# Álgebra Conmutativa
# Tarea 1: Ejercicios 1-6 Tema 1

José Luis Cánovas Sánchez

23 de septiembre de 2016

## 1. Ejercicio 1

Demostrar la proposición 1.11:
**Proposición 1.11:** *Sea D un dominio. Se tiene:*

(i) *La relación $x|y$ es transitiva y reflexiva.*

Sean a,b,c,d $\in$ D tal que a|b con $ad = b$ y b|c con $be = c$. Sustituyendo b $ade = c$, llamando $f = d \cdot e$ queda $af = c$ por lo que a|c. La relación es **transitiva**.

La relación es **reflexiva** pues según la notación de la definición 1.10 tomando $c = 1$, a|a ya que $a \cdot 1 = a$.

(ii) *Si $x|a$ y $x|b$, entonces $x$—$a \pm b$*

Por $x|a$ $\exists c \in D$ tal que $xc = a$. Del mismo modo $\exists d \in D$ tal que $xd = b$.

Si sumamos $xc = a$ y $xd = b$ nos queda:

$xd + xd = a + b \Rightarrow x(c + d) = a + b \Rightarrow x|a + b$

Si restamos $xc = a$ y $xd = b$ nos queda:

$xd - xd = a - b \Rightarrow x(c - d) = a - b \Rightarrow x|a - b$

## 2. Ejercicio 2

Sea A un anillo, $B \subseteq A$ un subconjunto. Supóngase que las restricciones de las operaciones de A dan operaciones en B y que, con esas operaciones, B es un anillo. Mostrar que B es entonces un subanillo de A si y solo si $1 \in B$.

$\Rightarrow$
Supongamos B subanillo.
Por $(ii)$ de la definición 1.5,se cumple que $1 \in B$.

$\Leftarrow$
Supongamos $1 \in B$.
De manera inmediata tenemos $(ii)$ de la definición 1.5.
Veamos si $a, b \in B \Rightarrow a - b \in B$, $ab \in B$
Por B anillo, $1 \in B$ y existe su simétrico $-1$. Además es cerrado para sumas y productos por lo que cumple $ab \in B$ y

$b \cdot (-1) = -b \in B \Rightarrow$
$a + (-b) = a - b \in B$

Como cumple $(i)$ y $(ii)$ de la definición 1.5, B es subanillo.

# 3. Ejercicio 3

Sea A un anillo no trivial. Probar:

(I) Si $a \in A$, entonces $(a) = A$ si y solo si $a$ es unidad.

$\Rightarrow$

Si $(a) = A$ el caso particular $1 \in A = (a)$ y por la definición de ideal principal $(a) = \{ax \,|\, x \in A\}$ entonces $\exists b \in A$ tal que $b \cdot a = 1 \in (a) = A$ por lo que $a$ es unidad.

$\Leftarrow$

Sea $a$ unidad. $\exists b \in A$ tal que $ab = 1$.

$(a) = \{xa \,|\, x \in A\}$ y tomando $x = b$ $ba = 1 \in (a)$

$1 \in (a) \Rightarrow \forall x \in A \quad x \cdot 1 = x \in (a) \Rightarrow (a) = A$

(II) Un ideal de A es propio si y solo si ninguno de sus elementos es una unidad.

$\Rightarrow$

Sea $I \trianglelefteq A$ ideal cualquiera de A. Supongamos que $\exists a \in I$ unidad, i.e. $\exists b \in A$ con $ab = 1 \Rightarrow 1 \in I \Rightarrow \forall x \in A \quad x \cdot 1 = x \in I \Rightarrow A = I$

Por la equivalencia de $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$, tenemos demostrada la implicación a la derecha.

$\Leftarrow$

Supongamos que $I \trianglelefteq A$ ideal impropio $I = A$. Como $1 \in A$ unidad $(1 \cdot 1 = 1)$, tenemos demostrada la implicación izquierda.

(III) A es un cuerpo si y solo si tiene exactamente dos ideales.

$\Rightarrow$

Por ser $A$ cuerpo, todo elemento no nulo $a \in A$ tiene inverso $b \in A$ tal que $ab = 1$.

Sea $I \trianglelefteq A$ un ideal cualquiera de $A$. Para toda unidad $a$, $a \in I$, $ab \in I \Rightarrow 1 \in I \Rightarrow I = A$. Todo ideal con algún elemento no nulo es ideal impropio.

Si $I$ no tiene unidades, como no puede ser vacío, sólo queda $0 \in I$, por lo que $I = (0)$ el ideal trivial.

$A$ tiene exactamente dos ideales.

$\Leftarrow$

Si todo ideal no trivial es el impropio $I = A$. Tomamos un elemento arbitrario $a \in A$, de modo que su ideal principal será $(a) = A$.

Suponemos por reducción al absurdo que $A$ no es un cuerpo.

$\exists x \in A$ no nulo : $\forall y \in A \quad x \cdot y \neq 1$, i.e., no es unidad.

Como todo ideal principal $(a) = A$, entonces $(x) = A$, pero $1 \in A$ y $1 \notin (x) = A$. Contradicción con la hipótesis de que $A$ no es cuerpo.

# 4. Ejercicio 4

Demostrar la Proposición 2.10.

**Proposición 2.10:** *Sea $A$ un anillo no trivial y sea $C$ un conjunto no vacío de ideales de $A$. El conjunto intersección:*

$$\cap C = \{x \in A \,|\, x \in I \quad \forall I \in C\}$$

*es un ideal de $A$.*

Veamos los puntos $(i)$ y $(ii)$ de la definición 2.2 de ideal:

$(i)$ $x, y \in \cap C \Rightarrow x + y \in \cap C$

Si $x, y \in \cap C$, entonces $x, y \in I \quad \forall I \in C \Rightarrow x + y \in I$ por $I$ ideal $\forall I \in C \Rightarrow x + y \in \cap C$.

$(ii)$ $x \in \cap C \quad a \in A \Rightarrow ax \in \cap C$

Si $x \in \cap C$, entonces $x \in I \quad \forall I \in C \Rightarrow xa \in I$ por $I$ ideal $\forall I \in C \Rightarrow xa \in \cap C$

# 5. Ejercicio 5

Demostrar la Proposición 2.15.

**Proposición 2.15:** *Sea $A$ un anillo no trivial, $I$ un ideal de $A$, $S$ un subconjunto no vacío de $A$. El conjunto*

$$(I : S) = \{x \in A \,|\, xS \subseteq I\}$$

*(donde $xS = \{xs \,|\, s \in S\}$) es un ideal de $A$ que contiene a $I$.*

Veamos que es ideal:

$(i)$ $a, b \in (I : S) \Rightarrow a + b \in (I : S)$

Por $a \in (I : S)$ se cumple $\forall s \in S \quad a \cdot s \in I$.

Análogamente $\forall s \in S \quad b \cdot s \in I$.

Sumamos: $as + bs \in I$ por ser elementos del ideal $I$.

Por la propiedad distributiva $as + bs = (a + b)s \in I$ cumple la definición para el elemento $a + b \in (I : S)$.

$(ii)$ $a \in (I : S) \quad x \in A \Rightarrow ax \in (I : S)$

Por $a \in (I : S)$ teníamos $\forall s \in S \quad a \cdot s \in I$.

Por $I$ ideal $x \cdot as \in I\,(\forall s \in S) \Rightarrow xa \in (I\colon S)$ por definición de $(I\colon S)$.

Veamos ahora que $I \subseteq (I\colon S)$:
Sea $x \in I$ arbitrario.
$xs \in I \quad \forall s \in S$ por $S \subseteq A$ e $I$ ideal.
$x \in (I\colon S) \quad \forall x \in I$ por definición de $(I\colon S)$
$I \subseteq (I\colon S)$

# 6. Ejercicio 6

Sean $A$, $B$ anillos, $f : A \to B$ una aplicación que cumple las condiciones $(i)$ y $(ii)$ de la Definición 2.1. Probar que $f$ es homomorfismo de anillos si y solo si $f(1)$ es una unidad del anillo $B$.

$\Rightarrow$
Inmediata.
Por $f$ homomosfismo cumple 2.1.$(iii)$: $f(1_A) = 1_B \in U\,(B)$

$\Leftarrow$
Sean $u, v \in U(B)$ tal que $uv = 1_B$ y $f(1_A) = u$.
Si $f$ fuera homomorfismo de anillos debería cumplir $(ii)$ y $(iii)$, lo que induce un homomorfismo de grupos multiplicativos $f\colon U(A) \to U(B)$, que en particular cumple $f(u^{-1}) = f(u)^{-1} \quad \forall u \in U(A)$
$f(1) = f(1^{-1}) = f(1)^{-1} = u^{-1} = v$
$u = f(1) = v \Rightarrow U(B) = \{1_B\} \Rightarrow f(1_A) = 1_B$
Hemos encontrado una restricción extra necesaria en $B$ para que $f$ pueda ser homomorfismo de anillos, todas sus unidades son iguales, por lo que serán el 1.