Pruebas de Conocimiento Cero y sus Aplicaciones

José Luis Cánovas Sánchez

Tutores:
Antonio José Pallarés Ruiz
Leandro Marín Muñoz

15 de julio de 2017

Universidad de Murcia
Facultad de Matemáticas

Outline

Decision Problems

Decision Problem

Definition (Decision Problem)

General description of a task which depend on some parameters and which possible answers are in the set $\{True, False\}$.

Name *A characteristic name.*

Parameters *Arguments the problem depends on.*

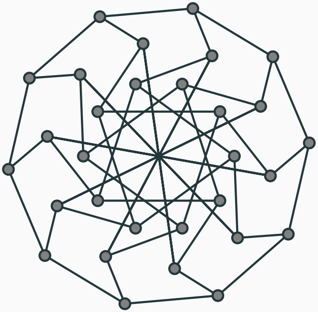
Question *Question such the possible answers are* $True$ *or* $False$.

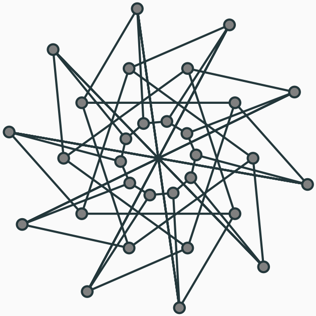
Graph Isomorphism

Name Graph Isomorphism Problem (GI).

Parameters Given two graphs $G_1 = (V_1, E_1)$ and $G_2 = (V_2, E_2)$ with $\mid V_1 \mid = \mid V_2 \mid = n$.

Question Is there an isomorphism $\tau : V_1 \to V_2$ such that an edge $(u, v) \in E_1$ if and only if $(\tau(u), \tau(v)) \in E_2$?





Complexity classes

Definition (Class P)

The set of decision problems which can be solved in polynomial time.

Definition (Class NP)

The set of decision problems where a *True* answer can be verified in polynomial time, given some extra information (certificate).

Fact

$P \subset NP$

Millennium Problem

$P \stackrel{?}{=} NP$

Quadratic Residues

Quadratic Residues

Definición

Given $x \in \mathbb{Z}_n^*$ we say that x is a *quadratic residue* modulo n if there exists an $a \in \mathbb{Z}_n^*$ such thtat

$x \equiv a^2 \, mod \, n$.

If said a doesn't exist, then x is called a *quadratic non-residue*.

We define Q_n as the set of quadratic residues modulo n, and $\overline{Q_n}$ the set of quadratic non-residues.

Quadratic Residues: Properties

- Given a prime p, $|Q_p| = |\overline{Q_p}| = \frac{p-1}{2}$.
- Given n, m coprime, $x \in \mathbb{Z}_{mn}$ is a quadratic residue if and only if $x \ mod \ m$ and $x \ mod \ n$ are respectively quadratic residues in $\mathbb{Z}_m$ and $\mathbb{Z}_n$.
- If a and b are square roots of $x \ mod \ m$ and $x \ mod \ n$, we can use the **Chinese Remainder Theorem** to combine both as a square root of x in $\mathbb{Z}_{mn}$.
- Be $n = pq$, p and q different primes, then $|Q_n| = \frac{(p-1)(q-1)}{4}$

Definición (Legendre Symbol)

Given an odd primes p and an integer a, we define the *Legendre Symbol* as:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & if\ \ a \equiv 0\, mod\ p \\ 1, & if\ \ a \in Q_p \\ -1, & if\ \ a \in \overline{Q_p} \end{cases}$$

Definición (Jacobi Symbol)

Be n is an odd integer with prime factorization $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$, and a an integer. Then we define the *Jacobi Symbol* of a as:

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{e_1} \cdot \left(\frac{a}{p_2}\right)^{e_2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{p_t}\right)^{e_t}$$

Quadratic Residues

- We can compute a **square root** modulo a prime in polynomial time with **Tonelli Algorithm**.
- **Jacobi** Symbol can be computed in polynomial time **without** the module factorization.
- **Jacobi** Symbol 1 does not imply a *quadratic residue*.
- Given a module **factorization**, we can compute the modular **square roots** in polynomial time with the *Chinese Remainder Theorem* and *Tonelli* Algorithm.

Quadratic Residues: QR Problem

Name Quadratic residue problem (QR).

Parameters Given a composite integer $N = pq$ and the integer x with Jacobi Symbol $\left(\frac{x}{N}\right) = 1$.

Question Is x a quadratic residue in $\mathbb{Z}_N$? $\exists a \in \mathbb{Z}_N : x \equiv a^2 (N)$?

Pruebas Interactivas

Probador (P) computacionalmente *todopoderosa*.

Verificador (V) cómputo limitado, probabilístico de tiempo de polinomial.

$$P \leftrightarrows V$$

Objetivo: P quiere probar *algo* a V, p. ej., que una instancia de un problema es *Verdadera*.

Definición (Sistema de Prueba Interactiva)

Un problema de decisión Q tiene un *sistema de prueba interactiva* si tiene un protocolo de interacción polinomialmente acotado en número de mensajes que cumple:

- *Completitud* Para toda instancia q *Verdadera*, del problema Q, V acepta q como *Verdadera*.
- *Robustez* Para cada instancia q *Falsa*, V rechaza la prueba de q con una probabilidad no menor que $\epsilon = 1 - n^{-c}$, para cualquier constante $c > 0$ y donde n es el tamaño de la instancia.

Ejemplo Pruebas Interactivas: Problema QR

Teorema

El problema QR tiene un sistema de prueba interactivo.

Nombre Problema de los residuos cuadráticos (QR).

Parámetros N un entero impar tal que $N = pq$ para p y q primos, y el entero x tal que $\left(\frac{x}{N}\right) = 1$.

Pregunta ¿Es x un residuo cuadrático en $\mathbb{Z}_N^*$?

Ejemplo Pruebas Interactivas: Problema QR

Prueba interactiva para QR (x, N)

Sea $t(n)$ un polinomio en n, el tamaño de la instancia (x, N). P y V repiten $t(n)$ veces los siguientes pasos.

1. P $\rightarrow$ V : $u \in_R \mathbb{Z}_N^{Q+}$, un residuo cuadrático en $\mathbb{Z}_N$.
2. V $\rightarrow$ P : $b \in_R \{0, 1\}$.
3. P $\rightarrow$ V : w, una raíz cuadrada aleatoria de $u \cdot x^b$.
4. V comprueba si:

$$w^2 \stackrel{?}{\equiv} \begin{cases} u \, mod \, N, & si \;\; b = 0 \\ xu \, mod \, N, & si \;\; b = 1. \end{cases}$$

Si la comparación falla, V termina en rechazo. En caso contrario, vuelve al paso 1.

Ejemplo Pruebas Interactivas: Problema QR

Demostración.

La prueba es **completa**:

Instancia (x, N) *Verdadera* $\Rightarrow$ x es residuo cuadrático, existe raíz.

P computacionalmente todopoderoso $\Rightarrow$ puede calcular w raíz de u o xu, residuos cuadráticos.

V acepta la prueba de P. $\square$

Ejemplo Pruebas Interactivas: Problema QR

Demostración.

La prueba es **robusta**:

Instancia *Falsa*, x no residuo cuadrático. P* intenta adivinar el reto $b \in_R \{0, 1\}$.

- Si $b = 0$, sigue el protocolo, elige $u \in_R \mathbb{Z}_N^{Q+}$.
- Si $b = 1$, elige $u \equiv x^{-1}a^2 \; mod \; N$, con $a \in_R \mathbb{Z}_N$. Responde con $w = a$. V comprobará $w^2 \equiv a^2 \stackrel{?}{\equiv} x \cdot x^{-1}a^2 \equiv a^2 \; mod \; N$.

Si P* falla al adivinar, o no existirá raíz de xu, o $w^2 \not\equiv u \; mod \; N$.

Probabilidad de acertar el reto b: $\frac{1}{2}$.

Probabilidad de pasar la prueba: $2^{-t(n)}$.

$\square$

Pruebas de Conocimiento Cero

Pruebas de Conocimiento Cero

Definición (Ensamble)

Llamamos ensamble probabilístico (*ensemble* en inglés) a una familia de variables aleatorias $\{X_i\}_{i \in I}$, con I numerable.

$$Vista_{P,V^*}(q,h) = (q,\ h,\ A_1,\ B_1,\ C_1, \ldots,\ A_{t(n)},\ B_{t(n)},\ C_{t(n)}).$$

Definición (Simulador)

Un Simulador $S_{V^*}(q,h)$ es un algoritmo probabilístico de tiempo polinomial, que utiliza toda la información que V* tiene disponible, para generar una transcripción de una prueba interactiva, para una instancia q del problema Q, sin necesidad de interactuar con P.

Si V no sigue el protocolo, elegirá los retos en base a un algoritmo $F(\cdot)$ en base a toda la información disponible.

Definición (Propiedad de conocimiento cero)

Un sistema de prueba interactiva (completo y robusto), para un problema de decisión Q, es de *conocimiento cero* si el ensamble $Vista_{P,V}(q,h)$ es idéntico al ensamble generado por un Simulador $S_{V^*}(q,h)$, para cualquier instancia *Verdadera* $q \in Q$ y cualquier historial h.

Toda la información que se pueda obtener de interactuar con P, se puede obtener sin interactuar con P.

Pruebas de Conocimiento Cero: Problema QR

Teorema

La prueba interactiva del problema QR es de conocimiento cero.

Demostración

Variables aleatorias

- U_i El residuo cuadrático aleatorio enviado por P en el primer mensaje, $u \in_R \mathbb{Z}_N^{Q+}$.
- B_i El reto aleatorio generado por V, $b \in_R \{0, 1\}$.
- W_i La *prueba* de P, $w \in_R \Omega_u$ o bien $w \in_R \Omega_{xu}$.

$$Vista_{P,V^*}(x, N, h) = (x, N, h, U_1, B_1, W_1, \ldots, U_{t(n)}, B_{t(n)}, W_{t(n)})$$

Probabilidad en la Vista

$$P(U_i = u, B_i = b, W_i = w) =$$

$$P(U_i = u) \cdot P(B_i = b \mid V_{i-1} = v, U_i = u, h) \cdot P(W_i = w \mid U_i = u, B_i = b)$$

Sea $\alpha = \mid \mathbb{Z}_N^{Q+} \mid$, entonces $P(U_i = u) = \frac{1}{\alpha}$.

Denotamos $P(B_i = b \mid U_i = u) = p_b$, dependerá de F.

Por último, sea $\beta = \mid \Omega_u \mid = \mid \Omega_{xu} \mid$. u fijo por construcción.
Entonces:

$$P(W_i = w \mid U_i = u, B_i = 0) = 1/\beta,\ \forall w \in \Omega_u$$

$$P(W_i = w \mid U_i = u, B_i = 1) = 1/\beta,\ \forall w \in \Omega_{xu}$$

En total nos queda, $P(U_i = u, B_i = b, W_i = w) = \frac{p_b}{\alpha\beta}$.

Pruebas de Conocimiento Cero: Problema QR

Simulador Instancia (x, N) *Verdadera* del problema QR.
Ejecución: Generadas las primeras i rondas. Repetir para $i + 1 \leq t(n)$:

1. Elegir $b_{i+1} \in_R \{0, 1\}$
2. Elegir $w_{i+1} \in_R \mathbb{Z}_N^*$
3. **Si** $b_{i+1} = 0$, **entonces** calcular $u_{i+1} \equiv w_{i+1}^2 \; mod \; N$
   Si no, $u_{i+1} \equiv w_{i+1}^2 \cdot x^{-1} \; mod \; N$
4. **Si** $b_{i+1} = F(x, N, h, v_i, u_{i+1})$, **entonces** añadir la tupla $(u_{i+1},\ b_{i+1},\ w_{i+1})$ a la transcripción. **Si no**, volver al paso 1.
5. $i = i + 1$

Pruebas de Conocimiento Cero: Problema QR

Probabilidad del Simulador

$$P(U_i = u, B_i = b, W_i = w) =$$

$$P(W_i = w) \cdot P(B_i = b \mid U_i = u) \cdot P(U_i = u \mid W_i = w, B_i = b)$$

Sabemos que $\mid \mathbb{Z}_N^* \mid = \alpha \cdot \beta$, por lo que $P(W_i = w) = \frac{1}{\alpha\beta}$.

$$P(U_i = u) = \sum_{w \in \Omega_u} P(U_i = u, W_i = w, B_i = 0) + \sum_{w \in \Omega_{xu}} P(U_i = u, W_i = w, B_i = 1) =$$

$$= \sum_{w \in \Omega_u} P(W_i = w) P(B_i = 0) + \sum_{w \in \Omega_{xu}} P(W_i = w) P(B_i = 1) =$$

$$= \beta \cdot \frac{1}{\alpha\beta} \cdot (P(B_i = 0) + P(B_i = 1)) = \frac{1}{\alpha}$$

$\Rightarrow U_i$ misma distribución que U_i de la *Vista* $\Rightarrow$
$P(B_i = b = F(\cdot) \mid U_i = u) = p_b$.

$P(U_i = u \mid W_i = w, B_i = b) = 1$ por construcción de u.

$P(U_i = u, B_i = b, W_i = w) = \frac{p_b}{\alpha\beta}$. $\square$

Otros tipos de Pruebas de Conocimiento Cero

$\uparrow$**Perfectas** Igualdad de los ensambles.

Estadísticas Igualdad asintótica de los ensambles.

Verificador Honesto Igualdad, suponiendo que V sigue el protocolo.

Computacionales Indistinguibilidad computacional de los ensambles. Los **esquemas de compromiso** son una herramienta fundamental.

Aplicaciones

Heurística de Fiat-Shamir: Firma digital

Problema: Sincronizar a P y V.

Sustituir reto de V por un valor difícil de predecir: función `hash`.

$\rightarrow$**Firma digital**

$$\begin{aligned} \text{P calcula}: &\quad \text{el } \textit{testigo } u, \\ &\quad \text{el } \textit{reto } h = \textbf{hash(u}|\textbf{m)}, \\ &\quad \text{y la } \textit{respuesta } w = \xi(u,h). \\ \text{P} \rightarrow \text{V}: &\quad \textbf{firma del mensaje } m\text{:} \quad (h,w) \\ \text{V verifica}: &\quad h = hash(\,\vartheta(h,w)\,|\,m\,). \end{aligned}$$

Protocolos de identificación: Fiat-Shamir

Configuración de la identidad:

1. La entidad de confianza selecciona y publica $N = pq$, con p y q primos y secretos.
2. Cada usuario P genera un secreto $s \in \mathbb{Z}_{\mathbb{N}}^*$, coprimo con N (si no, se podría obtener la factorización de N y perder la seguridad del protocolo). Calcula $v \equiv s^2 \; mod \; N$ y lo envía a la entidad de confianza como su clave pública.

Protocolo: Repetir t rondas:

1. P escoge aleatoriamente $r \in_R \mathbb{Z}_{\mathbb{N}}^*$, el *compromiso*.
2. $P \to V$: $u \equiv r^2 \; mod \; N$, el *testigo*.
3. $V \to P$: $b \in_R \{0, 1\}$, el *reto*.
4. $P \to V$: $w \equiv r \cdot s^b \; mod \; N$, la *respuesta*.
5. V verifica si $w^2 \equiv u \cdot v^b \; mod \; N$.

Protocolos orientados a privacidad: Identity Mixer

- **Firma distribuida de la credencial**: las pruebas de conocimiento cero aseguran que se sigue el algoritmo.
- **Muestra selectiva de atributos**: prueba de conocimiento cero sobre la posesión de una firma válida, sin revelarla.

Pruebas de Conocimiento Cero y sus Aplicaciones

José Luis Cánovas Sánchez

Tutores:
Antonio José Pallarés Ruiz
Leandro Marín Muñoz

15 de julio de 2017

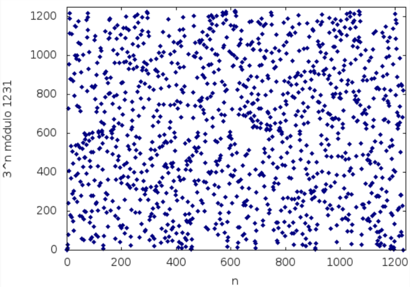
Universidad de Murcia
Facultad de Matemáticas

Discrete Logarithm

Name Discrete Logarithm problem (DL).

Parameters A cyclic group $G = \langle g \rangle$ of prime order q, an element $y \in G$.

Question Does P know $s \in \mathbb{Z}_q$ such that $g^s = y$, or $log_g y = s$?



Discrete Logarithm with $G = \mathbb{Z}_{1231}$, $g = 3$.

Adolfo Quirós Gracián. *Grupos y criptografía: de Julio César a las curvas elípticas.*

Complexity classes

Definition (Polynomial-time reduction $L_1 \leq_P L_2$)

Be L_1 and L_2 two decision problems. L_1 can be reduced in polynomial time to L_2 if L_1 can be solved using L_2 as a subroutine plus a polynomial time.

Definition (Class NP-complete or NPC)

A decision problems L is in **NPC** if:

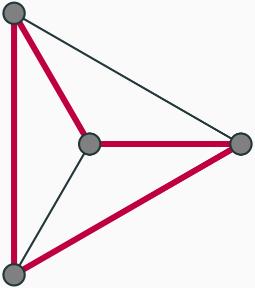
1. $L \in \mathbf{NP}$, and
2. $L_1 \leq_P L \quad \forall L_1 \in \mathbf{NP}$.

Hamiltonian Cycle NPC

Name Hamiltonian Cycle Problem (HC).

Parameters Given graph $G = (V, E)$.

Question Does there exist a Hamiltonian cycle in G?

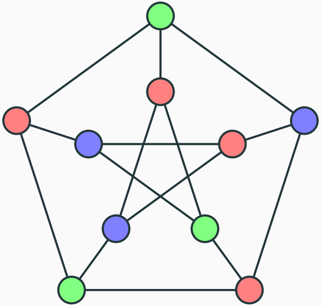


Graph 3-colorability NPC

Name Graph 3-colorability Problem (G3C).

Parameters Given graph $G = (V, E)$.

Question Is there a function $\phi : V \to \{1, 2, 3\}$ such that $\phi(u) \neq \phi(v) \quad \forall (u, v) \in E$?



Quadratic residue

Name Factorization problem (FACT).

Parameters Positive integer N.

Question Are there integers $p, q \geq 2$ such that $N = pq$?

Name Quadratic residue problem (QR).

Parameters Given a composite integer $N = pq$ and the integer x with Jacobi Symbol $\left(\frac{x}{N}\right) = 1$.

Question Is x a quadratic residue in $\mathbb{Z}_N$? $\exists a \in \mathbb{Z}_N : x \equiv a^2 (N)$?

Theorem

$QR \leq_P FACT$

Residuos Cuadráticos: Símbolo de Jacobi

Propiedades del Símbolo de Jacobi.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y sean m, n enteros positivos impares:

1. Si $a \equiv b \; mod \; n$ entonces $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)$.
2. $\left(\frac{a^2}{n}\right) = 1$.
3. $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right)$.
4. $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{(n-1)/2}$.
5. $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{(n^2-1)/8}$.
6. $\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{(n-1)(m-1)/4}\left(\frac{n}{m}\right)$ *Ley de Reciprocidad Cuadrática*.

Residuos Cuadráticos: Símbolo de Jacobi

Podemos calcular el Símbolo de Jabobi $\left(\frac{a}{b}\right)$ en tiempo polinomial **sin conocer la factorización de** b:

1. En caso de que a sea mayor que b, reducirlo módulo b, $a := a \ mod \ b$.
2. Si a es 0, devolver 0.
3. Si a es 1, devolver 1.
4. Dividir a por 2 para ponerlo en la forma $a = 2^e a'$ con a' impar. Si e es par o $b \equiv \pm 1 \ mod \ 8$ poner $s := 1$, en caso contrario poner $s := -1$.
5. Finalmente si $a' \equiv 3 \ mod \ 4$ y $b \equiv 3 \ mod \ 4$ devolver $-s\text{Jacobi}(b, a')$ y en caso contrario devolver $s\text{Jacobi}(b, a')$.

Pruebas Interactivas

Definición

Denominamos clase de problemas **IP** (Interactivos en tiempo Polinomial) al conjunto de problemas de decisión para los que existe un sistema de prueba interactivo.

Pruebas Interactivas

Teorema

NP $\subset$ **IP**.

Demostración.

Sea Q un problema **NP**. Definimos el siguiente protocolo:

1. P resuelve la instancia del problema gracias a su capacidad de cómputo ilimitada y genera el certificado para V.
2. V recibe y verifica el certificado en tiempo polinomial. Si es válido, V acepta como *Verdadera* la instancia. Si no, rechaza la prueba.

$\square$