PRUEBAS DE CONOCIMIENTO CERO Y SUS APLICACIONES

JOSÉ LUIS CÁNOVAS SÁNCHEZ

Tutores
ANTONIO JOSÉ PALLARÉS RUIZ
LEANDRO MARÍN MUÑOZ

Facultad de Matemáticas
Universidad de Murcia

José Luis Cánovas Sánchez: *Pruebas de Conocimiento Cero y sus Aplicaciones,*
Julio 2017

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, José Luis Cánovas Sánchez, autor del TFG PRUEBAS DE CONOCIMIENTO CERO Y SUS APLICACIONES, bajo la tutela de los profesores Antonio José Pallarés Ruiz y Leandro Marín Muñoz, declaro que el trabajo que presento es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.[1]

Murcia, Julio 2017

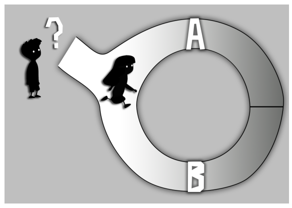
José Luis Cánovas Sánchez

1 En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

EXTENDED ABSTRACT

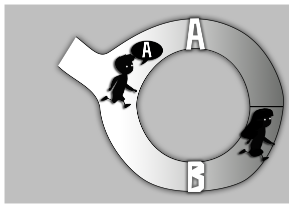
Imagine a cave, where the path forks in two passages, and at the end of each one, they join again, with the shape of a ring. In the point the paths meet, there is a magic door, that only opens when someones pronounces the magic work.

Peggy knows the secret word and wants to **p**rove it to her friend, **V**ictor, but without revealing it. Peggy and Victor meet at the entrance of the cave, then Victor awaits while Peggy goes inside the cave, taking one of the passages, that we will name A and B. Victor can't see which way Peggy went.



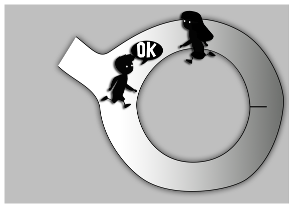
The cave [11] . Peggy takes randomly A or B. Victor awaits outside.

When Peggy arrives at the door, **V**ictor enters the cave, and when he arrive to the fork, stops and yells which path, A or B, he wants Peggy to come back, to **v**erify she knows how to open the door.



The cave. Victor chooses randomly the returning path for Peggy.

If Peggy actually knows the secret, she always can take the requested path, opening the magic door if needed. But if Peggy doesn't know the magic word, she had a chance of 50% to guess correctly what passage Victor was going to ask. That means she had a chance to fool Victor.



The cave. Peggy returns by the requested path.

Victor then asks to repeat the experiment. With 20 repetitions, the chances Peggy fools Victor in all of them is only 2^{-20},

Eve, curious about what Victor and Peggy were doing in the cave, **e**avesdrops Victor during the process. The problem is that Eve doesn't know if Peggy and Victor agreed on what paths to choose, because they wanted to prank her for being busybody. Only Victor is confident he is choosing the returning passage randomly.

Later, Victor is convinced that the door can be opened and Peggy knows the word, but he can't prove it to Eve because he can't open the door.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

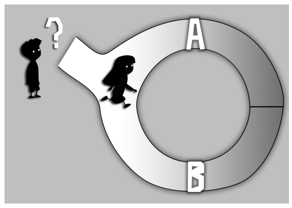
1

INTRODUCCIÓN

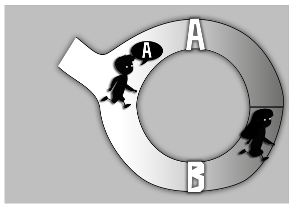
En la actualidad, para demostrar que conocemos un secreto a alguien, utilizamos un medio donde nadie nos espíe y le contamos el secreto directamente a nuestro interlocutor. En el ámbito de la criptografía, cifraríamos el secreto con una clave, simétrica o asimétrica, tal que, sólo quien conozca la clave de descifrado pueda leer nuestro secreto. Esto es la base de las comunicaciones seguras en Internet. Ciframos nuestra contraseña de modo que sólo el servidor de correo pueda leerla, pudiendo iniciar nuestra sesión sin que ningún espía nos la pueda robar. El problema es que hay dos partes que conocen el secreto, dos puntos de ataque.

Existe un área de la criptología que se encarga de abordar este problema, demostrar que conocemos algo, pero sin que de la misma prueba se obtenga más información. Estos métodos se conocen como Pruebas de Conocimiento Cero. Para ilustrar estas pruebas, en 1990 Guillou, Quisquater y Berson publicaron en *How to Explain Zero-Knowledge Protocols to Your Children* [10] una historia sobre cómo Alí Babá demostró poder abrir la cueva sin decir a nadie cuáles eran las palabras mágicas. Aquí presentamos una versión resumida que destaca las propiedades básicas de estos métodos:

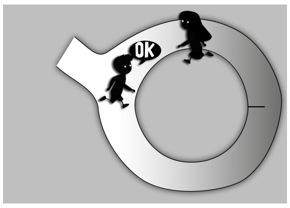
> Imaginemos una cueva, donde el camino principal se bifurca y al final de cada pasillo los caminos se vuelven a encontrar, formando una especie de anillo. En el punto en que se unen, dentro de la cueva, hay una puerta mágica con una palabra secreta, la cual permite abrirla y cruzar al otro lado.
>
> **P**aula conoce la clave secreta y quiere **p**robarlo a su amigo Víctor, pero sin tener que revelársela. Paula y Víctor quedan en la entrada de la cueva con unos *walkie-talkies*, de modo que Víctor esperará fuera y Paula entrará a la cueva y tomará uno de los pasillos, que llamaremos A y B, sin decirle cuál a Víctor.
>
> Al llegar a la puerta, Paula avisa a Víctor para que entre a la cueva y espere en la bifurcación, donde **V**íctor, para intentar **v**erificar que Paula conoce la palabra secreta, le indicará por qué pasillo quiere que vuelva, el A o el B.
>
> Si Paula realmente conoce el secreto, podrá volver a la bifurcación por el pasillo solicitado, abriendo, si es preciso, la puerta. Pero en caso de no conocer la clave, al entrar por uno de los pasillos, tenía una probabilidad del 50 % de adivinar cuál pediría Víctor.
>
> Víctor no se queda contento con una sola prueba, pues Paula podría haber tenido suerte, así que la repiten hasta que se convence. Con unas 20 repeticiones, Paula tendría solo una probabilidad de



La cueva [11] . Paula entra por A o B al azar. Víctor espera fuera.



La cueva. Víctor elige al azar por dónde quiere que regrese Paula.



La cueva. Paula vuelve por el camino pedido.

2^{-20}, prácticamente nula, de acertar todas las veces y engañar así a Víctor.

Eva, curiosa de qué hacían Víctor y Paula en la cueva, **e**spía a Víctor durante todo el proceso. Eva no sabe si Paula y Víctor han acordado previamente qué pasillo pedir por el *walkie-talkie*, y sólo Víctor está seguro de que él los estaba eligiendo al azar y sin previo acuerdo.

Más tarde Eva habla con Víctor, que está seguro de que Paula conoce la clave, y éste querría convencer también a Eva, pero como él no conoce la clave, no puede repetir la prueba a Eva, sólo Paula puede realizarla con éxito.

En el estudio formal de las Pruebas de Conocimiento Cero se utilizan distintos tipos de problemas, y los más utilizados están relacionados con la **teoría de números** y la **teoría de grafos**. Son problemas difíciles de resolver para quien no conoce alguna información extra de los mismos, que en nuestra fábula serían el problema de abrir la puerta sin conocer la palabra mágica. Los problemas más representativos de las Pruebas de Conocimiento Cero son el del logaritmo discreto, la raíz cuadrada modular, el isomorfismo de grafos, el cálculo de caminos hamiltonianos en grafos y la 3-coloración de grafos.

La memoria se divide en tres partes, en la primera parte estudiaremos todos estos problemas, empezando por definir qué se entiende por un problema *difícil* desde el punto de vista de la computación, para después describir formalmente los problemas mencionados anteriormente así como los algoritmos que nos permiten resolverlos cuando disponemos de una información adicional (el secreto).

La segunda parte de la memoria se dedicará a las Pruebas de Conocimiento Cero en sí mismas, definiremos qué propiedades debe cumplir una prueba de este tipo, enunciaremos pruebas que utilicen los problemas anteriores, y demostraremos que cada una de ellas cumple la definición.

La tercera parte de la memoria estará dedicada a las aplicaciones prácticas de estas Pruebas de Conocimiento Cero. La utilización de estos algoritmos permite resolver problemas relacionados con la privacidad de las comunicaciones, aumentando la seguridad y la funcionalidad de las aplicaciones.

Por último, dedicaremos un apéndice a mostrar algunas implementaciones de estos algoritmos utilizando `sage`, que es un software matemático basado en python de libre distribución.

2 PRELIMINARES DE COMPUTACIÓN

En este capítulo introducimos unos preliminares sobre la complejidad computacional, que nos permitirán entender qué problemas matemáticos, y por qué, se utilizan en criptografía. Comencemos con unas definiciones:

Definición 2.1. Llamamos *problema* a la descripción general de una tarea que depende de unos parámetros. La *definición* de un problema consta de dos partes. La primera da el escenario del problema, describiendo los parámetros necesarios. La segunda parte indica una pregunta de la que se espera una respuesta o solución.

Ejemplo 2.2. Vamos a considerar el problema de multiplicar dos matrices. La definición del problema sería:

Nombre:	Problema multiplicación de matrices.
Parámetros:	Dos matrices A_1 y A_2.
Pregunta:	¿Cuál es la matriz A tal que $A = A_1 \cdot A_2$?

Definición 2.3. Una *instancia* de un problema es el caso particular de un problema al que se le han dado valores a los parámetros.

Definición 2.4. Un *algoritmo* es una lista de instrucciones que para una instancia produce una respuesta correcta. Se dice que un algoritmo *resuelve* un problema si devuelve respuestas correctas para todas las instancias del problema.

Definición 2.5. Se llama *problema de decisión* a un problema cuya respuesta está en el conjunto $\mathcal{B} = \{\mathtt{Verdadero}, \mathtt{Falso}\}$.

No todos los problemas son de decisión, pero en general es fácil transformarlos en un problema de decisión cambiando la *pregunta*, y los algoritmos que resuelven un problema de decisión suelen también ser fáciles de adaptar para el problema original.

Ejemplo 2.6. El problema del ejemplo anterior se puede transformar a un problema de decisión:

Nombre:	Problema multiplicación de matrices.
Parámetros:	Tres matrices A, A_1 y A_2.
Pregunta:	¿$A = A_1 \cdot A_2$?

Un algoritmo para solucionarlo puede primero comprobar las dimensiones de las matrices, y si no concuerdan con las de la multiplicación, puede responder $\mathtt{Falso}$ sin más operaciones, pero cuando las dimensiones concuerden, deberá realizar la multiplicación de A_1 por A_2 y luego comparar A con el producto obtenido.

2.1 NOTACIÓN ASINTÓTICA

Para poder estudiar cómo crecen el tiempo de ejecución, la memoria usada, o cualquier otro recurso, de un algoritmo, dependiendo del tamaño de los datos de entrada, utilizamos distintas *notaciones asintóticas*. Nos interesa en particular la siguiente:

Definición 2.7. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definimos la notación *O grande* u *orden* de f al conjunto de funciones de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}^+$ acotadas superiormente por un múltiplo positivo de f a partir de cierto valor $n \in \mathbb{N}$:
$O(f) = \{t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,:\, t(n) \leqslant c \cdot f(n) \quad \forall n \geqslant n_0\}$.

Para estudiar el tiempo de ejecución, $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ (el tiempo promedio, el caso más desfavorable, ...), de un algoritmo, buscaremos una función f que acote a t lo más de cerca posible. Para ello definimos la relación de orden:

Comparación de órdenes: $O(1) \leqslant O(\ln n) \leqslant O(\sqrt{n}) \leqslant O(n) \leqslant O(n \ln n) \leqslant O(n^c) \leqslant O(n^{\ln n}) \leqslant O(c^n) \leqslant O(n!) \leqslant O(n^n)$, *donde* $c > 1$ *constante.*

Definición 2.8. Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Diremos que $O(f) \leqslant O(g)$ si $\forall t \in O(f)$ se tiene que $t \in O(g)$, es decir, $O(f) \subseteq O(g)$.

Para acotar t buscaremos el menor $O(f) : t \in O(f)$.

2.2 CLASES DE COMPLEJIDAD

Para estudiar los problemas de decisión los organizamos en clases de complejidad, según sus mejores algoritmos que los solucionan.

Definición 2.9. Se llama algoritmo de *tiempo de cálculo polinomial* al algoritmo cuya función de tiempo del caso más desfavorable es de orden $O(n^k)$, donde n es el tamaño de la entrada y k una constante. Cualquier algoritmo cuyo tiempo de ejecución no puede acotarse de esa manera se llama de *tiempo de cálculo exponencial*.

A veces se denominan *buenos* o *eficientes* a los algoritmos polinomiales, e *ineficientes* a los exponenciales. Sin embargo, hay casos particulares donde no ocurre. Lo más importante al tratar con algoritmos polinomiales es el grado del polinomio, k, que indica su orden de complejidad. Por ejemplo, consideremos un problema cuyo mejor algoritmo tarda n^{100} instrucciones, es de orden polinómico, pero prácticamente intratable a partir de $n = 2$, y por otra parte, un problema que utilice $2^{0{,}00001n}$ instrucciones podría tratar casos hasta de $n = 10^6$ sin dificultad. Por esto, en criptografía se debe considerar el caso promedio sobre el caso más desfavorable.

Definición 2.10. El conjunto de problemas de decisión que se pueden resolver en tiempo polinomial se llama clase **P**.

Definición 2.11. Se llama clase de complejidad **NP** al conjunto de problemas de decisión donde una respuesta que sea $\mathtt{Verdadero}$ se puede verificar en tiempo polinomial, dada cierta información extra, que llamaremos *certificado*.

Definición 2.12. Se llama clase de complejidad **co-NP** al conjunto de problemas de decisión donde una respuesta que sea $\mathtt{Falso}$ se puede verificar en tiempo polinomial, dado el correspondiente *certificado*.

Es inmediato que que $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$ y $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{co\text{-}NP}$.

Ejemplo 2.13 (Problema en **NP**)**.** Consideremos el siguiente problema de decisión:

Nombre:	Problema del entero compuesto.
Parámetros:	Un entero positivo n.
Pregunta:	¿Es n compuesto? Es decir, ¿existen enteros $a, b > 1$ tal que $n = ab$?

El problema pertenece a **NP** porque se puede comprobar en tiempo polinomial que n es compuesto si nos dan su *certificado*, un divisor a de n, tal que $1 < a < n$. Basta usar la división euclídea de n entre a y ver que el resto es 0. Sin embargo, aún no se conoce si pertenece a **P**.

Definición 2.14. Sean dos problemas de decisión $L_1, L_2 \in \mathbf{NP}$, con correspondientes conjuntos de instancias I_1 e I_2. Sean I_1^+ e I_2^+ los subconjuntos de todas las instancias "$\mathtt{Verdaderas}$" de I_1 e I_2, respectivamente. Decimos que L_1 es *reducible en tiempo polinomial* a L_2, $L_1 \leqslant_P L_2$, si existe una función $f : I_1 \Rightarrow I_2$ que cumple:

1. Es ejecutable en tiempo polinomial.
2. $x \in I_1^+ \Leftrightarrow f(x) \in I_2^+$.

De manera más informal, se dice que L_1 se reduce en tiempo polinomial a L_2 si hay un algoritmo que resuelve L_1 utilizando como subrutina un algoritmo que resuelve L_2, y que se ejecuta en total en tiempo polinomial, si lo hace el algoritmo que resuelve L_2.

Si $L_1 \leqslant_P L_2$, entonces se puede entender que L_2 es al menos computacionalmente tan difícil como L_1, o que L_1 no es más difícil que L_2.

Definición 2.15. Un problema de decisión L se dice que es **NP**-completo, o **NPC** si:

(i) $L \in \mathbf{NP}$, y

(ii) $L_1 \leqslant_P L \quad \forall L_1 \in \mathbf{NP}$.

Los problemas **NPC** son los más difíciles entre los **NP** en el sentido de que son al menos tan difíciles como el resto de problemas en **NP**. Veamos el problema **NPC** más característico:

Nombre:	Problema de satisfacibilidad booleana (SAT).
Parámetros:	Una colección finita C de expresiones booleanas con variables y sin cuantificadores.
Pregunta:	¿Hay alguna asignación de las variables que haga $\mathsf{Verdadero}$ a C?

Teorema 2.16 (Teorema de Cook (1971))**.** *El problema de satisfacibilidad booleana es **NPC**.*

Para conocer más sobre el problema y la demostración se puede consultar [14].

O expresado de otra manera:

Teorema 2.17. *Todo problema $Q \in$ **NP** se puede reducir en tiempo polinomial al problema de satisfacibilidad booleana.*
$\forall Q \in$ ***NP***, $Q \leqslant_P \mathsf{SAT}$.

A día de hoy conocemos ciertas propiedades sobre las clases de equivalencia, pero quedan muchas cuestiones sin resolver:

- Uno de los siete problemas del milenio, ¿**P** = **NP**?
- ¿**NP** = **co-NP**?
- ¿**P** = **NP** $\cap$ **co-NP**?

La opinión de los expertos en base a ciertas evidencias es que la respuesta a las tres es *no*, pero hasta que se encuentren demostraciones formales de cada una, quedarán en conjeturas. Y basándose en esas conjeturas es donde se apoya la seguridad informática.

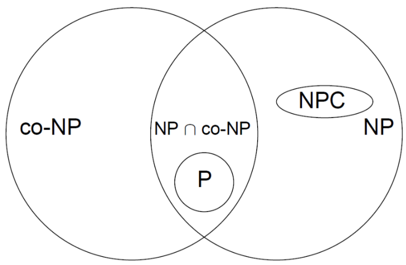


Figura 1: Conjetura de las relaciones entre clases **NP**, **co-NP**, **NPC**, **P**.

Existen tres problemas que se conoce que pertenecen a **NP**, pero se desconoce a día de hoy si pertenecen a **P** o **NPC**: el isomorfismo de grafos, el logaritmo discreto y la factorización de enteros.

En los siguientes capítulos los estudiaremos como base de diferentes pruebas de conocimiento cero.

2.3 ALGORITMOS PROBABILÍSTICOS

Para intentar resolver la infactibilidad computacional de ciertos problemas, surge un modelo alternativo de computación que utiliza métodos probabilísticos. Estos métodos no pueden asegurar cotas superiores absolutas de tiempo, e incluso pueden devolver una respuesta errónea. Sin embargo, dadas unas cotas muy pequeñas de errores, en la práctica, ciertos métodos probabilísticos son más eficientes que los algoritmos conocidos, pues el tiempo de ejecución *esperado* del método, calculado probabilísticamente, es menor que el orden del algoritmo original.

Definición 2.18. Llamamos *algoritmo de Monte Carlo* a un algoritmo probabilístico que resuelve un problema de decisión, pero tiene un error ϵ de equivocarse.

Decimos que es *parcialmente* $\mathtt{Verdadero}$ si cuando se le da una instancia $\mathtt{Verdadera}$ nunca se equivoca, pero si la instancia es $\mathtt{Falsa}$ puede devolver $\mathtt{Verdadero}$ con probabilidad ϵ. De la misma manera, decimos que es *parcialmente* $\mathtt{Falso}$ si siempre resuelve correctamente instancias $\mathtt{Falsas}$, pero puede cometer un error al resolver instancias $\mathtt{Verdaderas}$.

Definición 2.19. Llamamos *algoritmo de Las Vegas* a un algoritmo probabilístico que resuelve un problema de decisión, pero o bien lo resuelve correctamente, o bien informa de error y termina sin resolver el problema con una probabilidad ϵ.

Ejemplo 2.20 (Test de primalidad)**.** El problema de decisión

Nombre:	Problema de primalidad (PRIM).
Parámetros:	Un entero n.
Pregunta:	¿Es n primo?

es un problema en **NP**$\cap$**co-NP** (es el contrario del problema del entero compuesto), pero no se conoce ningún algoritmo que lo resuelva en tiempo polinómico, por ello no sabemos aún si pertenece a **P**.

Un algoritmo probabilístico basado en el Pequeño Teorema de Fermat, $a^{n-1} \equiv 1 \bmod n$ si n es primo para cualquier $a \in \mathbb{Z}_n$, puede utilizarse para comprobar si n es primo.

Si n es primo, para todo a que se elija, se cumplirá $a^{n-1} \equiv 1 \bmod n$, por lo que es un algoritmo de Monte Carlo parcialmente $\mathtt{Verdadero}$, para una instancia $\mathtt{Verdadera}$ nunca se equivoca.

Sin embargo, si n es compuesto, pueden existir valores a que cumplan la propiedad. Por ejemplo, si n es un *número de Carmichael*, todo a coprimo con n cumple $a^{n-1} \equiv 1 \bmod n$.

Este no es el test de primalidad más fuerte, existen otros mejorados, como el test de primalidad de Miller-Rabin, que asegura que a lo sumo da un falso positivo para $\frac{1}{4}$ de todos los enteros a, $0 < a \leqslant p-1$. Ejecutando el test un número k de veces, eligiendo aleatoriamente $a \in \mathbb{Z}_n$, obtenemos una probabilidad de error de $\epsilon = \frac{1}{4^k}$, lo que podría darnos en 50 iteraciones un algoritmo ejecutable en tiempo polinomial, con probabilidad de error, cuando n es compuesto, de 2^{-50}, algo que podemos estar dispuestos a asumir en la práctica.

3 PRELIMINARES DE GRAFOS

TODO : introducción del capítulo La teoría necesaria para comprender las aplicaciones de ZKP con grafos es muy básica, los resultados de esta sección se pueden consultar en [12].

3.1 TEORÍA DE GRAFOS

Definición 3.1. Un *grafo* (simple no dirigido) es un par (V, E) formado por un conjunto finito $V \neq \emptyset$, a cuyos elementos denominaremos *vértices* o *nodos*, y E, un conjunto de pares (no ordenados y formados por distintos vértices) de elementos de V, a los que llamaremos *aristas*.

A los nodos v_1 y v_2 que forman una arista $e = (v_1, v_2)$ se les llama *extremos* de e.

Definición 3.2 (Conceptos)**.**

A dos nodos v_1 y v_2 que forman parte de una misma arista se les llama *adyacentes*.

Se llama *orden* de un grafo a $\mid V \mid$.

Se llama *tamaño* de un grafo a $\mid E \mid$.

Un grafo con $\mid V \mid = 1$ (consecuentemente $\mid E \mid = 0$) se llama *trivial*.

Se dice que una arista es *incidente* con un vértice v cuando v es uno de sus extremos.

Definición 3.3. Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ se dice que son *isomorfos*, lo cual denotaremos como $G_1 \simeq G_2$, si existe una aplicación biyectiva $\tau : V_1 \to V_2$ tal que $\forall u, v \in V_1$

$$(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (\tau(u), \tau(v)) \in E_2.$$

Tal aplicación recibe el nombre de *isomorfismo*. Si $G_1 = G_2$, llamaremos a τ *automorfismo*.

En un abuso de notación, podemos escribir que $\tau(G_1) = G_2$.

Dados dos grafos $G_1 = (V, E_1)$ y $G_2 = (V, E_2)$ isomorfos, con el mismo conjunto de vértices, $V = \{v_1, \dots v_n\}$, vemos que el isomorfismo entre G_1 y G_2 puede denotarse como una permutación en el índice de sus nodos.

Utilizaremos la notación $Sym(V)$ para denotar los automorfismos de $G = (V, E)$, que será el grupo simétrico S_n de las permutaciones de los vértices, cuando $\mid V \mid = n$. Por lo visto en los preliminares de álgebra, tenemos que $\mid Sym(V) \mid = n!$.

COLORACIÓN DE GRAFOS

Definición 3.4. Una *coloración* de un grafo $G = (V, E)$ es una aplicación $c : V \to \{1, 2, \ldots, l\}$.

El valor $c(v_i)$ es el *color* correspondiente al nodo v_i.

Definición 3.5. Una *coloración propia* de un grafo es una coloración que hace corresponder colores diferentes a vértices adyacentes:
$\forall (u, v) \in E \to c(u) \neq c(v)$.

Definición 3.6. Llamaremos *número cromático* del grafo G, $\chi(G)$, al mínimo valor de l que permite una coloración propia de G, es decir, al mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de forma que los extremos de cada arista tengan colores distintos.

Definición 3.7. Un *grafo plano* es (V, E), un par de conjuntos finitos llamados *vértices* y *aristas* que satisfacen:

- $V \subset \mathbb{R}^2$.
- Cada arista de E es un arco entre dos vértices distintos.
- Aristas diferentes tienen extremos diferentes.
- El interior de una arista no contiene ni vértices ni puntos de otra arista.

Para cada grafo plano G, el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus (V \cup E)$ es abierto. Sus regiones se llaman *caras*.

Definición 3.8. Un grafo isomorfo a un grafo plano, se denomina *grafo planar*.

Cada representación de un grafo planar como un grafo plano se llama un *embutido*.

Teorema 3.9. *Si* G *es un grafo planar, entonces* $\chi(G) \leqslant 4$.

Este último resultado es el conocido como Teorema de los cuatro colores, que en una versión menos técnica dice:

Teorema 3.10. *Dado cualquier mapa geográfico con regiones continuas, este puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color.*

CAMINOS HAMILTONIANOS

TODO

REPRESENTACIÓN DE GRAFOS

TODO: si no implementamos nada de grafos, no hace falta

Dado $G = (V, E)$ con $V = \{v_1, \ldots v_n\}$ y $E = \{e_1, \ldots e_m\}$, podemos representarla por:

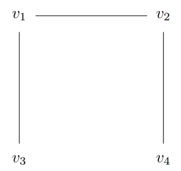
- La *matriz de adyacencia* $M_{nxn} = (m_{ij})$, que se construye mediante:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E \quad (\Leftrightarrow (v_j, v_i) \in E), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- La *matriz de incidencia* (vértice-arista) $M_{nxm} = (m_{ij})$ con

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es extremo de } e_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Una matriz de enteros M_{mx2} cuyas filas contienen los índices de los extremos inicial y final de las aristas del grafo.
  Ejemplo 3.11. El grafo:



se representaría como:

1	2
1	3
2	4

3.2 problemas de decisión basados en grafos

A continuación, introducimos los enunciados de los problemas de grafos utilizados en pruebas de conocimiento cero, y referencias donde se estudian sus órdenes de complejidad.

3.2.1 *Problema del isomorfismo de grafos*

Nombre:	Problema GI (*Graph Isomorphism*).
Parámetros:	Dos grafos $G_0 = (V_0, E_0)$ y $G_1 = (V_1, E_1)$, del mismo orden $\mid V_0 \mid = \mid V_1 \mid = n$.
Pregunta:	¿Existe un isomorfismo $\pi : V_0 \to V_1$ tal que una arista $(u, v) \in E_0$ si y solo si $(\pi(u), \pi(v)) \in E_1$?

TODO

3.2.2 *Problema del camino hamiltoniano*

Nombre:	Problema CH.
Parámetros:	Un grafo $G = (V, E)$.
Pregunta:	¿Existe un ciclo en G que recorre pasa por cada vértice en V una única vez?

TODO

3.2.3 *Problema de la 3-coloración*

Nombre:	Problema G3C.
Parámetros:	Un grafo $G = (V, E)$.
Pregunta:	¿Existe una función $\phi : V \to \{1, 2, 3\}$ tal que $\forall (u, v) \in E$, se cumple $\phi(u) \neq \phi(v)$?

TODO

4 PROBLEMAS BASADOS EN TEORÍA DE NÚMEROS

En este capítulo vamos a hacer un repaso de las cuestiones básicas de aritmética entera y modular en las que se basan los problemas utilizados para las pruebas de conocimiento cero que desarrollaremos en los siguientes capítulos.

Aunque para muchos de estos problemas se han desarrollado técnicas muy avanzadas, como por ejemplo para la factorización de enteros o para el problema del logaritmo discreto, son en general problemas sencillos de plantear desde el punto de vista matemático y resolubles de forma eficiente cuando se dispone de información adicional, es decir, del secreto.

Llamar a estos problemas *Teoría de Números* podría considerarse excesivo, podríamos simplemente llamarlos problemas artiméticos, pero hemos preferido la terminología de *Teoría de Números* para ser coherente con muchos textos que incluyen estos métodos dentro del epígrafe de *Introducción a la Teoría de Números*.

4.1 ARITMÉTICA ENTERA Y MODULAR

Vamos a recordar los conceptos más básicos de la teoría de grupos, empezando con la definición de operación binaria:

Definición 4.1. Una *operación binaria* en un conjunto A es una aplicación $\circ : A \times A \to A$.

Según una operación binaria cumpla ciertas propiedades, diremos que:

- La operación es *asociativa* si $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \forall a, b, c \in A$.
- La operación es *conmutativa* si $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in A$.
- El elemento $e \in A$ es un *elemento neutro* para $\circ$ si $a \circ e = e \circ a = a \quad \forall a \in A$.
- Cuando existe el neutro e, el elemento b es el *inverso* de a si $a \circ b = b \circ a = e$.

Podemos ahora dar formalmente la definición de grupo:

Definición 4.2. Un *grupo* es un conjunto G con una operación asociativa, con elemento neutro y con inverso para cada elemento. Si la operación es además conmutativa, se dice que G es un *grupo abeliano*.

Existen dos notaciones fundamentales para la representación de los grupos, que son la notación aditiva (la operación de grupo se denota $+$, el elemento neutro se denota como 0 y el inverso de a se denota $-a$) y la notación multiplicativa (la operación de grupo se denota $\cdot$, el elemento neutro se denota como 1 y el inverso de a se denota a^{-1}). Es habitual utilizar la notación aditiva para grupos conmutativos y la multiplicativa para los no conmutativos. Todos los grupos que vamos a tratar en los problemas relacionados con la Teoría de Números serán conmutativos, pero utilizaremos la notación aditiva o multiplicativa según resulte más natural una u otra.

Con la operación suma $+$ habitual, los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son grupos abelianos aditivos.

Definición 4.3. Sea G un grupo conmutativo finito y $g \in G$. Llamaremos orden de g y lo denotaremos $\mathrm{ord}(g)$ al menor entero t positivo tal que $g^t = 1$.

Proposición 4.4. *Sea G un grupo conmutativo finito con n elementos, entonces para todo $g \in G$ se tiene que $g^n = 1$.*

Demostración. Sean $g_1, g_2, \cdots, g_n$ los elementos de G. Está claro que si $g_i \neq g_j$ entonces $gg_i \neq gg_j$ puesto que si fueran iguales tendríamos que $g_i = g^{-1}gg_i = g^{-1}gg_j = g_j$, lo cual es una contradicción. Esto nos garantiza que el conjunto $\{gg_1, gg_2, \cdots, gg_n\}$ tiene que tener n elementos y por lo tanto ser todo G, es decir, que como conjuntos tenemos que $\{g_1, g_2, \cdots, g_n\} = \{gg_1, gg_2, \cdots, gg_n\}$ puesto que solo hay una reordenación. Como el producto es conmutativo, si multiplicamos todos los elementos tenemos que $g_1g_2\cdots g_n = g^n g_1 g_2 \cdots g_n$ y multiplicando por el inverso de $g_1g_2\cdots g_n$ obtenemos el resultado que buscamos. □

Este resultado es también cierto para grupos no conmutativos, pero la demostración no es tan elemental como en este caso, que es el que vamos a necesitar en esta memoria, por eso hemos hecho una demostración directa. Esta proposición nos garantiza que el orden de un elemento en un grupo finito tiene que ser menor o igual que el número de elementos del grupo.

Definición 4.5. Un grupo abeliano finito G diremos que es cíclico cuando exista algún elemento g tal que $\mathrm{ord}(g) = |G|$. En caso de existir, un elemento g que cumpla dichas propiedades se llamará un generador del grupo G.

Definición 4.6. Un *anillo* es un conjunto A con dos operaciones, $+$ y $\cdot$ (suma y producto), tales que:

- $(A, +)$ es un grupo abeliano con elemento neutro 0.
- El producto es asociativo y tiene elemento neutro que se denota por 1. Este elemento consideraremos que es distinto del neutro aditivo ($1 \neq 0$).
- El producto es distributivo con respecto a la suma, es decir, $\forall a, b, c \in A$ se tiene $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

El anillo es *conmutativo* si lo es el producto. En general, no todos los elementos de un anillo son invertibles (es decir, tienen inverso para la multiplicación), por ejemplo el elemento 0 nunca no es. Un anillo conmutativo donde todo elemento distinto de cero es invertible, se dice que es un *cuerpo*.

Definición 4.7. Sea A un anillo conmutativo, A^* denotará el *conjunto de los elementos invertibles en A*. Así, con la multiplicación usual $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$.

Los elementos invertibles también los llamaremos *unidades* del anillo A.

Si A es un cuerpo, por definición $A^* = A \setminus \{0\}$, por ejemplo $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ o $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposición 4.8. *El conjunto de las unidades de un anillo conmutativo A forma un grupo conmutativo con la multiplicación.*

Demostración. La multiplicación de dos unidades $a, b \in A^*$ es una unidad puesto que si c es inverso de a y d inverso de b, $(ab)(dc) = a(bd)c = a \cdot 1 \cdot c = ac = 1$. La operación de multiplicación es asociativa y conmutativa por serlo en A, el 1 está en A y todo elemento tiene inverso por definición de A^*. □

Definición 4.9. Sean A y B dos anillos conmutativos y $f : A \to B$ una aplicación. Diremos que es un homomorfismo de anillos si $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$, $f(a_1 a_2) = f(a_1)f(a_2)$, $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Si la aplicación f es biyectiva diremos que f es un isomorfismo y que los anillos A y B son isomorfos.

Proposición 4.10. *Sea $f : A \to B$ un isomorfismo de anillos conmutativos. Entonces para todo elemento invertible a de A, $f(a)$ es un elemento invertible de B, la aplicación f restringida a los conjuntos A^* y B^* es un isomorfismo de grupos abelianos.*

Demostración. Si a es invertible con inverso c tenemos que $1 = f(1) = f(ac) = f(a)f(c)$ por lo que $f(c)$ es inverso de $f(a)$ y por lo tanto $f(a) \in B^*$. Por otro lado, si b es un elemento invertible de B con inverso d, al ser f biyectiva podemos encontrar unos valores a y c únicos tales que $f(a) = b$ y $f(c) = d$, por lo tanto $f(ac) = f(a)f(c) = bd = 1 = f(1)$, pero al ser f biyectiva deducimos que $ab = 1$ y por lo tanto f es suprayectiva considerada como aplicación entre A^* y B^*. Eso prueba que la restricción de f es un isomorfismo de grupos abelianos puesto que evidentemente conserva el producto y el elemento neutro al conservarlo f. □

Definición 4.11. Sean A y B dos anillos conmutativos, denotaremos $A \times B$ al anillo cuyos elementos son los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$, junto con la suma y el producto componente a componente. El elemento neutro para la suma en $A \times B$ será $(0, 0)$ y para el producto $(1, 1)$.

Proposición 4.12. *Sean A y B dos anillos conmutativos, entonces $(A \times B)^*$ es el subconjunto de $A \times B$ formado por los pares $A^* \times B^*$.*

Demostración. Si a es invertible con inverso c y b es invertible con inverso d entonces $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd) = (1, 1)$. Recíprocamente si (a, b) es un elemento invertible de $A \times B$ tenemos un elemento (c, d) tal que $(a, b) \cdot (c, d) = (1, 1)$, pero eso implica que $ac = 1$ y $bd = 1$ por lo que $a \in A^*$ y $b \in B^*$. □

Definición 4.13. Un entero d se dice un *divisor* de un entero a si existe un entero c tal que $dc = a$. También se dice que d divide a a o que a es un múltiplo de d.

Definición 4.14. Dados dos enteros a y b y otro entero $n > 1$, diremos que a y b son **congruentes módulo** n si $a - b$ es un múltiplo de n. Esta relación se denotará por $a \equiv b \pmod{n}$ o simplemente $a \equiv b \bmod n$.

La relación de congruencia módulo n es una relación de equivalencia que divide al conjunto de los números enteros en n clases de equivalencia distintas. Al conjunto cociente formado por estas clases de equivalencia se denotará $\mathbb{Z}_n$.

Una posible elección de representantes para las clases de equivalencia módulo n son los valores $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. Si fijamos este conjunto de representantes denotaremos $- \bmod n : \mathbb{Z} \to \{0, 1, \cdots, n-1\}$ a la aplicación que dado un elemento $a \in \mathbb{Z}$ nos da el representante de su clase de equivalencia módulo n, lo llamaremos el reducido módulo n de a.

Es habitual utilizar los valores $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ para representar también las clases de equivalencia de $\mathbb{Z}_n$, por lo tanto podemos decir $3 \in \mathbb{Z}_7$ para referirnos a la clase de equivalencia del 3 en el conjunto cociente $\mathbb{Z}_n$. Esto en general simplifica las notaciones y no causa problemas de interpretación.

La utilización de $- \bmod n$ como un operador entre $\mathbb{Z}$ y $\{0, 1, \cdots, n-1\}$ no es del todo estándar, pero la utilizaremos en esta memoria por que resulta cómoda para trabajar en aritmética modular y en la práctica, casi todos los lenguajes de programación tienen el reducido módulo n como una función más.

Si $a \equiv b \pmod{n}$ entonces para cualquier $c \in \mathbb{Z}$ tenemos que $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ (porque $(b + c) - (a + c) = b - a$ que es un múltiplo de n) y también $ac \equiv bc \pmod{n}$ (porque $bc - ac = (b - a)c$ que es un múltiplo de n por serlo $b - a$). Esta propiedad nos permite probar que si $a \equiv b \pmod{n}$ y $c \equiv d \pmod{n}$ entonces $a + c \equiv b + c \equiv b + d \pmod{n}$ y también $ac \equiv bc \equiv bd \pmod{n}$.

Dicho de otra forma, la relación de congruencia módulo n respeta la suma y el producto por lo que podemos dotar a $\mathbb{Z}_n$ de estructura de anillo con la estructura heredada de $\mathbb{Z}$, es decir, dadas dos clases a y b, la suma $a + b$ es la clase de la suma de cualquier representante de a y cualquier representante de b, siendo esta definición independiente del representante elegido puesto que la congruencia respeta la suma. Lo mismo sucede con el producto, el producto de las clases, es la clase del producto de dos representantes cualesquiera de las clases.

Esta definición que parece muy complicada, se simplifica mucho en la práctica cuando tenemos elegidos unos representantes de las clases y un operador como $\bmod n$ puesto que podemos partir del conjunto $\{0, 1, \cdots, n-1\}$, hacer las operaciones de suma y producto con esos representante y si el resultado final se sale fuera del conjunto de representantes, aplicar el operador $\bmod n$ al resultado. De esta forma podemos decir que en en anillo $\mathbb{Z}_2$ se tiene que $1 + 1 = 0$ puesto que $1 + 1$ sería 2 pero al aplicar el operador $\bmod 2$ obtenemos el resultado 0.

Para prodecer de esta forma, es fundamental tener un método para calcular el reducido módulo n de cualquier número, pero eso nos lo va a proporcionar precisamente el algoritmo de la división.

Proposición 4.15. *Sean a, n dos números enteros con $n > 1$, $q = \lfloor \frac{a}{n} \rfloor$, entonces $a \bmod n = a - nq$. Estos valores q y $a \bmod n$ son precisamente el cociente y resto de la división entre a y n.*

Demostración. Por definición de $q = \lfloor \frac{a}{n} \rfloor$ sabemos que q es el mayor entero menor o igual que $\frac{a}{n}$, por lo tanto $q \leqslant \frac{a}{n} < q + 1$ y de ahí se deduce que $qn \leqslant a < nq + n$ por lo que $0 \leqslant a - nq < n$, es decir, que el entero $a - nq$ está en el conjunto $\{0, 1, \cdots, n-1\}$ tal y como habíamos exigido a $a \bmod n$. Además, con esta definición $a - (a \bmod n) = nq$ por lo que $a \equiv a \bmod n$. □

Definición 4.16. Dados dos enteros a y b, llamaremos máximo común divisor de dichos números (y lo denotaremos $\mathrm{mcd}(a, b)$) al mayor entero no negativo d tal que d divide al mismo tiempo a a y a b. Este número siempre existe puesto que 1 es siempre divisor de ambos, por lo que el conjunto de los divisores comunes no es nunca vacío. En el caso particular en que este sea el único divisor común diremos que a y b son coprimos.

Para el cálculo del máximo común divisor de dos números, es muy útil el siguiente resultado:

Lema 4.17. *Sean a y b dos enteros positivos. Entonces el conjunto de divisores comunes de a y b es el mismo que el de los divisores comunes de b y $a \bmod b$.*

Demostración. Por definición $a \bmod b = a - bq$ donde $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$. Si c es divisor de a y b, entonces $a = a'c$ y $b = b'c$ y por lo tanto $a - bq = c(a' - b'q)$, lo cual prueba que c es divisor común de b y $a \bmod b$.

Recíprocamente, si c es divisor común de b y $a \bmod b$ tenemos que $b = cb'$ y $a - bq = cr'$ por lo que $a = c(b'q + r')$, lo cual prueba que c es un divisor común de a y b. □

Algoritmo 4.18 (Algoritmo de Euclides)**.** Dados dos enteros a y b entonces podemos encontrar el máximo común divisor $d = \mathrm{mcd}(a, b)$ mediante el siguiente algoritmo:

1. Inicializar el vector fila $M := (a, b)$
2. Mientras que $M_2 \neq 0$ asignar $q := \lfloor \frac{M_1}{M_2} \rfloor$ y $M := M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix}$.
3. Al terminar tendremos $d := M_1$.

Demostración. Fijémonos que en el primer paso tenemos que $q := \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ y por lo tanto al hacer $(a, b) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix}$ obtenemos $(b, a \bmod b)$ y utilizando el lema anterior, deducimos que los divisores comunes de los dos elementos del nuevo M son los mismos que los divisores comunes de a y b. El mismo razonamiento en todos los pasos nos prueba que esta propiedad se mantiene siempre, además los valores se van reduciendo porque $a \bmod b$ es estrictamente menor que b. La sucesión tendrá que terminar en algún momento y la única posibilidad es que termine porque M_2 sea 0. En ese caso los divisores comunes de a y b son los mismos que los de M_1 y 0, pero los divisores de M_1 y 0 son los divisores de M_1 y el máximo de todos ellos es M_1 por lo que tiene que ser el máximo común divisor de a y b. □

Este algoritmo se puede extender para calcular también los coeficientes r y s que nos dan el máximo común divisor como combinación de a y b.

Algoritmo 4.19 (Algoritmo de Euclides Extendido)**.** Dados dos enteros a y b entonces podemos encontrar el máximo común divisor $d = \mathrm{mcd}(a, b)$ y valores enteros s y t tales que $d = su + tv$ mediante el siguiente algoritmo:

1. Inicializar la matriz $M := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$
2. Mientras que $M_{3,2} \neq 0$ asignar $q := \lfloor \frac{M_{3,1}}{M_{3,2}} \rfloor$ y $M := M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix}$.
3. Al terminar tendremos $r := M_{1,1}$, $s := M_{2,1}$ y $d := M_{3,1}$.

Demostración. El comportamiento de la fila inferior de la matriz M es precisamente la misma que teníamos en el Algoritmo de Euclides, por lo que necesariamente la matriz M terminará teniendo $\mathrm{mcd}(a, b)$ y 0 en la fila inferior.

Para completar la demostración fijémonos en que para los distintos valores de M que aparecen en el algoritmo, el producto $(a, b, -1)\, M$ es constantemente igual a $(0, 0)$. Para darse cuenta de eso, símplemente veamos que se cumple para la primera matriz ya que $a \cdot 1 + b \cdot 0 - 1 \cdot a = 0$ y $a \cdot 0 + b \cdot 1 - 1 \cdot b = 0$. En cada paso multiplicamos por la derecha por una matriz, pero como el producto de matrices es asociativo, la propiedad se mantiene puesto que

$$(a, b, -1) \left(M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \right) = ((a, b, -1)M) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = (0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = (0, 0).$$

Esto nos prueba que al terminar el algoritmo tendremos $aM_{1,1} + bM_{2,1} = M_{3,1}$ o lo que es lo mismo $ar + bs = d$. □

El algoritmo de Euclides extendido es muy útil para el cálculo de los elementos invertibles o unidades de $\mathbb{Z}_n$.

Proposición 4.20. *El conjunto de las unidades del anillo $\mathbb{Z}_n$ es precisamente el conjunto de las clases de equivalencia de a para aquellos valores a coprimos con n.*

Demostración. Si a es coprimo con n, por el algoritmo de Euclides extendido tenemos r y s tales que $ra + sn = 1$ pero entonces $ra \equiv 1 \pmod{n}$ y por lo tanto a es una unidad con inverso r.

Recíprocamente, si a es una unidad con inverso r tenemos que $ar \equiv 1 \pmod{n}$ y por lo tanto $ar = 1 + ns$ para algún s. Si d es el máximo común divisor de n y a, en particular d divide a ar y a nr por lo que divide a $ar - ns = 1$, lo cual prueba que d necesariamente ha de ser 1. □

Observación. Tal y como hemos visto en la demostración de la proposición anterior, dado a un elemento invertible de $\mathbb{Z}_n$, el inverso de a módulo n se puede calcular como el coeficiente r que hace que $ra + sn = 1$.

Definición 4.21. El número de unidades de $\mathbb{Z}_n$, es decir, el número de elementos de $\mathbb{Z}_n^*$ se denota $\varphi(n)$ que se conoce como la función φ de Euler. Esta función se define también para el 1 con el valor $\varphi(1) = 1$.

Proposición 4.22. *Sea p un número primo, entonces $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo.*

Demostración. Tenemos que demostrar que todos los elementos distintos de 0 son unidades, pero eso es claro porque si p es primo, no puede tener un factor común distinto de 1 con ninguno de los elementos $\{1, 2, 3, \cdots, p-1\}$ porque ninguno de ellos es múltiplo de p. □

Observación. De la proposición anterior, deducimos que p es un número primo $\varphi(p) = p - 1$.

Teorema 4.23 (de Euler)**.** *Para cualquier $a \in \mathbb{Z}_n^*$ se tiene que $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.*

Demostración. Puesto que las unidades forman un grupo abeliano finito, esto es un caso particular de la Proposición **??**. □

Proposición 4.24. *Sea G un grupo abeliano finito de n elementos y $g \in G$, entonces $\mathrm{ord}(g)$ divide a n.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\mathrm{ord}(g)$ no divide a n y por lo tanto tenemos $d = \mathrm{mcd}(\mathrm{ord}(g), n)$ estrictamente menor que $\mathrm{ord}(g)$. El Algoritmo de Euclides Extendido nos permite encontrar r y s tales que $d = \mathrm{ord}(g)r + ns$, por lo tanto $g^d = (g^{\mathrm{ord}(g)})^r (g^n)^s = 1$, lo cual es una contradicción con que $\mathrm{ord}(g)$ sea el menor entero tal que $g^{\mathrm{ord}(g)} = 1$. □

Corolario 4.25. *Para todo $a \in \mathbb{Z}_n^*$ se tiene que $\mathrm{ord}(a)$ divide a $\varphi(n)$.*

Teorema 4.26 (Teorema Chino de los Restos)**.** *Sean m y n dos números enteros coprimos, entonces tenemos un isomorfismo de anillos*

$$f : \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$$

dado por $f(x) = (x \bmod m, x \bmod n)$.

Demostración. Los operadores $- \bmod m$ y $- \bmod n$ respetan la suma y el producto, por lo que f respeta estas dos operaciones. El punto clave de la demostración es ver cual es la función inversa de f y esta viene dada del siguiente modo: Utilizando el Algoritmo de Euclides Extendido tomemos r

y s tales que $rm + sn = 1$. Dado un para de elementos $a \in \mathbb{Z}_m$ y $b \in \mathbb{Z}_n$ podemos calcular $x = asn + brm$ y vemos que $a = a1 = arm + asn = x + (a - b)rm$ por lo que $a \equiv x \bmod m$. De forma similar se ve que $b \equiv x \bmod n$ por lo que concluimos que $f(x) = (a, b)$. Formalmente esto prueba que f es suprayectiva, pero realmente es la inversa porque también es inyectiva: Supongamos que x cumple que $f(x) = (0, 0)$. Esto significa que x es un múltiplo de m y de n, es decir, $x = um = vn$ para ciertos valores u y v, pero entonces $x = x1 = x(rm + sn) = xmr + xns = vnmr + umns = (vr + us)mn$, pero esto nos dice que x es un múltiplo de mn y por lo tanto 0 en $\mathbb{Z}_{mn}$. □

Corolario 4.27. *Seam* m *y* n *enteros coprimos, entonces* $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Demostración. El isomorfismo de anillos que nos da el Teorema Chino de los Restos nos proporciona una biyección entre los conjuntos de unidades $\mathbb{Z}^*_{mn}$ y $\mathbb{Z}^*_m \times \mathbb{Z}^*_n$, por lo que el número de elementos de estos dos conjuntos es el mismo, pero dicho número es el el primer caso $\varphi(mn)$ y en el segundo $\varphi(m)\varphi(n)$. □

Corolario 4.28. *Sean* p *y* q *dos primos distintos, entonces* $\varphi(pq) = (p - 1)(q - 1)$.

Demostración. Por ser p y q primos distintos, está claro que no tienen ningún factor común distinto de 1 y por lo tanto $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q) = (p - 1)(q - 1)$. □

Observación. Sea $n = pq$ el producto de dos primos distintos, entonces es equivalente conocer p y q o conocer n y $\varphi(n)$.

Demostración. Si conocemos p y q claramente conocemos $n = pq$ y $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$ haciendo unas simples multiplicaciones. Recíprocamente, si conocemos n y $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1) = n - (p + q) + 1$ podemos deducir el valor de $p + q = n - \varphi(n) + 1$ por lo que conocemos la suma y el producto de dos números. Resolviendo en el conjunto de los números enteros la ecuación de segundo grado $x^2 - (p + q)x + pq = 0$ podemos obtener los valores de p y q y eso se puede hacer con el cálculo de una raíz cuadrada, que es un problema polinómico en $\mathbb{Z}$. □

Definición 4.29. Sea $a \in \mathbb{Z}^*_n$. Se dice que a es un *residuo cuadrático* módulo n, o un *cuadrado* módulo n, si existe un $x \in \mathbb{Z}^*_n$ tal que $x^2 \equiv a \bmod n$. Si no existe dicho x, entonces a se llama un *no-residuo cuadrático* módulo n.

Al conjunto de todos los residuos cuadráticos módulo n de $\mathbb{Z}^*_n$ los denotaremos como Q_n o bien como $\mathbb{Z}^{Q+}_n$. Al conjunto de los no-residuos cuadráticos lo denotamos como $\overline{Q_n}$. Esta notación no es muy habitual en Teoría de Números, pero es habitual en el caso de las pruebas de concimiento cero que veremos más adelante.

Ejemplo 4.30. Si tomamos $n = 4$, los no-residuos cuadráticos son 2 y 3, y el único residuo cuadrático es 1:

$$1^2 \equiv 1 \bmod 4 \qquad 2^2 \equiv 0 \bmod 4 \qquad 3^2 \equiv 1 \bmod 4$$

Observación. Por definición $0 \notin \mathbb{Z}^*_n$, y por tanto $0 \notin Q_n$ ni $0 \notin \overline{Q_n}$.

Definición 4.31. Sea $a \in Q_n$. Si $x \in \mathbb{Z}_n^*$ satisface $x^2 \equiv a \bmod n$, entonces x se llama *raíz cuadrada* módulo n de a.

Nuestro objetivo es estudiar el problema de cuando un elemento $a \in \mathbb{Z}_n^*$ es un residuo cuadrático y en caso de serlo cómo calcular una raíz cuadrada.

Empecemos viendo que cuando n es un primo impar, el número de residuos cuadráticos y de no residuos es el mismo.

Proposición 4.32. *Sea $p > 1$ un número primo, entonces $|Q_p| = |\overline{Q_p}| = \frac{p-1}{2}$.*

Demostración. Consideremos la función $s : \mathbb{Z}_p^* \to Q_p$ dada por $s(c) = c^2$. Por definición de Q_p esta función es suprayectiva y dado un elemento $a \in Q_p$ las antiimágenes por s serán sus raíces cuadradas. Sabemos que tiene que tener al menos dos raíces, puesto que si $a^2 \equiv c \bmod p$ entonces $(-a)^2 \equiv c \bmod p$ y $a \neq -a$ puesto que estamos suponiendo $a \neq 0$ y p primo impar. Lo importante es que no es posible que haya más de dos raíces, pero eso es cierto porque las raíces cuadradas de c son las que aparecen en la factorización del polinomio $x^2 - c$ y este polinomio no puede tener más de dos raíces por ser $\mathbb{Z}_p[x]$ un dominio de factorización única al ser $\mathbb{Z}_p$ un cuerpo.

Con este razonamiento deducimos que el número de elementos de Q_p ha de ser la mitad que el de $\mathbb{Z}_p^*$ que es precisamente $\varphi(p) = p - 1$. La otra mitad de los valores serán necesariamente no residuos, es decir, elementos de $\overline{Q_p}$. □

Cuando el número de elementos no es primo, en particular cuando podemos descomponerlo como producto de dos primos impares distintos (que será el ejemplo fundamental que necesitaremos a lo largo de la memoria), el problema se puede descomponer en dos problemas, uno para cada factor. Vamos a ver el resultado en general:

Proposición 4.33. *Sea n y m dos números enteros positivos coprimos. Entonces un elemento $x \in \mathbb{Z}_{mn}$ es un residuo cuadrático si y sólo si $x \bmod m$ y $x \bmod n$ son residuos cuadráticos en $\mathbb{Z}_m$ y $\mathbb{Z}_n$ respectivamente.*

Además, si a y b son raíces cuadradas de $x \bmod m$ y $x \bmod n$ en sus correspondientes anillos, podemos combinarlas mediante el Teorema Chino de los Restos para obtener una raíz cuadrada de x en $\mathbb{Z}_{mn}$.

En particular esto es cierto cuando queramos estudiar los residuos cuadráticos en $\mathbb{Z}_{pq}$ con p y q dos primos impares distintos, que son en particular coprimos.

Demostración. Esto es consecuencia directa del isomorfismo de anillos $f : \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ dado por el Teorema Chino de los Restos, ya que si $c^2 \equiv x \bmod mn$ entonces podemos tomar $a = c \bmod m$ y $b = c \bmod n$ de forma que $a^2 \equiv c^2 \equiv x \bmod m$ y $b^2 \equiv c^2 \equiv x \bmod n$. El el sentido contrario, si tenemos a y b raíces cuadradas de $x \bmod m$ y $x \bmod n$, entonces podemos combinarlas a un $c \in \mathbb{Z}_{mn}$ tal que $x \equiv a \equiv c^2 \bmod m$ y $x \equiv b \equiv c^2 \bmod n$ por lo que $f(x - c^2) = 0$ y usando que f es inyectiva, tenemos que $x \equiv c^2 \bmod mn$. □

Corolario 4.34. *Sea $n = pq$ el producto de dos primos distintos, entonces el número de residuos cuadráticos módulo n es $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$.*

Demostración. Hemos visto que un residuo cuadrático módulo n es combinación de los residuos cuadráticos de $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_q$, pero hay $\frac{p-1}{2}$ formas de elegir uno en $\mathbb{Z}_p$ y $\frac{q-1}{2}$ formas de elegirlo en $\mathbb{Z}_q$, por lo que en total tendremos $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$. □

Para identificar los residuos cuadráticos en el caso $\mathbb{Z}_p$ con p primo, disponemos de una herramienta muy útil:

Definición 4.35. Dados un primo impar p y un entero a, se define el *Símbolo de Legendre* y se denota $\left(\frac{a}{p}\right)$ como

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \equiv 0 \bmod p \\ 1, & \text{si } a \in Q_p \\ -1, & \text{si } a \in \overline{Q_p} \end{cases}$$

La definición de este símbolo requiere que p sea un número primo, pero se puede extender la definición para el caso general obtiendo lo que se conoce como Símbolo de Jacobi (también denominado Símbolo de Jacobi-Kronecker en algunos textos). La definición es la siguiente:

Definición 4.36. Sea n un entero impar positivo cuya descomposición en factores primos es $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ y sea a un entero. Entonces definimos el símbolo de Jacobi de a y n como

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{e_1} \cdot \left(\frac{a}{p_2}\right)^{e_2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{p_t}\right)^{e_t}$$

En la parte derecha de la igualdad, los símbolos que aparecen son los de Legendre puesto que los p_i son primos. En la parte izquierda tenemos el Símbolo de Jacobi que será igual al símbolo de Legendre cuando tengamos el caso n primo.

Notemos que con esta definición, cuando n no es primo, podemos perder la propiedad de que $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ nos garantice que a es un cuadrado módulo n. Un ejemplo importante de este hecho es el caso en que n sea el producto de dos primos impares p y q.

Proposición 4.37. *Sean p y q dos primos impares, $n = pq$ y $a \in \mathbb{Z}_n^*$, entonces $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ si y sólo si se cumple alguna de estas dos condiciones, o bien a es un residuo cuadrático módulo n, o bien $a \bmod p$ y $a \bmod p$ son ambos no residuos cuadráticos módulo n.*

Demostración. Por definición $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{q}\right)$ y como $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{q}\right)$ ha de ser 1, pero estos valores sólo pueden ser 1 ó -1 tenemos que o bien los dos valen 1 o los dos valen -1 que son las dos condiciones que hemos considerado. □

A pesar de perder esta propiedad en relación con los residuos cuadráticos que estudiaremos más adelante, la gran ventaja del Símbolo de Jacobi son las propiedades que tiene que permiten su cálculo sin necesidad de conocer la factorización de los números involucrados.

Proposición 4.38. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y sean m, n enteros positivos impares. Entonces se cumplen las siguientes propiedades del símbolo de Jacobi:*

1. *Si* $a \equiv b \bmod n$ *entonces* $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)$.
2. $\left(\frac{a^2}{n}\right) = 1$.
3. $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right)$.
4. $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{(n-1)/2}$.
5. $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{(n^2-1)/8}$.
6. $\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{(n-1)(m-1)/4}\left(\frac{n}{m}\right)$.

Esta última propiedad se conoce como Ley de Reciprocidad Cuadrática.

Demostración. Ver [16, Proposition 2.13] y [16, Theorem 2.24]. □

Observación. Aunque se han utilizado aquí las fórmulas con los valores $(-1)^t$, estos valores se pueden calcular conociendo simplemente si t es par o impar, y eso se puede deducir de todas las fórmulas a partir del valor de n y m como sigue: $(n-1)/2$ es par si $n \equiv 1 \bmod 4$ e impar si $n \equiv 3 \bmod 4$. Por otro lado $(n^2-1)/8$ siempre será entero puesto que n^2-1 es el producto de dos números pares consecutivos $(n-1)(n+1)$ y uno de los dos necesariamente es un múltiplo de 4. Además, si $n \equiv \pm 1 \bmod 8$ tendremos que $(n^2-1)/8$ es par, y si $n \equiv \pm 3 \bmod 8$ entonces este número será impar. Por último, en la Ley de Reciprocidad Cuadrática, tendremos que $(n-1)(m-1)/4$ es par si y sólo si $m \equiv n \equiv 3 \bmod 4$, lo cual se puede comprobar con un operador lógico sencillo, por ejemplo en C se podría programar como un simple `if(m & n & 2)`.

Para el cálculo efectivo de $\left(\frac{a}{b}\right)$ se procedería del siguiente modo:

Algoritmo 4.39 (Cálculo del Símbolo de Jacobi)**.** Dados dos enteros positivos a y b con b impar, esta función $\mathsf{Jacobi}(a, b)$ devuelve el símbolo de Jacobi de dichos valores de forma recursiva.

1. En caso de que a sea mayor que b, reducirlo módulo b, $a := a \bmod b$.
2. Si a es 0, devolver 0.
3. Si a es 1, devolver 1.
4. Dividir a por 2 para ponerlo en la forma $a = 2^e a'$ con a' impar. Si e es par o $b \equiv \pm 1 \bmod 8$ poner $s := 1$, en caso contrario poner $s := -1$.
5. Finalmente si $a' \equiv 3 \bmod 4$ y $b \equiv 3 \bmod 4$ devolver $-s\mathsf{Jacobi}(b, a')$ y en caso contrario devolver $s\mathsf{Jacobi}(b, a')$.

Demostración. El algoritmo simplemente usa las propiedades del Símbolo de Jacobi: primero reduce móduo b (propiedad 1), elimina casos extremos y luego quita los factores 2 calculándolos separadamente por las propiedades 2, 3 y 5. Por último da la vuelta al símbolo por la Ley de Reciprocidad Cuadrática para llamar recursivamente a la misma función con un valor del segundo parámetro estrictamente menor, lo cual garantiza que el algoritmo terminará. □

4.2 EL PROBLEMA DE LA FACTORIZACIÓN

Aunque directamente este problema no está entre los utilizados para las pruebas de conocimiento cero que vamos a estudiar en esta memoria, sí lo está de forma indirecta y por su importancia merece un apartado especial.

Nombre:	Problema de la factorización.
Parámetros:	Sea N un entero positivo no primo.
Pregunta:	Encontrar valores a y b distintos de 1 tales que $N = ab$.

Existen muchos algoritmos que nos permiten encontrar factores pequeños de N, el más evidente de todos ellos es probar directamente dichos factores, pero existen otros más sofisticados que también son muy efectivos con factores razonablemente pequeños. El caso más complicado es cuando N es producto de dos factores primos p y q de gran tamaño, $N = pq$. Ese es precisamente el caso que resultará de interés para las pruebas de conocimiento cero.

Si pretendemos buscar un factor simplemente haciendo divisiones y calculando los restos, lo que podemos garantizar es que el factor aparecerá antes de llegar a la raíz cuadrada de N, por lo que como máximo tendremos que hacer $\sqrt{N}$ divisiones. Esta aproximación al problema nos da una complejidad $O(\sqrt{N}) = O(e^{\frac{1}{2}\ln N})$ que es exponencial y totalmente imposible en el rango de valores en que nos movemos que son números de cientos e incluso miles de cifras.

Si nos centramos pues en los algoritmos que pueden resolver los casos del tipo $N = pq$ con p y q dos primos aproximadamente del mismo tamaño, lo primero que tenemos que hacer es notar que hay un caso particular que permite factorizar N cuando p y q están *demasiado* cercanos. Es el conocido como método de factorización de Fermat.

Consiste en calcular $x_i = \lceil\sqrt{N}\rceil + i$ para valores de $i = 0, 1, 2, \cdots$ y para cada uno de ellos calcular $x_i^2 - N$ que debe ser un valor relativamente pequeño. Si para alguno de estos valores llegamos a un número que es un cuadrado perfecto, escribiremos $x_i^2 - N = y_i^2$ y por lo tanto $N = x_i^2 - y_i^2 = (x_i + y_i)(x_i - y_i)$, lo que nos da una factorización de N.

Este método es muy efectivo si la diferencia entre p y q es muy pequeña, pero no es efectivo en general.

Sin embargo, nos permite introducir la técnica básica en la que se basan casi todos los métodos de factorización, que es buscar valores x e y tales que $x^2 \equiv y^2 \mod N$, con lo que tendríamos $(x-y)(x+y) = kN$ para algún entero k. Esta relación puede dar una factorización cuando p y q no se acumulan los dos en uno de los términos $x-y$ o $x+y$. Para extraer el factor simplemente tendríamos que calcular $mcd(x-y, N)$. La posibilidad de que los dos factores estén juntos en $x-y$ o en $x+y$ existe, pero los métodos de factorización lo que nos proporcionan es varias relaciones de este tipo y la probabilidad de que encontremos el factor es alta.

Para poder encontrar las relaciones del tipo $x^2 \equiv y^2 \mod N$ se utilizan los conceptos que vamos a introducir a continuación:

Definición 4.40. Sea N un entero impar compuesto. Llamaremos una base de factores a un conjunto $\mathcal{B} = \{p_0 = -1, p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ donde los valores p_i con $i > 0$ son números primos pequeños. Se incluye normalmente a -1 como uno de los elementos de las bases de factores aunque no es primo. Dada una base de factores $\mathcal{B}$ y un entero número x, diremos que x es $\mathcal{B}$-smooth[1] si $x^2 \mod N$ se puede factorizar completamente usando los factores de la base de factores $\mathcal{B}$.

Los distintos tipos de factorización intentan buscar números $\mathcal{B}$-smooth de forma que podamos conseguir una cantidad suficiente de ellos. Cada número $\mathcal{B}$-smooth nos proporciona una relación como sigue:

$$x_t^2 \equiv z_t = p_0^{e_{t0}} p_1^{e_{t1}} \cdots p_k^{e_{tk}}$$

Esta relación la almacenaremos con sus exponentes $e(z_t) = (e_{t0}, e_{t1}, \cdots, e_{tk})$ y llamaremos $d(z_t) = (d_{t0}, d_{t1}, \cdots, d_{tk}) = (e_{t0} \mod 2, e_{t1} \mod 2, \cdots, e_{tk} \mod 2) \in \mathbb{Z}_2^{k+1}$ el vector que resulta de reducir todas las coordenadas e_{ij} módulo 2. Los elementos $d(z_t)$ son vectores en un espacio de dimensión $k+1$, por lo tanto, si tenemos un número suficientemente grande de ellos (con seguridad si tenemos $k+2$), estos vectores serán linealmente dependientes.

Sean $\alpha_t\{0,1\}$ los coeficientes de una posible relación de dependencia lineal entre los vectores, es decir, $\sum_t \alpha_t d(z_t) = 0 \in \mathbb{Z}_2^{k+1}$. Puesto que los $d(z_t)$ eran las reducciones módulo 2 de los vectores $e(z_t)$, si aplicamos estas mismas relaciones a los vectores originales lo que obtenemos es $\sum_t \alpha_t e(z_t) = (2u_0, 2u_1, \cdots, 2u_k)$ con lo que podemos tomar $y = (-1)^{u_0} p_1^{u_1} \cdots p_k^{u_k}$ con lo que obtenemos

$$y^2 = p_0^{2u_0} p_1^{2u_1} \cdots p_k^{2u_k} = \prod_i p_i^{2u_i} = \prod_i p_i^{\sum_t \alpha_t e_{ti}} = \prod_i \prod_t (p_i^{e_{ti}})^{\alpha_t} =$$

$$\prod_t \prod_i (p_i^{e_{ti}})^{\alpha_t} = \prod_t \left(\prod_i p_i^{e_{ti}} \right)^{\alpha_t} = \prod_t z_t^{\alpha_t} \equiv \prod_t x_t^{2\alpha_t} \equiv \left(\prod_t x_t^{\alpha_t} \right)^2 \mod N$$

Con lo que, tomando $x = \prod_t x_t^{\alpha_t}$ hemos obtenido una relación del tipo $y^2 \equiv x^2 \mod N$ para cada una de las combinaciones lineales de los vectores que nos dan la dependencia lineal.

1 Se ha preferido la terminología en inglés porque la traducción que podría ser $\mathcal{B}$-suave no se suele usar en los libros.

Esta técnica se ha demostrado muy exitosa y los métodos de factorización la han ido perfeccionando para encontrar número $\mathcal{B}$-smooth de forma cada vez más rápida. Los métodos que usan esta técnica son el de las fracciones contínuas (CFRAC), el de la criba cuadrática multipolinómica (MPQS) y el del la criba de los cuerpos de números (NFS).

La complejidad de estos métodos es subexponencial, concretamente la del NFS es $O(L_n[1/3, (64/9)^{1/3} + o(1)])$. Estos métodos no permiten factorizar números enormemente grandes (del orden de las 1000 cifras binarias), pero sí otros de moderada longitud (nos pocos cientos de cifras binarias).

La situación del problema de la factorización podría cambiar dramáticamente con la aparición de los ordenadores cuánticos puesto que existen algoritmos eficientes para la factorización con esta nueva tecnología. Sin embargo, estos ordenadores están todavía en una fase experimental.

4.3 EL PROBLEMA DE LOS RESIDUOS CUADRÁTICOS

Podemos introducir ahora el problema de decisión QR, donde dado un módulo N, compuesto e impar, decidir si un entero x con símbolo de Jacobi 1 respecto a N, es o no un residuo cuadrático:

Nombre:	Problema de los residuos cuadráticos (QR).
Parámetros:	Un N un entero impar tal que $N = pq$ para p y q primos, y el entero x tal que $\left(\frac{x}{N}\right) = 1$.
Pregunta:	¿Es x un residuo cuadrático en $\mathbb{Z}_N$?

Cuando un número x es un residuo cuadrático módulo N, en particular lo es para p y para q por lo que el Símbolo de Jacobi va a ser 1. La cantidad de valores para los que esto sucede es $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$ tal y como vimos en la Proposición 4.37. También podemos obtener que el Símbolo de Jacobi sea 1 sin ser un residuo cuadrático, eso sucede cuando x no es residuo cuadrático módulo p ni módulo q. El número de valores para los que esto sucede es el mismo $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$, por lo tanto, dado un número x cuyo símbolo de Jacobi sea 1, tenemos una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de que x sea efectivamente un residuo cuadrático en $\mathbb{Z}_N$, la misma que la de que no lo sea.

Este problema es polinómicamente reducible (ver 2.14) al problema de la factorización.

Proposición 4.41. QR $\leqslant_P$ FACTORIZACIÓN

Demostración. Si conocieramos la descomposición en primos de $N = pq$, el algoritmo 4.39 aplicado a cada uno de los factores, nos resuelve el problema es calcular el símbolo de Legendre de x respecto de p y de q (que en este caso es el mismo que el Símbolo de Jacobi) por lo que podemos responder Falso si alguno de estos símbolos es -1 y Verdadero si valen 1. □

Si se desconoce la factorización de N, no se conoce a día de hoy ningún algoritmo eficiente para resolver el problema QR aparte del de intentar adivinar la respuesta, lo cual en nuestro caso se podría hacer con probabilidad $1/2$.

Un problema asociado al de saber si un número es un residuo cuadrático es el de encontrar efectivamente una raíz cuadrada de dicho número. En el caso de que el módulo sobre el que trabajemos sea primo, este problema se puede resolver de forma polinómica mediante el siguiente algoritmo:

Algoritmo 4.42 (Tonelli)**.** Sea p un primo impar y a un entero tal que $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$. Este algoritmo nos devuelve una raíz cuadrada de a módulo p.

1. Si $p \equiv 3 \bmod 4$ devolver $a^{(p+1)/4} \bmod p$.
2. Si $p \equiv 1 \bmod 4$ realizar los siguientes pasos:
   a) Encontrar $h \in \mathbb{Z}_p^*$ que no sea un residuo cuadrático módulo p. (Esto debe ser sencillo porque la mitad de los valores no lo son).
   b) Calcular $s \geqslant 0$ y t impar tales que $p-1 = 2^s t$.
   c) Calcular $A := a^t \bmod p$ y $H := h^t \bmod p$. Asignar $\nu := 0$.
   d) Para cada i desde 1 hasta $s-1$ comprobar si $(AH^\nu)^{2^{s-1-i}} \equiv -1 \bmod p$ y en caso positivo hacer $\nu := \nu + 2^i$.
   e) Devolver $a^{(t+1)/2} H^{\nu/2} \bmod p$.

Demostración. Ver [16, Proposition 2.16]. □

En este algoritmo se calculan varias potencias modulares, eso se puede hacer de forma polinómica mediante el algoritmo de exponenciación modular para el cual existen distintas alternativas, ver [16, Section 2.7.2].

Utilizando el Algoritmo de Tonelli podemos resolver el problema de calcular la raíz cuadrada modular en el caso primo, y si conocemos la factorización de $N = pq$, podemos combinar las raíces cuadradas modulares para obtener una raíz cuadrada módulo N tal y como vimos en la Proposición 4.33.

Sin embargo, conocer un método para calcular raíces cuadradas modulares es un problema equivalente a la factorización a partir de un teorema debido a Rabin y que esencialmente nos dice lo siguiente: Supongamos que disponemos de un método para calcular raíces cuadradas modulares en $\mathbb{Z}_N$ con $N = pq$ producto de dos primos impares. Entonces elegimos aleatoriamente elementos $x \in \mathbb{Z}_N$ y los elevamos al cuadrado. Al resultado le aplicamos nuestro oráculo y obtenemos una raíz cuadrada y tal que $x^2 \equiv y^2 \bmod N$. Esta es precisamente la relación que nos proporcionaba la factorización de N utilizando las bases de factores, así que podemos proceder del mismo modo y factorizar N con $\mathrm{mcd}(x-y, N)$. Como el oráculo lo podemos utilizar múltiples veces, si obtenemos valores para los cuales $\mathrm{mcd}(x-y, N) = 1$, podemos calcular nuevos candidatos hasta que obtengamos la factorización.

4.4 EL PROBLEMA DEL LOGARITMO DISCRETO

El problema del logaritmo discreto vamos a considerarlo en dos versiones diferentes a lo largo de esta memoria. La primera versión es en un grupo cualquiera:

Nombre:	Problema DL (*Discrete Logarithm*).
Parámetros:	Un grupo cíclico G de orden q primo,
	donde se supone difícil el problema del logaritmo discreto,
	un generador g, $G = \langle g \rangle$,
	y un elemento $y \in G$.
Pregunta:	¿Conoce P el entero $s \in \mathbb{Z}_q$ tal que
	$g^s = y$, o equivalentemente, $\log_g y = s$?

El grupo multiplicativo de los anillos de restos módulo p para p primo, es decir, $\mathbb{Z}_p^*$ es un conocido grupo cíclico que se usa frecuentemente:

Nombre:	Problema DL (*Discrete Logarithm*).
Parámetros:	Un número primo p
	un generador g de $\mathbb{Z}_p^*$,
	y un elemento $y \in \mathbb{Z}_p^*$.
Pregunta:	¿Conoce P el entero s tal que
	$g^s = y$, o equivalentemente, $\log_g y = s$?

La realidad es que la estructura del grupo G es importante en los métodos que se pueden aplicar para la resolución del problema. En la segunda versión del algoritmo podemos hacer uso no solo de la estructura multiplicativa del anillo $\mathbb{Z}_p$ sino también de la estructura de anillo, lo cual hace que existan algoritmos más efectivos, concretamente existe un algoritmo denominado Index Calculus que utilizando una técnica parecida a la de las bases de factores, permite resolver el problema en tiempo subexponencial.

Sin embargo, en grupos sin esa estructura adicional tendríamos que recurrir a algoritmos menos efectivos, como por ejemplo el algoritmo Baby-Step Giant-Step que tiene una complejidad exponencial del orden de la razíz cuadrada de n con algunos factores adicionales logarítmicos.

A la vista de esta situación, en el caso de utilizar grupos del tipo $\mathbb{Z}_p^*$ será necesario aumentar el tamaño del grupo para evitar el efecto de los algoritmos como el Idex Calculus.

Parte I

PRUEBAS DE CONOCIMIENTO CERO

5 PRUEBAS DE CONOCIMIENTO CERO

Las pruebas de conocimiento cero, con siglas ZKP del inglés *Zero-Knowledge Proofs*, permiten demostrar la veracidad de una declaración, sin revelar nada más de ella. En las ZKP intervienen dos partes, el *Prover* y el *Verifier*, o Probador y Verificador. El Probador asegura que una declaración es cierta, y el Verificador quiere convencerse de ello a través de una interacción con el Probador, de modo que al final de la misma, o bien acaba convencido de que la declaración es cierta, o bien descubre, con una alta probabilidad, que el Probador mentía.

Las pruebas de conocimiento cero surgen a partir de los sistemas de pruebas interactivas, que forman una parte importante de la teoría de complejidad computacional, a las que añadiendo la propiedad de *conocimiento cero* obtenemos el subconjunto de sistemas interactivos que conforman las pruebas de conocimiento cero.

Las referencias utilizadas para este capítulo se pueden encontrar en [2, 9, 13, 15, 17, 20, 21].

5.1 SISTEMAS DE PRUEBAS INTERACTIVAS

Un *sistema de prueba interactivo* es un concepto perteneciente a la teoría computacional, que modela el intercambio de un número finito de mensajes entre dos partes, el probador P y el verificador V, con el objetivo de que P demuestre a V que una instancia de un cierto problema de decisión es $\mathtt{Verdadera}$. V es una máquina con una capacidad de cómputo limitada, a lo sumo probabilístico de tiempo de polinomial. P es computacionalmente *todopoderoso*. Al final del intercambio de mensajes, o bien V acepta que la instancia es $\mathtt{Verdadera}$, o bien la rechaza por ser $\mathtt{Falsa}$.

Definición 5.1. Se dice que un problema de decisión Q, no necesariamente en **NP**, tiene un *sistema de prueba interactivo* si tiene un protocolo de interacción polinomialmente acotado en número de mensajes que cumple:

- *Completitud* Para toda instancia q $\mathtt{Verdadera}$, del problema Q, V acepta q como $\mathtt{Verdadera}$.
- *Robustez* Para cada instancia q $\mathtt{Falsa}$, V rechaza la prueba de q con una probabilidad no menor que $\epsilon = 1 - n^{-c}$, para cualquier constante $c > 0$ y donde n es el tamaño de la instancia.

En resumen, si la instancia del problema Q que P quiere demostrar es $\mathtt{Verdadera}$, el protocolo siempre funciona, no hay falsos negativos, pero si la instancia es $\mathtt{Falsa}$, hay una pequeña probabilidad de que V la acepte como $\mathtt{Verdadera}$, pueden haber falsos positivos una probabilidad casi despreciable.

Un P o un V que no siguen el protocolo e intentan romper estas propiedades, los llamaremos un P^* o V^* *tramposos*.

Definición 5.2. Denominamos clase de problemas **IP** (Interactivos en tiempo Polinomial) al conjunto de problemas de decisión para los que existe un sistema de prueba interactivo.

Proposición 5.3. *NP* $\subset$ ***IP***.

Demostración. Sea Q un problema **NP**. Definimos el siguiente protocolo:

1. P resuelve la instancia del problema gracias a su capacidad de cómputo ilimitada y genera el certificado para V, que existe para cualquier instancia $\mathtt{Verdadera}$ por $Q \in \mathbf{NP}$ (2.11).

2. V recibe y puede verificar el certificado en tiempo polinomial. Si es válido, V acepta como $\mathtt{Verdadera}$ la instancia. Si no, rechaza la prueba.

El protocolo es completo y robusto, con probabilidad nula de falso positivo, pues si la instancia es $\mathtt{Falsa}$, ningún P puede generar un certificado que no existe.

□

5.1.1 *Prueba Interactiva para el Problema QR*

Vamos a ver una prueba interactiva para demostrar que un entero x con Símbolo de Jacobi 1 respecto a n, $x \in \mathbb{Z}_n^Q$, es un residuo cuadrático, $x \in \mathbb{Z}_n^{Q+}$.

Nombre:	Problema QR.
Parámetros:	Un entero compuesto impar N, y el entero $x \in \mathbb{Z}_N^Q$.
Pregunta:	¿Es x un residuo cuadrático, $x \in \mathbb{Z}_N^{Q+}$?

Una instancia $\mathtt{Verdadera}$ del problema es un x residuo cuadrático módulo N. Una prueba interactiva para demostrar que x es residuo cuadrático es la siguiente:

Algoritmo 5.4 (Prueba interactiva para QR)**.**
Datos comunes: Una instancia (x, N) del Problema QR. n es el tamaño de la instancia.
Protocolo: Sea $t(n)$ un polinomio en n. P y V repiten $t(n)$ veces los siguientes pasos.

1. $P \to V: \quad u \in_R \mathbb{Z}_N^{Q+}$ (P elige aleatoriamente u en $\mathbb{Z}_N^{Q+}$).

2. $V \to P: \quad b \in_R \{0, 1\}$.

3. $P \to V$: w, una raíz cuadrada módulo N aleatoria, de x si $b = 0$, o bien de $x \cdot u$ si $b = 1$.

4. V comprueba si:

$$w^2 \overset{?}{\equiv} \begin{cases} u \bmod N, & \text{si } b = 0 \\ xu \bmod N, & \text{si } b = 1. \end{cases}$$

   Si la comparación falla, V termina en rechazo. En caso contrario, vuelve al paso 1.

Tras $t(n)$ rondas, V termina y acepta la instancia como $\mathtt{Verdadera}$, x es un residuo cuadrático módulo N.

Teorema 5.5. *El problema QR tiene un sistema de prueba interactiva.*

Demostración. El protocolo 5.4 se ejecuta $t(n)$ veces, un número de iteraciones polinomialmente asociado al tamaño n de la entrada, por lo que hay un número finito de mensajes que V, computacionalmente limitado, puede llevar a cabo.

Queda ver que el protocolo anterior es completo y robusto.

La prueba es *completa*, pues para cualquier instancia $\mathtt{Verdadera}$ de QR, $x \in \mathbb{Z}_N^{Q+}$, V acepta la prueba de P. En cada iteración, como P es computacionalmente todopoderoso, puede calcular w, una raíz cuadrada módulo N de x o xu, según el valor de b, ambos en $\mathbb{Z}_N^{Q+}$.

Para una instancia $\mathtt{Falsa}$, $x \in \mathbb{Z}_N^{Q-}$, cuando V envíe $b = 1$, si P sigue el protocolo u será un residuo cuadrático, pero $x \cdot u$ es un no-residuo cuadrático módulo N, por lo que no podrá calcular w por mucho poder computacional ilimitado que tenga. Un P tramposo podría intentar engañar a V en el caso $b = 1$ eligiendo u tal que xu es un residuo cuadrático, pero entonces u es un no-residuo cuadrático y fallaría la prueba si $b = 0$.

Una vez P se compromete con un u, residuo cuadrático o no, la probabilidad de que V lo rechace en esa iteración es $1/2$, según elija $b = 0$ ó 1. Como el protocolo se ejecuta $t(n)$ veces, la probabilidad de que un P tramposo pueda engañara V en todos es de $2^{-t(n)}$. Vemos entonces que el protocolo cumple la propiedad de *robustez*. □

5.2 PRUEBAS DE CONOCIMIENTO CERO

Entre las pruebas interactivas existe un subconjunto que llamamos de *conocimiento cero* si durante el protocolo no se puede inferir información de P, aparte de la veracidad de la instancia. En particular, aún tras realizar la prueba, y estar V convencido, éste no podría repetirla a otro verificador tomando el lugar de P.

Antes de ver una definición más formal de una prueba de conocimiento cero, necesitamos algunas definiciones previas.

Definición 5.6. Llamamos *Vista* a la transcripción de los mensajes intercambiados entre P y V durante la ejecución de una prueba interactiva.

Pensemos en un protocolo con 3 mensajes por iteración. En la i-ésima ronda, P envía a V el valor A_i como *compromiso*, V responde con el *reto* aleatorio B_i, y P termina enviando la *prueba* C_i. La tupla (A_i, B_i, C_i) son variables aleatorias de los posibles valores que se pueden intercambiar en una iteración. La Vista de la prueba interactiva sería la secuencia de los $t(n)$ mensajes intercambiados entre P y V:

$$(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, \ldots, A_{t(n)}, B_{t(n)}, C_{t(n)})$$

Una Vista sólo es de interés para una instancia $\mathtt{Verdadera}$, donde P realmente conoce si es $\mathtt{Verdadera}$. Para una instancia cuya prueba falla, o bien es una instancia $\mathtt{Falsa}$ o P no puede probarla, por ser tramposo.

Definición 5.7. Llamamos ensamble probabilístico (*ensemble* en inglés) a una familia de variables aleatorias $\{X_i\}_{i \in I}$, con I numerable.

Podemos estudiar entonces una Vista como un ensamble probabilístico. Dos Vistas serán iguales cuando las distribuciones de sus variables aleatorias sean idénticas.

Cuando tratamos con V^*, un verificador tramposo, éste podría no generar los retos B_i anteriores de manera independiente, podría incluso utilizar información previa de otras Vistas para generar los B_i en un intento de obtener información extra de P. A esta información previa la llamaremos h (historial).

Para una instancia q y un verificador cualquiera V^*, escribimos la Vista de una prueba interactiva como:

$$\mathtt{Vista}_{P,V^*}(q, h) = (q, h, A_1, B_1, C_1, \ldots, A_{t(n)}, B_{t(n)}, C_{t(n)}).$$

El verificador tramposo V^* generará los retos B_i con un algoritmo probabilístico de tiempo polinomial F tal que

$$B_i = F(q, h, A_1, B_1, C_1, \ldots, A_{i-1}, B_{i-1}, C_{i-1}, A_i).$$

Para un verificador honesto, F se puede considerar como un generador de números aleatorios que no utiliza ninguno de los parámetros de entrada.

Definición 5.8. Un Simulador $S_{V^*}(q, h)$ es un algoritmo probabilístico de tiempo polinomial, que utiliza toda la información que V^* tiene disponible (el historial h y la función F), para generar una transcripción de una prueba interactiva, para una instancia q del problema Q, sin necesidad de interactuar con P.

Un Simulador se puede ver como un generador de ensambles probabilísticos, la Vista de una prueba. La diferencia es que una transcripción de la Vista se genera a partir de dos máquinas, P y V, a diferencia del Simulador, que se ejecuta en una única máquina.

Podemos describir, por fin, la tercera propiedad de las pruebas de conocimiento cero, que acompaña a la *completitud* y la *robustez*.

Definición 5.9 (Propiedad de conocimiento cero)**.** Un sistema de prueba interactiva (completo y robusto), para un problema de decisión Q, es de *conocimiento cero* si el ensamble $\mathtt{Vista}_{P,V}(q,h)$ es idéntico al ensamble generado por un Simulador $S_{V^*}(q,h)$, para cualquier instancia $\mathtt{Verdadera}$ $q \in Q$ y cualquier historial h.

A las pruebas de conocimiento cero que cumplen la definición anterior también se les llama de *conocimiento cero perfectas*, y veremos en futuras secciones otras definiciones menos restrictivas.

De manera informal, el hecho de existir un simulador de conversaciones entre P y V que es idéntico a las interacciones reales, y que puede ejecutar cualquier máquina limitada computacionalmente, significa que de las transcripciones reales podemos sacar la misma información que ejecutando nosotros el simulador, y por tanto no aprenderíamos nada nuevo de ellas.

5.2.1 *Prueba de conocimiento cero para el problema QR*

Ahora podemos volver al problema QR, que ya vimos en el Teorema 5.5 y cuya prueba interactiva cumplía *completitud* y *robustez*.

Teorema 5.10. *La prueba interactiva (5.4) del problema QR es de conocimiento cero.*

Demostración. Sea (x, N) una instancia $\mathtt{Verdadera}$ del problema QR, $\exists y \in \mathbb{Z}_N$ tal que $y^2 \equiv x \bmod N$. En la i-ésima ronda tenemos las siguientes variables aleatorias:

1. U_i, un residuo cuadrático aleatorio enviado por P en el primer mensaje, $u \in_R \mathbb{Z}_N^{Q+}$.
2. B_i, un bit aleatorio generado por V, $b \in_R \{0, 1\}$.
3. W_i, una *prueba* de P, $w \in_R \Omega_u$ o bien $w \in_R \Omega_{xu}$, según el valor de B_i, es decir, una raíz cuadrada aleatoria módulo N de u ó xu, donde Ω_u y Ω_{xu} son el conjunto de raíces cuadradas módulo N de u y xu, respectivamente.

La Vista de una prueba para un verificador V^* cualquiera es:

$$\mathtt{Vista}_{P,V^*}(x,N,h) = (x,\ N,\ h,\ U_1,\ B_1,\ W_1, \ldots,\ U_{t(n)},\ B_{t(n)},\ W_{t(n)}).$$

Para un V honesto, todos los B_i son variables aleatorias independientes, uniformes en $\{0,1\}$. Para un V tramposo, la función F, probabilística en tiempo polinomial, genera los valores $b_{i+1} = F(x,N,h,v_i,u_{i+1})$, cuando $V_i = v_i$. Unimos el estudio de ambos casos suponiendo, para un V honesto, F como un generador de bits aleatorio, un lanzamiento de moneda.

Ahora que tenemos toda la información accesible a V^* podemos construir un Simulador:

Simulador para el problema QR $S_{V^*}(x, N, h)$.

Datos: (x, N), una instancia $\mathtt{Verdadera}$ del problema QR; h, transcripciones de ejecuciones previas del protocolo; v_i, transcripción de la interacción actual (i rondas).
Ejecución: Repetir para $i + 1 \leqslant t(n)$:

1. Elegir $b_{i+1} \in_R \{0, 1\}$
2. Elegir $w_{i+1} \in_R \mathbb{Z}_N^*$
3. **Si** $b_{i+1} = 0$, **entonces** calcular $u_{i+1} \equiv w_{i+1}^2 \bmod N$
   Si no, $u_{i+1} \equiv w_{i+1}^2 \cdot x^{-1} \bmod N$
4. **Si** $b_{i+1} = F(x, N, h, v_i, u_{i+1})$, **entonces** añadir la tupla $(u_{i+1}, b_{i+1}, w_{i+1})$ a la transcripción.
   Si no, volver al paso 1.
5. $i = i + 1$

El Simulador se diferencia del protocolo 5.4 en que, en vez de elegir primero un residuo cuadrático u_{i+1}, elige los valores b_{i+1} y w_{i+1} aleatoriamente, y a partir de ellos calcula u_{i+1}. Entonces, una vez tiene el u_{i+1} necesario para la función F, calcula el bit que V^* hubiera enviado en una interacción real, y comprueba si es el mismo bit b_{i+1} elegido. Aquí es donde vemos que el Simulador es un algoritmo probabilístico en tiempo del tipo Las Vegas (si obtenemos la tupla $i + 1$, será una tupla correcta). La probabilidad de que el bit b_{i+1} sea igual que el obtenido de F es de $1/2$. En promedio, el Simulador necesitará dos rondas por cada tupla $(u_{i+1}, b_{i+1}, w_{i+1},)$, por lo que el tiempo de ejecución esperado es polinomial.

Tenemos una prueba interactiva (5.4) que genera las vistas:

$$\mathtt{Vista}_{P,V^*}(x, N, h) = (x, N, h, U_1, B_1, W_1, \ldots, U_{t(n)}, B_{t(n)}, W_{t(n)}),$$

y un Simulador que genera las transcripciones:

$$S_{V^*}(x, N, h) = (x, N, h, U_1^{'}, B_1^{'}, W_1^{'}, \ldots, U_{t(n)}^{'}, B_{t(n)}^{'}, W_{t(n)}^{'}).$$

Para terminar la demostración, veamos por inducción en i que son iguales, es decir, cumplen la propiedad de *conocimiento cero*.
Para el caso $i = 0$ ambos ensambles son constantes, $(x, N, h) = (x, N, h)$, tenemos la misma instancia e historial.
Suponemos cierto el caso $i - 1$, es decir, el ensamble de la Vista:

$$\mathtt{Vista}_{P,V^*}(x, N, h) = (x, N, h, U_1, B_1, W_1, \ldots, U_{i-1}, B_{i-1}, W_{i-1}),$$

es igual al del Simulador:

$$S_{V^*}(x, N, h) = (x, N, h, U_1^{'}, B_1^{'}, W_1^{'}, \ldots, U_{i-1}^{'}, B_{i-1}^{'}, W_{i-1}^{'}).$$

Siguiendo el protocolo de la prueba interactiva, se generará la siguiente tupla de la Vista, (U_i, B_i, W_i). La variable U_i se elige al inicio aleatoriamente, por lo que es independiente. La v.a. B_i se calcula con F, por lo que depende de U_i, V_{i-1} y h. W_i depende de ambos. La probabilidad de la tupla nos queda:

$$P(U_i = u, B_i = b, W_i = w) =$$

$$P(U_i = u) \cdot P(B_i = b \mid V_{i-1} = v, U_i = u, h) \cdot P(W_i = w \mid U_i = u, B_i = b)$$

Sea $\alpha =\mid \mathbb{Z}_N^{Q+} \mid$, entonces $P(U_i = u) = \frac{1}{\alpha}$.

Denotamos $P(B_i = b \mid V_{i-1} = v, U_i = u, h) = p_b$, que dependerá de la F utilizada.

Por último, sea $\beta =\mid \Omega_u \mid=\mid \Omega_{xu} \mid$. Entonces:

$$P(W_i = w \mid U_i = u, B_i = 0) = \frac{1}{\beta}, \ \forall w \in \Omega_u$$

$$P(W_i = w \mid U_i = u, B_i = 1) = \frac{1}{\beta}, \ \forall w \in \Omega_{xu}$$

En total nos queda, $P(U_i = u, B_i = b, W_i = w) = \dfrac{p_b}{\alpha\beta}$.

Ahora veamos la tupla generada por el Simulador, $(U_i^{'}, B_i^{'}, W_i^{'})$. La v.a. $U_i^{'}$ se calcula a partir de $B_i^{'}$ y $W_i^{'}$. La variable $B_i^{'}$ depende de $U_i^{'}$, V_{i-1} y h por F en el paso 4. Y la v.a. $W_i^{'}$ se elige de manera uniforme en $\mathbb{Z}_N^*$.

La probabilidad de la tupla es:

$$P(U_i^{'} = u, B_i^{'} = b, W_i^{'} = w) =$$

$$P(W_i^{'} = w) \cdot P(B_i^{'} = b \mid V_{i-1} = v, U_i^{'} = u, h) \cdot P(U_i^{'} = u \mid W_i^{'} = w, B_i^{'} = b)$$

Sabemos que $\mid \mathbb{Z}_N^* \mid= \alpha \cdot \beta$, por lo que $P(W_i^{'} = w) = \frac{1}{\alpha\beta}$.

La probabilidad

$w \in \Omega_u \Leftrightarrow b = 0$
$w \in \Omega_{xu} \Leftrightarrow b = 1$
$W_i^{'}$, $B_i^{'}$ *indep.*

$$\begin{aligned}
P(U_i^{'} = u) &= P(U_i^{'} = u, W_i^{'} \in \Omega_u \cup \Omega_{xu}, B_i^{'} \in \{0,1\}) = \\
&= \sum_{w \in \Omega_u} P(U_i^{'} = u, W_i^{'} = w, B_i^{'} = 0) + \\
&+ \sum_{w \in \Omega_{xu}} P(U_i^{'} = u, W_i^{'} = w, B_i^{'} = 1) = \\
&= \sum_{w \in \Omega_u} P(W_i^{'} = w) P(B_i^{'} = 0) + \sum_{w \in \Omega_{xu}} P(W_i^{'} = w) P(B_i^{'} = 1) = \\
&= \beta \cdot \frac{1}{\alpha\beta} \cdot (P(B_i^{'} = 0) + P(B_i^{'} = 1)) = \\
&= \frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

indica que $U_i^{'}$ tiene la misma distribución que U_i, de modo que, al calcular $b_i = F(x, N, h, v_{i-1}, u_i)$, se tiene $P(B_i^{'} = b \mid V_{i-1} = v, U_i^{'} = u, h) = p_b$, es decir, $B_i^{'}$ tiene la misma distribución que B_i.

Por construcción, dados w y b en el simulador, u tiene un único valor posible, $u \equiv w^2 x^{-b} \bmod N$, por tanto, la probabilidad de que dada la tupla (u, b, w), $U_i^{'}$ tenga el valor u condicionado a que $B_i^{'} = b$ y que $W_i^{'} = w$, es 1:

$$P(U_i^{'} = u \mid W_i^{'} = w, B_i^{'} = b) = 1$$

En total, tenemos que $P(U_i^{'} = u, B_i^{'} = b, W_i^{'} = w) = \dfrac{p_b}{\alpha\beta}$.

Terminamos así la inducción en i y los ensambles de la Vista y el Simulador son idénticos.

Concluimos que la prueba interactiva 5.4 del problema QR es perfecta de conocimiento cero.

□

5.2.2 *Prueba de conocimiento cero para el problema de isomorfismo de grafos*

Otro problema de decisión del que podemos dar una prueba interactiva de conocimiento cero es el de determinar si dos grafos dados son isomorfo:

Nombre:	Problema GI (*Graph Isomorphism*).
Parámetros:	Dos grafos $G_0 = (V_0, E_0)$ y $G_1 = (V_1, E_1)$, del mismo orden $\mid V_0 \mid = \mid V_1 \mid = n$.
Pregunta:	¿Existe un isomorfismo $\pi : V_0 \to V_1$ tal que una arista $(u, v) \in E_0$ si y solo si $(\pi(u), \pi(v)) \in E_1$?

Teorema 5.11. *El problema GI tiene una prueba de conocimiento cero.*

Demostración.

Primero debemos dar un protocolo interactivo entre un P y un V que cumpla completitud y robustez. Después daremos un Simulador para demostrar la propiedad de conocimiento cero.

Algoritmo 5.12 (Prueba interactiva para GI)**.**

Datos comunes: Una instancia $(G_0 = (V_0, E_0), G_1 = (V_1, E_1))$ del Problema GI. $\mid V_0 \mid = \mid V_1 \mid = n$ es el tamaño de la instancia.

Protocolo: P calcula el isomorfismo τ entre G_1 y G_0, es decir, $\tau(G_1) = G_0$.

Sea $t(n)$ un polinomio en n. P y V repiten $t(n)$ veces los siguientes pasos.

1. $P \to V$: $h = \pi(G_0)$, donde $\pi \in_R Sym(V_0)$.
2. $V \to P$: $b \in_R \{0, 1\}$.

3. $P \rightarrow V: \ \omega,$ tal que

$$\omega = \begin{cases} \pi & \text{si } b = 0 \\ \pi \circ \tau & \text{si } b = 1. \end{cases}$$

4. V comprueba si:

$$h \stackrel{?}{=} \begin{cases} \omega(G_0) & \text{si } b = 0 \\ \omega(G_1) & \text{si } b = 1, \end{cases}$$

es decir, si h es isomorfo a G_b por ω.

Si la comparación falla, V termina en rechazo. En caso contrario, vuelve al paso 1.

Tras $t(n)$ rondas, V termina y acepta la instancia como $\mathtt{Verdadera}$, G_0 y G_1 son isomorfos.

Sea (G_0, G_1) una instancia $\mathtt{Verdadera}$. Sea cual sea el reto b, P siempre puede devolver el isomorfismo ω, pues G_0 y G_1 son ambos isomorfos a h. Tenemos que el protocolo es *completo*.

Si (G_0, G_1) es $\mathtt{Falsa}$, $G_0 \not\cong G_1$, un P tramposo deberá adivinar el reto b antes de calcular h, pues como éste debe ser un isomorfismo de G_0 ó G_1, no podrá serlo de ambos a la vez. La probabilidad de acertar el reto y mandar el isomorfismo correcto es de $1/2$ en cada ronda, por lo que la probabilidad de que un P tramposo engañe a V es de $2^{-t(n)}$. El protocolo es *robusto*.

Sea (G_0, G_1) una instancia $\mathtt{Verdadera}$ del problema GI. La Vista entre P y V es el ensamble

$$\mathtt{Vista}_{P,V^*}(G_0, G_1, h) = (G_0, G_1, h, H_1, B_1, \Phi_1, \ldots, H_{t(n)}, B_{t(n)}, \Phi_{t(n)}),$$

donde la variable aleatoria H_i representa el grafo isomorfo h_i de la i-ésima ronda, la v.a. B_i el reto b_i de V a P, y Φ_i es el isomorfismo que envía P como respuesta al final de la ronda. El historial de anteriores transcripciones se representa con h.

Como en el problema QR, V* podría utilizar un algoritmo probabilístico F, de tiempo polinomial, al calcular los retos b_i, para intentar obtener información de P. F utilizará toda la información accesible a V* en el momento de enviar el reto.

Construimos ahora el Simulador para la prueba interactiva:

Simulador para el problema GI $S_{V^*}(G_0, G_1, h)$.

Datos: (G_0, G_1), una instancia $\mathtt{Verdadera}$ del problema GI; h, transcripciones de ejecuciones previas del protocolo; ν_i, transcripción de la interacción actual (i rondas).
Ejecución: Repetir para $i+1 \leqslant t(n)$:

1. Elegir $b_{i+1} \in_R \{0, 1\}$
2. Elegir $\pi_{i+1} \in_R \mathrm{Sym}(V_{b_{i+1}})$ y calcular $h_{i+1} = \pi_{i+1}(G_{b_{i+1}})$.
3. **Si** $b_{i+1} = F(G_0, G_1, h, \nu_i, h_{i+1})$, **entonces** añadir la tupla $(h_{i+1},\ b_{i+1},\ \pi_{i+1})$ a la transcripción.
   Si no, volver al paso 1.
4. $i = i+1$

La probabilidad de que el bit b_{i+1} elegido coincida con el de la función F es $1/2$, por lo que en promedio se necesitarán dos rondas por tupla. El Simulador es un algoritmo probabilístico que se ejecuta en un tiempo estimado polinomial.

Veamos ahora que el ensamble de la $\mathtt{Vista}_{P,V^*}(G_0, G_1, h)$, es igual al del Simulador, $S_{V^*}(G_0, G_1, h)$. Procedemos por inducción sobre i, el número de rondas.
Para $i = 0$, ambos ensambles son constantes,

$$\mathtt{Vista}_{P,V^*}(G_0, G_1, h) = S_{V^*}(G_0, G_1, h) = (G_0, G_1, h),$$

por lo que sus distribuciones de probabilidad son idénticas y los ensambles coinciden.
Suponemos cierto para $i-1$ rondas, $P(\mathtt{Vista}_{P,V^*} = \nu_{i-1}) = P(S_{V^*} = \nu_{i-1})$.
Siguiendo el protocolo, se generarán las v.a. (H_i, B_i, Φ_i) para la i-ésima ronda. Utilizando el Teorema de la probabilidad compuesta, y observando la dependencia de las variables durante la ejecución del protocolo, calculamos:

$$P(H_i = h, B_i = b, \Phi_i = \pi) =$$
$$P(\Phi_i = \pi) \cdot P(B_i = b \mid \Phi_i = \pi) \cdot P(H_i = h \mid \Phi_i = \pi, B_i = b)$$

El isomorfismo π se elige aleatoriamente entre todas las posibles permutaciones de V_0, como $\mid \mathrm{Sym}(V_0) \mid = n!$, $P(\Phi_i = \pi) = \frac{1}{n!}$.
La variable aleatoria B_i se calcula con la función F, $B_i = F(h, V_i, H_i)$, por lo que asignamos la probabilidad $P(B_i = b \mid \Phi_i = \pi) = p_b$ dependiente de la F que use V.
Por último $P(H_i = h \mid \Phi_i = \pi, B_i = b) = 1$ por construcción del grafo h por el isomorfismo π, independiente del valor de B_i.
Nos queda en total que $P(H_i = h, B_i = b, \Phi_i = \pi) = \frac{p_b}{n!}$.

Ahora consideramos la tupla de v.a. $(H_i^{'}, B_i^{'}, \Phi_i^{'})$ del Simulador.

La variable $\Phi_i^{'}$ se elige aleatoriamente entre $Sym(V_0)$ o $Sym(V_1)$, ambos de mismo orden pues $| V_0 |=| V_1 |= n$, por lo que $| Sym(V_0) | = | Sym(V_1) | = n!$, luego obtenemos $P(\Phi_i^{'} = \pi) = \frac{1}{n!}$.

Como en la Vista, el Simulador utiliza F para calcular el valor b de $B_i^{'}$, así que $P(B_i^{'} = b \mid \Phi_i^{'} = \pi) = p_b$.

Finalmente, h viene determinado por π, de modo que $P(H_i^{'} = h \mid \Phi_i^{'} = \pi, B_i^{'} = b) = 1$.

La probabilidad del Simulador nos queda $P(H_i^{'} = h, B_i^{'} = b, \Phi_i^{'} = \pi) = \frac{p_b}{n!}$, igual que la del ensamble de la Vista.

Concluimos que se cumple la propiedad de *conocimiento cero* y el problema GI tiene una prueba interactiva de conocimiento cero perfecta.

□

5.2.3 *Prueba de conocimiento cero para el problema del logaritmo discreto*

Vamos a expresar el problema del logaritmo discreto como una prueba de conocimiento de la potencia s, donde podamos mantener dicha información en secreto y que no se revele durante la interacción:

Nombre:	Problema DL (*Discrete Logarithm*).
Parámetros:	Un grupo cíclico G de orden q primo,
	donde se supone difícil el problema del logaritmo discreto,
	un generador g, $G = \langle g \rangle$,
	y un elemento $y \in G$.
Pregunta:	¿Conoce P el entero $s \in \mathbb{Z}_q$ tal que
	$g^s = y$, o equivalentemente, $\log_g y = s$?

Teorema 5.13. *El problema DL tiene una prueba de conocimiento cero.*

Demostración.

Primero veremos un protocolo interactivo entre P y V para probar el conocimiento de s, y entonces comprobaremos las tres propiedades necesarias, completitud, robustez y conocimiento cero.

Algoritmo 5.14 (Prueba interactiva para DL).

Datos comunes: Una instancia (G, q, g, y) del Problema DL. $n = ord(g) = q$ es el tamaño del problema.

Protocolo: Sea $t(n)$ un polinomio en n. P y V repiten $t(n)$ veces los siguientes pasos.

1. P elige aleatoriamente $u \in_R \mathbb{Z}_q^*$.
2. $P \to V: \quad a = g^u$.

3. $V \to P: \quad b \in_R \{0, 1\}$.
4. $P \to V: \quad w = (u + sb) \bmod q$.
5. V comprueba si:

$$g^w \stackrel{?}{=} \begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ a \cdot y & \text{si } b = 1. \end{cases}$$

   Si la comparación falla, V termina en rechazo. En caso contrario, vuelve al paso 1.

Tras $t(n)$ rondas, V termina y acepta la instancia como $\mathtt{Verdadera}$, P conoce el logaritmo discreto de $y \in G = \langle g \rangle$.

Nótese que por el propio enunciado del problema, P no ha necesitado de su potencia ilimitada de cálculo.

El protocolo es *completo*, pues si P conoce s, siempre puede calcular un w que pase la comprobación de V en el paso 5.

Es también *robusto*, pues suponiendo un grupo G donde un P tramposo, una máquina limitada a cálculos en tiempo polinomial, no puede calcular fácilmente el secreto s, este P tramposo deberá intentar adivinar el reto b.
Si P^* supone que el reto $b = 0$, seguirá el protocolo, mandando $w = u$, pero fallaría si V manda $b = 1$, al no poder calcular el s.
Si P^* quiere superar un reto $b = 1$, puede elegir u como en el paso 1, enviar $a = g^u \cdot y - 1$, y contestar al reto con $w = u$. Si se equivoca y V envía $b = 0$, necesitaría s para poder enviar el w correcto y fallaría la prueba.
La probabilidad de acertar el reto b es de $1/2$, de modo que la probabilidad de pasar la prueba interactiva con una instancia $\mathtt{Falsa}$ es de $2^{-t(n)}$. Se cumple la propiedad de *robustez*.

Nos queda comprobar la propiedad de *conocimiento cero*.
Como en casos anteriores, suponemos un algoritmo probabilístico polinomial F que utiliza V^* para enviar los retos. Si V fuera honesto, F es un generador de números aleatorios con una distribución uniforme.

Simulador para el problema DL $S_{V^*}(G, q, g, y, h)$.

Datos: (G, q, g, y), una instancia $\mathtt{Verdadera}$ del problema DL; h, transcripciones de ejecuciones previas del protocolo; v_i, transcripción de la interacción actual (i rondas).
Ejecución: Repetir para $i + 1 \leqslant t(n)$:

1. Elegir $b_{i+1} \in_R \{0, 1\}$

2. Elegir $w_{i+1} \in_R \mathbb{Z}_q^*$.
3. **Si** $b_{i+1} = 0$, **entonces** calcular $\quad a_{i+1} = g^w$
   Si no, $\quad a_{i+1} = g^w y^{-1} = g^{w-s}$
4. **Si** $b_{i+1} = F(G, q, g, y, h, v_i, a_{i+1})$, **entonces** añadir la tupla $(a_{i+1}, b_{i+1}, w_{i+1})$ a la transcripción.
   Si no, volver al paso 1.
5. $i = i + 1$

Por la elección aleatoria de b_{i+1} y w_{i+1} el Simulador es un algoritmo probabilístico, y el tiempo de ejecución estimado es de dos iteraciones por ronda simulada, pues la probabilidad de que el b_{i+1} elegido coincida con el indicado por F es de $1/2$.

Por inducción sobre i, el número de rondas realizadas, veamos que los ensambles Vista_{P,V^*} y S_{V^*} son iguales:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vista}_{P,V^*} =& (G, q, g, y, h, A_1, B_1, W_1, \dots, A_i, B_i, W_i)\\ S_{V^*} =& (G, q, g, y, h, A_1', B_1', W_1', \dots, A_i', B_i', W_i'),\end{aligned}$$

donde las v.a. A_i, A_i' representan el testigo a_i de la i-ésima ronda, las v.a. B_i, B_i' el bit del reto, y W_i, W_i' la respuesta de P.

Para $i = 0$, los ensambles $\mathrm{Vista}_{P,V^*} = (G, q, g, y, h)$ y $S_{V^*} = (G, q, g, y, h)$ son constantes e iguales.

Suponemos cierto para $i - 1$.

La tupla de las v.a. para la ronda i en la Vista es: (A_i, B_i, W_i).

Su probabilidad se calcula como:

$$\begin{aligned}&P(A_i = a, B_i = b, W_i = w) =\\ &P(A_i = a) \cdot P(B_i = b \mid A_i = a) \cdot P(W_i = w \mid A_i = a, B_i = b)\end{aligned}$$

Por construcción, a depende de la elección de u, elegido de entre $q - 1$ posibles valores, $P(A_i = a) = 1/(q - 1)$.

V^* utiliza $F(G, q, g, y, a)$ para la elección de b, así que podemos escribir $P(B_i = b \mid A_i = a) = p_b$, dependiente de la F empleada.

Finalmente, en el protocolo w depende para su cálculo de a y b, así que la probabilidad dependiente de ambos valores dados, es 1.

Concluimos que $P(A_i = a, B_i = b, W_i = w) = \dfrac{p_b}{q-1}$.

Observando el orden en que se calculan los valores en el Simulador, la probabilidad de la i-ésima tupla del Simulador es:

$$\begin{aligned}&P(A_i' = a, B_i' = b, W_i' = w) =\\ &P(W_i' = w) \cdot P(B_i' = b \mid W_i' = w) \cdot P(A_i' = a \mid W_i' = w, B_i' = b)\end{aligned}$$

El valor de w_{i+1} se elige en $\mathbb{Z}_q^*$ independientemente de los demás. Así que $P(W_i' = w) = 1/(q-1)$.

Como antes, la elección del bit depende de F. $P(B_i' = b \mid W_i' = w) = p_b$.

Y siguiendo los pasos del Simulador, el valor de a queda unívocamente determinado dados w y b, así que $P(A_i' = a \mid W_i' = w, B_i' = b) = 1$.

Nos queda $P(A_i' = a, B_i' = b, W_i' = w) = \dfrac{p_b}{q-1}$, igual que la Vista, de modo que los ensambles son idénticos y queda demostrado el teorema.

□

otros tipos de pruebas de conocimiento cero La propiedad de *conocimiento cero perfecta* exige que exista un Simulador probabilístico de tiempo polinomial, cuyo ensamble sea idéntico al del protocolo. Esto limita la cantidad de pruebas de conocimiento cero conocidas, y por eso se definen pruebas con menos restricciones, que en la práctica pueden funcionar como las ZKP perfectas, y en ocasiones de forma más óptima.

5.3 pruebas de conocimiento cero de verificador honesto

En esta sección veremos un tipo de pruebas de conocimiento cero, utilizadas en la práctica, que derivan de las ZKP perfectas al añadir una condición al Verificador: que siempre cumpla el protocolo indicado.

En las pruebas de conocimiento cero perfectas que hemos visto, los simuladores estudiados consideraban la existencia de un algoritmo F que un Verificador tramposo, V^*, utilizaría para elegir los retos, en un intento de obtener más información de P. En este tipo de de pruebas V no dispondrá de F para elegir los retos.

Definición 5.15 (Propiedad de conocimiento cero con Verificador Honesto)**.**

Un sistema de prueba interactiva (completo y robusto), para un problema de decisión Q, es *perfecta de conocimiento cero con Verificador Honesto* si el ensamble $\mathtt{Vista}_{P,V}(q,h)$ es idéntico al ensamble generado por un Simulador $S_V(q,h)$, donde el Verificador V sigue los pasos del protocolo, para cualquier instancia $\mathtt{Verdadera}$ $q \in Q$ y cualquier historial h.

Veremos es este apartado una variación de la ZKP perfecta basada en el problema del Logaritmo Discreto (5.2.3), llamado *Protocolo de Identificación de Schnorr*.

Primero han de definirse parámetros comunes conocidos por P y V. Elegimos dos valores primos, p y q tal que $p \equiv 1 \bmod q$, es decir, $q \mid (p-1)$, y el problema del logaritmo discreto es difícil. Sea α un generador del subgrupo de orden q de $\mathbb{Z}_p^*$. Además debemos elegir un valor t que definirá la robustez del protocolo. En resumen tenemos:

- p primo.

- q primo divisor de $(p-1)$.
- $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ de orden q.
- t un *parámetro de seguridad*, tal que $2^t < q$. La robustez del protocolo, es decir, la probabilidad de que un P^* tramposo engañe a V, será de 2^{-t}.

El secreto de P será el valor a, tal que $0 \leqslant a \leqslant q-1$. La prueba consistirá en demostrar que P conoce dicho valor. P calcula entonces el valor $v = \alpha^{-a} \bmod p$. Éste valor se puede calcular como la inversa $(\alpha^a)^{-1} \bmod p$, o de manera más eficiente como $\alpha^{q-a} \bmod p$.

Tanto P como V conocerán los valores p, q, α, t y v.

Algoritmo 5.16 (Schnorr)**.**

Datos comunes: p, q, α, t y v.

Protocolo: Realizar una vez:

1. P elige aleatoriamente $k \in_R \mathbb{Z}_q$.
2. $P \to V:\quad \gamma = \alpha^k \bmod p$ (el *testigo*).
3. $V \to P:\quad r$ aleatorio, tal que $1 \leqslant r \leqslant 2^t < q$ (el *reto*).
4. $P \to V:\quad y = k + ar \bmod q$ (la *respuesta*).
5. V comprueba si $\gamma \overset{?}{\equiv} \alpha^y v^r \bmod p$

   Si la comparación falla, V termina en rechazo. En caso contrario, acepta la prueba.

Este algoritmo en particular se diseñó con el objetivo de minimizar la cantidad de mensajes intercambiados manteniendo una robustez que lo hiciera seguro. Como veremos, una sola interacción nos dará una probabilidad de 2^{-t} de que un atacante consiga engañar al Verificador.

Teorema 5.17. *El algoritmo de Schnorr 5.16 es una prueba interactiva.*

Demostración. Como sólo existe una ronda de 3 mensajes, el algoritmo es probabilístico de tiempo polinomial.

Veamos ahora la *completitud*. Veamos con las siguientes congruencias que que si P conoce a, siempre podrá responder correctamente al reto:

$$\alpha^y v^r \equiv \alpha^{k+ar} v^r \equiv \alpha^{k+ar} \alpha^{-ar} \equiv \alpha^k \equiv \gamma \bmod p$$

Por tanto, un P y V honestos finalizarán el protocolo en aceptación siempre, la prueba es *completa*.

Finalizamos con el análisis de la *robustez*. El *parámetro de seguridad* t define la dificultad de adivinar el reto de V. Si P^* adivinara el valor r aleatorio de V, podría superar la prueba eligiendo un valor y aleatorio y calculando

$\gamma = \alpha^y v^r \bmod p$, con lo que enviando primero el y y respondiendo al reto con γ pasaría la prueba. La probabilidad de adivinar correctamente un reto $1 \leqslant r \leqslant 2^t$ elegido aleatoriamente es de $\frac{1}{2^t}$.

Supongamos que P^* puede adivinar el reto de V con una probabilidad mayor a 2^{-t}, entonces P^* conocería para un valor γ de su elección, al menos dos respuestas posibles para dos retos distintos de V, es decir, si antes el P^* tramposo podía precalcular un testigo y una respuesta para un reto de V, ahora puede calcular, para el mismo testigo (pues solo puede enviar uno antes de recibir el reto), P^* conoce la respuesta de al menos dos retos.

Sea γ el testigo para el que P^* conoce los valores r_1, y_1 y r_2, y_2, un par de posibles retos y respuestas válidas, que cumplen

$$\gamma \equiv \alpha^{y_1} v^{r_1} \equiv \alpha^{y_2} v^{r_2} \bmod p$$

Se sigue que

$$\alpha^{y_1 - y_2} \equiv v^{r_2 - r_1} \bmod p$$

Como la *clave pública* v se calculaba como $v \equiv \alpha^{-a} \bmod p$, con a el secreto de P, podemos sustituir:

$$\alpha^{y_1 - y_2} \equiv \alpha^{-a(r_2 - r_1)} \bmod p$$

Como α tiene orden q, podemos trabajar con los exponentes como:

$$y_1 - y_2 \equiv a(r_1 - r_2) \bmod q$$

Por la condición sobre los retos $1 \leqslant r \leqslant 2^t < q$, sabemos que $0 <| r_2 - r_1 |< 2^t < q$, y como q es primo, $\mathrm{mcd}(r_2 - r_1, q) = 1$, de modo que existe el inverso $(r_1 - r_2)^{-1} \bmod q$, y el P^* puede calcular el secreto a como:

$$a = (y_1 - y_2)(r_1 - r_2)^{-1} \bmod q$$

A partir de este análisis, vemos que cualquiera que pueda superar la prueba frente a V con una probabilidad mayor a 2^{-t} puede calcular el secreto de P, y sería una instancia $\mathtt{Verdadera}$ del problema.

□

Después de ver la *completitud* y *robustez* del protocolo, tenemos una prueba interactiva, pero nos falta comprobar la propiedad de *conocimiento cero con verificador honesto*.

Teorema 5.18. *La prueba interactiva de Schnorr 5.16 es de conocimiento cero con verificador honesto.*

Demostración. Una transcripción o vista del protocolo es simplemente el ensamble probabilístico con una tupla:

$$\mathrm{Vista}_{P,V} = (\gamma, r, y)$$

Calculamos la probabilidad

$$P(\gamma = g, r = b, y = c) = P(\gamma = g)P(r = b \mid \gamma = a)P(y = c \mid \gamma = a, r = b)$$

P calcula γ a partir de un valor k aleatorio entre 0 y $q-1$, y elevando α, de orden q a dicho valor, de modo que la probabilidad de que γ tome el valor g es igual a la de elegir el k que genera a: $P(\gamma = g) = \frac{1}{q}$.

Bajo el supuesto de Verificador Honesto, $P(r = b \mid \gamma = g) = P(r = b) = \frac{1}{2^t}$, pues V seguirá el protocolo, eligiendo el reto aleatoriamente, sin usar la función F del apartado anterior.

Finalmente, $y = k + ar$ depende del k que genera $\gamma = g$, del secreto a de P y del reto $r = b$ de V. La probabilidad condicionada $P(y = c \mid \gamma = a, r = b) = 1$.

Tenemos que la probabilidad de obtener la Vista (γ, r, y) es de $\frac{1}{q \cdot 2^t}$.

Ahora definimos el Simulador de la prueba, con la restricción de Verificador Honesto:

Algoritmo 5.19.

Datos: p, q, α, t y ν.

Protocolo: Realizar una vez:

1. Elegir r aleatorio tal que $1 \leqslant r \leqslant 2^t$.
2. Elegir y aleatorio tal que $0 \leqslant y \leqslant q-1$.
3. Calcular $\gamma = \alpha^y \nu^r \bmod p$.

El ensamble del Simulador se puede escribir como el conjunto:

$$S_V = \{(\gamma', r', y') : 1 \leqslant r' \leqslant 2^t,\ 0 \leqslant y' \leqslant q-1,\ \gamma' \equiv \alpha^y \nu^r \bmod p\}$$

Como γ' depende totalmente de r' e y', $\mid S_V \mid= q \cdot 2^t$, es decir, $P(\gamma' = g, r' = b, y' = c) = \frac{1}{q \cdot 2^t}$, la misma que la de la Vista.

Tenemos, por tanto, que el protocolo de Schnorr es una Prueba de Conocimiento Cero con Verificador Honesto.

□

A día de hoy, para probar que Schnorr es de conocimiento cero perfecta, donde un Verificador utilizaría la función F que elige los retos no uniformemente entre 1 y 2^t, no se conoce ningún simulador que sea probabilístico en tiempo polinomial, condición indispensable para probar que es perfecta.

Aún así, Schnorr es utilizado ampliamente en la práctica, pues tampoco se conoce ningún ataque a partir de la elección de retos no aleatorios. Se puede demostrar que algunas variaciones del protocolo son pruebas de conocimiento cero perfectas, para ello hay que añadir ciertas condiciones, como reducir el espacio de retos, a cambio de incrementar las rondas para mantener el nivel de robustez. Con un bit por reto y t rondas, en la sección anterior demostramos que el protocolo era una ZKP perfecta, pero en la práctica es muy poco eficiente por la cantidad de mensajes intercambiados.

5.4 PRUEBAS DE CONOCIMIENTO CERO ESTADÍSTICAS

Se denominan así las pruebas interactivas con un Simulador que, en vez de tener ensamble idéntico a la Vista, convergen en n, el parámetro que define el tamaño del problema:

$$\lim_{n\to\infty} \mathtt{Vista}_{P,V^*}(q,h) = \lim_{n\to\infty} S_{V^*}(q,h)$$

para toda instancia $\mathtt{Verdadera}$ $q \in Q$, donde n es el tamaño de la instancia q, e historial h.

5.5 ESQUEMAS DE COMPROMISO

En las pruebas de conocimiento cero vistas hasta ahora, el primer mensaje del Probador consistía en un *compromiso* con el Verificador, al que llamamos *testigo*, de modo que en la respuesta al reto no pudiera engañarle, con cierta probabilidad.

Antes de introducir el último tipo de Pruebas de Conocimiento Cero de este capítulo, las Computacionales, debemos estudiar la existencia y propiedades de los llamados esquemas de compromiso, una herramienta que nos permite dar para todo problema **NPC** una Prueba de Conociemiento Cero Computacional, como muestra Manuel Blum en "How to Prove a Theorem So No One Else Can Claim It" [2].

Estos esquemas permiten esconder la estructura de una instancia $\mathtt{Verdadera}$, donde P se compromete con su *testigo* antes de conocer el *reto* de V, de modo que V no puede obtener información de estos testigos. En la última *respuesta* de P, se revelará una pequeña parte de la estructura de la instancia $\mathtt{Verdadera}$, de la cual V no podrá aprender tampoco nada.

Empecemos definiendo un esquema de compromiso para un bit:

Definición 5.20. Un esquema de compromiso de un *bit* es un par de funciones (f, ν) de tiempo polinomial. La función
$f : \{0, 1\} \times \Upsilon \to \chi$
transforma el bit $b \in \{0, 1\}$ con una clave aleatoria $y \in \Upsilon$. El valor $x = f(b, y)$ lo llamaremos *blob* o *testigo* de b. La función de verificación
$\nu : \chi \times \Upsilon \to \{0, 1, \bullet\}$
abre el blob revelando el bit b, o indicando que no es un par (blob,clave) válido.

El par (f, ν) debe cumplir la siguientes condiciones:

1. *Vinculación*: Para todo blob $x = f(b, y)$, P no es capaz de encontrar un valor $y' \neq y$ tal que el blob se puede abrir con otro valor, es decir, $\nu(x, y) \neq \nu(x, y')$.

2. *Secreto*: Los ensambles $\{f(0, \Upsilon)\}$ y $\{f(1, \Upsilon)\}$ son indistinguibles.

Podemos clasificar los esquemas de compromiso de bit en dos tipos:

Definición 5.21 (Vinculación incondicional)**.** Una máquina P con una capacidad computacional ilimitada (como en las pruebas interactivas) no puede cambiar el bit comprometido en el *testigo* enviado.

Definición 5.22 (Secreto incondicional)**.** Los ensambles $\{f(0, \Upsilon)\}$ y $\{f(1, \Upsilon)\}$ son idénticos. Es decir, dada una máquina V con capacidad computacional ilimitada, no es capaz de distinguir los ensambles con mayor probabilidad que eligiendo al azar el posible valor de b.

Proposición 5.23. *En un entorno donde tenemos dos interlocutores, P y V, que ven todo lo que el otro les envía, no existe ningún esquema de compromiso con vinculación y secreto incondicionales a la vez.*

Demostración. Supongamos que tenemos vinculación incondicional, P no puede encontrar un valor y' que abra x con un bit diferente. Entonces V podría distinguir a qué b corresponde el testigo x recibido, siendo un posible algoritmo probar todos los valores $y' \in \Upsilon$ hasta encontrar el que hace $\nu(x, y') \neq \bullet$. Aunque una máquina convencional podría tardar demasiado tiempo, estamos suponiendo que V puede ser computacionalmente ilimitado para el caso de secreto incondicional, y por tanto, no podemos tener ambas propiedades incondicionales a la vez. □

Sin embargo, se puede conseguir una condición menos restrictiva, pero equivalentes en la práctica:

Definición 5.24 (Vinculación computacional)**.** No existe ningún algoritmo probabilístico en tiempo polinomial que permita encontrar un y' tal que P puede cambiar el bit comprometido.

Definición 5.25 (Secreto computacional)**.** No existe ningún algoritmo probabilístico en tiempo polinomial que permita distinguir los ensambles probabilísticos $\{f(0, \Upsilon)\}$ y $\{f(1, \Upsilon)\}$. Se dice que los ensambles son *indistinguibles polinomialmente*.

Para conseguir vinculación y secreto incondicionales a la vez, han de utilizarse otras técnicas de comunicación, como canales con ruido o múltiples participantes [1, 6-9].

5.5.1 *Esquemas de compromiso con secreto incondicional*

En este apartado vamos a mostrar ejemplos de esquemas de compromiso de bit que consiguen secreto incondicional y vinculación computacional, basándose en los mismos problemas vistos para las pruebas de conocimiento perfectas: residuos cuadráticos, logaritmo discreto e isomorfismo de grafos.

El esquema basado en residuos cuadráticos lo inicia V, eligiendo el módulo $n = pq$ producto de dos primos, de modo que el problema QR módulo n es impracticable para P. V además elige un $t \in_R \mathbb{Z}_n^*$ para calcular el residuo $s = t^2 \bmod n$. El par (s, n) se hace público para que P lo utilice. Utilizaremos como conjunto de *claves* $\Upsilon = \mathbb{Z}_n^*$ y como conjunto de los posibles blobs o testigos $\chi = \mathbb{Z}_n^{Q+}$, los residuos cuadráticos.

El algoritmo de compromiso es como sigue:

Algoritmo 5.26 (Compromiso de bit basado en residuos cuadráticos)**.**
Ocultación: P elige al azar $y \in \mathbb{Z}_n^*$ y oculta el bit b como:

$$x = f(b, y) = s^b y^2 \bmod n$$

Apertura: P envía a V el valor y. V calcula el bit b:

$$b = \nu(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \equiv y^2 \bmod n \\ 1 & \text{si } x \equiv s \cdot y^2 \bmod n \\ \bullet & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Proposición 5.27. *El algoritmo 5.26 es un esquema de compromiso de bit con vinculación computacional y secreto incondicional.*

Demostración. La ocultación consiste en enviar como testigo un residuo cuadrático módulo n, y a la hora de desvelar el valor del bit, P debe desvelar una raíz cuadrada de x. Si P es una máquina limitada polinomialmente, al no conocer la factorización de n, no podrá calcular la raíz cuadrada de x. Si pudiera calcular dicha raíz, el ataque consistiría en seguir el protocolo para el bit $b = 1$, de modo que conocemos el y para abrirlo como 1, y cuando P quiera cambiar el bit oculto a 0, calculará la raíz cuadrada módulo n de $s \cdot y^2$, de modo que V obtendrá en la *apertura* $b = 0$. Suponiendo que el problema de la factorización es intratable, tenemos **vinculación computacional**.

Por otro lado, sea $\beta = \mid \Omega_x \mid$ con Ω_x el conjunto de raíces modulares de x, que un V *todopoderoso* es capaz de calcular. Sea $r \in \Omega_x$ la raíz modular de x usada por P en el protocolo, e Y la variable aleatoria que representa la clave y. Si $b = 0$ tenemos que $P(Y = y) = P(r = y) = 1/\beta$, pues alguna de las raíces será igual a y. Si $b = 1$, la raíz utilizada para generar x será $r = ty \bmod n$, y como t es un valor prefijado, y está unívocamente determinada por r, entonces $P(Y = y) = P(r = ty) = 1/\beta$. Por tanto, los ensambles probabilísticos $\{f(0, \Upsilon)\}$ y $\{f(1, \Upsilon)\}$ son idénticos, y tenemos **secreto incondicional**.

$\square$

A continuación, presentamos otro esquema de compromiso basado en el logaritmo discreto, conocido como *compromiso de Pedersen*. Para llevarlo a cabo, P y V deben primero decidir un p primo suficientemente grande y un generador $g \in \mathbb{Z}_p^*$ donde el problema del logaritmo discreto es *difícil*. V además elige un valor aleatorio $s \in \mathbb{Z}_{p-1}$, de modo que no se conoce $\log_g s$, y lo envía a P. Los conjuntos del esquema de compromiso son $\Upsilon = \mathbb{Z}_{p-1}$ para las *claves* y $\chi = \mathbb{Z}_p^*$ para los blobs.

Algoritmo 5.28 (Compromiso de bit basado en logaritmo discreto).

Ocultación: P elige al azar $y \in \Upsilon$ y oculta el bit b como:

$$x = f(b, y) = s^b g^y \bmod p$$

Apertura: P envía a V el valor y. V calcula el bit b:

$$b = \nu(x, y) = \begin{cases} 0 & si\ x \equiv g^y \bmod p \\ 1 & si\ x \equiv sg^y \bmod p \\ \bullet & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Proposición 5.29. *El algoritmo 5.28 es un esquema de compromiso de bit con vinculación computacional y secreto incondicional.*

Demostración. El ataque a este esquema de compromiso consistiría en calcular el logaritmo discreto de s módulo p, llamémoslo t, tal que $g^t = s \bmod p$. Si P oculta $b = 0$, enviará $x = g^y \bmod p$, y para poder abrir al valor $b = 1$ puede enviar a V $(y - t)$, de modo que V calculará $sg^{y-t} \equiv g^t g^{y-t} \equiv g^y \equiv x \bmod p$, obteniendo $b = 1$. En el caso contrario, donde P oculta $b = 1$, enviará $x = sg^y \bmod p$ a V como testigo, y para abrir el bit como $b = 0$ basta con enviar $y + t$, tal que V calculará $g^{y+t} \equiv g^t g^y \equiv sg^y \bmod p$, creyendo entonces que $b = 1$. Si P es computacionalmente limitado, no podrá resolver el problema del logaritmo discreto y obtenemos una **vinculación computacional**.

Suponiendo un V computacionalmente ilimitado, éste podría calcular el logaritmo discreto de x módulo p, llamémoslo u, tal que $x \equiv g^u \bmod p$, además del valor t que genera s, $s \equiv g^t \bmod p$. Una vez conocidos u y t, la probabilidad de que y valga u ó $(u - t)$, según sea $b = 0$ $(x \equiv g^u \equiv g^y \bmod p)$ ó $b = 1$ $(x \equiv g^t g^{u-t} \equiv sg^y \bmod p)$ respectivamente, es la misma, $1/2$. Tenemos entonces que los ensambles $\{f(0, \Upsilon)\}$ y $\{f(1, \Upsilon)\}$ son idénticos y el esquema es de **secreto incondicional**.

□

Finalmente utilizamos el problema del isomorfismo de grafos para mostrar otro esquema de secreto incondicional. En este caso P y V escogen un grafo $G = (V, E)$ $(n =| V |)$. V escoge al azar una permutación $\pi \in_R Sym(V)$ del grafo y calcula $H = \pi(G)$. El par de grafos (G, H) lo conocerán tanto P como V, pero la permutación π la mantendrá en secreto V. Los conjuntos del esquema de compromiso son $\Upsilon = Sym(V)$ y $\chi = \{H \mid H = \pi(G), \pi \in_R Sym(V)\}$.

Algoritmo 5.30 (Compromiso de bit basado en isomorfismo de grafos).
Ocultación: P elige al azar $\gamma \in \Upsilon$ y oculta el bit b como:

$$X = f(b, \gamma) = \begin{cases} \gamma(G) & \text{si } b = 0 \\ \gamma(H) & \text{si } b = 1 \end{cases}$$

Apertura: P envía a V el valor γ. V calcula el bit b:

$$b = \nu(X, \gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma(G) = X \\ 1 & \text{si } \gamma(H) = X \\ \bullet & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Proposición 5.31. *El algoritmo 5.30 es un esquema de compromiso de bit con vinculación computacional y secreto incondicional.*

Demostración. P podría atacar el esquema si conociera el isomorfismo de G a H, componiéndolo con γ para cambiar el bit que V abriría. Como suponemos que P es una máquina limitada computacionalmente, no puede resolver el problema del isomorfismo de grafos y por tanto el esquema de compromiso es de **vinculación computacional**.

Además, como los posibles γ para abrir un bit son permutaciones aleatorias de G, compuestas o no con π, la probabilidad de que dado un X el bit b sea 0 ó 1 es $1/2$ en ambos casos, de modo que los ensambles $\{f(0, \Upsilon)\}$ y $\{f(1, \Upsilon)\}$ son idénticos, y tenemos **secreto incondicional**. □

5.5.2 *Esquemas de compromiso con vinculación incondicional*

Podemos conseguir esquemas de compromiso con vinculación incondicional a costa de obtener secreto computacional, como demostramos antes, no podemos obtener ambas propiedades a la vez de modo incondicional. Veremos en este apartado un ejemplo basado en residuos cuadráticos.

Partiendo del problema del residuo cuadrático, para $N = pq$, los conjuntos $\mathbb{Z}_N^{Q+}$ y $\mathbb{Z}_N^{Q-}$ son polinomialmente indistinguibles. En este caso, P inicia el esquema eligiendo 2 primos aleatorios suficientemente grandes, p y q, y un **no**-residuo cuadrático $s \in \mathbb{Z}_N^{Q-}$, es decir, con símbolo de Jacobi 1. El par (s, N) se hace público para V. El conjunto de *claves* del esquema es $\Upsilon = \mathbb{Z}_N^*$, y el de posibles valores de los blobs es $\chi = \mathbb{Z}_N^Q$, los valores con símbolo de Jacobi 1, sea o no residuo cuadrático.

Algoritmo 5.32 (Compromiso de bit basado en residuos cuadráticos).
Ocultación: P elige al azar $y \in \mathbb{Z}_N^*$ y oculta el bit b como:

$$x = f(b, y) = s^b y^2 \bmod N$$

Apertura: P envía a V el valor y. V calcula el bit b:

$$b = v(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \equiv y^2 \bmod N \\ 1 & \text{si } x \equiv s \cdot y^2 \bmod N \\ \bullet & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Proposición 5.33. *El algoritmo 5.32 es un esquema de compromiso de bit con secreto computacional y vinculación incondicional.*

Demostración. El valor del testigo x será un residuo cuadrático si $b = 0$, o un no-residuo cuadrático si $b = 1$, y como $\mathbb{Z}_N^{Q+} \cap \mathbb{Z}_N^{Q-} = \emptyset$, P es incapaz de abrir el testigo con otro valor de b, aunque sea computacionalmente ilimitado. Tenemos por tanto **vinculación incondicional**.

Sin embargo, los ensambles $\{f(0, \Upsilon)\}$ y $\{f(1, \Upsilon)\}$ son sólo polinomialmente indistinguibles, bajo la suposición de que el problema QR es *difícil*, de modo que obtenemos sólo **secreto computacional**. □

Este esquema es casi idéntico al 5.26, pero la diferencia radica en que en el esquema con secreto incondicional, sólo usamos residuos cuadráticos, de modo que no se podía distinguir una apertura de otra hasta que la enviara P, y en este caso utilizamos un no-residuo cuadrático con símbolo de Jacobi 1, y en vez de secreto incondicional, conseguimos vinculación incondicional.

5.5.3 *Esquemas de compromiso para cadenas de bits*

Existen pruebas interactivas donde P necesita comprometerse con un valor en un conjunto mayor que $\{0, 1\}$, de modo que para ocultarlo, con las técnicas previas, debería representar en base binaria dicho valor y ejecutar el esquema de compromiso bit a bit, lo cual es claramente ineficiente. Vamos a ampliar la definición 5.20:

Definición 5.34. Un esquema de compromiso de un cadenas de n bits es un par de funciones (f, v) de tiempo polinomial. La función
$f : \{0, 1\}^n \, x \, \Upsilon \to \chi$
transforma la cadena $s = (b_1, \ldots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ con una clave aleatoria $y \in \Upsilon$.

El valor $x = f(b, y)$ lo llamaremos *blob* o *testigo* de s. La función de verificación
$\nu : \chi x \Upsilon \to \{0, 1, \ldots, 2^{n-1} \bullet\}$
abre el blob revelando la cadena s, o indicando que no es un par (blob,clave) válido.

Veamos dos ejemplos basados en el problema del logaritmo discreto. El primero se basa en el compromiso de Pedersen, siendo de secreto incondicional, mientras que en el segundo ejemplo, basado en el algoritmo de ElGamal, conseguimos vinculación incondicional.

Comencemos por el compromiso de Pedersen. Como antes, P y V deben elegir un primo p suficientemente grande para que el problema del logaritmo discreto sea impracticable. Además, eligen un generador $g \in \mathbb{Z}_p^*$ y un valor aleatorio h tal que no se conoce $\log_g h$. El conjunto de *claves* será $\Upsilon = \mathbb{Z}_{p-1}$ y el de blobs $\chi = \mathbb{Z}_p^*$. El compromiso de una cadena s se obtiene como sigue:

Algoritmo 5.35.
Ocultación: P elige al azar $y \in \Upsilon$ y oculta s como:

$$x = f(s, y) = g^s h^y \bmod p$$

Apertura: P envía a V el par (s', y'). V comprueba que

$$s = \nu(x, y) = \begin{cases} s' & \text{si } x \equiv g^{s'} h^{y'} \bmod p \\ \bullet & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Proposición 5.36. *El algoritmo 5.35 es un esquema de compromiso de cadena de bits con vinculación computacional y secreto incondicional.*

Demostración. Para poder romper la propiedad de vinculación, haría falta encontrar los pares (s_0, y_0) y (s_1, y_1), con $s_0 \neq s_1$, tal que

$$g^{s_0} h^{y_0} \equiv g^{s_1} h^{y_1} \bmod p$$

operando obtenemos $g^{s_0 - s_1} \equiv h^{y_1 - y_0} \bmod p$, y podemos despejar

$$h \equiv g^{(s_0 - s_1)(y_1 - y_0)^{-1} \bmod p-1} \bmod p$$

y habríamos calculado el logaritmo discreto de h en base g, pero para un P computacionalmente limitado, y suponiendo que el problema del logaritmo discreto es impracticable, esto no es posible, por lo que obtenemos **vinculación computacional**.

Por otra parte, para cualquier par (s, y) y t tal que $h \equiv g^t \bmod p$, para cualquier posible valor s' tenemos que $y' = \frac{s-s'}{t} + y$ cumple $g^s h^y \equiv g^{s'} h^{y'} \bmod p$. Es decir, s' se puede abrir con la *clave* $y' = \frac{s-s'}{t} + y$, donde y se elige uniformemente en $\mathbb{Z}_p^*$. Tenemos entonces que el esquema es de **secreto incondicional**.

□

Ahora veamos el segundo ejemplo de compromiso de cadenas de bits. La inicialización es la misma que en el caso anterior, P y V conocen un primo p, un generador $g \in \mathbb{Z}_p^*$ y un valor aleatorio $h \in \mathbb{Z}_p^*$ tal que no se conoce $\log_b h$. Los conjuntos del esquema de compromiso son $\Upsilon = \mathbb{Z}_{p-1}$ y $\chi = \mathbb{Z}_p^*$.

Algoritmo 5.37.
Ocultación: P elige al azar $y \in \Upsilon$ y oculta s como el par de valores:

$$(x_1, x_2) = f(s, y) = (g^y \bmod p,\ g^s h^y \bmod p)$$

Apertura: P envía a V el par (s', y'). V comprueba que

$$s = v(x, y) = \begin{cases} s' & \text{si } x_1 \equiv g^{y'} \bmod p \quad y \quad x_2 \equiv g^{s'} h^{y'} \bmod p \\ \bullet & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Proposición 5.38. *El algoritmo 5.35 es un esquema de compromiso de cadena de bits con vinculación computacional y secreto incondicional.*

Demostración. En este caso, el valor de $x_1 = g^y \bmod p$ determina unívocamente el valor de y elegido por P, y de este modo se fija el posible valor de s en $g^s h^y \bmod p$. Obtenemos así **vinculación incondicional**.

A cambio, como ahora el posible valor de y es único, un V con suficiente capacidad computacional podría resolver el logaritmo discreto de x_1, obtener y, y entonces despejar s de x_2, antes de que P realice la apertura. Sin embargo, ante un V limitado, y suponiendo que el problema del logaritmo discreto es *difícil*, obtenemos **secreto computacional**. □

Una ventaja de este esquema frente al anterior, es que P puede elegir el valor de h por su cuenta, sin que V desconfíe de si conoce o no su logaritmo discreto. En el caso anterior, si P calcula maliciosamente h como $h = g^t \bmod p$, hemos visto que puede abrir un blob con el valor que quiera. En este esquema, gracias a la vinculación incondicional, aunque P conozca t, no puede romper el esquema de compromiso.

Para finalizar este capítulo, veamos las implicaciones de estos dos tipos de esquemas de compromiso existentes, los de secreto o vinculación incondicional, sobre las pruebas de conocimiento cero.

Cuando tratamos con un esquema de compromiso de vinculación incondicional, podemos trabajar incluso con un P de capacidad computacional ilimitada, como en las pruebas de conocimiento cero perfectas, y V estará seguro de que no se le engaña al abrir el testigo presentado. Sin embargo, desde la perspectiva de P, los blobs que no se abren, y deben ocultar la información, pueden verse comprometidos en el futuro si los problemas en los que se basa la propiedad de secreto computacional consiguen resolverse, bien para el caso general, o bien para las instancias de una cierta interacción pasada.

Por otro lado, si utilizamos esquemas de compromiso con secreto incondicional, P puede estar seguro de que los valores no revelados se mantendrán seguros en el futuro. Sin embargo, cuando un V se enfrenta a un P *todopoderoso*, la confianza en que P no cambiará el valor comprometido desaparece. Por eso, este tipo de compromisos sólo se pueden utilizar cuando en la prueba interactiva estudiada P no precisa de ser computacionalmente ilimitado.

5.6 PRUEBAS DE CONOCIMIENTO CERO COMPUTACIONALES

Introducimos ahora la última variedad de pruebas de conocimiento cero que veremos en este capítulo. La definición parte de la de conocimiento cero perfecta, pero considerando que los ensambles de la Vista y Simulador son indistinguibles sólo de manera computacional, sin necesidad de ser idénticos.

Definición 5.39 (Propiedad de conocimiento cero computacional)**.**
Un sistema de prueba interactiva (completo y robusto), para un problema de decisión Q, es *de conocimiento cero computacional* si el ensamble $\mathtt{Vista}_{P,V^*}(q,h)$ es indistinguible polinomialmente al ensamble generado por un Simulador $S_{V^*}(q,h)$, para cualquier instancia $\mathtt{Verdadera}$ $q \in Q$ y cualquier historial h.

Para las pruebas que veremos en esta sección utilizaremos esquemas de compromiso con vinculación incondicional y secreto computacional, pues ante un P *todopoderoso*, debemos asegurarnos que no puede cambiar su compromiso. El esquema utilizado en cada algoritmo es arbitrario mientras cumpla la propiedad, de modo que denotaremos a un blob como una *caja negra* C que oculta un cierto valor, y lo desvela entregando su *llave* a V.

En esta clase de pruebas de conocimiento cero se encuentran problemas como el del camino hamiltoniano (HC), o el de la 3-coloración del grafo (G3C).

5.6.1 *Prueba de conocimiento cero para un grafo hamiltoniano*

Dado el problema de decisión del grafo hamiltoniano, mostramos el algoritmo descrito por Blum en [2]:

Nombre:	Problema HC.
Parámetros:	Un grafo $G = (V, E)$.
Pregunta:	¿Existe un ciclo en G que recorre pasa por cada vértice en V una única vez?

Algoritmo 5.40 (Prueba interactiva para HC)**.**
Datos comunes: Una instancia $G = (V, E)$ del Problema HC. $\mid V \mid = n$ es el tamaño del problema.
Protocolo:
P encuentra un ciclo hamiltoniano de G. Usará el mismo ciclo durante el resto de la prueba.
Sea $t(n)$ un polinomio en n. P y V repiten $t(n)$ veces los siguientes pasos.

1. P oculta G en cajas negras: asocia, de manera uniformemente aleatoria, los vértices $v_1, v_2, \dots v_n$ a las cajas $C_1, C_2, \dots C_n$ (una permutación sobre los vértices del grafo); además, para cada par de cajas (C_i, C_j) prepara otra caja llamada C_{ij} que guardará un 1 si los vértices ocultos en C_i y C_j son adyacentes, ó 0 en caso contrario.
2. $P \to V :\quad n + \binom{n}{2}$ cajas negras: $C_1, C_2, \dots C_n, C_{1,2}, \dots, C_{n-1,n}$
3. $V \to P :\quad b \in_R \{0, 1\}$.
4. Si $b = 0$, P envía las llaves para abrir todas las cajas.

   Si $b = 1$, P abre exactamente n cajas, $C_{ij}, C_{jk}, C_{kl}, \dots C_{l'i}$, que corresponden al ciclo hamiltoniano escondido por los vértices escondidos en las cajas $C_1, C_2, \dots C_n$.
5. Si $b = 0$, V comprueba que el grafo descubierto por las cajas sea G.

   Si $b = 1$, V comprueba que los índices de las cajas $C_{ij}, C_{jk}, \dots C_{l'i}$ forman un ciclo y que todas contienen un 1.

   Si la comprobación falla, V termina en rechazo. En caso contrario, vuelve al paso 1.

Tras $t(n)$ rondas, V termina y acepta la instancia como $\mathtt{Verdadera}$, G es hamiltoniano.

Teorema 5.41. *El protocolo 5.40 es una prueba interactiva.*

Demostración. El protocolo se ejecuta en $t(n)$ iteraciones, de modo que es probabilístico en tiempo polinomial. Ahora debemos comprobar la completitud y robustez.

El protocolo es *completo*, pues si el grafo es en verdad hamiltoniano, una instancia $\mathtt{Verdadera}$, P todopoderoso computacionalmente podrá encontrar un ciclo, y siguiendo el algoritmo, siempre podrá descubrir ante V el grafo G o el ciclo elegido, según el bit del reto.

Si un P^* tramposo no conoce un ciclo hamiltoniano de G, puede intentar adivinar cuándo V pedirá descubrir el grafo o el ciclo. En el primer caso, seguirá el protocolo, ocultando G en las cajas negras. En el segundo caso, P^* sólo debe elegir un ciclo de cajas $C_{ij}, C_{jk}, \ldots C_{l'i}$ donde introducirá el valor 1, haya o no una arista uniendo los vértices en G. Si V pide descubrir el ciclo, P^* revelará un ciclo hamiltoniano, pero no del grafo G.

Si P^* no acierta correctamente qué bit enviará V, en cada ronda hay una probabilidad de $1/2$ de que V pille a P^* en su mentira. Ejecutando el protocolo $t(n)$ veces, la probabilidad de que un P^* tramposo engañe a V es de $2^{-t(n)}$, por tanto, la prueba es *robusta*. □

Teorema 5.42. *La prueba interactiva 5.40 es de conocimiento cero computacional.*

Demostración. Debemos construir un simulador para el protocolo anterior. Como en las pruebas anteriores, suponemos que V^* utiliza una función probabilística en tiempo polinomial F que con la información disponible elige el bit b del reto de manera no uniforme.

Simulador para el problema HC $S_{V^*}(G = (V, E), h)$.

Datos: G, una instancia $\mathtt{Verdadera}$ del problema HC; h, transcripciones de ejecuciones previas del protocolo; v_i, transcripción de la interacción actual (i rondas).

Ejecución: Repetir para $i + 1 \leqslant t(n)$:

1. Elegir $b_{i+1} \in_R \{0, 1\}$
2. **Si** $b_{i+1} = 0$, **entonces** oculta G en una permutación aleatoria de cajas negras.
   Si no, oculta un n-ciclo cualquiera en cajas negras.
   En ambos casos produce las cajas negras $C_1^{i+1}, \ldots, C_{n-1,n}^{i+1}$.
3. **Si** $b_{i+1} = F(G, h, v_i, C_1^{i+1}, \ldots, C_{n-1,n}^{i+1})$, **entonces** añadir la tupla $(C_1^{i+1}, \ldots, C_{n-1,n}^{i+1}, b_{i+1}, K_{i+1})$ a la transcripción, donde K_{i+1} es el conjunto de claves para abrir las cajas, según el valor b_{i+1}.
   Si no, volver al paso 1.
4. $i = i + 1$

Al haber una probabilidad de $1/2$ de que el bit b_{i+1} coincida con el valor de la función F, el simulador es probabilístico, con un tiempo estimado de ejecución de 2 iteraciones por cada una de las $t(n)$ rondas, de modo que es de tiempo polinomial.

Tenemos los ensambles probabilísticos

$$\mathtt{Vista}_{P,V^*}(G,h) = (G,h,E_1,B_1,K_1,\ldots,E_{t(n)},B_{t(n)},K_{t(n)}),$$

y

$$S_{V^*}(G,h) = (G,h,E'_1,B'_1,K'_1,\ldots,E'_{t(n)},B'_{t(n)},K'_{t(n)}).$$

donde E_i y E'_i son las variables aleatorias que representan las cajas negras del compromiso, B_i y B'_i las v.a. de los bits elegidos por V en el reto, y K_i y K'_i las v.a. de las llaves reveladas.

Por inducción sobre i, cuando $i = 0$, los ensambles corresponden a la misma tupla (G,h), de modo que son idénticos.

Continuamos la inducción suponiendo que para $i-1$ los ensambles son indistinguibles computacionalmente.

Analizando la prueba interactiva 5.40, en la interacción i, cuando V elige $b_i = 0$, éste obtiene de P una de las $n!$ posibles permutaciones del grafo G, y si V eligiera $b_i = 1$, obtendría un n-ciclo aleatorio, de los $n!$ posibles también, pues P forma dicho n-ciclo de cajas negras a partir de un ciclo hamiltoniano prefijado y la permutación aleatoria aplicada a G. La probabilidad de descubrir todo G o un n-ciclo depende de la elección de b_i, cuya probabilidad viene determinada por F.

Del mismo modo, analizando el simulador, F determinará la probabilidad de que en la transcripción aparezca un 0 o un 1 en el bit b_i. Según el valor de b_i, el simulador escogerá una de las $n!$ permutaciones posibles de G para ocultar el grafo en cajas negras, o bien uno de los $n!$ posibles n-ciclos, forme o no un ciclo hamiltoniano en G.

Ahora bien, suponíamos que las cajas negras eran en realidad la aplicación de un esquema de compromiso con vinculación incondicional, para proteger a V frente a un P *todopoderoso* que pudiese cambiar los valores comprometidos. Vimos en la sección anterior que al tener vinculación incondicional, sólo podemos aspirar a secreto computacional, en nuestro modelo de comunicación donde P y V ven todo lo que se les envía. Esto significa que la única manera de diferenciar los ensambles anteriores es rompiendo el secreto del esquema de compromiso, y suponemos que no existe ningún algoritmo probabilístico polinomial que pueda hacerlo.

Tenemos por tanto que los ensambles son computacionalmente indistinguibles, y la prueba interactiva es de conocimiento cero computacional. □

5.6.2 *Prueba de conocimiento cero para la 3-coloración de un grafo*

Otra prueba interactiva de conocimiento cero computacional es la de demostrar que un grafo G posee una 3-coloración de sus nodos:

Nombre:	Problema G3C.
Parámetros:	Un grafo $G = (V, E)$.
Pregunta:	¿Existe una función $\phi : V \to \{1, 2, 3\}$ tal que $\forall (u, v) \in E$, se cumple $\phi(u) \neq \phi(v)$?

Como el problema G3C es **NP**-completo, y como todos los problemas **NPC** son computacionalmente equivalente, en el sentido de que todos se pueden reducir polinomialmente a otro problema **NPC**, tenemos que todo problema en **NPC** tiene una prueba de conocimiento cero computacional.

Blum presenta en [2] una prueba de conocimiento cero que sigue las líneas de la prueba del ciclo hamiltoniano, utilizando un bit como reto para desvelar el grafo G o una prueba de que se ocultó una 3-coloración. Sin embargo, aquí presentamos una variación de la prueba que creemos es más sencilla de entender.

La idea de esta prueba es que en cada iteración, P elige una permutación aleatoria de la 3-coloración, $\pi \in Sym(\{1, 2, 3\})$, y oculta cada vértice coloreado en una caja negra. El *testigo* que enviará a V consistirá en ocultar toda la 3-coloración del grafo en n cajas negras cuyos índices corresponden a los vértices del grafo. V elegirá como *reto* una arista aleatoria. Como *respuesta*, P enviará la coloración permutada de esa arista, que deberá tener colores distintos en cada extremo, y las claves de cifrado de cada una, de modo que V podrá comprobar si corresponden al *testigo* enviado:

Algoritmo 5.43 (Prueba interactiva para G3C)**.**

Datos comunes: Una instancia $G = (V, E)$ del Problema G3C. ($| V |= n, | E |= m$) es el tamaño del problema.

Protocolo:

P encuentra una 3-coloración ϕ de G.

Sea $t(n)$ un polinomio en n. P y V repiten $t(n) \mid E \mid$ veces los siguientes pasos.

1. P selecciona al azar una permutación $\pi \in_R Sym(\{1, 2, 3\})$. Oculta en n cajas negras la coloración: la caja C_j ocultará el valor $\pi(\phi(v_j))$ del color permutado del vértice v_j.
2. $P \to V$: n cajas negras: $C_1, C_2, \ldots C_n$.
3. $V \to P$: $(u, v) \in_R E$, una arista aleatoria de G.
4. $P \to V$: las claves k_u, k_v que abren las cajas C_u, C_v.
5. V abre las cajas y comprueba que $\pi(\phi(u)) \neq \pi(\phi(v))$.

   Si la comprobación falla, V termina en rechazo. En caso contrario, vuelve al paso 1.

Tras $t(n)$ rondas, V termina y acepta la instancia como $\mathtt{Verdadera}$, G posee una 3-coloración.

Teorema 5.44. *El protocolo 5.43 es una prueba interactiva.*

Demostración. La completitud es inmediata, pues si existe 3-coloración, un P ilimatado computacionalmente la podrá calcular, y podrá dar para cada $(u,v) \in E$ colores distintos en cada ronda.

Si P^* no conoce la 3-coloración, al menos hay una arista a la que P no puede dar colores distintos a sus vértices, y hay una probabilidad de $\frac{1}{|E|}$ de que V le rechace, es decir, una probabilidad $1-\frac{1}{|E|}$ de que P^* triunfe. Tras $t(n) \mid E \mid$ rondas, P^* sólo engañaría a V con una probabilidad $(1-\frac{1}{|E|})^{t(n)|E|} \approx e^{-t(n)}$, por lo que la prueba es robusta.

□

Teorema 5.45. *La prueba interactiva 5.43 es de conocimiento cero computacional.*

Demostración. La propiedad de conocimiento cero se prueba con un simulador que funciona como los anteriores, primero se elige el *reto* (arista) y la *respuesta* (dos colores), se calcula el *testigo* respecto de ambos y se comprueba si V hubiera elegido dicho *reto* a partir de un algoritmo probabilístico polinomial F:

Simulador para el problema G3C $S_{V^*}(G=(V,E),h)$.

Datos: G, una instancia $\mathtt{Verdadera}$ del problema G3C; h, transcripciones de ejecuciones previas del protocolo; v_{i-1}, transcripción de la interacción actual ($i-1$ rondas).

Ejecución: Repetir para $i+1 \leqslant t(n)$:

1. Elegir $e=(u,v) \in_R E$ una arista, y sus colores $(a,b) \in_R \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \neq \beta;\ \alpha,\beta \in \{1,2,3\}\}$ de manera aleatoria.

2. Generar las cajas negras C_j para $j=1,\dots n$ del siguiente modo:

$$C_j \text{ oculta } \begin{cases} a & \text{si } v_j = u, \\ b & \text{si } v_j = v, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   donde v_j es un vértice de G.

3. **Si** $e = F(G,h,v_{i-1},C_1,\dots,C_n)$, **entonces** añadir la tupla $(C_1,\dots,C_n,e=(u,v),k_u,k_v)$ a la transcripción, donde K_{i+1} es el conjunto de claves para abrir las cajas, según el valor b_{i+1}.
   Si no, volver al paso 1.

4. $i = i + 1$

Durante una ronda del simulador tenemos una probabilidad de $\frac{1}{|E|}$ de que la arista escogida en el primer paso coincida con la que el algoritmo F elegiría, de modo que el número esperado de rondas para generar las $t(n)$ rondas es polinomial.

Veamos ahora los ensambles de la Vista y la Simulación.

$$\mathtt{Vista}_{P,V^*}(G,h) = (G, h, C_1, E_1, K_1, \ldots, C_{t(n)}, E_{t(n)}, K_{t(n)}),$$

y

$$S_{V^*}(G,h) = (G, h, C'_1, E'_1, K'_1, \ldots, C'_{t(n)}, E'_{t(n)}, K'_{t(n)}).$$

Donde la v.a. C_i representa el conjunto de n cajas negras que oculta la permutación de la coloración, la v.a. E_i representa la arista (u,v) elegida como reto por V en la ronda i, y la v.a. K_i representa el par de llaves (k_u, k_v) enviado como respuesta.

Por inducción sobre i, cuando $i = 0$, los ensambles de la Vista y Simulador son idénticos, (G,h). Suponemos cierto para $i-1$, en la i-ésima iteración tendremos:

En la Vista y el Simulador, las variables aleatorias C_i y C'_i corresponden a n cajas negras, que cumplen un esquema de compromiso con vinculación incondicional y secreto computacional, de modo que a partir de estas n cajas negras suponemos que no existe ningún algoritmo probabilístico en tiempo polinomial que las distinga de cualquier otra caja negra. Por tanto, la probabilidad de que aparezcan unas cajas negras u otras en la Vista y Simulador es computacionalmente indistinguible e independiente de las otras variables.

Respecto a las v.a. E_i y E'_i, ambas dependen de la probabilidad de elegir un nodo de F, que podemos supones es p_F, idéntica para ambas.

En la apertura de las cajas negras con las claves de K_i y K'_i se desvelan dos colores distintos aleatorios, en la Vista porque la 3-coloración implica que ambos son distintos y después se le aplica una permutación aleatoria de entre las 3! posibles, por lo que dos colores distintos tienen una probabilidad uniforme de ser revelados, y por tanto, la misma probabilidad que la elección de colores aleatoria del Simulador.

Tal como ocurría en la prueba del grafo hamiltoniano, la condición de conocimiento cero computacional proviene de utilizar un esquema de compromiso con vinculación incondicional, y secreto computacional. □

TODO: ¿párrafo de cierre del capítulo de ZKP, y paso a aplicaciones?

Parte II

APLICACIONES

6 APLICACIONES DE LAS PRUEBAS DE CONOCIMIENTO CERO

En este capítulo nos alejamos del estudio teórico de las pruebas de conocimiento cero para introducirnos en sus aplicaciones prácticas. La primera técnica que veremos consiste en transformar una prueba interactiva en no interactiva, minimizando el número de mensajes necesarios para llevarla a cabo, bajo el supuesto de que una función *hash* es difícil de predecir. A continuación veremos cómo aplicar pruebas de conocimiento cero en un esquema de identificación de usuarios. Finalmente, como evolución de esos esquemas de identificación, estudiaremos cómo funcionan los certificados digitales de Identity Mixer diseñados por IBM y basados en pruebas de conocimiento cero. Se puede consultar la bibliografía de este capítulo en [13, 18, 20].

6.1 PRUEBAS DE CONOCIMIENTO CERO NO INTERACTIVAS

Hemos visto que la interacción habitual en una prueba de conocimiento cero es enviar un *testigo*, un *reto* y una *respuesta* en cada iteración.

$$\begin{array}{ll} \text{P y V} & \text{conocen información previa } \Upsilon \\ P \to V: & \textit{testigo } u \\ V \to P: & \textit{reto } b \\ P \to V: & \textit{respuesta } w = \xi(u, b, \Upsilon) \\ \text{V verifica} & u = \vartheta(b, w, \Upsilon). \end{array}$$

La desventaja de estos protocolos es sincronizar a P y V para comunicarse, por la necesidad de que el verificador debe generar el reto para estar seguro de la prueba (por la propiedad de conocimiento cero).

Una técnica para convertir las pruebas en no interactivas es la *heurística de Fiat-Shamir*, que consiste en sustituir el reto por un resumen digital h, *hash* en inglés, del testigo u, de modo que para un P computacionalmente limitado, V puede confiar en que P no ha elegido u tal que con el reto calculado pueda falsear la prueba.

Aprovechando la función del *hash*, se puede convertir el protocolo en un esquema de firma digital de un mensaje m, realizando el *hash* sobre el testigo y el mensaje a la vez (concatenándolos, por ejemplo).

$$\begin{array}{ll} \text{P calcula}: & \textit{testigo } u, \textit{ respuesta } w = \xi(u, h, \Upsilon), \text{ donde } h = \mathbf{hash(u\,|\,m)} \\ P \to V: & \textbf{\textit{firma del mensaje}}\ m: \quad (h, w) \\ \text{V verifica} & h = \mathtt{hash}(\vartheta(h, w, \Upsilon)|m). \end{array}$$

Podemos construir así una firma digital, con un solo mensaje, por lo que es válido para cualquier V, y donde P no ha debido compartir ninguna clave o información extra aparte de los parámetros del sistema, Υ.

Observación.

En las pruebas de conocimiento cero perfectas estudiadas, los retos consistían en un bit, por lo que los posibles valores son 0 ó 1 y un ataque a la función de *hash* es muy fácil. Por ello, se utilizan versiones de ZKP donde el conjunto de los posibles valores del reto es suficientemente grande, por ejemplo, un entero representado en tantos bits como produce la firma digital, usualmente 256 o 512 bits.

Al hacer este cambio, muchas veces perdemos la condición de perfecta en la prueba de conocimiento cero, rebajándola a otro de los tipos vistos, pero que en la práctica es perfectamente aceptable.

6.2 PROTOCOLOS DE IDENTIFICACIÓN BASADOS EN ZKP

Las pruebas de conocimiento cero tienen una gran aplicación en el campo de la seguridad informática, en particular en la **autenticación**. Además, un sistema de identificación basado en pruebas de conocimiento cero consigue privacidad, al no revelar información del usuario, y seguridad al no *degradarse* con el uso, es decir, resiste al criptoanálisis por muchos mensajes que se intercepten.

Estos protocolos de identificación se basan en una prueba de conocimiento cero de un cierto problema Q, donde P (el usuario) tiene un *secreto* que le permite demostrar una instancia $\mathtt{Verdadera}$ de Q al verificador V, y que además conocer dicho secreto le relaciona con una identidad de un certificado en el que P y V confían.

6.2.1 *Protocolo de identificación de Fiat-Shamir*

El protocolo de identificación de Fiat-Shamir es el más característico basado en pruebas de conocimiento cero del problema QR.

Como hemos visto, el problema QR es **NP**, de modo que obtener una raíz cuadrada módulo un N compuesto, es computacionalmente inviable, equivalente a factorizar N. Bajo esta suposición, podemos utilizar como información pública un residuo cuadrático módulo N, que llamaremos v, y asociarlo a una identidad, de modo que el usuario que conozca una de sus raíces cuadradas, el secreto s, podrá demostrar que v es un residuo cuadrático:

Algoritmo 6.1 (Protocolo de identificación Fiat-Shamir)**.**

Configuración de la identidad:

1. La entidad de confianza selecciona y publica $N = pq$, con p y q primos y secretos.

2. Cada usuario P genera un secreto $s \in \mathbb{Z}_{\mathbb{N}}^*$, coprimo con N (si no, se podría obtener la factorización de N y perder la seguridad del protocolo). Calcula $v \equiv s^2 \bmod N$ y lo envía a la entidad de confianza como su clave pública.

Protocolo: Repetir t rondas:

1. P escoge aleatoriamente $r \in_R \mathbb{Z}_{\mathbb{N}}^*$, el *compromiso*.
2. $P \to V$: $u \equiv r^2 \bmod N$, el *testigo*.
3. $V \to P$: $b \in_R \{0, 1\}$, el *reto*.
4. $P \to V$: $w \equiv r \cdot s^b \bmod N$, la *respuesta*.
5. V verifica si $w^2 \equiv u \cdot v^b \bmod N$.

El protocolo de Fiat-Shamir es casi idéntico a la prueba interactiva 5.4, donde aquí (v, N) hace el papel de instancia $\mathtt{Verdadera}$ del problema QR, y como P, el usuario, es una máquina computacionalmente limitada, en vez de elegir aleatoriamente el residuo cuadrático u y la raíz cuadrada w, parte de las raíces cuadradas, s y r, para poder calcular u, v y w elevando al cuadrado. Como los valores que se envían siguen siendo u, un residuo cuadrático aleatorio, b un bit de reto, y w una raíz cuadrada aleatoria de u o uv, según b, las transcripciones del protocolo de Fiat-Shamir son las mismas que las de la prueba interactiva, que sabemos que es de conocimiento cero perfecta.

El intento de ataque que vimos en la demostración de robustez varía ligeramente para Fiat-Shamir, pues el objetivo es intentar demostrar que v es residuo cuadrático, sin conocer s u otra raíz cuadrada, necesaria para una máquina de cómputo limitado del mundo real.

Un atacante debe adivinar el bit del reto que recibirá, de modo que si cree que $b = 0$ calcula el testigo como en el protocolo, pero si cree que $b = 1$, calcula en el paso 2 el testigo $u \equiv r^2 \cdot v^{-1} \bmod N$, y en 4 la respuesta $w \equiv r \bmod N$. En ambos casos fallaría si no adivina b correctamente, pues para corregir su error debería ser capaz de calcular, respectivamente, una raíz cuadrada de v, que permitiría pasar la prueba siempre, o una raíz cuadrada de $u \equiv r^2 \cdot v^{-1} \bmod N$, computacionalmente inviable pues p y q los guarda como secretos la entidad de verificación.

Como en la prueba interactiva, un atacante tiene una probabilidad de $1/2$ de engañar a V en cada ronda, de modo que la robustez se mantiene con una probabilidad de ataque de 2^{-t}. Si P pasa correctamente las t rondas, V da por válida la prueba. Si falla aunque sea sólo una, rechaza la identificación.

Un detalle importante a tener en cuenta es que, considerando ordenadores reales para el caso práctico, si P no utiliza un buen generador de números aleatorios para sus r del paso 1, un atacante podría adivinar cuándo repetirá el r, mandar $b = 0$ y $b = 1$, y así calcular el secreto s.

6.2.2 *Protocolo de identificación de Feige-Fiat-Shamir*

Una variación del protocolo de Fiat-Shamir para disminuir el número de mensajes intercambiados combinando varios testigos y retos a la vez.

Algoritmo 6.2 (Protocolo de identificación Feige-Fiat-Shamir)**.**
Configuración de la identidad:

1. *Parámetros del sistema*: La entidad de confianza publica el módulo $N = pq$, con p y $q \equiv \mod 4$, primos guardados secretos, de modo que -1 es un no-residuo cuadrático con símbolo de Jacobi 1. También define los enteros k y t que definen la seguridad.

2. *Selección del secreto*: Cada usuario P hace:

   (a) Selecciona aleatoriamente un vector $(s_1, s_2, \dots, s_k)$, donde cada $s_i \in \mathbb{Z}_{\mathbb{N}}^*$ y $\mathrm{mcd}(s_i, N) = 1$. Además, elige también aleatoriamente k bits $(b_1, b_2, \dots, b_k)$.

   (b) Calcula $v_i \equiv (-1)^{b_i} \cdot (s_i^2)^{-1} \mod N$ para cada $i = 1, \dots k$.

   (c) El usuario se identifica ante la entidad de confianza y envía su *clave pública* $(v_1, \dots, v_k; N)$, y guarda su *clave privada* $(s_1, \dots, s_k)$.

Protocolo: Repetir t rondas:

1. P escoge aleatoriamente $r \in_R \mathbb{Z}_{\mathbb{N}}^*$ y un bit $b \in_R \{0, 1\}$.
2. $P \to V$: $u \equiv (-1)^b \cdot r^2 \mod N$, el *testigo*.
3. $V \to P$: $(b_1, \dots, b_k)$, con cada $b_i \in_R \{0, 1\}$, el *reto*.
4. $P \to V$: $w \equiv r \cdot \prod_{j=1}^{k} s_j^{b_j} \mod N$, la *respuesta*.
5. V verifica si $u \equiv \pm w^2 \cdot \prod_{j=1}^{k} v_j^{b_i} \mod N$.

La probabilidad de que un atacante pueda engañar a V es la de acertar el reto de k bits en cada una de las t rondas, es decir, 2^{-kt}. Como vemos, aumentando el número de retos por ronda, podemos reducir el número de mensajes intercambiados para conseguir una robustez equivalente a Fiat-Shamir.

6.2.3 *Protocolo de identificación de Schnorr*

Vimos en la Sección 5.3 que el protocolo de Schnorr, basado en el logaritmo discreto, era una prueba de conocimiento cero con verificador honesto. Aquí damos una variación del protocolo donde se indica cómo la entidad de confianza genera los certificados y cómo a partir de la prueba de Schnorr un usuario P se autentica ante V con su certificado y clave privada:

Algoritmo 6.3 (Protocolo de identificación Schnorr)**.**
Configuración de la identidad:

1. *Parámetros del sistema*: La entidad de confianza publica los parámetros (p, q, β) donde p y q son primos tal que $q \mid (p-1)$, y β es un elemento con orden multiplicativo q (por ejemplo, para α un generador $\bmod p$, $\beta = \alpha^{(p-1)/q} \mod p$). Además se escoge un t, $2^t < q$, que definirá el nivel de seguridad.

2. *Selección del secreto*: Cada usuario P:

   (a) Recibe una identidad única I_P.

   (b) Escoge una clave privada a, $0 \leqslant a \leqslant q-1$, y calcula $v = \beta^{-a} \bmod p$.

   (c) La entidad certificadora vincula la identidad I_P y el valor v firmando, con cualquier método de firma $S(\cdot)$, el certificado $\mathtt{cert}_A = (I_P, v, S_T(I_P|v))$.

Protocolo:

1. P escoge aleatoriamente r, $0 \leqslant r \leqslant q-1$, y un calcula $x = \beta^r \bmod p$.

2. $P \rightarrow V$: x, el *testigo*, y $\mathtt{cert}_P$.

3. $V \rightarrow P$: e aleatorio, $1 \leqslant e \leqslant 2^t < q$, el *reto*, y verifica la firma del certificado.

4. $P \rightarrow V$: $y = ae + r \bmod q$, la *respuesta*.

5. V verifica si $x = \beta^y v^e \bmod p$.

6.3 PRUEBAS DE CONOCIMIENTO CERO EN IDENTITY MIXER

Identity Mixer, o Idemix, es un protocolo desarrollado por IBM[1] para crear certificados digitales basados en atributos, donde se preserva la privacidad. Este protocolo no solo permite la autenticación sin revelar un valor secreto, también permite realizar pruebas sobre los atributos del certificado de un usuario, sin revelar los valores, como por ejemplo, "`año_actual - año_nacimiento` $\geqslant$ `18`".

Los protocolos criptográficos en los que se especifican en Idemix [18] han sido desarrollados durante años por expertos en el área, donde destacan Jan Camenisch y Anna Lysyanskaya con el desarrollo de la firma CL [4] [3] que se utiliza para firmar certificados sin tener que conocer los valores de todos los atributos, y que permite posteriormente al usuario demostrar que posee dicha firma, sin desvelarla. Esto permite poder utilizar múltiples veces un certificado de manera anónima sin que se relacionen los diferentes usos con la misma persona.

1 Identity Mixer - `https://www.research.ibm.com/labs/zurich/idemix/`

6.3.1 *Notación para ZKP*

Como hemos visto, cualquier problema de decisión posee una prueba de conocimiento cero, y de entre esas pruebas, las pruebas de conocimiento de un secreto son las que se utilizan en los certificados. Utilizaremos la siguiente notación de Camenisch y Stadler [5] para denotar una prueba de conocimiento cero de conocimiento de un secreto.

$$\mathsf{ZKPoK}\{(w) : \mathcal{L}(w, x)\}$$

donde w es un testigo, normalmente el secreto, x es información conocida por ambas partes, y $\mathcal{L}(w, x)$ es un predicado que representa una condición sobre w y x. Se puede leer como "conozco un testigo w tal que el predicado $\mathcal{L}(w, x)$ se cumple para w y x". Para abreviar, en vez de ZKPoK (*Zero-Knowledge Proof of Knowledge*), usaremos ZKP o PK.

Por ejemplo,

$$\mathsf{PK}\{(\alpha) : y = g^{\alpha}\}$$

donde $y \in G =< g >$, un grupo de orden q primo, denota el protocolo de identificación de Schnorr.

6.3.2 *Combinar diferentes pruebas de conocimiento*

Cuando leamos pruebas de conocimiento con varias condiciones, como

$$\mathsf{PK}\{(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_{l'}) : y = \prod_{i=1}^{l} g_i^{\alpha_i} \wedge z = \prod_{i=1}^{l'} h_i^{\beta_i}\}$$

con $g_i, h_i, y, z \in G$, será equivalente a realizar de manera paralela e independiente cada protocolo:

$$\mathsf{PK}\{(\alpha_1, \dots, \alpha_l) : y = \prod_{i=1}^{l} g_i^{\alpha_i}\}$$

y

$$\mathsf{PK}\{(\beta_1, \dots, \beta_{l'}) : z = \prod_{i=1}^{l'} h_i^{\beta_i}\}$$

En el primer mensaje, P envía los testigos de cada uno de los protocolos. Entonces, V envía un único reto, el mismo para cada protocolo. Finalmente, P responde al reto con la respuesta de cada prueba, y V las verifica.

6.3.3 *Probar el conocimiento de una representación*

Una generalización de Schnorr utilizada en Idemix es utilizar l bases $g_1, \dots, g_l$ con $g_i \in G$, siendo g un generador de G con orden $\mathrm{ord}(g) = q$ primo. Sea $y \in G$ tal que conocemos los valores $x_1, \dots, x_l$ que cumplen $y = \prod_{i=1}^{l} g_i^{x_i}$. Una prueba de conocimiento cero de que conocemos la representación de y con respecto a las bases $g_1, \dots, g_l$ consiste en:

Algoritmo 6.4.
P y V conocen y, $g_1, \dots, g_l$, q y el parámetro del sistema k.

1. P escoge aleatoriamente l enteros $r_i \in_R \mathbb{Z}$.
2. $P \to V$: $t = \prod_{i=1}^{l} g_i^{r_i}$.
3. $V \to P$: $c \in_R \{0, 1\}^k$, un entero aleatorio de k bits.
4. $P \to V$: $s_i = r_i - c \cdot x_i \bmod q$, para $i = 1, \dots, l$.
5. V verifica si $t = y^c \prod_{i=1}^{l} g_i^{s_i}$.

La probabilidad de que un P malicioso adivine los k bits aleatorios del reto c es de 2^{-k}. Comprobamos que el protocolo funciona pues

$$y^c \prod_{i=1}^{l} g_i^{s_i} = \left(\prod_{i=1}^{l} g_i^{x_i} \right)^c \prod_{i=1}^{l} g_i^{s_i} = \prod_{i=1}^{l} g_i^{cx_i + r_i - cx_i} = \prod_{i=1}^{l} g_i^{r_i} = t$$

6.3.4 *Firma Camenisch-Lysyanskaya*

El esquema de firma de Camenisch-Lysyanskaya, o firma CL, es la base de los certificados Idemix.

Sean p' y q' dos primos, tal que $p = 2p' + 1$ y $q = 2q' + 1$ también lo son, llamados *primos seguros*. Los parámetros del sistema, conocidos por el firmante y quien comprueba la firma son: el entero $n = pq$, $Z, S, R \in QR_n$ (grupo multiplicativo de los residuos cuadráticos módulo n). La clave secreta del firmante es (p, q) y el mensaje lo denominaremos m. La firma CL sobre m es la tupla (A, e, v) tal que

$$A \equiv \left(\frac{Z}{S^v R^m} \right)^{1/e} \bmod n$$

donde e, v son aleatorios, e primo y $\frac{1}{e} \cdot e \equiv 1 \bmod \varphi(n)$.

Para comprobar que una firma (A, e, v) es correcta, basta comprobar si

$$Z \stackrel{?}{\equiv} A^e S^v R^m \bmod n.$$

La ventaja de esta firma es que se puede aplicar sobre múltiples mensajes a la vez, que en el caso de un certificado, serán los diferentes atributos a firmar. En este caso los parámetros del sistema se mantienen, $n = pq$, $Z, S \in QR_n$, pero debemos calcular un residuo cuadrático por cada mensaje a firmar, $R_0, \dots, R_l \in QR_n$. La clave secreta sigue siendo (p, q), y la firma de los mensajes $m_0, m_1, \dots, m_l$ es (A, e, v) tal que

$$A \equiv \left(\frac{Z}{S^v \prod_{i=0}^{l} R_i^{m_i}} \right)^{1/e} \mod n$$

Para verificar la firma, comprobamos que

$$Z \stackrel{?}{\equiv} A^e S^v \textstyle\prod_{i=0}^{l} R_i^{m_i} \mod n.$$

La firma CL se basa en la *suposición RSA fuerte*, donde tanto el problema RSA y el del logaritmo discreto son difíciles de resolver a la vez, es decir, dado un módulo RSA n, y un valor $u \in \mathbb{Z}_n^*$, es difícil calcular una pareja de valores (e, v), tal que $v^e \equiv u \mod n$.

Como el firmante conoce los factores primos p y q de n, puede calcular, utilizando el Teorema Chino de los Restos, la firma fácilmente, pero quien no la conoce, se enfrenta al problema anterior para deshacer los cálculos.

6.3.5 *Firma Camenisch-Lysyanskaya aleatorizada*

Dada una firma CL (A, e, v), sobre los mensajes $m_0, m_1, \dots, m_l$, podemos obtener una firma $(\acute{A}, e, \hat{v})$ distinta de la anterior, excepto por e, y todavía válida. Esta nueva firma la puede generar cualquier usuario, pues no precisa del secreto (p, q) de la firma original.

La nueva firma se calcula a partir de un entero aleatorio r, tal que $\acute{A} = A \cdot S^{-r} \mod n$ y $\hat{v} = v + er$.

La verificación de $(\acute{A}, e, \hat{v})$ se realiza igual que en la original, ya que:

$$\acute{A}^e S^{\hat{v}} \textstyle\prod_{i=0}^{l} R_i^{m_i} \equiv A^e S^{-er} S^v S^{er} \prod_{i=0}^{l} R_i^{m_i} \equiv A^e S^v \prod_{i=0}^{l} R_i^{m_i} \equiv Z \mod n$$

6.3.6 *Firma de credenciales Idemix*

En la expedición del certificado intervienen el Usuario y el Emisor (por ej., una compañía o gobierno). Durante el protocolo de emisión, el Usuario y el Emisor calculan interactivamente una firma CL, es decir, entre los dos generarán la firma CL, porque ninguno tendrá toda la información necesaria para generar la firma por sí mismo. En cada paso, una prueba de conocimiento cero asegurará que cada parte ha seguido el protocolo.

El Emisor conocerá la factorización de n, mientras que el Usuario guardará su clave secreta, m_0 y, opcionalmente, los atributos del certificado, $m_1, \dots, m_l$. Al final de la firma, el Usuario conocerá una representación, $(m_1, \dots, m_l)$ de $\frac{Z}{A^e S^v}$ con respecto a la base $(R_0, \dots, R_l)$, y como ya hemos visto, podrá demostrar con una prueba de conocimiento cero que conoce dicha representación sin revelar ninguno, o solo un subconjunto. Además, el Emisor no conocerá la firma (A, e, v) final, pues v se calculará también de manera conjunta de modo que sólo el Usuario conocerá el valor final.

A continuación presentamos una versión simplificada del protocolo, donde los atributos son conocidos por el Emisor. En otras versiones el Usuario puede enviar pruebas sobre alguna propiedad del atributo, o pseudónimos, sin revelar el verdadero valor al Emisor. Es importante notar que el número de residuos cuadráticos generados por el emisor, $R_0, \ldots, R_{l'}$ determina el máximo de atributos que puede llevar un certificado.

Algoritmo 6.5 (Emisión de certificado Idemix)**.**
Conocimiento común: $n, Z, S, R_0, \ldots, R_{l'}, m_1, \ldots, m_l$, donde $l' \geqslant l$
Conocimiento del Emisor: p, q tal que $n = pq$.
Conocimiento del Usuario: m_0, su clave secreta.

Protocolo:

1. Ronda 1: Emisor
   1.1. El Emisor escoge un valor aleatorio n_1 y lo envía al Usuario.
2. Ronda 2: Usuario
   2.1. El Usuario elige un valor v' aleatorio (primer paso para calcular el v de la firma).
   2.2. Calcula el valor $U = S^{v'} \cdot R_0^{m_0} \bmod n$.
   2.3. Calcula* la prueba $P_1 := \mathrm{ZKP}\{(v', \mu_0) : U \equiv S^{v'} R_0^{\mu_0} \bmod n\}(n_1)$, no interactiva, dependiente de n_1.
   2.4. Envía U, P_1, n_2, donde n_2 es un valor aleatorio elegido por el Usuario.
3. Ronda 3: Emisor firma CL
   3.1. Verifica* la prueba P_1 del Usuario.
   3.2. Elige un valor un e primo y v'' aleatorios (segundo paso para calcular el v de la firma).
   3.3. Calcula el valor $A = \left(\dfrac{Z}{U \cdot S^{v''} \cdot \prod_{i=1}^{l} R_i^{m_i}} \right)^{1/e} \bmod n$.
   3.4. Calcula* $P_2 := \mathrm{ZKP}\{(\delta) : A \equiv \left(\dfrac{Z}{U \cdot S^{v''} \cdot \prod_{i=1}^{l} R_i^{m_i}} \right)^{\delta} \bmod n\}(n_2)$, no interactiva, dependiente de n_2.
   3.5. Envía (A, e, v'') y P_2 al Usuario.
4. Ronda 4: Usuario
   4.1. Calcula $v = v' + v''$.

4.2. Verifica P_2 y la firma CL (A, e, v).

---

*A continuación mostramos las pruebas y verificaciones correspondientes.

Issuer Secret: p, q	Sys. pars. $(m_1, \dots, m_l)$	**User** Secret: m_0
		Random v' $U := S^{v'} R_0^{m_0} \pmod n$
	$\xleftarrow{U, PK}$	$PK\{(\nu', \mu_0) : U \equiv S^{\nu'} R_0^{\mu_0} \pmod n\}$
Random v'' and prime e $A := \left(\frac{Z}{US^{v''} \prod_1^l R_i^{m_i}} \right)^{1/e} \pmod n$		
$PK\{(\delta) : A \equiv \left(\frac{Z}{US^{v''} \prod_1^l R_i^{m_i}} \right)^{\delta} \pmod n\}$	$\xrightarrow{(A,e,v''),PK}$	$v := v' + v''$ in signature (A, e, v)
		$Z \stackrel{?}{\equiv} A^e S^v \prod_0^l R_i^{m_i} \pmod n$

Figura 2: Idemix: firma de credenciales simplificada.

La prueba de conocimiento P_1 indica que conocemos un ν', primera parte del ν final de la firma CL, y un m_0, nuestra clave secreta, tales que U se representa como (ν', m_0) en la *base* (S, R_0). Utilizando la heurística de Fiat-Shamir, en vez de pedir varios retos al Emisor para conseguir robustez, utilizamos una función de hash junto a un reto n_1 del emisor, llamado en inglés *nonce*. La prueba que se envía consiste en el reto obtenido con el hash, y las respuestas a dicho reto.

Algoritmo 6.6 ($KP\{(\nu', m_0) : U \equiv S^{\nu'} R_0^{m_0} \bmod n\}(n_1)$)**.**

1. Elegir $\tilde{m}_0$ y $\tilde{\nu}'$ aleatorios.
2. Calcular $\tilde{U} = S^{\tilde{\nu}'} \cdot R_0^{\tilde{m}_0} \bmod n$.
3. Reto por heurística Fiat-Shamir: $c = H(U \| \tilde{U} \| n_1)$.
4. Respuestas al *reto*: $\hat{\nu}' = \tilde{\nu}' + c\nu'$, $\hat{m}_0 = \tilde{m}_0 + cm_0$.
5. $P_1 := (c, \hat{\nu}', \hat{m}_0)$.

Para verificar la prueba anterior, por la heurística de Fiat-Shamir (6.1), debemos *recuperar* el valor de U calculado por el Usuario, y comparar los hashes generados.

Algoritmo 6.7 (Verificar $P_1 := (c, \hat{\nu}', \hat{m}_0)(n_1)$)**.**

1. Calcular $\hat{U} = U^{-c} \cdot S^{\hat{\nu}'} R_0^{\hat{m}_0} \bmod n$.
2. Aceptar si $c = H(U \| \hat{U} \| n_1)$.

En la prueba de conocimiento del Verificador, demostramos que conocemos la inversa del e de la firma CL, pero sin desvelar su valor, que solo el Emisor, conocedor de p y q, puede calcular.

Algoritmo 6.8 $(KP\{(e^{-1}) : A \equiv \left(\frac{Z}{U \cdot S^{v''} \cdot \prod_{i=1}^{l} R_i^{m_i}}\right)^{e^{-1}} \bmod n\}(n_2))$**.**

Llamemos $Q := \frac{Z}{U \cdot S^{v''} \cdot \prod_{i=1}^{l} R_i^{m_i}}$.

1. Elegir r aleatorio.
2. Calcular $\tilde{A} = Q^r \bmod n$.
3. Calcular el reto por Fiat-Shamir $c' = H(Q||A||n_2||\tilde{A})$.
4. Calcular la respuesta $s_e = r - c'e^{-1}$.
5. $P_2 := (s_e, c')$.

Como antes, *recuperamos* el valor calculado $\tilde{A}$ y comparamos los hashes.

Algoritmo 6.9 (Verificar $P_2 := (s_e, c')(n_2)$)**.**

1. Calcular $\hat{A} = A^{c'+s_e \cdot e} \equiv A^{c'} Q^{s_e} \bmod n$.
2. Aceptar si $c' = H(Q||A||n_2||\hat{A})$.

6.3.7 *Revelación selectiva de atributos Idemix*

Partiendo de un certificado con la clave secreta m_0, los atributos $m_1, \ldots, m_l$ y la firma CL (A, e, v), vamos a revelar a un Verificador todos nuestros atributos, excepto los dos primeros, m_1 y m_2, y por supuesto, tampoco la clave privada m_0.

Para esto, primero aleatorizaremos la firma CL como vimos en 6.3.5 y realizaremos una prueba no interactiva de que conocemos la representación (m_0, m_1, m_2) (6.3.3) de un cierto valor en una cierta base.

Algoritmo 6.10 (Revelación selectiva)**.**

Conocimiento común: $n, Z, S, R_0, \ldots, R_l, m_3, \ldots, m_l$.

Conocimiento del Usuario: m_0, su clave secreta, m_1 y m_2, sus atributos ocultos, (A, e, v) su firma CL.

Protocolo:

1. V→ P : valor aleatorio n_1.
2. Usuario aleatoriza la firma CL:
   2.1. r aleatorio, $(A' := AS^r(\bmod n)$, e, $v' := v - er)$

3. Usuario calcula la prueba de conocimiento no interactiva:
   $PK\{(\hat{e}, \hat{v}, m_0, m_1, m_2) : \frac{Z}{\prod_3^l R_i^{m_i}} \equiv A'^{\hat{e}} S^{\hat{v}} \prod_{i=0}^{2} R_i^{m_i} \bmod n\}(n_1)$
   3.1. Elige valores aleatorio $\tilde{e}$ y $\tilde{v}'$.
   3.2. Elige valores aleatorios $\tilde{m}_0$, $\tilde{m}_1$ y $\tilde{m}_2$.
   3.3. Calcula $\tilde{Z} := (A')^{\tilde{e}} \left(\prod_{i=0}^{3} R_i^{\tilde{m}_i}\right) S^{\tilde{v}'} \bmod n$.
   3.4. Genera el reto por Fiat-Shamir $c := Hash(A' \| \tilde{Z} \| n_1)$.
   3.5. Calcula:
   $$\hat{e} := \tilde{e} + ce$$
   $$\hat{v}' := \tilde{v} + cv'$$
   $$\hat{m}_i := \tilde{m}_i + cm_i, \text{ para } i = 0, 1, 2.$$
   3.6. $P_1 := (c, \hat{e}, \hat{v}', \hat{m}_0, \hat{m}_1, \hat{m}_2)$.
4. $U \to V : A'$ y P_1.
5. Verificador comprueba:
   5.1. Calcula $\hat{Z} := \left(\frac{Z}{\prod_{i=3}^{l} R_i^{m_i}}\right)^{-c} (A')^{\hat{e}} \left(\prod_{i=0}^{3} R_i^{\hat{m}_i}\right) S^{\hat{v}'} \bmod n$.
   5.2. Acepta si $c = Hash(A' \| \hat{Z} \| n_1)$.

Tras la ejecución del protocolo anterior, el Verificador conoce algunos de nuestros atributos, y una prueba de que el Emisor nos los firmó, junto a nuestra clave secreta, m_0, y otros atributos que hemos ocultado. El Verificador tampoco conoce la firma CL original (A, e, v), sólo A' de la firma aleatorizada, y dos testigos, $\hat{e}$ y $\hat{v}'$ de la misma firma aleatorizada.

Un ejemplo cercano de uso de este protocolo podría ser las encuestas anónimas de asignaturas. Actualmente, si queremos asegurar al alumno que la encuesta es totalmente anónima, sin repercusiones, debemos dejarla *abierta*, pudiendo cualquier persona rellenarla. Si queremos asegurar que sólo los alumnos matriculados puedan acceder a la encuesta, tendrían que iniciar sesión con su correo electrónico, y que confíen en que nadie accederá a sus comentarios.

Con un certificado Idemix, un atributo podría ser "Alumno de la asignatura X", otro sus datos de identificación. La Universidad firmó su certificado, que puede llevar en la tarjeta inteligente, por lo que disponemos de una firma CL. Al iniciar sesión en la encuesta, bastaría con mostrar que se es alumno de la asignatura, y generar la prueba no interactiva de que posee un certificado firmado por la Universidad. Sólo los verdaderos alumnos podrán acceder, y ningún registro puede relacionar una opinión con su autor.

Otras soluciones criptográficas tradicionales sólo se preocupaban de proteger la transmisión, que el mensaje no pudiera ser interceptado. Con las pruebas de conocimiento cero hemos conseguido protegernos ante un interlocutor en quien no confiamos.

6.4 pruebas de conocimiento cero en criptomonedas

ANEXO

A

IMPLEMENTACIONES

En este capítulo mostramos las implementaciones de algunos algoritmos descritos durante el trabajo. Utilizamos para esto un *sistema algebraico computacional* (CAS), de código abierto, llamado `Sage`, construido sobre conocidos paquetes matemáticos como `NumPy`, `Sympy`, `R`, `PARI/GP` o `Maxima`, y que utiliza para programar un lenguaje basado en `Python`.

La ventaja de esta herramienta es la facilidad para manejar estructuras de datos y operaciones que en otros lenguajes sería muy largo de implementar, lo que facilita, además, la lectura del código.

A.1 PRUEBA INTERACTIVA: PROBLEMA DEL RESIDUO CUADRÁTICO

En el capítulo de Pruebas de Conocimiento Cero, la primera prueba interactiva que vimos fue aquella basada en el problema del residuo cuadrático, donde se demuestra que un elemento x es un cuadrado módulo N. Aquí mostramos dos versiones, una donde P conoce una raíz cuadrada de x, y otra versión donde conoce la factorización de N, pues ya vimos que el problema QR es equivalente al problema de la factorización.

Listing 1: ZKP QR almacenando la raíz modular

```
s = 0
t = 0

def Setup():
  global s
  p = random_prime(2^100)
  q = random_prime(2^100)
  N = p*q
  s = Zmod(N).random_element()
  x = s^2
  return x,N

def elegir_u(x,N):
  global t
  t = Zmod(N).random_element()
  return t^2

def enviar_prueba(x,N,u,b):
  if b == 0:
    return t
  else:
    return Zmod(N)(t*s)

x,N = Setup()
u = elegir_u(x,N)
```

```
w = enviar_prueba(x,N,u,1)

print "Comprobar"
print Zmod(N)(w^2)
print Zmod(N)(u*x)
```

Durante la etapa de `Setup` se eligen dos primos aleatorios, p y q, con una magnitud de hasta 2^{100}. El módulo del problema QR será $N = pq$, un número compuesto donde resolver una instancia del problema es difícil. Por último, se elige un valor aleatorio s (de **s**ecreto) en $\mathbb{Z}_N$, cuyo cuadrado será el residuo cuadrático x de la instancia actual del problema. Los valores de p, q y s sólo los conocerá P, mientras que la información común a P y V es N y x, la instancia del problema QR.

A continuación, siguiendo el protocolo 5.4 , P elige su *compromiso* u, un residuo cuadrático de $\mathbb{Z}_N$ al azar. Lo calculamos como x antes, eligiendo un t al azar, y elevando al cuadrado. El valor de t será una de sus raíces cuadradas módulo N.

Por último, `enviar_prueba` recibe como parámetro el *reto* b de V. Según el protocolo, P debe devolver una raíz cuadrada módulo N de u o de $x \cdot u$.

En Listing 1, gracias a que P guarda los valores de s y t, raíces de x y u, respectivamente, le basta con enviar t o $s \cdot t \bmod N$.

En cambio, como vimos en el capítulo de los residuos cuadráticos, la raíz módulo un número primo es fácil de calcular. Por eso, si conocemos la factorización de N, podemos utilizar el Teorema Chino de los Restos para calcular una raíz de $u \cdot x^b \bmod N$ a partir de las raíces módulo p y q. La versión de Listing 2 aplica esta idea, utilizando herramientas de `Sage`, cómo la raíz modular, `ZZ(sqrt(zp))`, o el Teorema Chino de los Restos, `crt()` (Chinese Remainder Theorem).

Listing 2: ZKP QR utilizando TCR

```
p = 0
q = 0

def Setup():
  global p,q
  p = random_prime(2^100)
  q = random_prime(2^100)
  N = p*q
  s = Zmod(N).random_element()
  x = s^2
  return x,N

def elegir_u(x,N):
  t = Zmod(N).random_element()
  return t^2

def enviar_prueba(x,N,u,b):
  if b == 0:
    z = u
  else:
```

```
    z = x*u
  zp = Zmod(p)(z)
  zq = Zmod(q)(z)
  w = crt([ZZ(sqrt(zp)),ZZ(sqrt(zq))],[p,q])
  return w

x,N = Setup()
u = elegir_u(x,N)
w = enviar_prueba(x,N,u,1)

print "Comprobar"
print Zmod(N)(w^2)
print Zmod(N)(u*x)
```

La optimización de operaciones utilizando la factorización de N y el TCR es una técnica utilizada en otros protocolos criptográficos conocidos, como RSA [19], pero el hecho de almacenar p y q, además de la clave privada s, obliga a tener que aplicar medidas de seguridad a más de un valor, existiendo más puntos de ataque a un usuario.

A.2 COMPROMISO DE BIT: PROBLEMA DEL RESIDUO CUADRÁTICO

Como herramienta para las Pruebas de Conocimiento Cero Computacionales, vimos los esquemas de compromiso basados en distintos problemas. Mostramos aquí una implementación del esquema de compromiso con vinculación incondicional basado en residuos cuadráticos 5.32.

Listing 3: Compromiso de bit con QR

```
y = 0

# Accion de P. Configuracion de parametros iniciales.

def Setup():
  p = random_prime(2^100)
  q = random_prime(2^100)
  N = p*q
  a = Zmod(p).random_element()
  while a.is_square():
    a = Zmod(p).random_element()
  b = Zmod(q).random_element()
  while b.is_square():
    b = Zmod(q).random_element()
  s = crt([ZZ(a),ZZ(b)],[p,q])
  #print kronecker(s,N)
  return s,N

# Hiding.

def Hiding(s,N,b):
  global y
```

```
  y = Zmod(N).random_element()
  while gcd(y,N)!=1:
    y = Zmod(N).random_element()
  x = Zmod(N)(s^b*y^2)
  return x

# Opening.

def v(s,N,x,y):
  if Zmod(N)(x-y^2)==0:
    return 0
  elif Zmod(N)(x-s*y^2)==0:
    return 1
  else:
    return -1

s,N = Setup()
x = Hiding(s,N,1)
print v(s,N,x,y)
```

En la etapa de `Setup` elegimos el módulo compuesto $N = pq$, y construimos el no-residuo cuadrático con símbolo de Jacobi 1, $s \in \mathbb{Z}_N^{Q-}$, encontrando primero dos no-residuo cuadráticos módulo p y q respectivamente (símbolo de Legendre -1), y los combinamos utilizando el Teorema Chino de los Restos.

En la etapa de *ocultamiento*, elegimos el valor aleatorio $y \in \mathbb{Z}_N^*$, y calculamos el blob $x = s^b y^2 \bmod N$.

En la *apertura*, la función v recibe como parámetro el valor aleatorio y que abre el blob x.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Michael Ben-Or, Shafi Goldwasser y Avi Wigderson. "Completeness theorems for non-cryptographic fault-tolerant distributed computation". En: *Proceedings of the twentieth annual ACM symposium on Theory of computing*. ACM. 1988, págs. 1-10.

[2] Manuel Blum. "How to Prove a Theorem So No One Else Can Claim It". En: (1986).

[3] Jan Camenisch y Anna Lysyanskaya. "An efficient system for non-transferable anonymous credentials with optional anonymity revocation". En: *International Conference on the Theory and Applications of Cryptographic Techniques*. Springer. 2001, págs. 93-118.

[4] Jan Camenisch y Anna Lysyanskaya. "A signature scheme with efficient protocols". En: *International Conference on Security in Communication Networks*. Springer. 2002, págs. 268-289.

[5] Jan Camenisch y Markus Stadler. "Efficient group signature schemes for large groups". En: *Advances in Cryptology—CRYPTO'97* (1997), págs. 410-424.

[6] David Chaum, Claude Crépeau e Ivan Damgard. "Multiparty unconditionally secure protocols". En: *Proceedings of the twentieth annual ACM symposium on Theory of computing*. ACM. 1988, págs. 11-19.

[7] Claude Crépeau. "Efficient cryptographic protocols based on noisy channels". En: *International Conference on the Theory and Applications of Cryptographic Techniques*. Springer. 1997, págs. 306-317.

[8] Claude Crépeau y Joe Kilian. "Achieving oblivious transfer using weakened security assumptions". En: *Foundations of Computer Science, 1988., 29th Annual Symposium on*. IEEE. 1988, págs. 42-52.

[9] Ivan Damgard y Jesper Buus Nielsen. *Commitment Schemes and Zero-Knowledge Protocols (2011)*.

[10] Louis C. Guillou Jean-Jacques Quisquater y Thomas A. Berson. "How to Explain Zero-Knowledge Protocols to Your Children". En: *Advances in Cryptology - CRYPTO '89* (1990). Proceedings 435: 628-631. `http://pages.cs.wisc.edu/~mkowalcz/628.pdf`.

[11] Adrián Sánchez Martínez. *La cueva.* Imagen.

[12] Alfredo Marín. *Apuntes de Grafos y Optimización Discreta*. 2014.

[13] Alfred J Menezes, Paul C Van Oorschot y Scott A Vanstone. *Handbook of applied cryptography*. CRC press, 1996.

[14] David S. Johnson Michael R. Garey. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. First Edition. Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman, 1979. ISBN: 0716710455,9780716710455. URL: `http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=77F747B4A3CC87AAF94F6A9EA1CBC1CF`.

[15] José Luis Gómez Pardo. *Introduction to Cryptography with Maple*. Springer Science & Business Media, 2012.

[16] José Luis Gómez Pardo. *Introduction to Cryptography with Maple.* Springer Verlag, 2013. ISBN: 978-3-642-32165-8.

[17] Josef Pieprzyk, Thomas Hardjono y Jennifer Seberry. *Fundamentals of computer security*. Springer Science & Business Media, 2013.

[18] *Specification of the Identity Mixer Cryptographic Library (v2.3.43)*. Inf. téc. IBM Research, ene. de 2013.

[19] William Stallings. *Cryptography and Network Security: Principles and Practice*. 6.ª ed. Pearson Ed. Inc., 2014. ISBN: 978-0-13-335469-0. URL: http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=d143a3988f2f36b0de0083f78915e60b.

[20] Douglas R Stinson. *Cryptography: theory and practice*. CRC press, 2005.

[21] Douglas R. Stinson. "Discrete mathematics and its applications". En: (2006). Ed. por Kenneth H Rosen.