pode-se concluir que o sistema **não é invariante no tempo**.

### 2.5 Exercise 2.5

A expressão da resposta de impulso de um sistema é obtida através da substituição da sua entrada pela função de *delta de Kronecker*, i.e.:

$$h[n] = y[n]|_{x[n]=\delta[n]}$$

Assim, a expressão da resposta de impulso do sistema  $y_1[n]$  é:

$$h_1[n] = 0.4\delta[n - 1] + 0.6\delta[n - 3] - 0.2\delta[n - 4]$$

A sua representação gráfica:

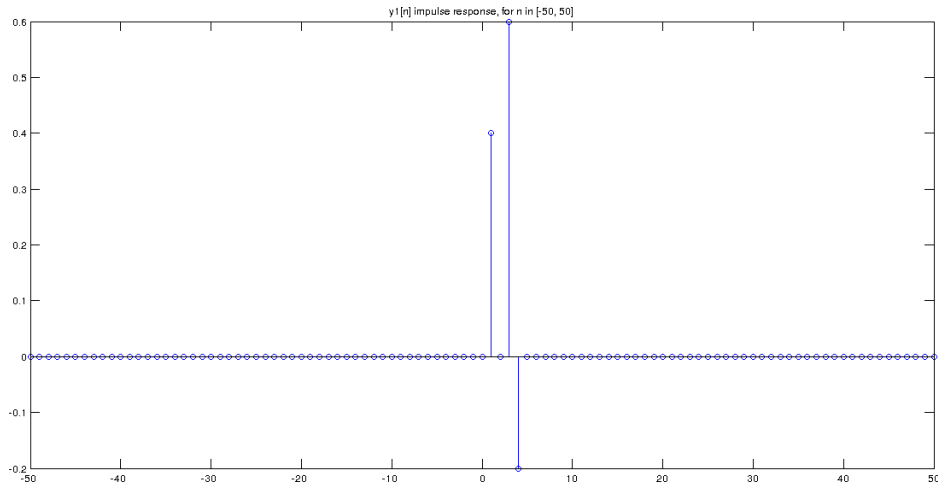


Figure 5:  $y_1[n]$  system's impulse response.

## 2.6 Exercise 2.6

A função de transferência do sistema  $y_1[n]$ ,  $G_1(z)$ , assumindo condições iniciais nulas, é equivalente à transformada de  $\mathcal{Z}$  da resposta ao impulso do sistema,  $H_1(z)$  (resposta essa calculada em *Exercise 2.5*). Isto é:

$$G(z) = H(z)|_{\text{condições iniciais nulas}} \quad (66)$$

$$= \mathcal{Z}\{h[n]\} \quad (67)$$

Para o sistema  $y_1[n]$ , obtém-se:

$$G_1(z) = H_1(z)|_{\text{condições iniciais nulas}} \quad (68)$$

$$= \mathcal{Z}\{h_1[n]\} \quad (69)$$

$$= 0.4 z^{-1} + 0.6 z^{-3} - 0.2 z^{-4} \quad (70)$$

## 2.7 Exercise 2.7

Após a substituição da função de transferência de  $y_1[n]$  na expressão

$$M(z) = \frac{k G_1(z)}{1 + k G_1(z)}$$

segue que

$$M(z) = \frac{k (0.4 z^{-1} + 0.6 z^{-3} - 0.2 z^{-4})}{1 + k (0.4 z^{-1} + 0.6 z^{-3} - 0.2 z^{-4})} * \frac{z^4}{z^4} \quad (71)$$

$$= \frac{z^4 k (0.4 z^{-1} + 0.6 z^{-3} - 0.2 z^{-4})}{z^4 + 0.4 k z^3 + 0.6 k z^1 - 0.2 k} \quad (72)$$

Através da função *roots* do MATLAB concluiu-se que  $k \in [-0.909, 0.667]$ .

### 3 Exercise 3

Considera-se o sinal

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

#### 3.1 Exercise 3.1/3.2

A frequência de amostragem utilizada foi de  $44100Hz$ , por estar adequada à captação das frequências máximas audíveis pelo ouvido humano.

#### 3.2 Exercise 3.3

Calculou-se um valor médio para a amplitude de resposta do sistema para as frequências testadas. Dividiu-se o período em 5 intervalos iguais e, para cada um destes, foi calculado  $\frac{\max(|values|) - \min(|values|)}{2}$ . Após isto, considerou-se o valor da amplitude do sinal a média destes 5 valores.

Apresenta-se em seguida o gráfico de amplitude de resposta para cada uma dessas frequências.

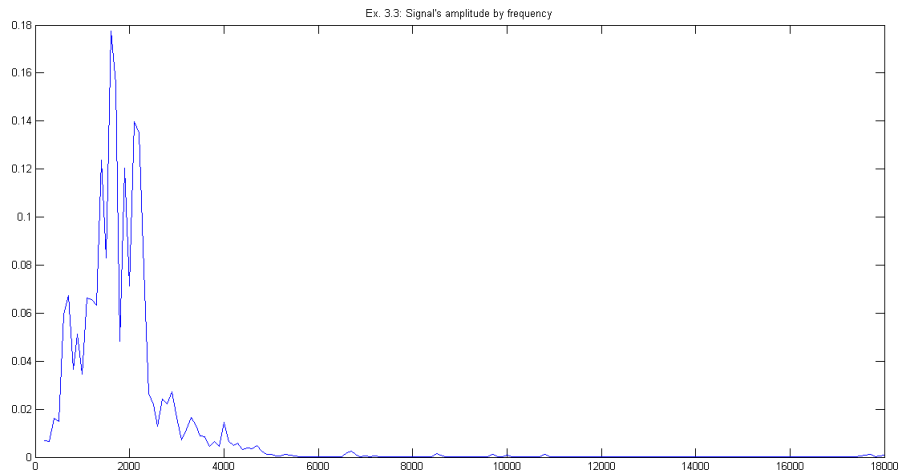


Figure 6:  $x(t)$  signal's amplitude by frequency.

#### 3.3 Exercise 3.4

Pelo gráfico é possível concluir que o sistema formado pelo microfone interno e pelas colunas se encontra adequado à gama de frequências  $[500Hz, 2500Hz]$ . O gráfico demonstra algumas depressões em determinadas frequências nesse intervalo. Isso pode dever-se a dois motivos: a incapacidade de reprodução das colunas dessas frequências e/ou a incapacidade de captação do microfone nesses valores. Os valores a partir de  $6000Hz$  têm amplitude praticamente nula, exceptuando uma ligeira subida na gama final de frequências, possivelmente fruto de barulho externo durante a captação do sinal.