

# Pruebas de Conocimiento Cero y sus Aplicaciones

---

José Luis Cánovas Sánchez

Tutores:

Antonio José Pallarés Ruiz

Leandro Marín Muñoz

18 de julio de 2017

Universidad de Murcia

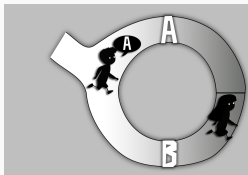
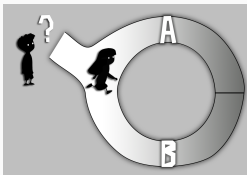
Facultad de Matemáticas

# Zero-Knowledge Proof

*An interactive method by which one party (the prover) can prove to another party (the verifier) that a given statement is true.*

*From the proof, we get no other information apart from the fact that the statement is indeed true.*

The cave with the magic door.



## **The Statement: Decision Problems**

---

## Definition (Decision Problem)

General description of a task which depend on some parameters and which possible answers are in the set  $\{True, False\}$ .

**Name** *of the problem.*

**Parameters** *the problem depends on.*

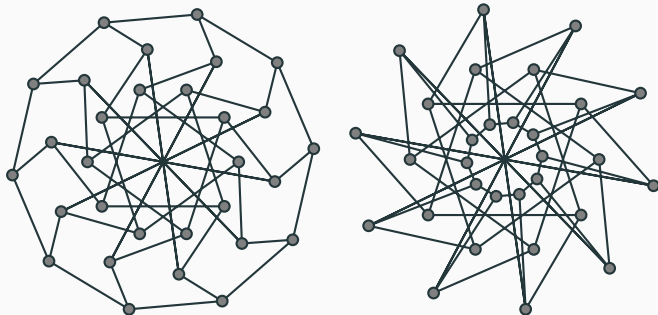
**Question** *such the possible answers are True or False.*

# Graph Isomorphism

**Name** Graph Isomorphism Problem (GI).

**Parameters** Given two graphs  $G_1 = (V_1, E_1)$  and  $G_2 = (V_2, E_2)$  with  $|V_1| = |V_2| = n$ .

**Question** Is there an isomorphism  $\tau : V_1 \rightarrow V_2$  such that an edge  $(u, v) \in E_1$  if and only if  $(\tau(u), \tau(v)) \in E_2$ ?



## Example Problem: Quadratic Residues

---

# Quadratic Residues

## Definition

Given  $x \in \mathbb{Z}_n^*$  we say that  $x$  is a *quadratic residue* modulo  $n$  if there exists an  $a \in \mathbb{Z}_n^*$  such that

$$x \equiv a^2 \pmod{n}.$$

If said  $a$  doesn't exist, then  $x$  is called a *quadratic non-residue*.

We define  $Q_n$  as the set of quadratic residues modulo  $n$ , and  $\overline{Q_n}$  the set of quadratic non-residues.

# Quadratic Residues: Legendre Symbol

## Definición (Legendre Symbol)

Given an odd prime  $p$  and an integer  $a$ , we define the *Legendre Symbol* as:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{if } a \equiv 0 \pmod{p} \\ 1, & \text{if } a \in Q_p \\ -1, & \text{if } a \in \overline{Q_p} \end{cases}$$



# Quadratic Residues: Jacobi Symbol

## Definición (Jacobi Symbol)

Be  $n$  is an odd integer with prime factorization  $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ , and  $a$  an integer. Then we define the *Jacobi Symbol* of  $a$  as:

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{e_1} \cdot \left(\frac{a}{p_2}\right)^{e_2} \cdots \left(\frac{a}{p_t}\right)^{e_t}$$

# Quadratic Residues: Properties

- Using the **Chinese Remainder Theorem** it is equivalent to work with quadratic residues in  $\mathbb{Z}_{pq}$  or in  $\mathbb{Z}_p$  and  $\mathbb{Z}_q$ .
- We can compute a **square root** modulo a **prime** in polynomial time with **Tonelli Algorithm**.
- Given a module **factorization**, we can compute the modular **square roots** in polynomial time with the *Chinese Remainder Theorem* and *Tonelli Algorithm*.
- **Jacobi** Symbol can be computed in polynomial time **without** the module factorization.
- **Jacobi** Symbol 1 does not imply a *quadratic residue*.

## Quadratic Residues: QR Problem

**Name** Quadratic residue problem (QR).

**Parameters** Given a composite integer  $N = pq$  and the integer  $x$  with Jacobi Symbol  $\left(\frac{x}{N}\right) = 1$ .

**Question** Is  $x$  a quadratic residue in  $\mathbb{Z}_N$ ?  $\exists a \in \mathbb{Z}_N : x \equiv a^2(N)$ ?

# Pruebas Interactivas

---

**Probador (P)** computacionalmente *todopoderosa*.

**Verificador (V)** cómputo limitado, probabilístico de tiempo de polinomial.

$$P \rightleftharpoons V$$

**Objetivo:** P quiere probar una instancia de un problema de decisión.

## Definición (Sistema de Prueba Interactiva)

Un problema de decisión  $Q$  tiene un *sistema de prueba interactiva* si tiene un protocolo de interacción polinomialmente acotado en número de mensajes que cumple:

- *Complejidad* Para toda instancia  $q$  Verdadera, del problema  $Q$ ,  $V$  acepta  $q$  como Verdadera.
- *Robustez* Para cada instancia  $q$  Falsa,  $V$  rechaza la prueba de  $q$  con una probabilidad no menor que  $\epsilon = 1 - n^{-c}$ , para cualquier constante  $c > 0$  y donde  $n$  es el tamaño de la instancia.

## Ejemplo Pruebas Interactivas: Problema QR

### Teorema

*El problema QR tiene un sistema de prueba interactivo.*

**Nombre** Problema de los residuos cuadráticos (QR).

**Parámetros**  $N$  un entero impar tal que  $N = pq$  para  $p$  y  $q$  primos, y el entero  $x$  tal que  $\left(\frac{x}{N}\right) = 1$ .

**Pregunta** ¿Es  $x$  un residuo cuadrático en  $\mathbb{Z}_N^*$ ?

## Ejemplo Pruebas Interactivas: Problema QR

### Prueba interactiva para QR $(x, N)$

Sea  $t(n)$  un polinomio en  $n$ , el tamaño de la instancia  $(x, N)$ . P y V repiten  $t(n)$  veces los siguientes pasos.

1.  $P \rightarrow V$  :  $u \in_R \mathbb{Z}_N^{Q+}$ , un residuo cuadrático en  $\mathbb{Z}_N$ .
2.  $V \rightarrow P$  :  $b \in_R \{0, 1\}$ .
3.  $P \rightarrow V$  :  $w$ , una raíz cuadrada aleatoria de  $u \cdot x^b$ .
4. V comprueba si:

$$w^2 \stackrel{?}{\equiv} \begin{cases} u \bmod N, & \text{si } b = 0 \\ xu \bmod N, & \text{si } b = 1. \end{cases}$$

Si la comparación falla, V termina en rechazo. En caso contrario, vuelve al paso 1.



## Ejemplo Pruebas Interactivas: Problema QR

### Demostración.

La prueba es **completa**:

Instancia  $(x, N)$  *Verdadera*  $\Rightarrow x$  es residuo cuadrático, existe raíz.

$P$  computacionalmente todopoderoso  $\Rightarrow$  puede calcular  $w$  raíz de  $u$  o  $xu$ , residuos cuadráticos.

$V$  acepta la prueba de  $P$ .



## Ejemplo Pruebas Interactivas: Problema QR

### Demostración.

La prueba es **robusta**:

Instancia *Falsa*,  $x$  no residuo cuadrático.  $P^*$  intenta adivinar el reto  $b \in_R \{0, 1\}$ .

- Si  $b = 0$ , sigue el protocolo, elige  $u \in_R \mathbb{Z}_N^{Q+}$ .
- Si  $b = 1$ , elige  $u \equiv x^{-1}a^2 \pmod{N}$ , con  $a \in_R \mathbb{Z}_N$ . Responde con  $w = a$ .  $V$  comprobará  $w^2 \equiv a^2 \stackrel{?}{=} x \cdot x^{-1}a^2 \equiv a^2 \pmod{N}$ .

Si  $P^*$  falla al adivinar, o no existirá raíz de  $xu$ , o  $w^2 \not\equiv u \pmod{N}$ .

Probabilidad de acertar el reto  $b$ :  $\frac{1}{2}$ .

Probabilidad de pasar la prueba:  $2^{-t(n)}$ .



# Pruebas de Conocimiento Cero

---

## Definición (Ensamble)

Llamamos ensamble probabilístico a una familia de variables aleatorias  $\{X_i\}_{i \in I}$ , con  $I$  numerable.

$$Vista_{P,V^*}(q, h) = (q, h, A_1, B_1, C_1, \dots, A_{t(n)}, B_{t(n)}, C_{t(n)}).$$

## Definición (Simulador)

Un Simulador  $S_{V^*}(q, h)$  es un algoritmo probabilístico de tiempo polinomial, que utiliza toda la información que  $V^*$  tiene disponible, para generar una transcripción de una prueba interactiva, para una instancia  $q$  del problema  $Q$ , sin necesidad de interactuar con  $P$ .

## Definición (Propiedad de conocimiento cero)

Un sistema de prueba interactiva (completo y robusto), para un problema de decisión  $Q$ , es de *conocimiento cero* si el ensamble  $Vista_{P,V}(q, h)$  es idéntico al ensamble generado por un Simulador  $S_{V^*}(q, h)$ , para cualquier instancia *Verdadera*  $q \in Q$  y cualquier historial  $h$ .

Toda la información que se pueda obtener de interactuar con  $P$ , se puede obtener sin interactuar con  $P$ .

**Nota:** Si  $V$  no sigue el protocolo, elegirá los retos en base a un algoritmo  $F(\cdot)$  en base a toda la información disponible.

# Pruebas de Conocimiento Cero: Problema QR

## Teorema

*La prueba interactiva del problema QR es de conocimiento cero.*

## Demostración

### Variables aleatorias

$U_i$  El residuo cuadrático aleatorio enviado por P en el primer mensaje,  $u \in_R \mathbb{Z}_N^{Q+}$ .

$B_i$  El reto aleatorio generado por V,  $b \in_R \{0, 1\}$ .

$W_i$  La *prueba* de P,  $w \in_R \Omega_u$  o bien  $w \in_R \Omega_{xu}$ .

$$Vista_{P,V^*}(x, N, h) = (x, N, h, U_1, B_1, W_1, \dots, U_{t(n)}, B_{t(n)}, W_{t(n)})$$

## Probabilidad en la Vista

$$P(U_i = u, B_i = b, W_i = w) =$$

$$P(U_i = u) \cdot P(B_i = b \mid U_i = u) \cdot P(W_i = w \mid U_i = u, B_i = b)$$

- Sea  $\alpha = |\mathbb{Z}_N^{Q+}|$ , entonces  $P(U_i = u) = \frac{1}{\alpha}$ .
- Denotamos  $P(B_i = b \mid U_i = u) = p_b$ , dependerá de  $F$ .
- Por último, sea  $\beta = |\Omega_u| = |\Omega_{xu}|$ .  $u$  fijo por construcción.

Entonces:

$$P(W_i = w \mid U_i = u, B_i = 0) = 1/\beta, \quad \forall w \in \Omega_u$$

$$P(W_i = w \mid U_i = u, B_i = 1) = 1/\beta, \quad \forall w \in \Omega_{xu}$$

En total nos queda:  $P(U_i = u, B_i = b, W_i = w) = \frac{p_b}{\alpha\beta}$ .

## Pruebas de Conocimiento Cero: Problema QR

**Simulador** Instancia  $(x, N)$  *Verdadera* del problema QR.

*Ejecución:* Generadas las primeras  $i$  rondas. Repetir para  $i + 1 \leq t(n)$ :

1. Elegir  $b_{i+1} \in_R \{0, 1\}$
2. Elegir  $w_{i+1} \in_R \mathbb{Z}_N^*$
3. **Si**  $b_{i+1} = 0$ , **entonces** calcular  $u_{i+1} \equiv w_{i+1}^2 \bmod N$   
**Si no,**  $u_{i+1} \equiv w_{i+1}^2 \cdot x^{-1} \bmod N$
4. **Si**  $b_{i+1} = F(x, N, h, v_i, u_{i+1})$ , **entonces** añadir la tupla  $(u_{i+1}, b_{i+1}, w_{i+1})$  a la transcripción. **Si no,** volver al paso 1.
5.  $i = i + 1$



## Probabilidad del Simulador

$$P(U_i = u, B_i = b, W_i = w) = \\ P(W_i = w) \cdot P(B_i = b \mid U_i = u) \cdot P(U_i = u \mid W_i = w, B_i = b)$$

- Sabemos que  $|\mathbb{Z}_N^*| = \alpha \cdot \beta$ , por lo que  $P(W_i = w) = \frac{1}{\alpha\beta}$ .
- $U_i$  de *Sym* tiene la misma distribución que  $U_i$  de la *Vista*:

$$\begin{aligned} P(U_i = u) &= \sum_{w \in \Omega_U} P(U_i = u, W_i = w, B_i = 0) + \sum_{w \in \Omega_{xu}} P(U_i = u, W_i = w, B_i = 1) = \\ &= \sum_{w \in \Omega_U} P(W_i = w)P(B_i = 0) + \sum_{w \in \Omega_{xu}} P(W_i = w)P(B_i = 1) = \\ &= \beta \cdot \frac{1}{\alpha\beta} \cdot (P(B_i = 0) + P(B_i = 1)) = \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

$\Rightarrow P(B_i = b \mid U_i = u) = p_b$ , depende de  $F(\cdot)$ .

- $P(U_i = u \mid W_i = w, B_i = b) = 1$  por construcción de  $u$ .

$$P(U_i = u, B_i = b, W_i = w) = \frac{p_b}{\alpha\beta}. \quad \square$$

↑ **Perfectas** Igualdad de los ensambles.

**Estadísticas** Igualdad asintótica de los ensambles.

**Verificador Honesto** Igualdad, suponiendo que  $V$  sigue el protocolo.

**Computacionales** Indistinguibilidad computacional de los ensambles.

# Aplicaciones

---

# Heurística de Fiat-Shamir: Firma digital

Problema: Sincronizar a P y V.

Sustituir reto de V por un valor difícil de predecir: función hash.

→ **Firma digital**

P calcula : el *testigo*  $u$ ,  
el *reto*  $h = \text{hash}(u|m)$ ,  
y la *respuesta*  $w = \xi(u, h)$ .

P  $\rightarrow$  V : **firma del mensaje**  $m$ :  $(h, w)$

V verifica :  $h = \text{hash}(\vartheta(h, w) | m)$ .

# Protocolos de identificación: Fiat-Shamir

*Configuración de la identidad:*

1. La entidad de confianza selecciona y publica  $N = pq$ , con  $p$  y  $q$  primos y secretos.
2. Cada usuario  $P$  genera un secreto  $s \in \mathbb{Z}_N^*$ , coprimo con  $N$  (si no, se podría obtener la factorización de  $N$  y perder la seguridad del protocolo). Calcula  $v \equiv s^2 \bmod N$  y lo envía a la entidad de confianza como su clave pública.

*Protocolo:* Repetir  $t$  rondas:

1.  $P$  escoge aleatoriamente  $r \in_R \mathbb{Z}_N^*$ , el *compromiso*.
2.  $P \rightarrow V$ :  $u \equiv r^2 \bmod N$ , el *testigo*.
3.  $V \rightarrow P$ :  $b \in_R \{0, 1\}$ , el *reto*.
4.  $P \rightarrow V$ :  $w \equiv r \cdot s^b \bmod N$ , la *respuesta*.
5.  $V$  verifica si  $w^2 \equiv u \cdot v^b \bmod N$ .

- **Firma distribuida de la credencial:** las pruebas de conocimiento cero aseguran que se sigue el algoritmo.
- **Muestra selectiva de atributos:** prueba de conocimiento cero sobre la posesión de una firma válida, sin revelarla.

# Pruebas de Conocimiento Cero y sus Aplicaciones

---

José Luis Cánovas Sánchez

Tutores:

Antonio José Pallarés Ruiz

Leandro Marín Muñoz

18 de julio de 2017

Universidad de Murcia

Facultad de Matemáticas

# Complexity classes

## Definition (Class P)

The set of decision problems which can be solved in polynomial time.

## Definition (Class NP)

The set of decision problems where a *True* answer can be verified in polynomial time, given some extra information (certificate).

## Fact

$$P \subset NP$$

## Millennium Problem

$$P \stackrel{?}{=} NP$$

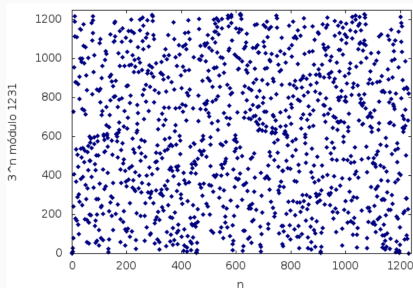


# Discrete Logarithm

**Name** Discrete Logarithm problem (DL).

**Parameters** A cyclic group  $G = \langle g \rangle$  of prime order  $q$ , an element  $y \in G$ .

**Question** Does P know  $s \in \mathbb{Z}_q$  such that  $g^s = y$ , or  $\log_g y = s$ ?



Discrete Logarithm with

$G = \mathbb{Z}_{1231}$ ,  $g = 3$ .

Adolfo Quirós Gracián. *Grupos y criptografía: de Julio César a las curvas elípticas*.

# Complexity classes

## Definition (Polynomial-time reduction $L_1 \leq_P L_2$ )

Be  $L_1$  and  $L_2$  two decision problems.  $L_1$  can be reduced in polynomial time to  $L_2$  if  $L_1$  can be solved using  $L_2$  as a subroutine plus a polynomial time.

## Definition (Class NP-complete or NPC)

A decision problems  $L$  is in **NPC** if:

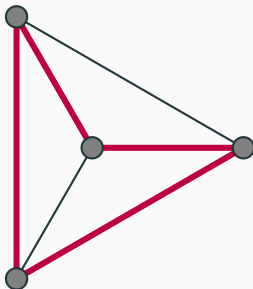
1.  $L \in \mathbf{NP}$ , and
2.  $L_1 \leq_P L \quad \forall L_1 \in \mathbf{NP}$ .

# Hamiltonian Cycle <sup>NPC</sup>

**Name** Hamiltonian Cycle Problem (HC).

**Parameters** Given graph  $G = (V, E)$ .

**Question** Does there exist a Hamiltonian cycle in  $G$ ?

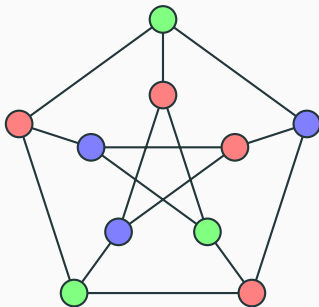


# Graph 3-colorability <sup>NPC</sup>

**Name** Graph 3-colorability Problem (G3C).

**Parameters** Given graph  $G = (V, E)$ .

**Question** Is there a function  $\phi : V \rightarrow \{1, 2, 3\}$  such that  
 $\phi(u) \neq \phi(v) \quad \forall (u, v) \in E$ ?



# Quadratic residue

**Name** Factorization problem (FACT).

**Parameters** Positive integer  $N$ .

**Question** Are there integers  $p, q \geq 2$  such that  $N = pq$ ?

**Name** Quadratic residue problem (QR).

**Parameters** Given a composite integer  $N = pq$  and the integer  $x$  with Jacobi Symbol  $\left(\frac{x}{N}\right) = 1$ .

**Question** Is  $x$  a quadratic residue in  $\mathbb{Z}_N$ ?  $\exists a \in \mathbb{Z}_N : x \equiv a^2(N)$ ?

**Theorem**

$QR \leq_P FACT$

# Residuos Cuadráticos: Símbolo de Jacobi

## Propiedades del Símbolo de Jacobi.

Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  y sean  $m, n$  enteros positivos impares:

1. Si  $a \equiv b \pmod{n}$  entonces  $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)$ .
2.  $\left(\frac{a^2}{n}\right) = 1$ .
3.  $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right) \left(\frac{b}{n}\right)$ .
4.  $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{(n-1)/2}$ .
5.  $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{(n^2-1)/8}$ .
6.  $\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{(n-1)(m-1)/4} \left(\frac{n}{m}\right)$  *Ley de Reciprocidad Cuadrática.*

## Residuos Cuadráticos: Símbolo de Jacobi

Podemos calcular el Símbolo de Jacobi  $\left(\frac{a}{b}\right)$  en tiempo polinomial **sin conocer la factorización de  $b$** :

1. En caso de que  $a$  sea mayor que  $b$ , reducirlo módulo  $b$ ,  
 $a := a \bmod b$ .
2. Si  $a$  es 0, devolver 0.
3. Si  $a$  es 1, devolver 1.
4. Dividir  $a$  por 2 para ponerlo en la forma  $a = 2^e a'$  con  $a'$  impar. Si  $e$  es par o  $b \equiv \pm 1 \bmod 8$  poner  $s := 1$ , en caso contrario poner  $s := -1$ .
5. Finalmente si  $a' \equiv 3 \bmod 4$  y  $b \equiv 3 \bmod 4$  devolver  $-s \text{Jacobi}(b, a')$  y en caso contrario devolver  $s \text{Jacobi}(b, a')$ .

## Definición

Denominamos clase de problemas **IP** (Interactivos en tiempo Polinomial) al conjunto de problemas de decisión para los que existe un sistema de prueba interactivo.



# Pruebas Interactivas

## Teorema

$\text{NP} \subset \text{IP}$ .

## Demostración.

Sea  $Q$  un problema **NP**. Definimos el siguiente protocolo:

1.  $P$  resuelve la instancia del problema gracias a su capacidad de cómputo ilimitada y genera el certificado para  $V$ .
2.  $V$  recibe y verifica el certificado en tiempo polinomial. Si es válido,  $V$  acepta como *Verdadera* la instancia. Si no, rechaza la prueba.

