Álgebra Conmutativa
Tarea 1: Ejercicios 1-6 Tema 1

José Luis Cánovas Sánchez

22 de septiembre de 2016

1. Ejercicio 1

Demostrar la proposición 1.11:
Proposición 1.11: *Sea D un dominio. Se tiene:*

(I) *La relación $x|y$ es transitiva y reflexiva.*

Sean a,b,c,d $\in$ D tal que a|b con $ad = b$ y b|c con $be = c$. Sustituyendo b $ade = c$, llamando $f = d \cdot e$ queda $af = c$ por lo que a|c. La relación es **transitiva**.

La relación es **reflexiva** pues según la notación de la definición 1.10 tomando $c = 1$, a|a ya que $a \cdot 1 = a$.

(II) *Si $x|a$ y $x|b$, entonces x—$a \pm b$*

Por $x|a$ $\exists c \in D$ tal que $xc = a$. Del mismo modo $\exists d \in D$ tal que $xd = b$.

Si sumamos $xc = a$ y $xd = b$ nos queda:

$xd + xd = a + b \Rightarrow x(c + d) = a + b \Rightarrow x|a + b$

Si restamos $xc = a$ y $xd = b$ nos queda:

$xd - xd = a - b \Rightarrow x(c - d) = a - b \Rightarrow x|a - b$

2. Ejercicio 2

Sea A un anillo, $B \subseteq A$ un subconjunto. Supóngase que las restricciones de las operaciones de A dan operaciones en B y que, con esas operaciones, B es un anillo. Mostrar que B es entonces un subanillo de A si y solo si $1 \in B$.
$\Rightarrow$
Supongamos B subanillo.
Por (ii) de la definición 1.5,se cumple que $1 \in B$.

$\Leftarrow$
Supongamos $1 \in B$.
De manera inmediata tenemos (ii) de la definición 1.5.
Veamos si $a, b \in B \Rightarrow a - b \in B$, $ab \in B$
Por B anillo, $1 \in B$ y existe su simétrico -1. Además es cerrado para sumas y productos por lo que cumple $ab \in B$ y

$b \cdot (-1) = -b \in B \Rightarrow$
$a + (-b) = a - b \in B$

Como cumple (i) y (ii) de la definición 1.5, B es subanillo.

3. Ejercicio 3

Sea A un anillo no trivial. Probar:

(I) Si $a \in A$, entonces $(a) = A$ si y solo si a es unidad.

(II) Un ideal de A es propio si y solo si ninguno de sus elementos es una unidad.

(III) A es un cuerpo si y solo si tiene exactamente dos ideales.

4. Ejercicio 4

Demostrar la Proposición 2.10.
Proposición 2.10: *Sea A un anillo no trivial y sea C un conjunto no vacío de ideales de A. El conjunto intersección:*

$$\cap C = \{x \in A \,|\, x \in I \quad \forall I \in C\}$$

es un ideal de A.

5. Ejercicio 5

Demostrar la Proposición 2.15.
Proposición 2.15: *Sea A un anillo no trivial, I un ideal de A, S un subconjunto no vacío de A. El conjunto*

$$(I \colon S) = \{x \in A \,|\, xS \subseteq I\}$$

(donde $xS = \{xs \,|\, s \in S\}$) es un ideal de A que contiene a I.

6. Ejercicio 6

Sean A, B anillos, $f : A \to B$ una aplicación que cumple las condiciones (i) y (ii) de la Definición 2.1. Probar que f es homomorfismo de anillos si y solo si $f(1)$ es una unidad del anillo B.