Trabalho Computacional 1 - ALN

João Lucas Duim

08 de Abril de 2021

1 Questão 1

No arquivo "Metodo-Jacobi.sci" encontra-se o código da função utilizada para resolver um sistema linear $Ax = b$ usando o algoritmo iterativo de Jacobi.

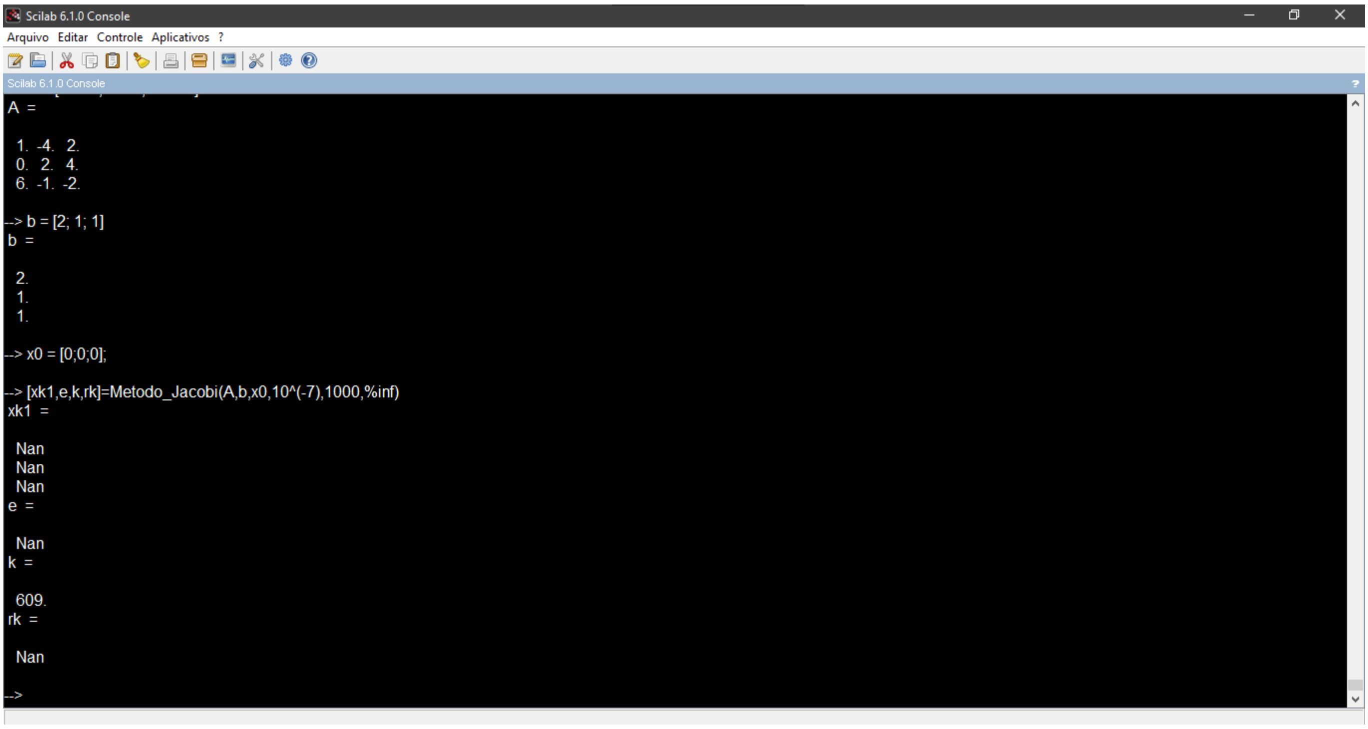
2 Questão 2

No arquivo "Metodo-Gauss-Seidel-1.sci" encontra-se o código da função utilizada para resolver um sistema linear $Ax = b$ usando o algoritmo iterativo de Gauss-Seidel e a função "inv" do Scilab.

No arquivo "Metodo-Gauss-Seidel-2.sci" encontra-se o código da função utilizada para resolver um sistema linear $Ax = b$ usando o algoritmo iterativo de Gauss-Seidel e a função "Resolve-Sistema-Lx" implementada no mesmo arquivo para resolver sistemas em que a matriz dos coeficientes é triangular inferior.

3 Questão 3

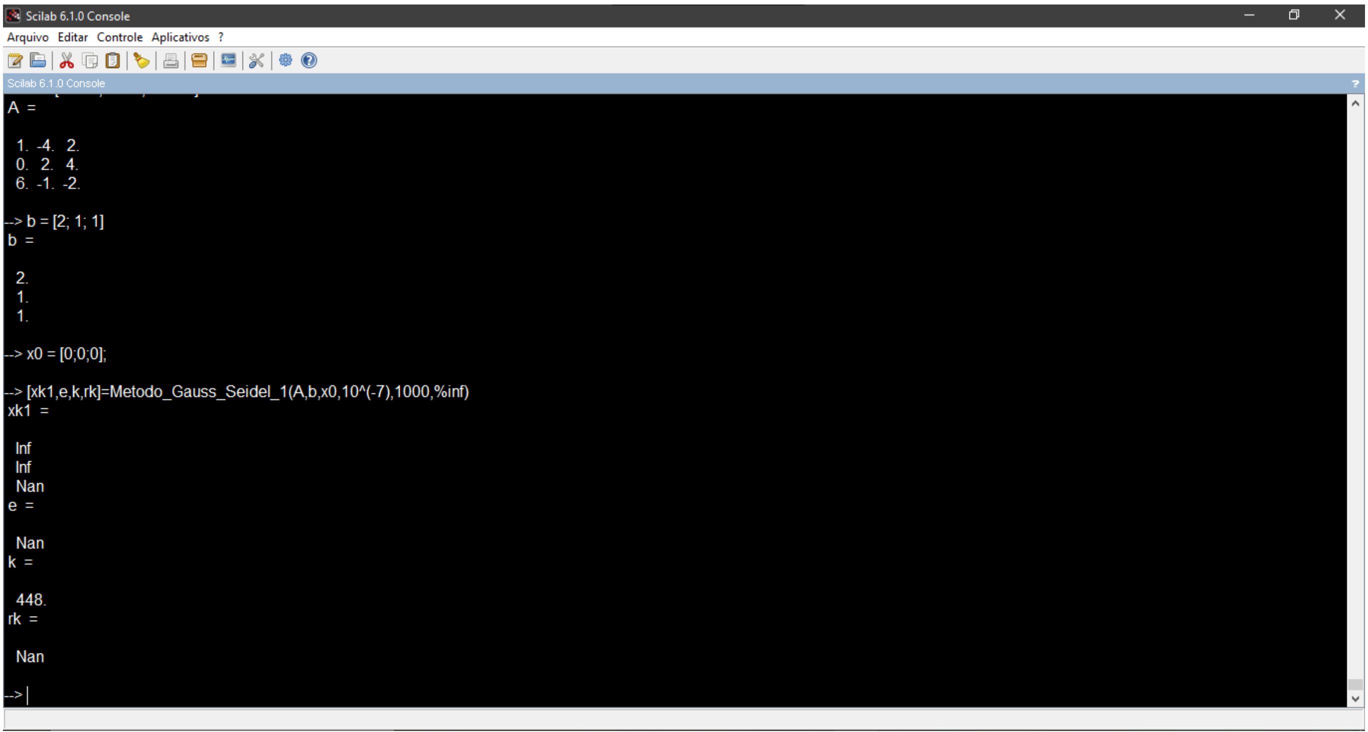
Veja, na figura 1, a função Metodo-Jacobi aplicada ao sistema dado no enunciado usando o vetor nulo como aproximação inicial.



```
A =

 1. -4.  2.
 0.  2.  4.
 6. -1. -2.

--> b = [2; 1; 1]
b =

 2.
 1.
 1.

--> x0 = [0;0;0];

--> [xk1,e,k,rk]=Metodo_Jacobi(A,b,x0,10^(-7),1000,%inf)
xk1 =

 Nan
 Nan
 Nan
e =

 Nan
k =

 609.
rk =

 Nan

-->
```

Figure 1: Função Metodo-Jacobi aplicada ao sistema dado

Veja, na figura 2, a função Metodo-Gauss-Seidel-1 aplicada ao sistema dado no enunciado usando o vetor nulo como aproximação inicial.



```
A =

 1. -4.  2.
 0.  2.  4.
 6. -1. -2.

--> b = [2; 1; 1]
b =

 2.
 1.
 1.

--> x0 = [0;0;0];

--> [xk1,e,k,rk]=Metodo_Gauss_Seidel_1(A,b,x0,10^(-7),1000,%inf)
xk1 =

 Inf
 Inf
 Nan
e =

 Nan
k =

 448.
rk =

 Nan

-->
```

Figure 2: Função Metodo-Gauss-Seidel-1 aplicada ao sistema dado

Veja, na figura 3, a função Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicada ao sistema dado no enunciado usando o vetor nulo como aproximação inicial.

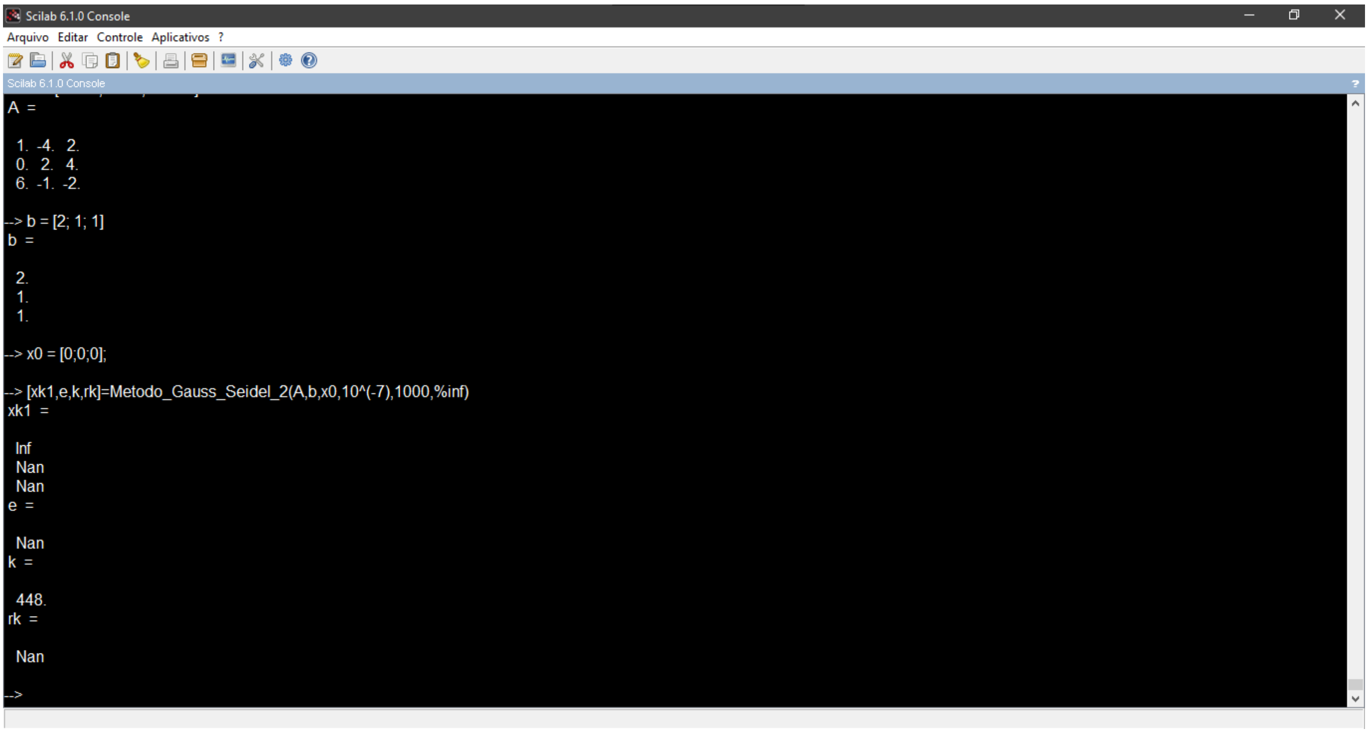


Figure 3: Função Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicada ao sistema dado

Reordenando as equações do sistema dado a fim de tornar a matriz dos coeficientes de diagonal estritamente dominante, temos:

$$\begin{cases} 6x - y - 2z = 1 \\ x - 4y + 2z = 2 \\ 0x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

Veja, na figura 4, a função Metodo-Jacobi aplicada ao sistema com equações reordenadas usando o vetor nulo como aproximação inicial.

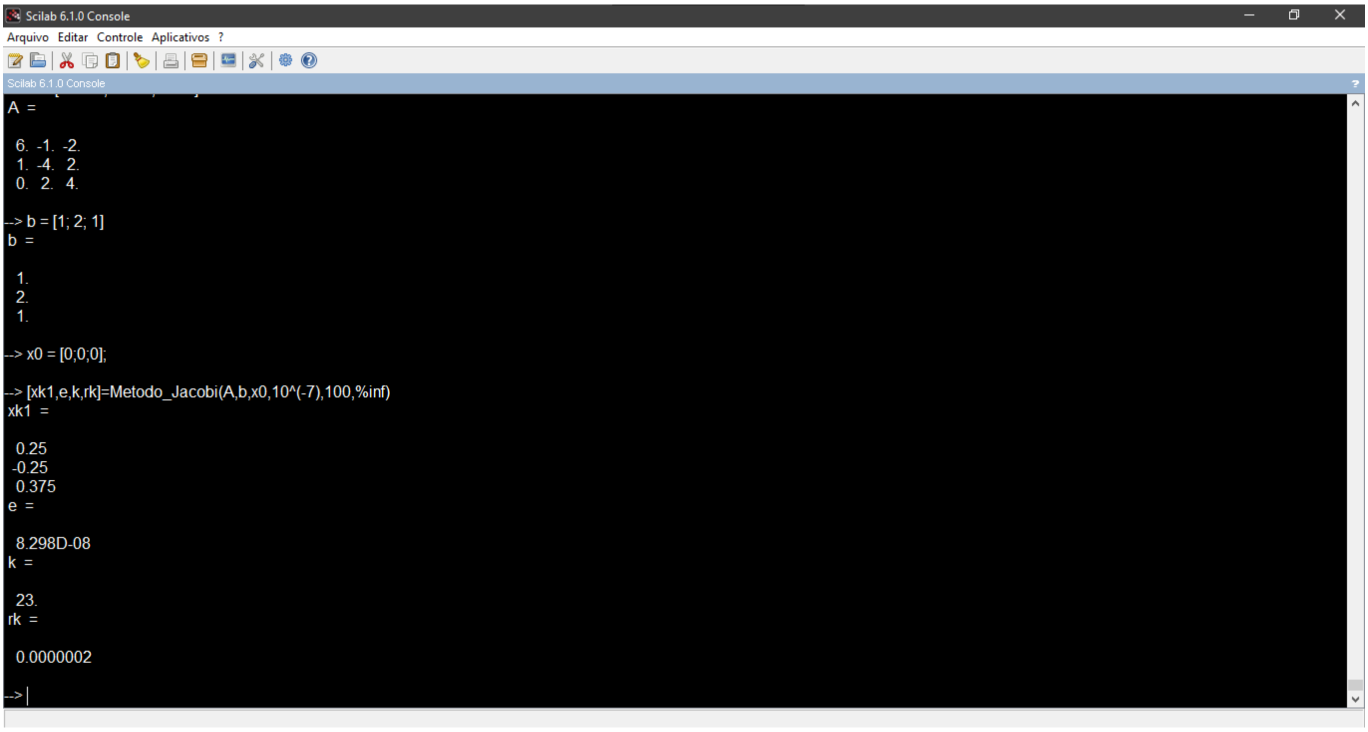


Figure 4: Função Metodo-Jacobi aplicada ao sistema com equações reordenadas

Veja, na figura 5, a função Metodo-Gauss-Seidel-1 aplicada ao sistema com equações reordenadas usando o vetor nulo como aproximação inicial.

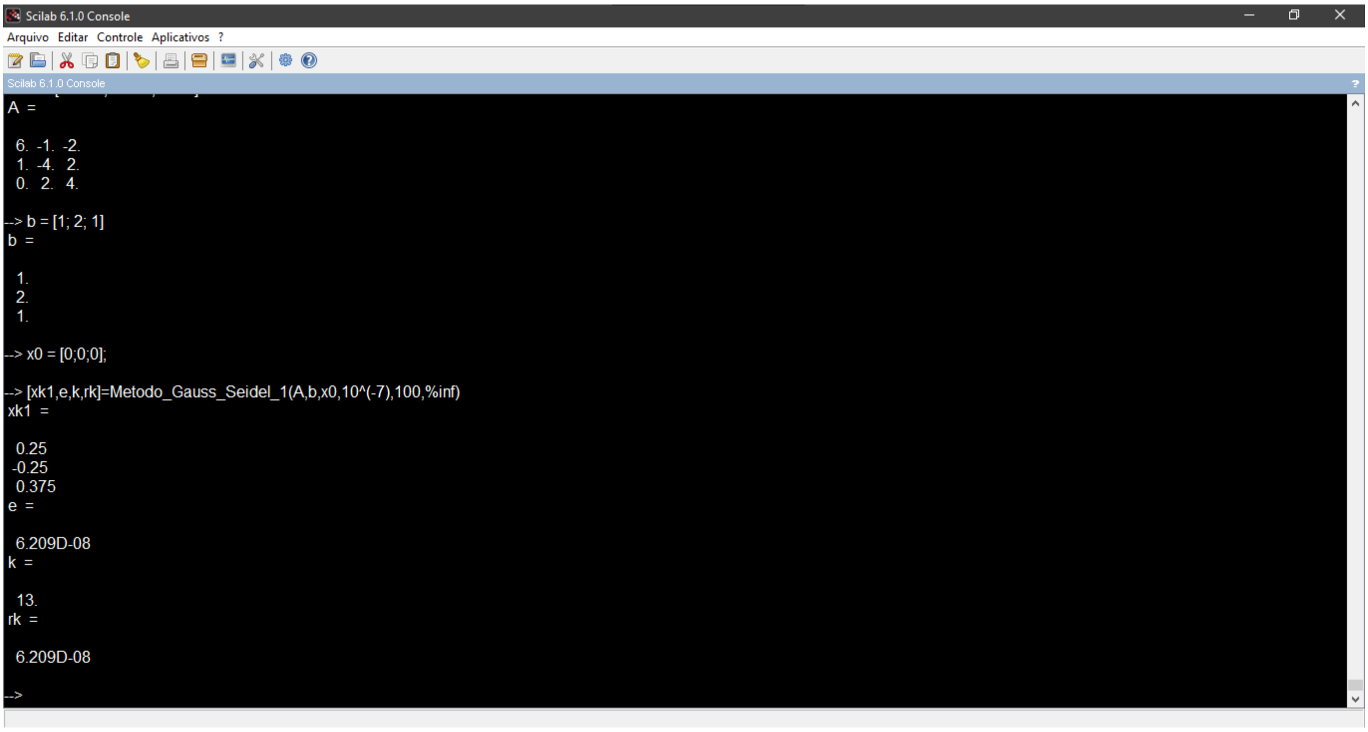


Figure 5: Função Metodo-Gauss-Seidel-1 aplicada ao sistema com equações reordenadas

Veja, na figura 6, a função Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicada ao sistema com equações reordenadas usando o vetor nulo como aproximação inicial.

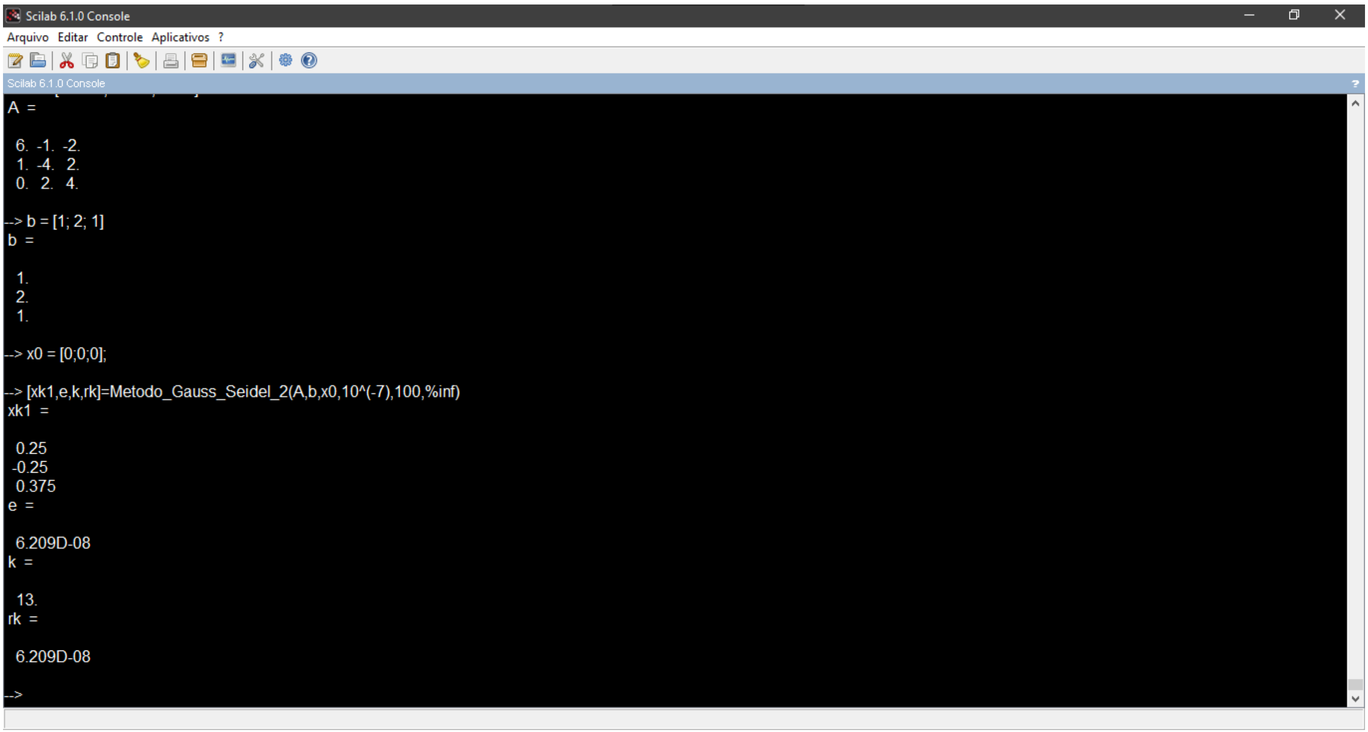


Figure 6: Função Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicada ao sistema com equações reordenadas

Comentários: Nas figuras de 1 a 3 nota-se que os métodos das 3 funções divergiram, não obtendo uma solução para o problema inicialmente apresentado. No entanto, nas figuras de 4 a 6, foram feitas trocas de linhas na matriz dos coeficientes do sistema dado (e as mesmas trocas no vetor b, ou seja, foi feita simplesmente uma reordenação das equações do sistema) com o intuito de transformá-la em uma matriz com diagonal estritamente dominante, para a qual pode-se garantir que os métodos implementados nas 3 funções convergirão para uma solução, exatamente como apresentado nas referidas figuras.

4 Questão 4

O referido sistema é:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ -x - y + 2z = -5 \end{cases}$$

4.1 (a)

Veja, na figura 7, a função Metodo-Jacobi aplicada ao sistema dado usando o vetor nulo como aproximação inicial e um limite de 25 iterações.

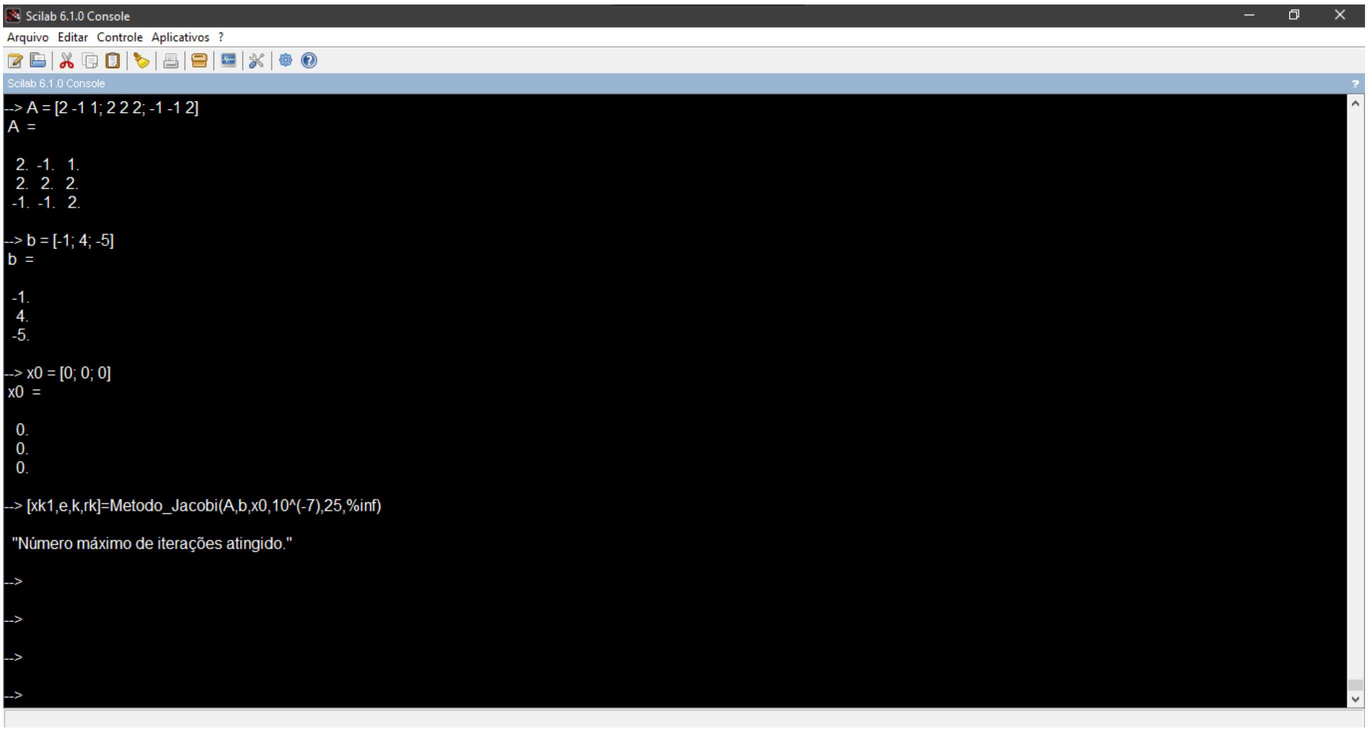


Figure 7: Função Metodo-Jacobi aplicada ao sistema dado

4.2 (b)

Veja, na figura 8, a função Metodo-Gauss-Seidel-1 aplicada ao sistema dado usando o vetor nulo como aproximação inicial e precisão de 10^{-5} na norma-infinito.

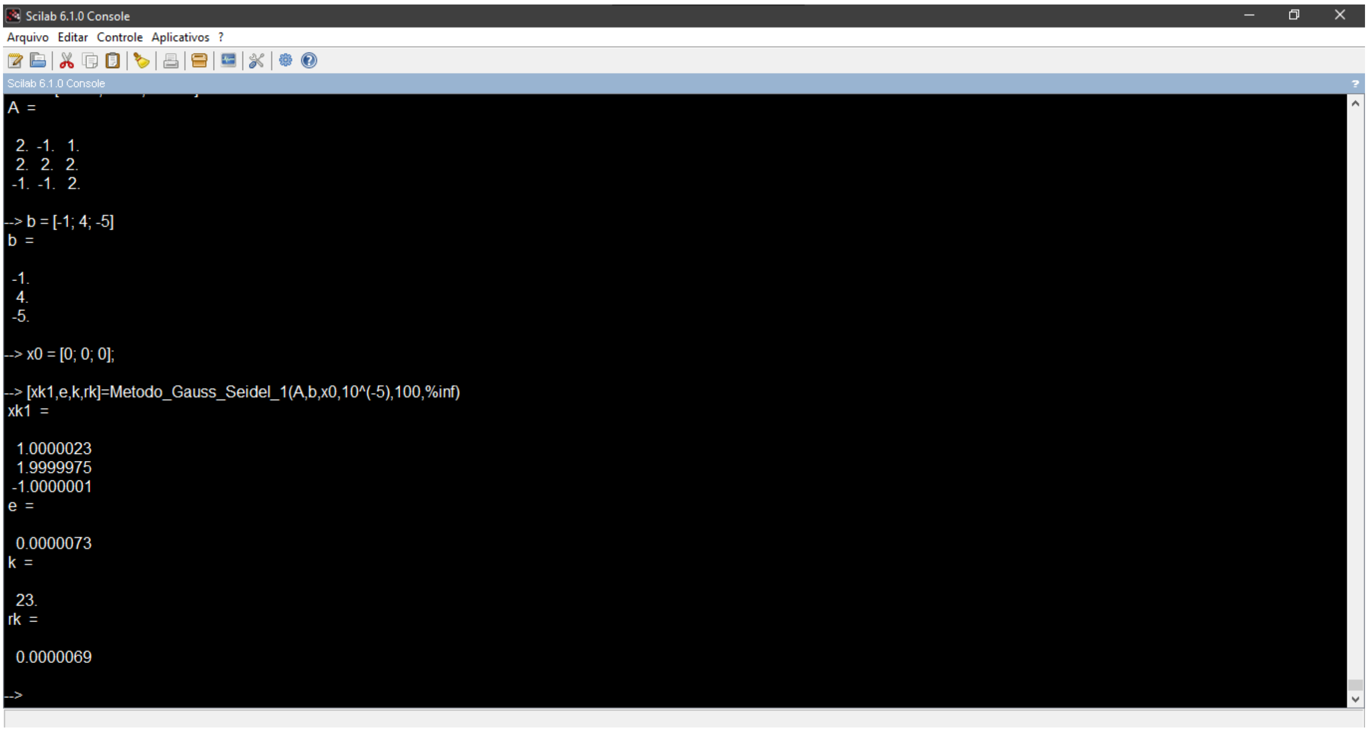


Figure 8: Função Metodo-Gauss-Seidel-1 aplicada ao sistema dado

Veja, na figura 9, a função Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicada ao sistema dado usando o vetor nulo como aproximação inicial e precisão de 10^{-5} na norma-infinito.

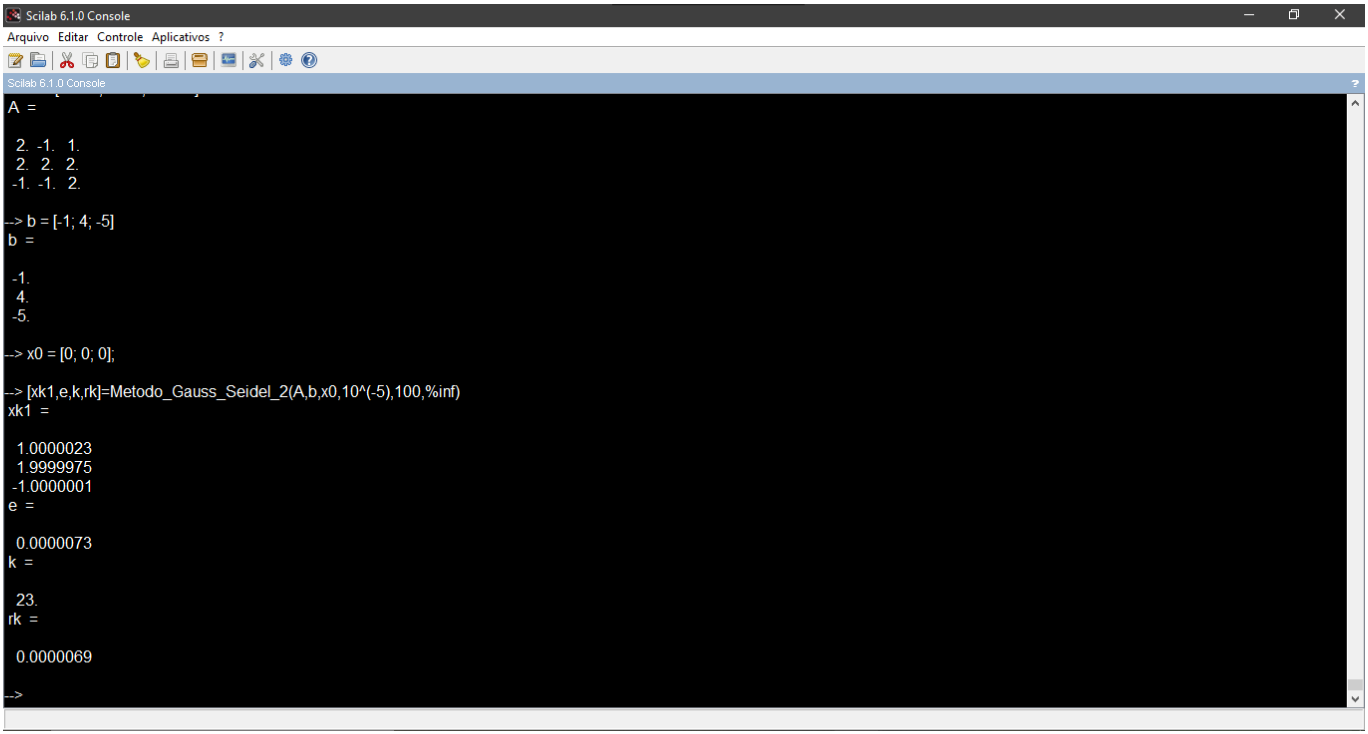


Figure 9: Função Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicada ao sistema dado

Comentários: Para o item (a), basta analisar a figura 7 que demonstra que 25 iterações não foram suficientes para se obter uma solução. Para o item (b), vemos que 23 iterações foram suficientes para que o método convergisse para uma solução. Vale ressaltar que os 2 itens dessa questão apresentam a maior eficiência obtida pelo método Gauss-Seidel quando comparado ao método de Jacobi.

5 Questão 5

O referido sistema é:

$$\begin{cases} 1\mathrm{x}_1 + 0x_2 - x_3 = 0.2 \\ \text{- } 0.5\mathrm{x}_1 + 1x_2 - 0.25x_3 = -1.425 \\ \mathrm{x}_1 - 0.5x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

5.1 (a)

Veja, na figura 10, a função Metodo-Gauss-Seidel-1 aplicada ao sistema dado com tolerância de 10^{-2} e um limite de 300 iterações.

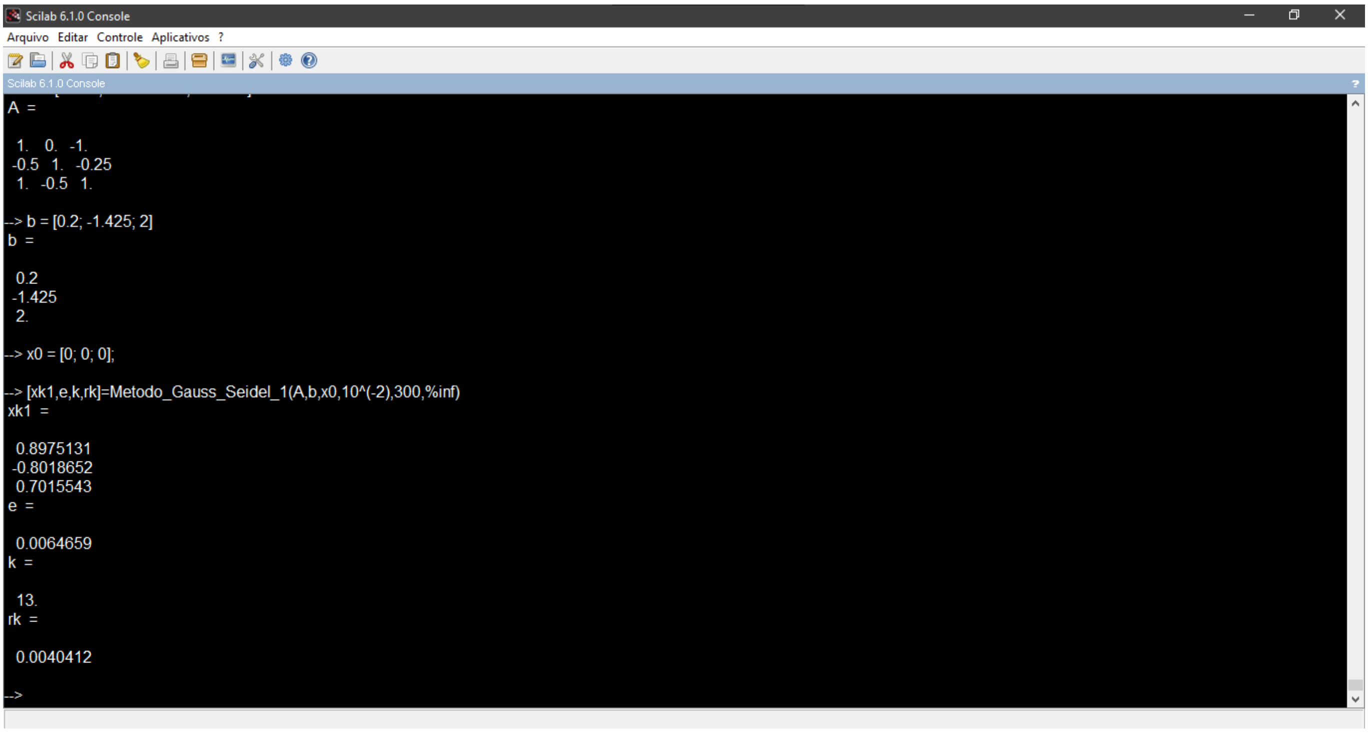


Figure 10: Função Metodo-Gauss-Seidel-1 aplicada ao sistema dado

Veja, na figura 11, a função Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicada ao sistema dado com tolerância de 10^{-2} e um limite de 300 iterações.

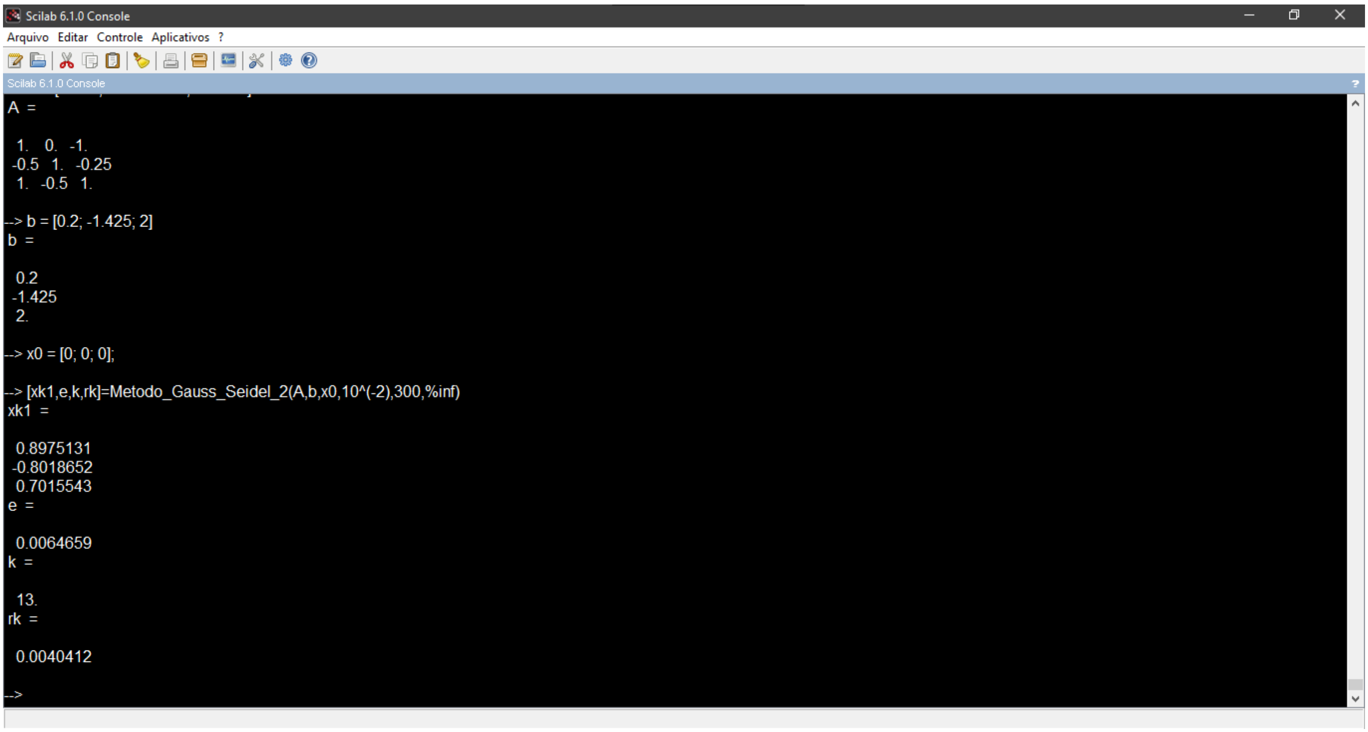


Figure 11: Função Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicada ao sistema dado

Alterando as equações do sistema conforme pedido, temos:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0.2 \\ -\ 0.5x_1 + 1x_2 - 0.25x_3 = -1.425 \\ x_1 - 0.5x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Veja, na figura 12, a função Metodo-Gauss-Seidel-1 aplicada ao novo sistema dado com tolerância de 10^{-2} e um limite de 300 iterações.

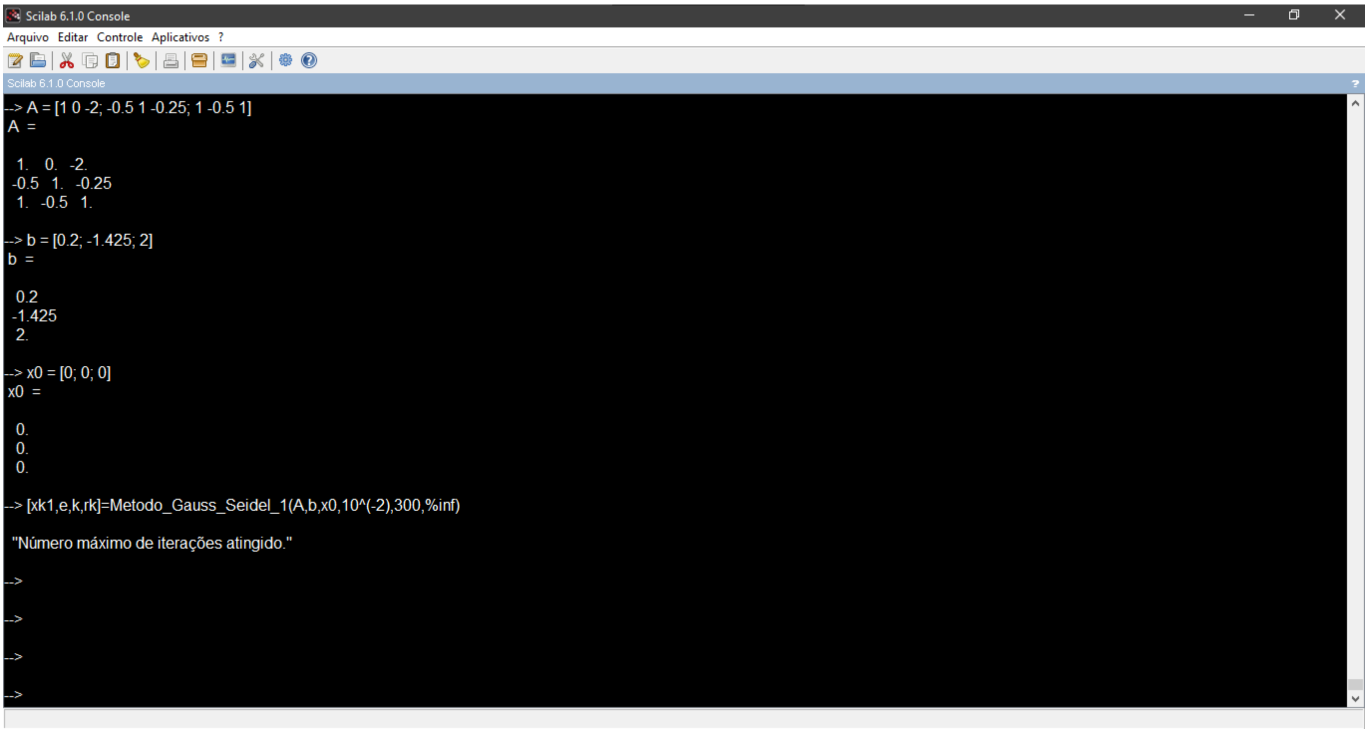


Figure 12: Função Metodo-Gauss-Seidel-1 aplicada ao novo sistema

Veja, na figura 13, a função Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicada ao novo sistema dado com tolerância de 10^{-2} e um limite de 300 iterações.

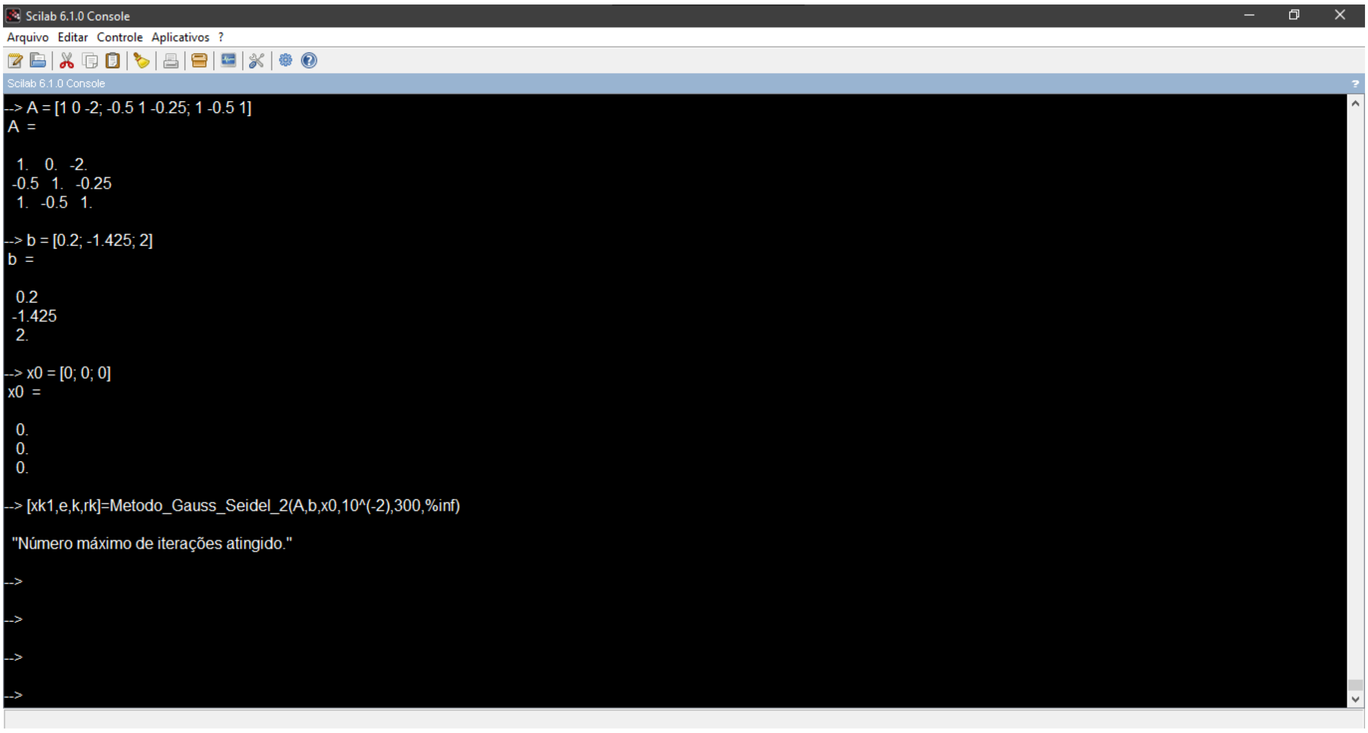


Figure 13: Função Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicada ao novo sistema

Comentários: Para o item (a), observe nas figuras 10 e 11 as soluções aproximadas para o sistema dado obtidas pelas funções Gauss-Seidel-1 e Gauss-Seidel-2 em apenas 13 iterações. Para o item (b), observe nas figuras 12 e 13 que ambas as funções do método Gauss-Seidel não foram capazes de encontrar uma solução imposto o limite de 300 iterações, apesar de ter sido feita apenas uma pequena mudança no sistema original.

6 Questão 6

No arquivo "Gerador-Sistema.sci" encontra-se o código da função utilizada para gerar matrizes $A_{n\times n}$ com diagonal estritamente dominante e vetores b de dimensão n.

Veja, na figura 14, os tempos, em segundos, envolvidos na aplicação de cada uma das funções Metodo-Gauss-Seidel-1 e Metodo-Gauss-Seidel-2 ao sistema $Ax = b$ gerado para $n = 10$, bem como os valores de e, k e r_k, mostrando que uma solução foi de fato encontrada.

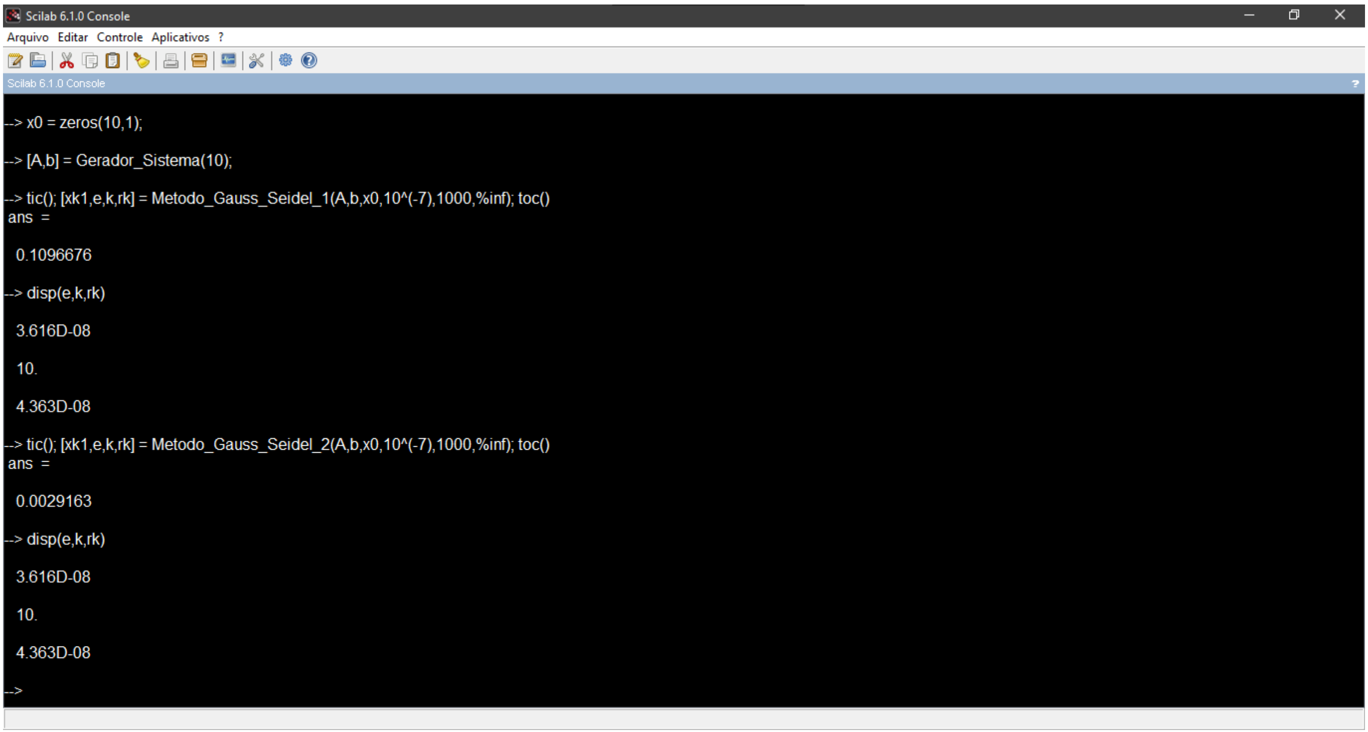


Figure 14: Tempo de execução das funções Metodo-Gauss-Seidel-1 e Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicadas ao sistema gerado para n = 10

Veja, na figura 15, os tempos, em segundos, envolvidos na aplicação de cada uma das funções Metodo-Gauss-Seidel-1 e Metodo-Gauss-Seidel-2 ao sistema $Ax = b$ gerado para $n = 100$, bem como os valores de e, k e r_k, mostrando que uma solução foi de fato encontrada.

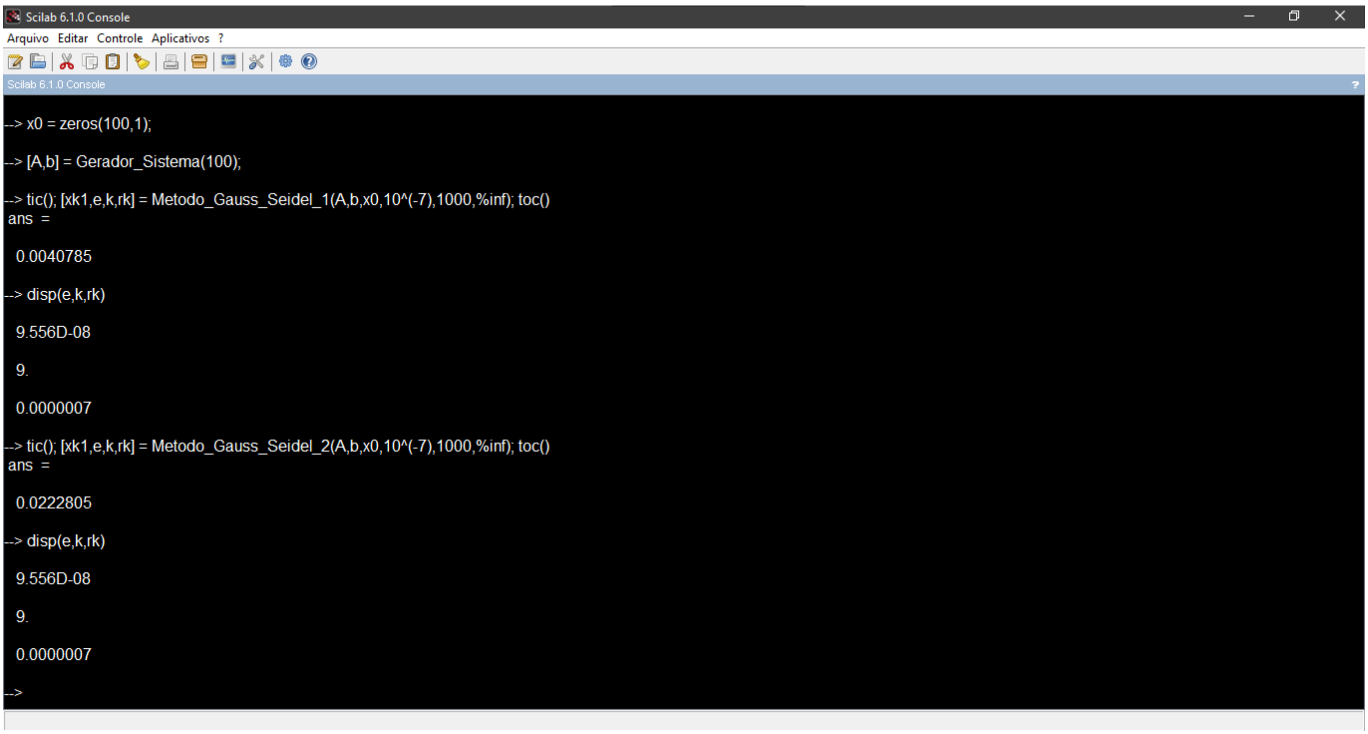


Figure 15: Tempo de execução das funções Metodo-Gauss-Seidel-1 e Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicadas ao sistema gerado para n = 100

Veja, na figura 16, os tempos, em segundos, envolvidos na aplicação de cada uma das funções Metodo-Gauss-Seidel-1 e Metodo-Gauss-Seidel-2 ao sistema $Ax = b$ gerado para $n = 1000$, bem como os valores de e, k e r_k, mostrando que uma solução foi de fato encontrada.

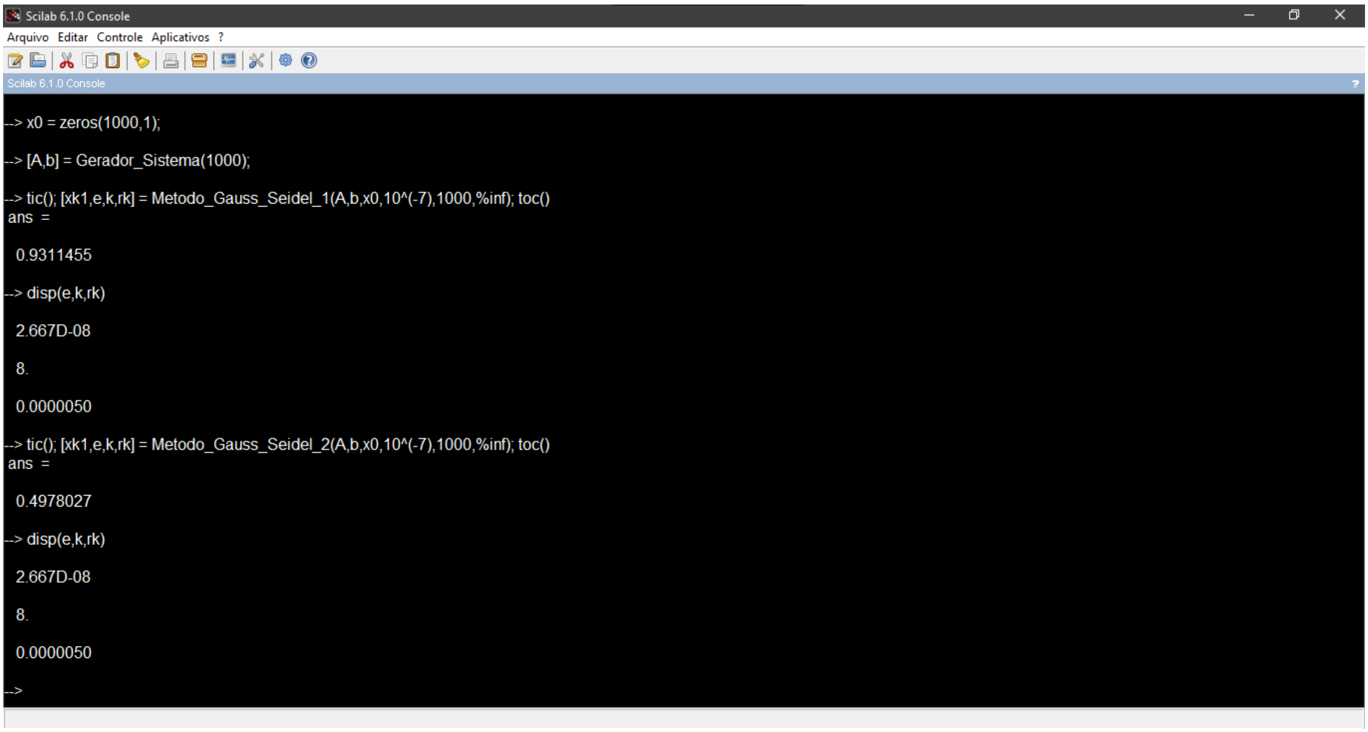


Figure 16: Tempo de execução das funções Metodo-Gauss-Seidel-1 e Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicadas ao sistema gerado para n = 1000

Veja, na figura 17, os tempos, em segundos, envolvidos na aplicação de cada uma das funções Metodo-Gauss-Seidel-1 e Metodo-Gauss-Seidel-2 ao sistema $Ax = b$ gerado para $n = 2000$, bem como os valores de e, k e r_k, mostrando que uma solução foi de fato encontrada.

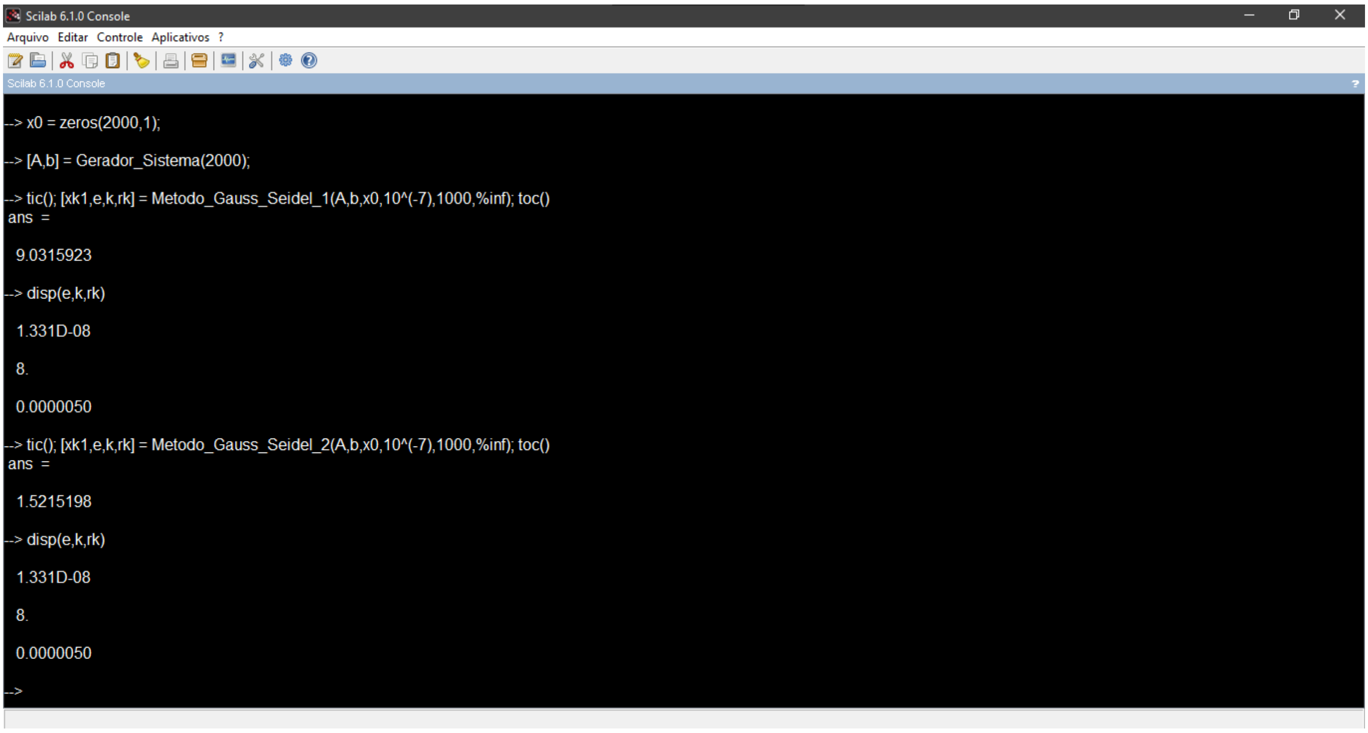


Figure 17: Tempo de execução das funções Metodo-Gauss-Seidel-1 e Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicadas ao sistema gerado para n = 2000

Veja, na figura 18, os tempos, em segundos, envolvidos na aplicação de cada uma das funções Metodo-Gauss-Seidel-1 e Metodo-Gauss-Seidel-2 ao sistema $Ax = b$ gerado para $n = 5000$, bem como os valores de e, k e r_k, mostrando que uma solução foi de fato encontrada.

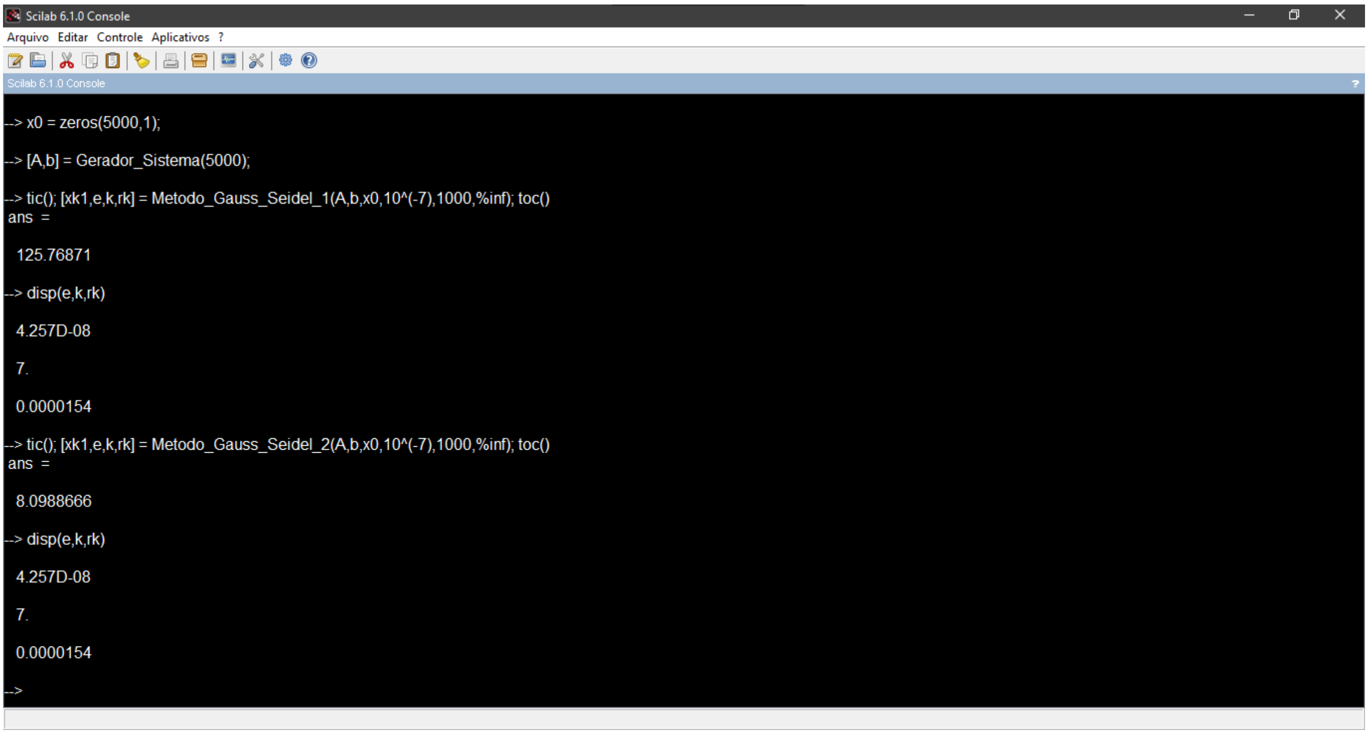


Figure 18: Tempo de execução das funções Metodo-Gauss-Seidel-1 e Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicadas ao sistema gerado para n = 5000

Veja, na figura 19, os tempos, em segundos, envolvidos na aplicação de cada uma das funções Metodo-Gauss-Seidel-1 e Metodo-Gauss-Seidel-2 ao sistema $Ax = b$ gerado para $n = 10000$, bem como os valores de e, k e r_k, mostrando que uma solução foi de fato encontrada.

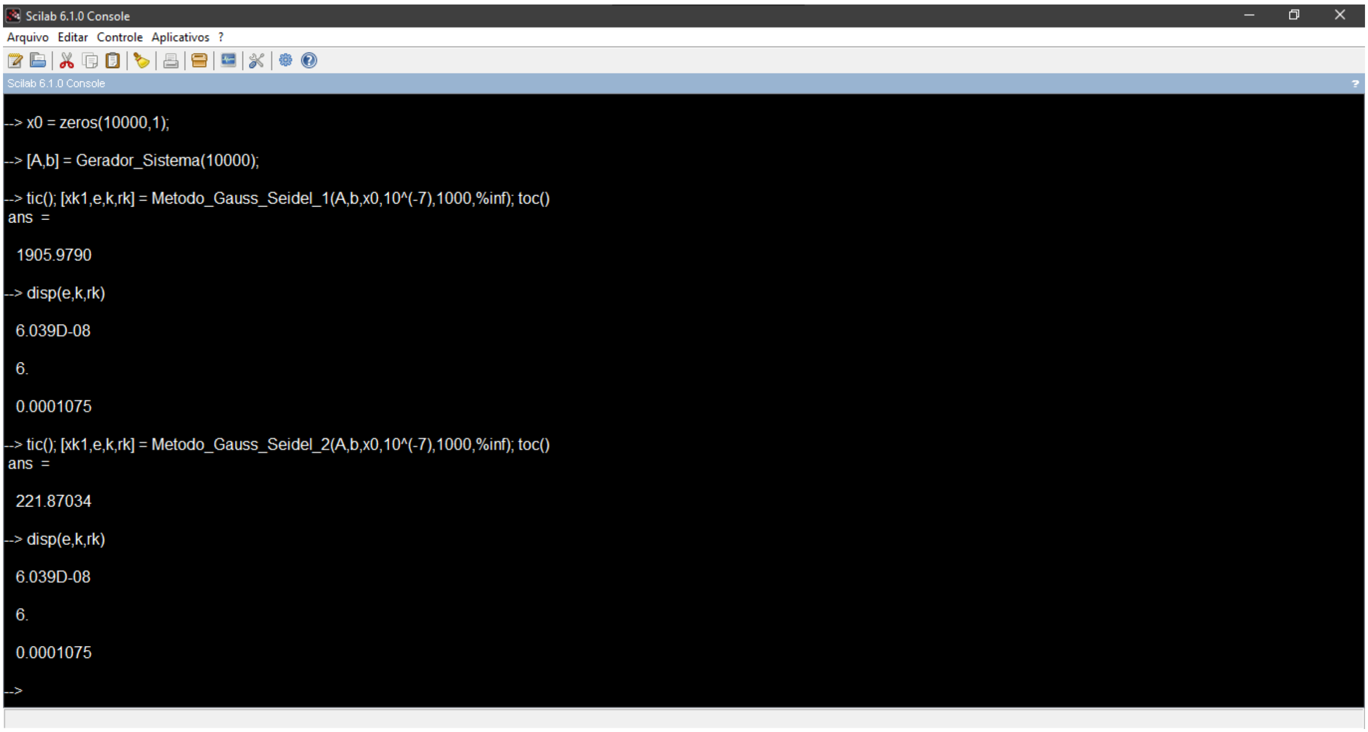


Figure 19: Tempo de execução das funções Metodo-Gauss-Seidel-1 e Metodo-Gauss-Seidel-2 aplicadas ao sistema gerado para n = 10000

Comentários: Veja na figura 20 um gráfico contendo os tempos de execução das funções Gauss-Seidel-1 e Gauss-Seidel-2 obtidos nas figuras 14 a 19. Podemos concluir que apesar de em todas as aplicações feitas anteriormente das 2 funções para um mesmo sistema $Ax = b$ os resultados obtidos serem praticamente idênticos, a diferença crucial entre as funções está no tempo de execução. A função Gauss-Seidel-1 utiliza em seu código o comando nativo do Scilab para calcular matrizes inversas, o que tem um custo computacional muito alto. Por outro lado, na Gauss-Seidel-2, contornamos esse impecilho utilizando a função Resolve-Sistema-Lx, que permitiu resolver os sistemas sem perda de corretude e de forma muito mais eficiente, principalmente para sistemas de dimensão (n) muito grande.

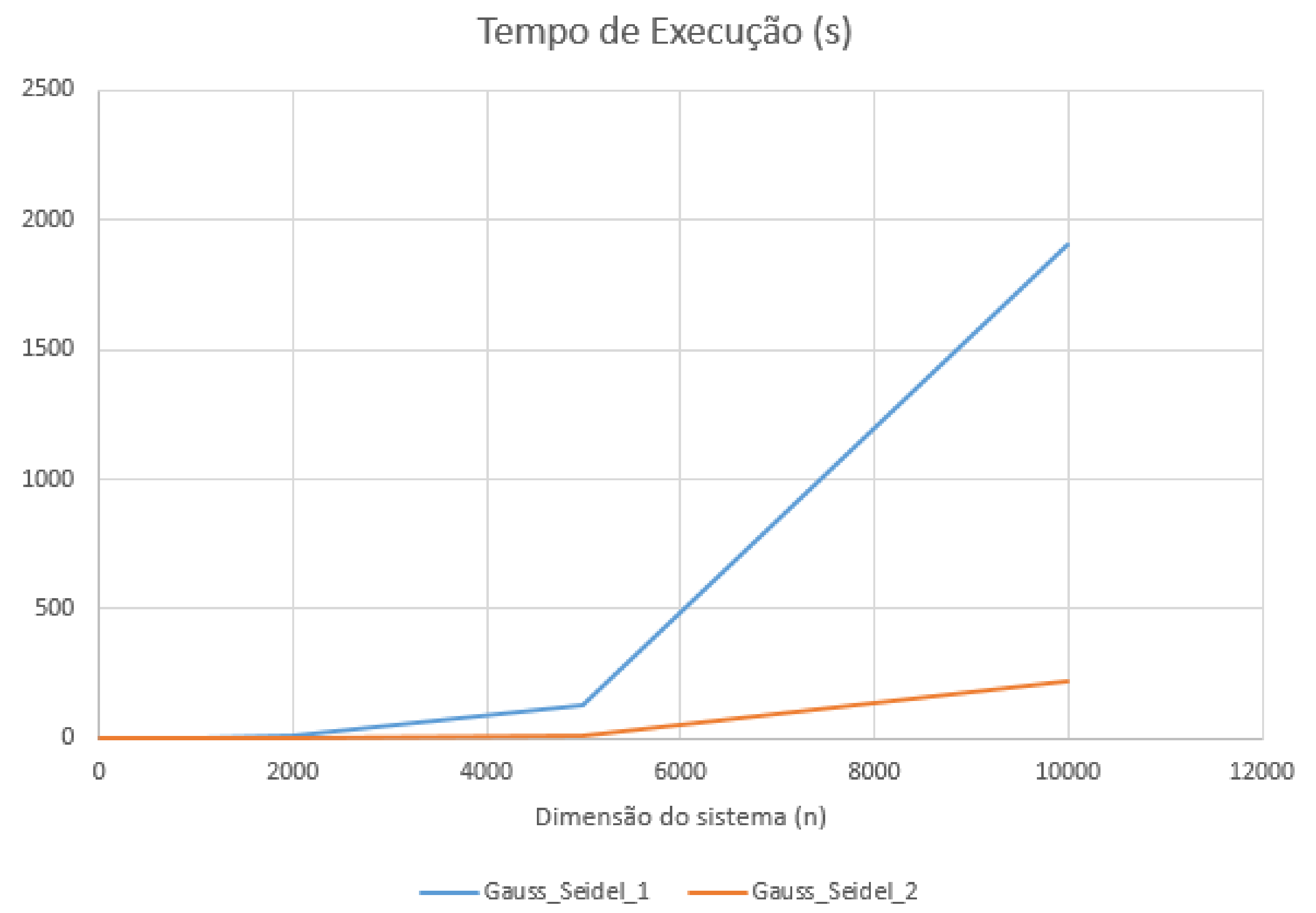


Figure 20: Gráfico contendo os tempos de execução obtidos anteriormente