

Mécanique des Matériaux composites

Version 2, Septembre 2004

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Position du problème d'élasticité anisotrope..... | 5 |
| <i>Éléments mathématiques.....</i> | <i>5</i> |
| Formules de changement de base pour un vecteur :..... | 5 |
| Cas d'une rotation autour de l'axe 3..... | 5 |
| Changement de base pour un tenseur exprimé sous forme matricielle..... | 6 |
| <i>Description des contraintes.....</i> | <i>7</i> |
| Illustration des contraintes dans un cube élémentaire..... | 7 |
| Notation..... | 7 |
| Contraintes principales..... | 8 |
| Notations pour l'ingénieur..... | 8 |
| <i>Description des déformations.....</i> | <i>9</i> |
| Déformations d'un volume élémentaire..... | 9 |
| Définition des déformations..... | 10 |
| Déformations principales..... | 10 |
| Notations pour l'ingénieur..... | 11 |
| Équations de compatibilité..... | 11 |
| <i>Relation contrainte / déformation.....</i> | <i>13</i> |
| Loi de Hooke généralisée..... | 13 |
| Relations de changement de base..... | 14 |
| Caractérisation de matériaux..... | 14 |
| Expression des constantes C_{ij} d'un matériau orthotrope en fonction des paramètres de l'Ingénieur..... | 16 |
| <i>Relation Fondamentale de la Dynamique.....</i> | <i>19</i> |
| Énoncé..... | 19 |
| Résolution du problème d'élasticité en petites déformations..... | 19 |
| Théorie Classique des Stratifiés..... | 21 |
| <i>Étude d'une couche unique dans le cas d'un matériau orthotrope.....</i> | <i>21</i> |
| Contexte..... | 21 |
| État de contraintes planes..... | 21 |
| Matrice de rigidité réduite..... | 22 |
| Détermination des modules d'élasticité..... | 23 |
| Approche des modules d'élasticité par les lois de Halpin-Tsai..... | 24 |
| <i>Expression des déformations dans le cadre de la Théorie de Plaques.....</i> | <i>26</i> |
| Développement limité des déplacements selon la variable x_3 | 26 |
| Expression des déformations..... | 27 |
| <i>Expression des contraintes et des efforts résultants.....</i> | <i>29</i> |
| Expression des contraintes dans une couche..... | 29 |
| Expression des efforts résultants..... | 29 |

| | |
|--|-----------|
| <i>Relations déformations/résultantes</i> | 32 |
| Expression contraintes/déformations pour une couche..... | 32 |
| Prise en compte du cisaillement hors plan..... | 32 |
| Expression des résultantes dans le plan..... | 33 |
| Identification des différentes contributions..... | 34 |
| <i>Relation Fondamentale de la Dynamique appliquée à un élément de plaque</i> | 35 |
| Expression générale..... | 35 |
| Simplifications..... | 36 |
| Expressions des Relations Fondamentales des Stratifiés tenant compte du cisaillement transverse..... | 36 |
| Etude de cas | 39 |
| <i>Position du problème</i> | 39 |
| Ecriture des lois de comportement de différentes architectures..... | 40 |
| Résolution du problème mécanique..... | 42 |
| Etude mécanique des différentes architectures..... | 45 |
| Pour aller plus loin | 47 |
| <i>Problèmes d'environnement</i> | 47 |
| Analyse tri-dimensionnelle..... | 47 |
| Problème du pli..... | 50 |
| Modélisation à l'échelle de la plaque..... | 51 |
| <i>Rupture des composites</i> | 52 |
| Rupture d'un matériau unidirectionnel : Aspects micro-mécaniques..... | 52 |
| Critères de rupture d'un pli..... | 53 |
| Rupture d'une plaque..... | 56 |
| Références bibliographiques | 59 |

Position du problème d'élasticité anisotrope

Éléments mathématiques

Formules de changement de base pour un vecteur :

Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)_R$ les vecteurs de base du repère R et $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)_{R'}$ du repère R'.

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3\end{aligned}$$

les coordonnées d'un vecteur $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)_R = (\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3)_{R'}$ sont :

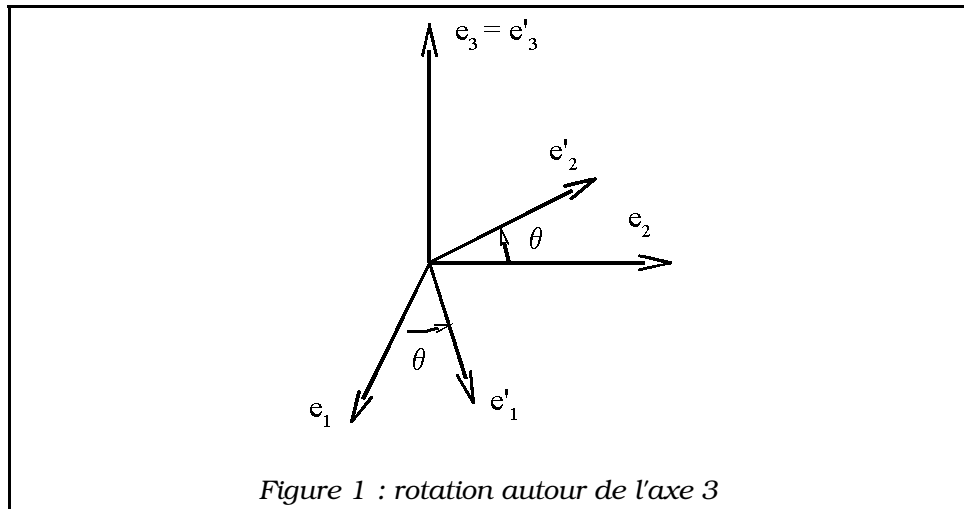
$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_R = A_{R \rightarrow R'} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_R \quad (1)$$

Relation de passage inverse : dans le cas d'une base orthonormée directe, $A^{-1} = A^t$, soit $A_{R' \rightarrow R} = A_{R \rightarrow R'}^t$ (2)

Cas d'une rotation autour de l'axe 3

$$A_{R \rightarrow R'} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Pour obtenir la relation de passage inverse, remplacer θ par $-\theta$.



Changement de base pour un tenseur exprimé sous forme matricielle

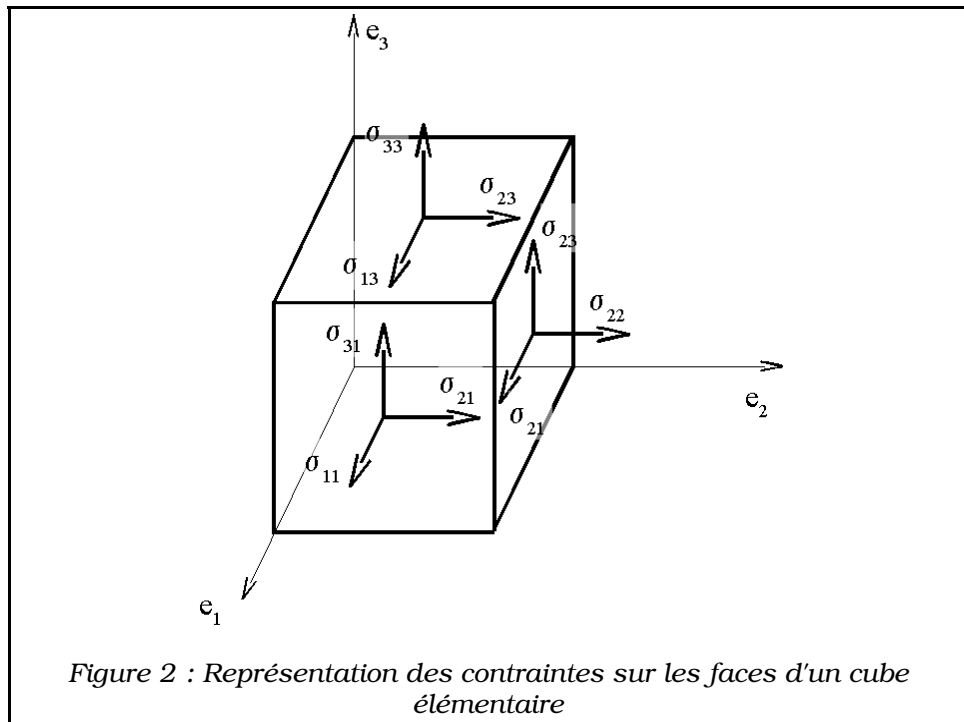
Soit le tenseur $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_R$ dans le repère \mathbf{R} .

Dans le repère \mathbf{R}' , si les bases sont orthonormales directes,

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{A}' \quad (4)$$

Description des contraintes

Illustration des contraintes dans un cube élémentaire



Notation

Le champ de contraintes au point M d'un solide est un tenseur de rang 2 symétrique noté $\sigma(M)$.

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_R \quad (5)$$

comme $\sigma(M)$ est symétrique, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ pour tout $i \neq j$. 6 grandeurs

représentent donc l'état des contraintes en un point M.

Contraintes principales

Il existe un repère dans lequel $\sigma(\mathbf{M})$ est de la forme :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{R_{princ}}$$

Les contraintes dans ce repère sont les contraintes principales. Elles correspondent aux valeurs propres de la matrice $\sigma(\mathbf{M})$. La recherche des contraintes principales et du repère principal revient à résoudre l'équation $([\sigma] - \lambda[I]) = [0]$.

Notations pour l'ingénieur

On peut noter les 6 variables du tenseur des contraintes sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}_R \quad (6)$$

La matrice de changement de base pour une rotation d'angle θ autour de l'axe 3 s'écrit :

$$T_{R \rightarrow R'}^\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

Pour obtenir la relation de passage inverse, remplacer θ par $-\theta$.

Description des déformations

Nota Bene : on se contente ici de *petites déformations*.

Déformations d'un volume élémentaire

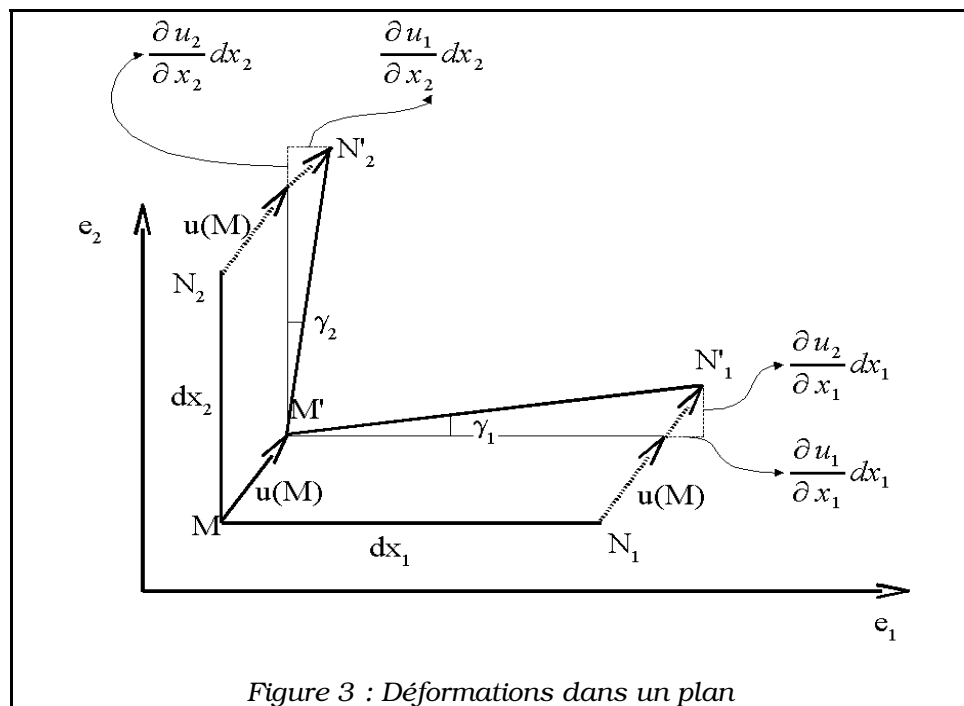


Figure 3 : Déformations dans un plan

En petites déformations, on note que :

$$\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 \approx \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (8)$$

Définition des déformations

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\
 \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\
 \epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
 \epsilon_{12} = \epsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\
 \epsilon_{31} = \epsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\
 \epsilon_{23} = \epsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)
 \end{aligned} \tag{9}$$

Comme dans le cas des contraintes, le champ de déformations au point M d'un solide est donc un tenseur de rang 2 symétrique noté $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{M})$. Il y a donc 6 grandeurs représentant les déformations (3 translations et 3 rotations).

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}_R \tag{10}$$

Déformations principales

Il existe un repère dans lequel $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{M})$ est de la forme : $\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}_{R_{\text{princ}}}$

Les déformations dans ce repère sont les déformations principales. Elles correspondent aux valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{M})$. La recherche des déformations principales et du repère principal revient à résoudre l'équation $([\boldsymbol{\epsilon}] - \lambda[\mathbf{I}]) = [\mathbf{0}]$.

Notations pour l'ingénieur

On note le tenseur des déformations sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\epsilon_{23} \\ \gamma_{13} = 2\epsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\epsilon_{12} \end{pmatrix}_R \quad (11)$$

La matrice de changement de base pour une rotation d'angle θ autour de l'axe 3 s'écrit :

$$T_{R \rightarrow R'}^\epsilon = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

Pour obtenir la relation de passage inverse, remplacer θ par $-\theta$

Remarque : l'expression de $T_{R \rightarrow R'}^\epsilon$ est différente de $T_{R \rightarrow R'}^\sigma$.

Équations de compatibilité

Les équations (9) traduisent qu'il existe un lien entre déplacements et déformations, et entre les déformations elles-mêmes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \\
 \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} \right) \\
 \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial x_2} \right)
 \end{aligned}$$

Les équations (13) sont appelées les **équations de compatibilité**.

Relation contrainte / déformation

Loi de Hooke généralisée

Dans le cadre de ce cours, seuls les problèmes élastiques linéaires seront traités. La relation entre contraintes et déformations peut être caractérisée par :

$\sigma(\mathbf{M}) = \mathbf{C}(\mathbf{M}) \cdot \epsilon(\mathbf{M})$, soit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} & C_{51} & C_{61} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} & C_{52} & C_{62} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} & C_{53} & C_{63} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{54} & C_{64} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{65} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_R \quad (14)$$

ou bien $\epsilon(\mathbf{M}) = \mathbf{S}(\mathbf{M}) \cdot \sigma(\mathbf{M})$, soit :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} & S_{51} & S_{61} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} & S_{42} & S_{52} & S_{62} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{43} & S_{53} & S_{63} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{54} & S_{64} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{65} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R \quad (15)$$

\mathbf{C} est la matrice de rigidité; \mathbf{S} la matrice de souplesse. \mathbf{C} et \mathbf{S} sont des matrices symétriques : il y a donc 21 constantes de rigidité C_{ij} ou constantes de souplesse S_{ij} .

Relations de changement de base

On peut exprimer les matrices de rigidité ou de souplesse de différentes manières selon la base choisie.

En reprenant les formules de changement de base précédentes

(Équations 7 et 12) et les définitions des matrices (Équations 14 et 15), il vient :

$$C_{R'} = T_{R \rightarrow R'}^\sigma C_R T_{R' \rightarrow R}^\epsilon \quad (16)$$

$$S_R = T_{R \rightarrow R'}^\epsilon S_{R'} T_{R' \rightarrow R}^\sigma \quad (17)$$

Caractérisation de matériaux

Matériau triclinique

cas général à matrice complète
21 constantes d'élasticité

Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie : l'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan.

Supposons le plan (e_1, e_2) plan de symétrie du matériau. Si l'on utilise les relations de passage (16) entre le repère $R=(e_1, e_2, e_3)$ et le repère symétrique $R'=(e_1, -e_2, e_3)$ avec la forme générale (14), on montre que la loi de Hooke se résume à l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_{R_{\text{sym}}} \quad (18)$$

13 constantes d'élasticité

Matériau orthotrope

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduit aux expressions **dans un repère défini par les axes d'orthotropie** :

$$\begin{bmatrix}
 C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}
 \end{bmatrix}_{R_{\text{ortho}}} \quad (19)$$

9 constantes d'élasticité

Matériau unidirectionnel

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe e_1 . C'est le cas pour une ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie, le matériau unidirectionnel est orthotrope. Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$\begin{bmatrix}
 C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}
 \end{bmatrix}_{R_{\text{ortho}}} \quad (20)$$

5 constantes d'élasticité

Matériau isotrope :

$$\begin{bmatrix}
 C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2}
 \end{bmatrix}_R \quad (21)$$

2 constantes d'élasticité (coefficients de Lamé ou E, ν)

Exercice :

1- Soit une rotation d'angle θ autour de l'axe 3. Ecrire alors l'expression de la matrice de rigidité. Comment peut-on utiliser au mieux le résultat ?

Expression des constantes C_{ij} d'un matériau orthotrope en fonction des paramètres de l'Ingénieur

Problème de traction : exemple de l'axe e_2

Si l'on exerce une traction selon une direction, par exemple selon e_2 , il vient :

$$\sigma_2 \neq 0 \text{ et } \sigma_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

La relation (20), écrite selon les paramètres de souplesse devient alors :

$$\begin{array}{lll} \epsilon_1 = S_{12} \sigma_2 & \sigma_2 = \frac{1}{S_{22}} \epsilon_2 & E_2 = \frac{1}{S_{22}} \\ \epsilon_2 = S_{22} \sigma_2 & \text{soit } \epsilon_1 = \frac{S_{12}}{S_{22}} \epsilon_2 & \text{d'où } \nu_{21} = -\frac{S_{12}}{S_{22}} \\ \epsilon_3 = S_{32} \sigma_2 & & \\ \epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = 0 & \epsilon_3 = \frac{S_{32}}{S_{22}} \epsilon_2 & \nu_{23} = -\frac{S_{32}}{S_{22}} \end{array}$$

Problème de cisaillement : exemple de l'axe e_6

Dans le cas d'un cisaillement, il vient par exemple :

$$\sigma_6 \neq 0 \text{ et } \sigma_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

La relation (20) devient alors :

$$\begin{array}{ll} \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = 0 & \text{d'où } G_{12} = C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \\ \sigma_6 = C_{66} \epsilon_6 & \end{array}$$

Matrices de souplesse et de rigidité d'un composite orthotrope exprimées dans les axes d'orthotropie

Si les raisonnements élémentaires mentionnés ci-dessus sont étendus aux différentes sollicitations du matériau, il vient :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}}$$

Les constantes de rigidités sont déduites en inversant la matrice de souplesse :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \\ C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{44} &= G_{23} \\ C_{55} &= G_{13} \\ C_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (22)$$

(22 suite)

avec $\Delta = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$

Dans le cas d'un matériau isotrope, les équations (22) se simplifient à :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{12} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \frac{C_{11} - C_{12}}{2} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (23)$$

Conclusion

- Il existe un lien entre les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson : $\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}}$
- le comportement élastique est décrit par 9 modules indépendants :
3 modules d'Young : E_1, E_2, E_3
3 coefficients de Poisson : $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$
3 modules de cisaillement : G_{12}, G_{13}, G_{23}

Relation Fondamentale de la Dynamique

Énoncé

Si l'on pose que les efforts de volume exercés sur un solide (champ de gravité, de champ magnétique...) sont (f_1, f_2, f_3) , et si le repère choisi est galiléen, la Relation Fondamentale de la Dynamique s'écrit localement :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Résolution du problème d'élasticité en petites déformations

Le problème d'élasticité est ramené à la résolution simultanée de :

- La loi de Hooke généralisée (14)
- Les relations déformations/déplacements(9)
- Les équations de compatibilité (13)
- La Relation Fondamentale de la Dynamique (24)
- Les conditions au limites au bord du domaine solide (en déplacement, déformations, ou contraintes)

La résolution d'un tel problème fait appel à des techniques numériques complexes qui ne seront pas abordées ici (éléments finis, éléments frontières, méthode de Rayleigh, ...)

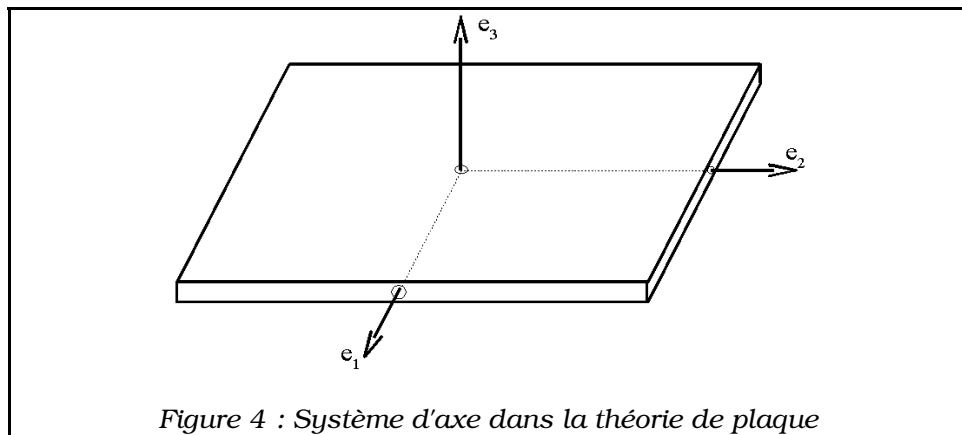
Théorie Classique des Stratifiés

Étude d'une couche unique dans le cas d'un matériau orthotrope

Contexte

Dans ce chapitre, nous nous intéressons plus particulièrement aux plaques (et par extension aux coques) qui constituent une très grosse part de l'utilisation des composites techniques : matériaux stratifiés en bois, tissus ou mat imprégnés, structures sandwich (à nid d'abeilles par exemple), ...

Dans tous ces exemples, une dimension est notablement plus faible que les autres. Nous allons considérer dans la suite qu'il s'agit de l'axe 3.



État de contraintes planes

L'état de contraintes planes peut être défini par une contrainte de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix}_R \quad (25)$$

Il est rencontré si la longueur caractéristique dans une direction (ici la direction 3) est très faible devant les autres. Dans cette expression, le cisaillement transverse est supposé non nul; le plus souvent on le considère comme nul; alors $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$.

Matrice de rigidité réduite

En contraintes planes, et pour un tissu ou un matériau unidirectionnel, la loi de Hooke généralisée, exprimée dans un repère quelconque du plan de la plaque, s'exprime par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & 0 & 0 & C_{61} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & 0 & 0 & C_{62} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{63} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_R$$

Il vient donc que :

$$\begin{aligned} \epsilon_4 &= 0 \\ \epsilon_5 &= 0 \\ \epsilon_3 &= -\frac{1}{C_{33}} (C_{13} \epsilon_1 + C_{23} \epsilon_2 + C_{63} \epsilon_6) \end{aligned}$$

Il est possible d'exprimer σ_1 , σ_2 et σ_6 en fonction de ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_6 :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \left(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right) \epsilon_1 + \left(C_{12} - \frac{C_{13} C_{23}}{C_{33}} \right) \epsilon_2 + \left(C_{16} - \frac{C_{13} C_{63}}{C_{33}} \right) \epsilon_6 \\ \sigma_2 &= \left(C_{12} - \frac{C_{13} C_{23}}{C_{33}} \right) \epsilon_1 + \left(C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} \right) \epsilon_2 + \left(C_{26} - \frac{C_{23} C_{63}}{C_{33}} \right) \epsilon_6 \\ \sigma_6 &= \left(C_{16} - \frac{C_{13} C_{63}}{C_{33}} \right) \epsilon_1 + \left(C_{26} - \frac{C_{23} C_{63}}{C_{33}} \right) \epsilon_2 + \left(C_{66} - \frac{C_{63}^2}{C_{33}} \right) \epsilon_6 \end{aligned}$$

L'équation de comportement du monoplis peut donc s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_R = \mathbf{Q}_R \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_R$$

et

$$\begin{pmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{pmatrix}_R \quad (26)$$

La matrice symétrique \mathbf{Q}_R est appelée « matrice de rigidité réduite ». Elle représente le comportement de la couche anisotrope en contraintes planes.

Dans le cadre de l'étude des matériaux orthotropes, la matrice \mathbf{Q}_R devient dans le repère d'orthotropie :

$$\mathbf{Q}_{princ} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_{ortho} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_R$$

Détermination des modules d'élasticité

Si le composite subit une traction pure selon chacun de ses axes principaux ou un cisaillement plan dans ses axes principaux, on montre facilement que :

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} = Q_{11} - \frac{Q_{12}^2}{Q_{22}} \\ E_2 &= \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} = Q_{22} - \frac{Q_{12}^2}{Q_{11}} \\ \nu_{12} &= -\frac{Q_{12}}{Q_{11}} \\ \nu_{21} &= -\frac{Q_{12}}{Q_{22}} \\ G_{12} &= \frac{\sigma_6}{\epsilon_6} = Q_{66} \end{aligned} \quad (27)$$

A contrario :

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{E_1}{1 - \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2} \\
Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{E_2}{1 - \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2} \\
Q_{12} &= \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \nu_{12} Q_{22} \\
Q_{66} &= G_{12}
\end{aligned} \tag{28}$$

Approche des modules d'élasticité par les lois de Halpin-Tsai

Il est possible dans le cas d'un matériau unidirectionnel d'estimer les propriétés élastiques du composite à partir des propriétés de ses constituants. Bien que l'homogénéisation soit hors du propos de ce cours, les règles suivantes peuvent être retenues en première approximation :

$$\begin{aligned}
E_L &= E_f V_f + E_m (1 - V_f) \\
\nu_{LT} &= \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \\
\text{et} \\
\frac{M}{M_m} &= \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f}
\end{aligned} \tag{29}$$

avec :

- $\eta = \frac{M_f / M_m - 1}{M_f / M_m + \xi}$
- M : E_T , G_{LT} , ou ν_{TT}
- M_m : module correspondant de la matrice
- M_f : module correspondant de la fibre
- ξ : facteur de renforcement des fibres. Par comparaison avec un code aux différences finies, $\xi=1$ pour G_{LT} , $\xi=2$ pour E_T .
- Les indices L, T et T' représentent ici les directions des fibres (L) et transversales (T et T').

Quelques modules typiques :

| Matériau | E (GPa) | ν | G (GPa) | k_f (GPa) | K_f (GPa) |
|--------------------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| Verre E | 73 | 0,22 | 29,9 | 43,5 | 53,4 |
| Verre R | 86 | 0,22 | 35,2 | 51,2 | 62,9 |
| Carbone HM | 380 | 0,33 | 142,9 | 375,5 | 420,2 |
| Carbone HR | 260 | 0,33 | 97,7 | 254,9 | 287,5 |
| kevlar | 135 | 0,37 | 49,3 | 173,1 | 189,5 |
| Matrice époxyde | 3,45 | 0,3 | 1,33 | 2,88 | 3,32 |

Tableau 1 : Modules d'élasticité pour quelques matériaux

On note :

E : module d'élasticité

ν : coefficient de Poisson

G : module de cisaillement $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

k : module de compressibilité isostatique $k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

K : module de compressibilité latérale $K = k + \frac{G}{3}$

Exercice :

Répondre à la question 1 de l'étude de cas (élasticité réduite pour chaque pli). Que sont les grandeurs V_i données dans le texte ?

Expression des déformations dans le cadre de la Théorie de Plaques

Développement limité des déplacements selon la variable x_3

Dans la théorie de plaques, on ramène le comportement des points de la plaque à celui de la surface moyenne et on suppose un champ de déplacement selon la variable x_3 .

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2, 0) + x_3 \varphi_1(x_1, x_2) + x_3^2 \psi_1(x_1, x_2) + x_3^3 \Phi_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1, x_2, 0) + x_3 \varphi_2(x_1, x_2) + x_3^2 \psi_2(x_1, x_2) + x_3^3 \Phi_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_1, x_2, 0) + x_3 \varphi_3(x_1, x_2) + x_3^2 \psi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (30)$$

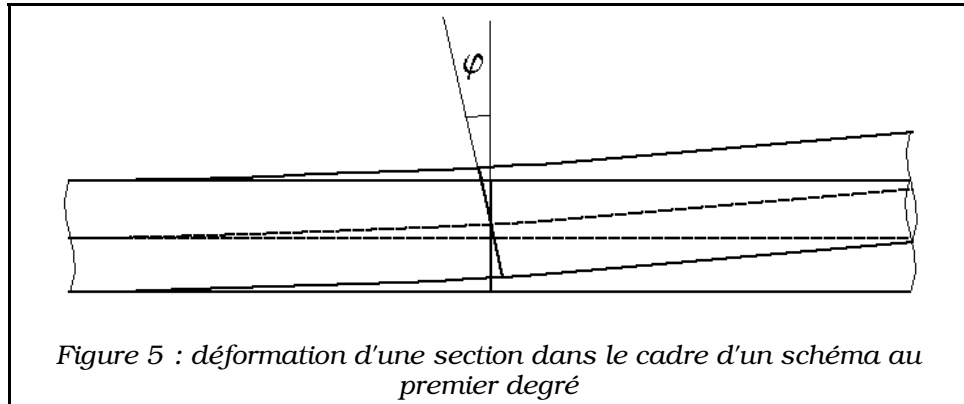
L'expression (30) est un développement en série selon x_3 . Comme x_3 reste faible devant les autres dimensions, on supposera qu'un schéma du premier degré est suffisant (hypothèse de Hencky-Medlin). D'autre part, on notera $u_1(x_1, x_2, 0) = u_1^0(x_1, x_2)$, de même pour $u_2(x_1, x_2, 0) = u_2^0(x_1, x_2)$ et $u_3(x_1, x_2, 0) = u_3^0(x_1, x_2)$. L'expression (30) devient :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1^0(x_1, x_2) + x_3 \varphi_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2^0(x_1, x_2) + x_3 \varphi_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3^0(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (31)$$

Remarque :

La conséquence de cette hypothèse est qu'une *section droite reste droite* (voir figure 5). En revanche, dans le cadre que nous nous sommes fixé, il n'y a pas d'hypothèse sur l'angle φ , alors que dans la Théorie Classique des Plaques Stratifiées, le cisaillement hors plan est négligé, si bien qu'une *section normale au plan du stratifié reste normale* au plan après déformation (hypothèses de Love-Kirchhoff), ce qui se traduit par les conditions :

$$\varphi_1 = -\frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = -\frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} \quad (32)$$



Expression des déformations

En appliquant les équations (9) et (31), l'expression des déformations devient :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \\
 \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \\
 \epsilon_{33} &= 0 \\
 \gamma_{23} &= 2 \cdot \epsilon_{23} = \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} + \varphi_2 \\
 \gamma_{13} &= 2 \cdot \epsilon_{13} = \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} + \varphi_1 \\
 \gamma_{12} &= 2 \cdot \epsilon_{12} = \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) + x_3 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right)
 \end{aligned} \tag{33}$$

Les équations (33) montrent que les déformations dans le plan de la plaque sont issues de deux contributions :

- Une déformation « en membrane » :

$$\epsilon_m(M) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (34)$$

- Une déformation « en flexion et torsion » :

$$\epsilon_f(M) = x_3 \begin{pmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (35)$$

On notera que dans la théorie classique des plaques stratifiées (hypothèses de Love-Kirchhoff), les équations (32) et (35) donnent l'expression des déformations en flexion et torsion suivante :

$$\epsilon_f(M) = x_3 \begin{pmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{pmatrix} = -x_3 \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \\ 2. \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} \quad (36)$$

La déformation totale est de la forme :

$$\epsilon_{mf}(M) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Expression des contraintes et des efforts résultants

Expression des contraintes dans une couche

Hypothèse de la théorie des plaques stratifiées : $\sigma_{33}=0$

L'utilisation des équations (56) et de la loi de comportement dans le cas d'un tissu ou d'un matériau unidirectionnel conduisent à l'expression :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix}_R \quad (38)$$

$$\text{et } \epsilon_{33} = -\frac{1}{C_{33}}(C_{13} \epsilon_{11} + C_{23} \epsilon_{22} + C_{36} \gamma_{12}) \quad (39)$$

Remarques :

- La relation (39) montre que bien que le problème soit plan, ϵ_{33} n'est pas nul.
- La discontinuité de la loi de comportement entre les couches implique la discontinuité des contraintes.

Expression des efforts résultants

Objectif : estimer l'effort à l'échelle du stratifié et non des couches constituantes.

Les efforts auxquels est soumise la plaque sont donc les sommes des contraintes exercées sur chacune des n couches (indiquée k) constituant la plaque. Ils sont représentés figure 6.

Dans le plan de la plaque, les efforts normaux et tranchants sont :

$$\mathbf{N}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix} = \sum_1^n \int_{h^{k-1}}^{h^k} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}^k dx_3 \quad (40)$$

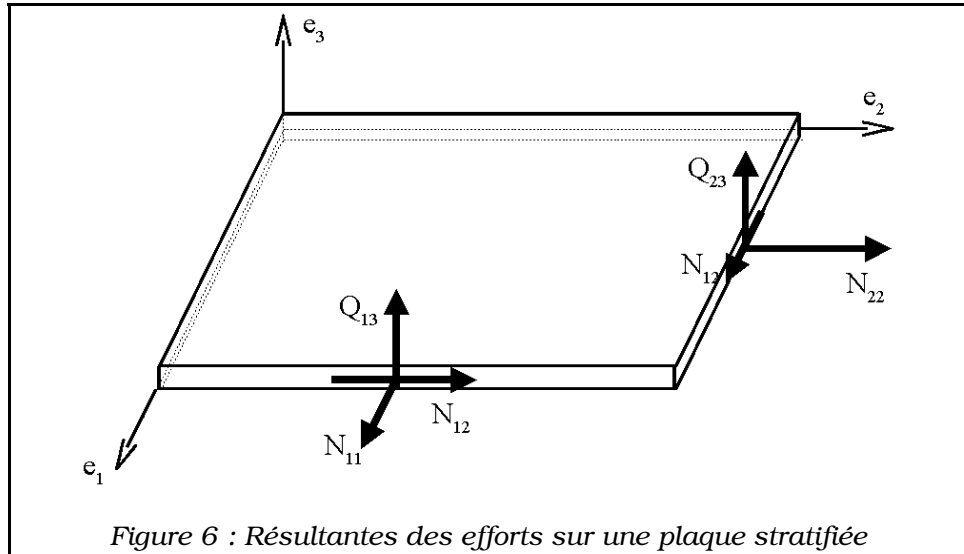
En cisaillement,

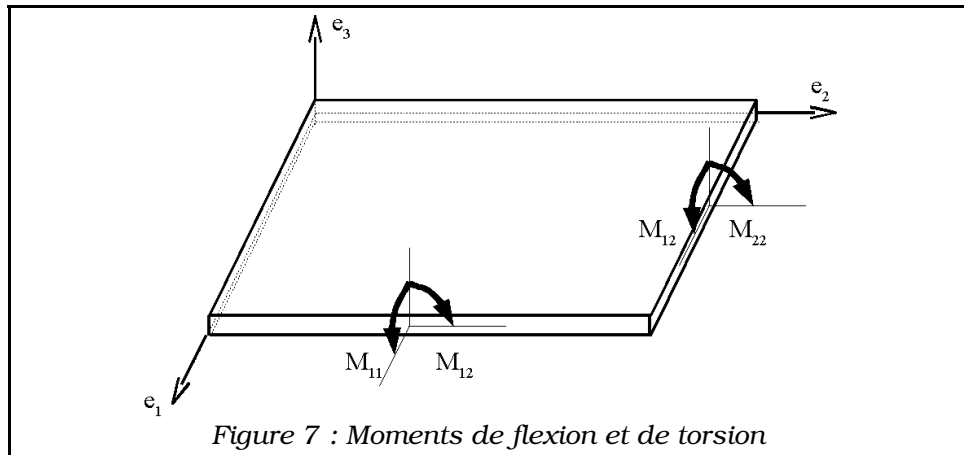
$$\mathbf{Q}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} Q_{23} \\ Q_{13} \end{pmatrix} = \sum_1^n \int_{h^{k-1}}^{h^k} \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}^k dx_3 \quad (41)$$

De même, on définit les moments de flexion M_{11} et M_{22} et de torsion M_{12} :

$$\mathbf{M}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \sum_1^n \int_{h^{k-1}}^{h^k} x_3 \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}^k dx_3 \quad (42)$$

Les grandeurs $\mathbf{N}(x_1, x_2)$ et $\mathbf{Q}(x_1, x_2)$ sont exprimées en N/m et les grandeurs $\mathbf{M}(x_1, x_2)$ sont exprimées en N.





Relations déformations/résultantes

Expression contraintes/déformations pour une couche

En combinant les équations (37) et (38), il est possible de réécrire la relation contrainte/déformation dans une couche sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}_R^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{pmatrix}_R^k + x_3 \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{pmatrix}_R^k \quad (43)$$

et

$$\begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}_R^k = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} \gamma_{23}^0 \\ \gamma_{13}^0 \end{pmatrix}_R^k \quad (44)$$

Prise en compte du cisaillement hors plan

En combinant les équations (41) et (44), il vient :

$$\begin{pmatrix} Q_{23} \\ Q_{13} \end{pmatrix}_R = \sum_1^n \int_{h^{k-1}}^{h^k} \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}_R^k dx_3 = \sum_1^n \int_{h^{k-1}}^{h^k} \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} \gamma_{23}^0 \\ \gamma_{13}^0 \end{pmatrix}_R^k dx_3$$

et donc

$$\begin{pmatrix} Q_{23} \\ Q_{13} \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} \sum_1^n (h^k - h^{k-1}) C_{44} & \sum_1^n (h^k - h^{k-1}) C_{45} \\ \sum_1^n (h^k - h^{k-1}) C_{45} & \sum_1^n (h^k - h^{k-1}) C_{55} \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} \gamma_{23}^0 \\ \gamma_{13}^0 \end{pmatrix}_R$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} Q_{23} \\ Q_{13} \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} \gamma_{23}^0 \\ \gamma_{13}^0 \end{pmatrix}_R \quad (45)$$

avec :

$$F_{ij} = \sum_1^n (h^k - h^{k-1}) C_{ij}^k = \sum_1^n e^k C_{ij}^k \text{ pour } i, j = 4, 5$$

Expression des résultantes dans le plan

Selon la même méthode que ci-dessus, il est possible de combiner les équations (40) et (42) à l'équation (43) pour obtenir une relation entre les composantes du plan de la plaque (efforts et moments) et les déformations.

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{pmatrix} \quad (46)$$

avec :

- $A_{ij} = \sum_1^n [h^k - h^{k-1}] Q_{ij}^k = \sum_1^n Q_{ij}^k e^k$
- $B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_1^n [(h^k)^2 - (h^{k-1})^2] Q_{ij}^k = \sum_1^n Q_{ij}^k e^k z^k$
- $D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_1^n [(h^k)^3 - (h^{k-1})^3] Q_{ij}^k = \sum_1^n Q_{ij}^k \left[e^k (z^k)^2 + \frac{(e^k)^3}{12} \right]$

Les équations (45) et (46) forment l'équation constitutive de la théorie de plaques avec prise en compte du cisaillement transverse. Les coefficients F_{ij} , A_{ij} , B_{ij} et D_{ij} font apparaître les variables e^k , épaisseur du pli k , et z^k , distance de la ligne moyenne du composite à la ligne moyenne du pli k .

Identification des différentes contributions

- A_{ij} constituent la matrice de *rigidité en membrane*
- D_{ij} représentent la matrice de *rigidité en flexion-torsion*
- B_{ij} sont les termes de *couplage membrane / flexion-torsion*

- F_{ij} représentent le *cisaillement hors-plan*.

Comme les différents paramètres A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} , F_{ij} ne sont pas de même grandeurs, on définit les valeurs normalisées (exprimées en Pa) :

$$A_{ij}^* = \frac{1}{h} A_{ij}, \quad B_{ij}^* = \frac{2}{h^2} B_{ij}, \quad D_{ij}^* = \frac{12}{h^3} D_{ij}$$

Exercices :

1- Répondre à la question 2 de l'étude de cas (Etude de l'influence de l'ordre des plis).

2- Répondre à la question 3 de l'étude de cas (Etude de l'influence de l'orientation des plis).

Relation Fondamentale de la Dynamique appliquée à un élément de plaque

Expression générale

Les équations de la Relation Fondamentale de la Dynamique sont obtenues à partir des équations (24) en intégrant selon x_3 (expression en fonction des résultantes) ou en multipliant par x_3 , puis en intégrant (expression en fonction des moments).

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + F_1 + \sigma_{13} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{13} \left(-\frac{h}{2} \right) = \rho_s \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \\
 & \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + F_2 + \sigma_{23} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{23} \left(-\frac{h}{2} \right) = \rho_s \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \\
 & \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} + F_3 + q = \rho_s \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2} \\
 & \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} + \frac{h}{2} \left[\sigma_{13} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{13} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + P_1 - Q_{11} = R \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \\
 & \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{h}{2} \left[\sigma_{23} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{23} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] + P_2 - Q_{22} = R \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{47}$$

avec :

- $\rho_s, R, I_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} (1, x_3, x_3^2) \rho dx_3$ où ρ est la masse volumique de chaque couche.
- $F_1 : F_1 = \int_{-h/2}^{h/2} f_1 dx_3$
- $F_2 : F_2 = \int_{-h/2}^{h/2} f_2 dx_3$
- $F_3 : F_3 = \int_{-h/2}^{h/2} f_3 dx_3$
- $q : q = \sigma_{33} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{33} \left(-\frac{h}{2} \right)$
- $P_1 : P_1 = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 f_1 dx_3$
- $P_2 : P_2 = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 f_2 dx_3$

Simplifications

Cette relation générale peut être le plus souvent simplifiée par l'introduction des hypothèses suivantes :

- Les effets d'inertie sont négligeables
- Etude d'un problème statique
- Pas de force volumique
- Pas de cisaillement sur les faces

Il vient alors les expressions :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} &= 0 \\
 \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} &= 0 \\
 \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} + q &= 0 \\
 \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_{11} &= 0 \\
 \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - Q_{22} &= 0
 \end{aligned} \tag{48}$$

Les trois dernières équations peuvent être réécrites sous la forme :

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + q = 0 \tag{49}$$

Expressions des Relations Fondamentales des Stratifiés tenant compte du cisaillement transverse

En reportant les équations (45) et (46) dans les expressions (47) ou (48), on obtient un système d'équations différentielles faisant seulement intervenir comme inconnues les déplacements et les pentes.

Résultantes dans le plan :

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + 2 A_{16} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_2^2} + A_{16} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{26} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_2^2} \\
& + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + 2 B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{26} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_2^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1^2} + 2 A_{26} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{22} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_2^2} \\
& + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} + 2 B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{51}$$

Résultantes de cisaillement hors plan :

$$\begin{aligned}
& F_{55} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \right) + F_{45} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + F_{44} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \right) + q \\
& = \rho_s \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{52}$$

Équation en moments de flexion et torsion :

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + 2 B_{16} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{66} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_2^2} + B_{16} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{26} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_2^2} \\
& + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + 2 D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} \\
& - F_{55} \left(\varphi_1 + \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \right) - F_{45} \left(\varphi_2 + \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} \right) = R \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} + I_{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{26} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_2^2} + B_{66} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1^2} + 2 B_{26} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{22} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_2^2} \\
& + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} + 2 D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} \\
& - F_{45} \left(\varphi_1 + \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \right) - F_{44} \left(\varphi_2 + \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} \right) = R \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2} + I_{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{54}$$

La résolution du système d'équations (50-54) ne peut être résolu dans le cas général, qui est traité par Éléments Finis, ce qui suppose une écriture sous forme énergétique de ces équations. Cependant, des simplifications permettent de déterminer quelques cas analytiques simples :

- Problème statique
- Pas de couplage flexion-membrane
- Cisaillement hors-plan négligeable (donc $\varphi_1 = -\frac{\partial u_3^0}{\partial x_1}$ et $\varphi_2 = -\frac{\partial u_3^0}{\partial x_2}$)

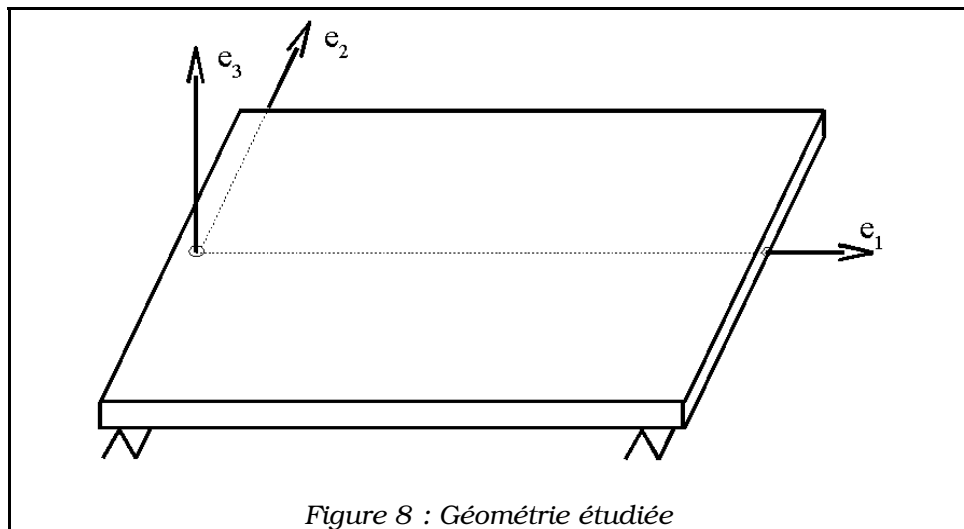
Exercice :

Traiter l'analyse mécanique de l'étude de cas.

Etude de cas

Position du problème

Une plaque en matériau composite est placée en appui sur deux réglettes. Elle est soumise à un effort selon la direction e_3 de profil quelconque. On se propose d'observer comment le choix de l'architecture du composite influence le comportement en flexion de la plaque.



Hypothèses de départ :

Analyse mécanique :

- L'épaisseur de la plaque est plus petite que ses autres dimensions (hypothèse des Plaques).
- La dimension selon la direction 2 est infiniment grande devant celle selon la direction 1.
- L'effort appliqué selon la direction 3 n'est fonction que de x_1 .
- Cet effort est développable en somme infinie de sinus (série de Fourier impaire)

Construction de la plaque :

- Elle est construite par assemblage de plis d'isotrope,

d'unidirectionnel, de tissu ou de mat en fibre de verre R.

Étapes :

- Établissement des matrices de raideurs pour chaque pli
- Choix de quelques architectures remarquables et établissement des matrices de comportement
- Résolution du problème mécanique
- Etude mécanique des différentes architectures

Ecriture des lois de comportement de différentes architectures

Estimer les matrices d'élasticité réduites pour chaque pli dans les cas suivants :

- Matériau isotrope : mousse polyuréthane de densité 30 kg/m³,
 $\nu = 0,4$
 $G = 3 \text{ MPa}$
 soit $E = 2 G (1 + \nu) = 8,4 \text{ MPa}$
- Matériau unidirectionnel : fibres de verre E dans une matrice époxyde.
 Concentration de fibres dans la matrice de 40% du volume.
- Tissu, composé de deux couches croisée du matériau unidirectionnel précédent.
- Mat, décrit comme un empilement de matériaux unidirectionnels d'orientation aléatoire

Remarque :

Pour les deux derniers cas, on donne les termes de rigidité pour une rotation d'angle θ :

| |
|--|
| $\begin{aligned} Q_{11}^{R'} &= V_1 + V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta \\ Q_{12}^{R'} &= V_4 - V_3 \cos 4\theta \\ Q_{16}^{R'} &= \frac{1}{2} V_2 \sin 2\theta + V_3 \sin 4\theta \\ Q_{22}^{R'} &= V_1 - V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta \end{aligned} \tag{55}$ |
|--|

$$\begin{aligned}
 Q_{26}^{R'} &= \frac{1}{2} V_2 \sin 2\theta - V_3 \sin 4\theta \\
 Q_{66}^{R'} &= V_5 - V_3 \cos 4\theta \\
 C_{44}^{R'} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta \\
 C_{45}^{R'} &= (C_{55} - C_{44}) \cos \theta \sin \theta \\
 C_{55}^{R'} &= C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta
 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{1}{8} (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\
 V_2 &= \frac{1}{2} (Q_{11} - Q_{22}) \\
 V_3 &= \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\
 V_4 &= \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) \\
 V_5 &= \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})
 \end{aligned}$$

Etudier l'influence de l'ordre des plis

Pour cela, on considère les empilements suivants :

mat – pli isotrope – pli isotrope – mat
 mat – pli isotrope – mat – pli isotrope
 pli isotrope – mat – mat – pli isotrope

Donner dans chaque cas la matrice de comportement. On suppose que chaque pli a une épaisseur de 0,1 mm pour le mat et 4 mm pour le pli isotrope. Comparer.

Etude de l'influence de l'orientation

Pour cela, on considère les empilements de matériaux unidirectionnels suivants :

$[-45^\circ - 45^\circ - 45^\circ - 45^\circ]$
 $[45^\circ - 45^\circ - 45^\circ - 45^\circ]$

Donner dans chaque cas la matrice de comportement. On suppose que chaque pli a une épaisseur de 0,1 mm. Comparer.

Résolution du problème mécanique

Définition des Conditions aux Limites

Compte tenu de l'appui simple sur les bords de la plaque, les conditions aux limites s'écrivent :

$$u_3(0) = u_3(L_1) = 0$$

$$N_{11}(0) = N_{11}(L_1) = 0$$

$$M_{11}(0) = M_{11}(L_1) = 0$$

La seconde hypothèse se traduit par : $\frac{\partial \cdot}{\partial x_2} = 0$ (56)

Compte tenu de la relation (56), l'application des équations (46) et des expressions (34) et (35) conduisent à une nouvelle écriture en déplacements des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} &u_3(0) = u_3(L_1) = 0 \\ &A_{11} \frac{\partial u_1(0 \text{ ou } L_1)}{\partial x_1} + A_{16} \frac{\partial u_2(0 \text{ ou } L_1)}{\partial x_1} + B_{11} \frac{\partial \varphi_1(0 \text{ ou } L_1)}{\partial x_1} + B_{16} \frac{\partial \varphi_2(0 \text{ ou } L_1)}{\partial x_1} = 0 \\ &B_{11} \frac{\partial u_1(0 \text{ ou } L_1)}{\partial x_1} + B_{16} \frac{\partial u_2(0 \text{ ou } L_1)}{\partial x_1} + D_{11} \frac{\partial \varphi_1(0 \text{ ou } L_1)}{\partial x_1} + D_{16} \frac{\partial \varphi_2(0 \text{ ou } L_1)}{\partial x_1} = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Choix de fonctions de forme en déplacement et rotation

Compte tenue de l'hypothèse 3, on peut considérer une charge élémentaire de la forme :

$$q(x_1) = Q \cdot \sin\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right)$$

Des champs de déplacement de la forme suivante satisfont aux conditions aux limites :

$$u_1(x_1, x_2) = U \cdot \cos\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \quad (58)$$

$$u_2(x_1, x_2) = V \cdot \cos\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \quad (59)$$

$$u_3(x_1, x_2) = W \cdot \sin\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \quad (60)$$

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \Theta \cdot \cos\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \quad (61)$$

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \Phi \cdot \cos\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \quad (62)$$

Expression des déformations

En reportant les expressions (58) à (62) dans les définitions (33) à (37), les déformations s'expriment par :

$$\epsilon_m(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda U \sin\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \\ 0 \\ -\lambda V \sin\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$\epsilon_f(\mathbf{M}) = x_3 \begin{pmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\lambda \Theta \sin\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \\ 0 \\ -\lambda \Phi \sin\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$\epsilon_c(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \cos\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \\ (\lambda W + \Theta) \cos\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \end{pmatrix} \quad (65)$$

$$\text{avec } \lambda = \frac{\pi m}{L_1}$$

On note que les déformations de membrane et de flexion sont extrémales en $x_1 = \frac{L_1}{2m}$ modulo $\left(\frac{L_1}{m}\right)$ et pour $x_3 = \frac{L_3}{2}$.

$$\epsilon_{m+f}^{Extr.} = \pm \lambda \begin{pmatrix} U + \frac{L_3 \Theta}{2} \\ 0 \\ V + \frac{L_3 \Phi}{2} \end{pmatrix}$$

On note que plus m est grand, plus λ et ϵ_{m+f} sont grands.

Les déformations hors plan sont maximales si $x_1 = 0 \pmod{\frac{L}{m}}$, soit :

$$\epsilon_c^{Extr.} = \pm \begin{pmatrix} \Phi \\ \lambda W + \Theta \end{pmatrix}$$

On remarquera que ces déformations sont constantes sur une section compte tenu de la modélisation adoptée. D'autre part, les déformations en cisaillement hors plan sont maximales lorsque les déformations en membrane ou en flexion sont nulles et vis-versa.

Expression des contraintes dans chaque couche

L'expression des déformations étant établies, les contraintes peuvent être exprimées dans chaque couche k en reportant les expressions (63) à (65) dans les équations (43) et (44) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}_R^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_R^k \begin{pmatrix} -\lambda(U + x_3 \Theta) \sin\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \\ 0 \\ -\lambda(V + x_3 \Phi) \sin\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \end{pmatrix}_R^k \quad (66)$$

et

$$\begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}_R^k = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}_R^k \begin{pmatrix} \Phi \cos\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \\ (\lambda W + \Theta) \cos\left(m\pi \frac{x_1}{L_1}\right) \end{pmatrix}_R^k \quad (67)$$

Identification des paramètres de chaque fonction

Nous allons chercher les paramètres U , V , W , Θ et Ψ tels que les équations de comportement (50) à (53) soient vérifiées.

En reportant les expressions (58) à (62) dans les équations (50) à (53), et compte tenu toujours de la relation (), il vient :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{16} & 0 & B_{11} & B_{16} \\ A_{16} & A_{66} & 0 & B_{16} & B_{66} \\ 0 & 0 & \lambda^2 F_{55} & \lambda F_{55} & \lambda F_{45} \\ \lambda^2 B_{11} & \lambda^2 B_{16} & \lambda F_{55} & \lambda^2 D_{11} + F_{55} & \lambda^2 D_{16} + F_{45} \\ \lambda^2 B_{16} & \lambda^2 B_{66} & \lambda^2 F_{45} & \lambda^2 D_{16} + F_{45} & \lambda^2 D_{66} + F_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ \Theta \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (68)$$

Etude mécanique des différentes architectures

Dans l'exemple suivant, nous allons considérer que $m=1$, et que la plaque a une longueur L_1 de 20 mm.

Donner l'expression des déplacements, puis des déformations et enfin des contraintes dans chaque pli.

Comparer et analyser les résultats obtenus.

Pour aller plus loin...

Problèmes d'environnement

Deux grandes familles de contraintes internes peuvent s'exercer sur les matériaux composites.

- Tout d'abord, ils sont fabriqués à chaud (180°C à titre indicatif : la polymérisation peut encore élever cette température). Leur solidification est donc suivie d'un fort refroidissement. Ainsi, des contraintes résiduelles d'origine thermique sont produites. Elles peuvent être suffisamment fortes pour provoquer la rupture du matériau avant toute utilisation.
- Ensuite, les matériaux constitutifs de chaque pli absorbent facilement de l'eau, à cause de la structure moléculaire des résines (plastique), de la présence de porosités (et donc de réservoirs potentiels) et enfin des fibres qui agissent, d'après certaines théories, comme des drains.

Dans ce paragraphe, nous allons prendre en compte dans la modélisation précédente ces effets thermiques ou hygrométriques.

Hypothèses :

- les matériaux sont orthotropes
- Problème élastique
- Contraintes planes avec prise en compte des effets transverses
- La température ou l'hygrométrie est constante dans le milieu (respectivement le pli ou la plaque)

Analyse tri-dimensionnelle

Modélisation des effets thermiques ou hygrométriques

Pour un matériau orthotrope, l'effet thermique ou hygrométrique se traduit par une dilatation. Elle peut être exprimée par :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_{R_{ortho}} \stackrel{\text{Thermique}}{=} \Delta T * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_{ortho}} \quad \text{dans le cas d'un problème thermique.}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_{R_{ortho}} \stackrel{\text{Hygro.}}{=} \Delta c * \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_{ortho}} \quad \text{dans le cas d'un problème hygrométrique.}$$

On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les coefficients de dilatation thermique et $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ les coefficients d'expansion hygrométrique selon les directions d'orthotropie du matériau. On observe que les écritures décrivant la déformation thermique ou hygrométrique sont identiques. Dans ce qui suit, seul le problème thermique sera développé. Pour obtenir les expressions correspondantes du problème hygrométrique, il conviendra de remplacer ΔH par Δc , et les coefficients α_i par des coefficients β_i .

| Matériau (Unidirectionnel) | Composition (% vol. de fibre) | longitudina l | transversal |
|---------------------------------------|--|--------------------------|-----------------------|
| Carbone/époxyde | 60 % | $3,4 \cdot 10^{-5}$ | $-0,12 \cdot 10^{-5}$ |
| kevlar/époxyde | 60 % | $5,8 \cdot 10^{-5}$ | $-0,4 \cdot 10^{-5}$ |
| Verre/époxyde | 60 % | $1,8 \cdot 10^{-5}$ | $0,55 \cdot 10^{-5}$ |

Tableau 2 : Dilatations thermique pour quelques composites

Expression des déformations dans le repère d'orthotropie

La déformation totale d'un milieu soumis à un chargement thermomécanique est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_{\text{Totale}} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}} + \Delta T * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}}$$

Il vient une nouvelle expression la contrainte appliquée sur le milieu :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}} - \Delta T * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}} \quad (69)$$

On observe que la contrainte est modifiée par l'apparition d'un terme supplémentaire lié à la variation de température, que l'on peut qualifier de « contrainte thermique ».

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^{\text{Th}} \\ \sigma_2^{\text{Th}} \\ \sigma_3^{\text{Th}} \\ \sigma_4^{\text{Th}} \\ \sigma_5^{\text{Th}} \\ \sigma_6^{\text{Th}} \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}} = \Delta T \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}}$$

tel que :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}} + \begin{pmatrix} \sigma_1^{\text{Th}} \\ \sigma_2^{\text{Th}} \\ \sigma_3^{\text{Th}} \\ \sigma_4^{\text{Th}} \\ \sigma_5^{\text{Th}} \\ \sigma_6^{\text{Th}} \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}}$$

Problème du pli

Nous allons nous placer, comme précédemment, dans le cadre d'un pli, c'est à dire d'un milieu dont l'épaisseur (dans la direction e_3) est faible devant les autres dimensions. Dans ce cas, la contrainte thermique devient :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}} = \Delta T \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}_{R_{\text{ortho}}} * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}} = \Delta T * \begin{pmatrix} Q_{11} \alpha_1 + Q_{12} \alpha_2 \\ Q_{12} \alpha_1 + Q_{22} \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_{\text{ortho}}} \quad (70)$$

Dans un repère quelconque (par exemple celui du stratifié), l'utilisation de la relation (55) conduit à l'expression de la contrainte pour toute rotation selon l'axe e_3 . Il vient :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^{\text{Th}} \\ \sigma_{22}^{\text{Th}} \\ \sigma_{12}^{\text{Th}} \\ \sigma_{23}^{\text{Th}} \\ \sigma_{13}^{\text{Th}} \end{pmatrix}_R = \Delta T * \begin{pmatrix} \alpha_1 (Q_{11} \cos^2 \theta + Q_{12} \sin^2 \theta) + \alpha_2 (Q_{12} \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^2 \theta) \\ \alpha_1 (Q_{11} \sin^2 \theta + Q_{12} \cos^2 \theta) + \alpha_2 (Q_{12} \sin^2 \theta + Q_{22} \cos^2 \theta) \\ \sin \theta \cos \theta (\alpha_2 (Q_{22} - Q_{12}) - \alpha_1 (Q_{11} - Q_{12})) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_R \quad (71)$$

On remarquera qu'aucun cisaillement hors plan n'est possible.

Modélisation à l'échelle de la plaque

Dans le cas du problème de plaque, l'expression des résultantes (40) à (42) est modifiée par l'apparition d'un terme supplémentaire lié à l'effet thermique, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} N_{11}^{\text{Th}} \\ N_{22}^{\text{Th}} \\ N_{12}^{\text{Th}} \end{pmatrix} = \sum_1^n \int_{h^{k-1}}^{h^k} \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{\text{Th}} \\ \sigma_{22}^{\text{Th}} \\ \sigma_{12}^{\text{Th}} \end{pmatrix}^k dx_3 \quad (72)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{23}^{\text{Th}} \\ Q_{13}^{\text{Th}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (73)$$

$$\begin{pmatrix} M_{11}^{\text{Th}} \\ M_{22}^{\text{Th}} \\ M_{12}^{\text{Th}} \end{pmatrix} = \sum_1^n \int_{h^{k-1}}^{h^k} x_3 \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{\text{Th}} \\ \sigma_{22}^{\text{Th}} \\ \sigma_{12}^{\text{Th}} \end{pmatrix}^k dx_3 \quad (74)$$

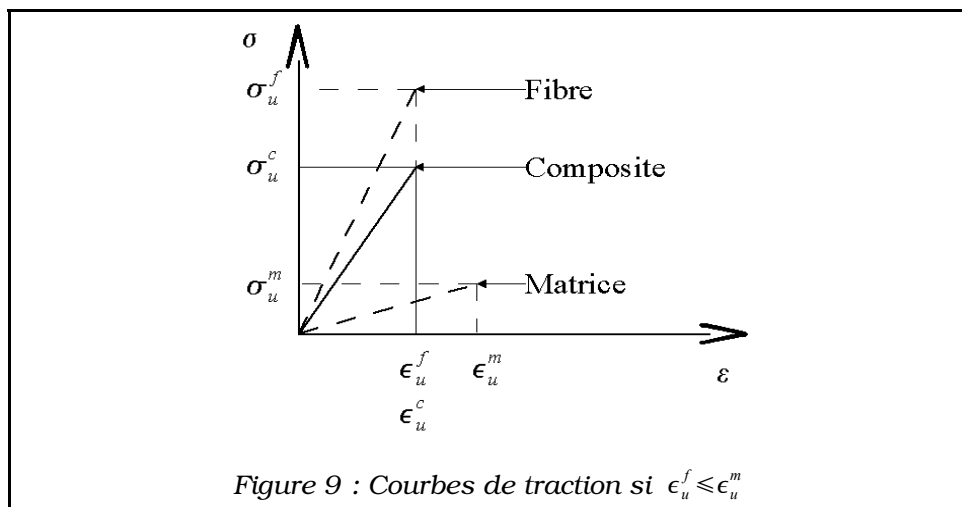
L'effet thermique apparaît dans cette description comme un effort supplémentaire appliqué sur un volume élémentaire de plaque. A partir de la matrice de comportement du stratifié (46), on détermine les déformations de la plaque conformément au schéma au premier degré développé dans le cours (31). Des contraintes faisant apparaître le couplage entre les différents plis sont alors calculées en utilisant la matrice de raideur de chaque pli.

On note que les contraintes thermiques, selon les empilements choisis, peuvent engendrer de la traction et du cisaillement en membrane, mais aussi de la flexion et de la torsion. Cependant, il est important de mentionner que si le stratifié est symétrique, il n'a pas de moment de flexion ou de torsion induit par un effet thermique ou hygrométrique.

Rupture des composites

Rupture d'un matériau unidirectionnel : Aspects micro-mécaniques

Un essai de traction sur une éprouvette de matrice pure ou sur des fibres seulement, conduit à une contrainte maximale et une déformation maximale, comme le montre la figure 9.



Si des fibres (unidirectionnelles) sont placées dans la matrice, une contrainte trop importante provoque une déformation des fibres plus grande que leur déformation maximale admissible ϵ_u^f : les fibres cassent. La déformation maximale admissible des fibres, combinée au module d'élasticité longitudinal E_L , détermine donc la contrainte maximale admissible pour le pli unidirectionnel, lorsque l'effort est dans le sens des fibres.

Dans cet exemple, nous avons supposé que la déformation maximale de la matrice est supérieure à celle des fibres. Dans le cas contraire, la limite de déformation admissible pour le composite unidirectionnel, et donc la contrainte maximale admissible, serait donnée par la déformation maximale admissible de la matrice ϵ_u^m .

La contrainte maximale admissible pour le composite soumis à une traction dans le sens des fibres peut donc être évaluée par une loi de mélange :

$$\sigma_u^c = \sigma_u^f V_f + (1 - V_f) \sigma_{\epsilon_u^f = \epsilon_u^m}^m \text{ si } \epsilon_u^f \leq \epsilon_u^m$$

ou bien

$$\sigma_u^c = \sigma_{\epsilon_u^f = \epsilon_u^m}^f V_f + (1 - V_f) \sigma_u^m \text{ si } \epsilon_u^f \geq \epsilon_u^m$$

Le tableau 3 répertorie les limites en déformation et en contraintes de quelques composites. Il ne faut pas perdre de vue la grande dépendance de ces valeurs au procédé de fabrication et à la température.

| Matériau | E | ϵ_u | σ_u |
|----------------------|---------------|--------------------------------|------------------------------|
| Fibres de carbone HS | 220 GPa | 1,4 à 1,8 % | 3000 à 4000 MPa |
| Fibres de carbone HM | 400 GPa | 0,5 % | 2200 MPa |
| Fibres de verre | 70 GPa | 3,4 à 4,8 % | 2400 à 3400 MPa |
| Polyester | 2,8 à 3,5 GPa | 2 à 5 % | 50 à 80 MPa |
| Résines phénoliques | 3 GPa | 2,5 % | 40 MPa |
| Résines époxydes | 3 à 5 GPa | 2 à 5 % | 60 à 80 MPa |

Tableau 3 : Quelques grandeurs typiques de contraintes et déformation à la rupture

Dans la direction transversale, la rupture d'un composite unidirectionnel se produit lorsque la contrainte est supérieure à la contrainte admissible par la matrice ou à la contrainte admissible par l'interface fibre/matrice. Plus généralement, nous pouvons dire que la rupture dans un pli unidirectionnel apparaît si la fibre ou la matrice ou l'interface fibre/matrice se rompt.

Critères de rupture d'un pli

Intuitivement, on peut supposer que la rupture d'un matériau orthotrope se produit lorsque que la contrainte maximale est atteinte, soit en traction soit en cisaillement. Dans le repère principal, il vient alors l'expression :

$$\begin{aligned} -X_c &\leq \sigma_{11}^{\text{ortho}} \leq X_t \\ -Y_c &\leq \sigma_{22}^{\text{ortho}} \leq Y_t \end{aligned} \quad (75)$$

$$-S_{LT} \leq \sigma_{12}^{\text{ortho}} \leq S_{LT}$$

avec :

X_t et X_c la résistance longitudinale en traction et en compression.

Y_t et Y_c la résistance transversale en traction et en compression.

S_{LT} la résistance en cisaillement suivant 1-2.

On note que **la résistance en traction et en compression sont différentes** dans cette expression. Usuellement, la résistance en compression est de l'ordre de la moitié ou des deux tiers de la résistance en traction.

D'autre part, l'expression ci-dessus est dite « **critère de contrainte maximale** ». Dans l'espace des contraintes, les valeurs admissibles sont limitées par un parallélépipède rectangle. Dans l'espace des déformations, ce parallélépipède devient oblique du fait de l'effet de Poisson. Il existe également un **critère de déformation maximale**, dont la représentation dans l'espace des déformations est un parallélépipède rectangle, qui ne coïncide évidemment pas avec le critère précédent.

Enfin, bien qu'il soit très souvent utilisé, ce critère doit être réservé à des cas très simples car les effets de couplage ne sont pas pris en compte. On considère généralement que le critère de contrainte maximale devrait être réservé à un état de contraintes planes, et le critère de déformation maximale à un état de déformation plane.

Lorsque le chargement n'est plus un chargement simple, il faut utiliser un critère énergétique analogue au critère de Von Mises de l'élasticité isotrope. Nous retiendrons ici le **critère de Tsai et Wu**.

$$F_{11} \sigma_1^2 + 2 F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 \leq 1 \quad (76)$$

Avec les paramètres F_{ij} :

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}$$

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}$$

$$F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c}$$

$$F_{66} = \frac{1}{S_{LT}^2}$$

Ces 5 premiers paramètres sont issus d'expérience de traction et compression dans les deux directions d'orthotropie et de cisaillement pur (dans le repère d'orthotropie). Le paramètre de couplage F_{12} est quant à lui beaucoup plus difficile à déterminer. Il nécessite un essai de traction biaxial selon les directions d'orthotropie ou un essai de traction à 45° des directions d'orthotropie. En pratique, ce coefficient est le plus souvent considéré comme un paramètre empirique, ajusté en fonction des résultats expérimentaux.

On définit le paramètre de résistance d'interaction normalisé $F_{12}^* = \frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11} F_{22}}}$. Si aucune donnée n'est disponible, la valeur par défaut de F_{12}^* est -1/2. Le critère de Tsai Wu prend alors la forme du **critère de Hoffman**. Si, de plus, la résistance en traction est égale à la résistance en compression, on retrouve le **critère de Tsai-Hill** qui s'écrit en contraintes planes :

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{S_{LT}}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} \leq 1 \quad (77)$$

Cette formulation montre que l'on retrouve un ellipsoïde de contraintes, conformément à la représentation de Von Mises. Dans le cas de la formule de Tsai et Wu, l'ellipsoïde n'est plus centré du fait de la différence de contrainte à la rupture en traction et en compression.

Le tableau 4 montre quelques valeurs typiques de résistance à la rupture dans le cas où le paramètre de résistance d'interaction est de -0,5.

| Paramètres de résistance | Carbone / époxyde | Verre E / époxyde |
|---------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| F_{11} (GPa ⁻²) | 0,45 | 1,55 |
| F_{22} (GPa ⁻²) | 100 | 275 |
| F_{12} (GPa ⁻²) | -3,36 | -10,25 |
| F_{66} (GPa ⁻²) | 216 | 195 |
| F_1 (GPa ⁻¹) | 0 | 0,70 |
| F_2 (GPa ⁻¹) | 20,1 | 23,8 |

Tableau 4 : Valeurs de résistance pour des plis unidirectionnels orthotropes ($V_f=0,6$)

Remarques :

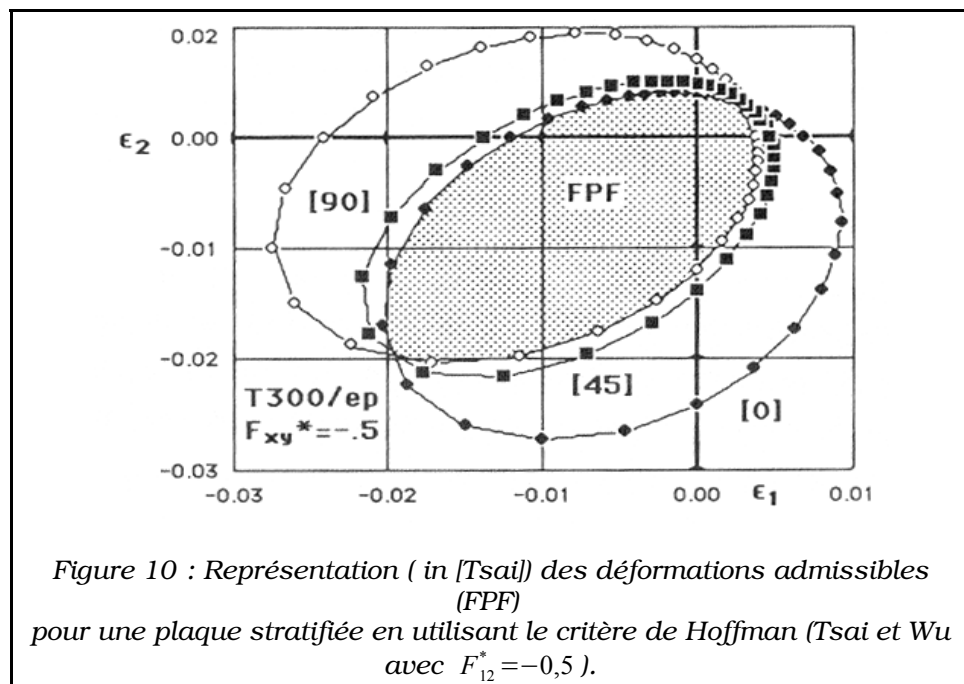
- Le critère précédent est valable dans le repère d'orthotropie. Pour les

plis dont les axes d'orthotropie et les directions de sollicitation ne sont pas identiques, il faut de se ramener au repère d'orthotropie. Cela revient à faire une rotation de l'ellipsoïde des contraintes de deux fois l'angle de pli.

- Souvent, on préfère utiliser le critère de Tsai et Wu dans l'espace des déformations car le champ de déformation est beaucoup plus accessible pour une plaque stratifiée.
- Il ne faut pas perdre de vue le caractère microscopique des ruptures et leur lien avec les défauts de fabrication présents dans la structure.

Rupture d'une plaque

A l'échelle du stratifié, les critères de résistance doivent être appliqués à chaque couche. Chacune produit une enveloppe de résistance. L'enveloppe de résistance de la plaque est l'intersection des différentes enveloppes correspondant à chaque pli (figure 10).



Lorsqu'une couche rompt, le champ de contraintes est modifié et l'on doit se poser la question de la tenue des couches encore intègres du matériau. Cela pose la question de la modélisation mécanique de la couche rompue.

Enfin, les effet thermiques et hygrométriques vont avoir pour effet de translater l'ellipsoïde (ou le parallélépipède) des contraintes, sans en changer la forme toutefois.

Références bibliographiques

J.M. Berthelot – *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*, 3^{ème} édition – Paris : Editions Tec&Doc, 1999.

Y. Surrél, A. Vautrin, G. Verchery – *Analyse et conception des structures en matériaux composites* – Pluralis, 1990

D. Gay – *Matériaux composites*, 3^{ème} édition revue et augmentée – Paris : Hermès 1991

S. Tsai – *Composite Design* – Dayton : Think Composites, 1988