Álgebra Conmutativa
Tarea 1: Ejercicios 1-6 Tema 1

José Luis Cánovas Sánchez

22 de septiembre de 2016

1. Ejercicio 1

Demostrar la proposición 1.11:
Proposición 1.11: *Sea D un dominio. Se tiene:*

(I) *La relación $x|y$ es transitiva y reflexiva.*

Sean a,b,c,d $\in$ D tal que a|b con $ad = b$ y b|c con $be = c$. Sustituyendo b $ade = c$, llamando $f = d \cdot e$ queda $af = c$ por lo que a|c. La relación es **transitiva**.

La relación es **reflexiva** pues según la notación de la definición 1.10 tomando $c = 1$, a|a ya que $a \cdot 1 = a$.

(II) *Si $x|a$ y $x|b$, entonces x—$a \pm b$*

Por $x|a$ $\exists c \in D$ tal que $xc = a$. Del mismo modo $\exists d \in D$ tal que $xd = b$.

Si sumamos $xc = a$ y $xd = b$ nos queda:

$xd + xd = a + b \Rightarrow x(c + d) = a + b \Rightarrow x|a + b$

Si restamos $xc = a$ y $xd = b$ nos queda:

$xd - xd = a - b \Rightarrow x(c - d) = a - b \Rightarrow x|a - b$

2. Ejercicio 2

Sea A un anillo, $B \subseteq A$ un subconjunto. Supóngase que las restricciones de las operaciones de A dan operaciones en B y que, con esas operaciones, B es un anillo. Mostrar que B es entonces un subanillo de A si y solo si $1 \in B$.
$\Rightarrow$
Supongamos B subanillo.
Por (ii) de la definición 1.5,se cumple que $1 \in B$.

$\Leftarrow$
Supongamos $1 \in B$.
De manera inmediata tenemos (ii) de la definición 1.5.
Veamos si $a, b \in B \Rightarrow a - b \in B$, $ab \in B$
Por B anillo, $1 \in B$ y existe su simétrico -1. Además es cerrado para sumas y productos por lo que cumple $ab \in B$ y

$b \cdot (-1) = -b \in B \Rightarrow$
$a + (-b) = a - b \in B$

Como cumple (i) y (ii) de la definición 1.5, B es subanillo.

3. Ejercicio 3

Sea A un anillo no trivial. Probar:

(I) Si $a \in A$, entonces $(a) = A$ si y solo si a es unidad.

$\Rightarrow$

Si $(a) = A$ el caso particular $1 \in A = (a)$ y por la definición de ideal principal $(a) = \{ax \,|\, x \in A\}$ entonces $\exists b \in A$ tal que $b \cdot a = 1 \in (a) = A$ por lo que a es unidad.

$\Leftarrow$

Sea a unidad. $\exists b \in A$ tal que $ab = 1$.

$(a) = \{xa \,|\, x \in A\}$ y tomando $x = b$ $ba = 1 \in (a)$

$1 \in (a) \Rightarrow \forall x \in A \quad x \cdot 1 = x \in (a) \Rightarrow (a) = A$

(II) Un ideal de A es propio si y solo si ninguno de sus elementos es una unidad.

$\Rightarrow$

Sea $I \trianglelefteq A$ ideal cualquiera de A. Supongamos que $\exists a \in I$ unidad, i.e. $\exists b \in A$ con $ab = 1 \Rightarrow 1 \in I \Rightarrow \forall x \in A \quad x \cdot 1 = x \in I \Rightarrow A = I$

Por la equivalencia de $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$, tenemos demostrada la implicación a la derecha.

$\Leftarrow$

Supongamos que $I \trianglelefteq A$ ideal impropio $I = A$. Como $1 \in A$ unidad $(1 \cdot 1 = 1)$, tenemos demostrada la implicación izquierda.

(III) A es un cuerpo si y solo si tiene exactamente dos ideales.

$\Rightarrow$

Por ser A cuerpo, todo elemento no nulo $a \in A$ tiene inverso $b \in A$ tal que $ab = 1$.

Sea $I \trianglelefteq A$ un ideal cualquiera de A. Para toda unidad a, $a \in I$, $ab \in I \Rightarrow 1 \in I \Rightarrow I = A$. Todo ideal con algún elemento no nulo es ideal impropio.

Si I no tiene unidades, como no puede ser vacío, sólo queda $0 \in I$, por lo que $I = (0)$ el ideal trivial.

A tiene exactamente dos ideales.

$\Leftarrow$

Si todo ideal no trivial es el impropio $I = A$. Tomamos un elemento arbitrario $a \in A$, de modo que su ideal principal será $(a) = A$.

Suponemos por reducción al absurdo que A no es un cuerpo.

$\exists x \in A$ no nulo : $\forall y \in A \quad x \cdot y \neq 1$, i.e., no es unidad.

Como todo ideal principal $(a) = A$, entonces $(x) = A$, pero $1 \in A$ y $1 \notin (x) = A$. Contradicción con la hipótesis de que A no es cuerpo.

4. Ejercicio 4

Demostrar la Proposición 2.10.

Proposición 2.10: *Sea A un anillo no trivial y sea C un conjunto no vacío de ideales de A. El conjunto intersección:*

$$\cap C = \{x \in A \,|\, x \in I \quad \forall I \in C\}$$

es un ideal de A.

Veamos los puntos (i) y (ii) de la definición 2.2 de ideal:

(i) $x, y \in \cap C \Rightarrow x + y \in \cap C$

Si $x, y \in \cap C$, entonces $x, y \in I \quad \forall I \in C \Rightarrow x + y \in I$ por I ideal $\forall I \in C \Rightarrow x + y \in \cap C$.

(ii) $x \in \cap C \quad a \in A \Rightarrow ax \in \cap C$

Si $x \in \cap C$, entonces $x \in I \quad \forall I \in C \Rightarrow xa \in I$ por I ideal $\forall I \in C \Rightarrow xa \in \cap C$

5. Ejercicio 5

Demostrar la Proposición 2.15.

Proposición 2.15: *Sea A un anillo no trivial, I un ideal de A, S un subconjunto no vacío de A. El conjunto*

$$(I \colon S) = \{x \in A \,|\, xS \subseteq I\}$$

(donde $xS = \{xs \,|\, s \in S\}$) es un ideal de A que contiene a I.

6. Ejercicio 6

Sean A, B anillos, $f : A \to B$ una aplicación que cumple las condiciones (i) y (ii) de la Definición 2.1. Probar que f es homomorfismo de anillos si y solo si $f(1)$ es una unidad del anillo B.

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$