

## AULA PRÁTICA 5 DECOMPOSIÇÃO QR

### 1) MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT

Escreva uma função Scilab `function [Q,R] = qr_GS(A)` que implementa o Método de Gram-Schmidt para determinar a decomposição QR de uma matriz A com colunas linearmente independentes.

Testar a sua função com algumas matrizes de ordens diferentes. Para cada uma delas, testar a precisão do método (por exemplo, teste a ortogonalidade da matriz Q obtida calculando  $Q^T Q$ ).

### 2) MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT MODIFICADO

Escreva uma função Scilab `function [Q,R] = qr_GSM(A)` que implementa o Método de Gram-Schmidt Modificado.

Testar a sua função com as mesmas matrizes usadas nos testes do item anterior. Comparar a precisão dos dois Métodos.

### 3) MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT MODIFICADO COM PIVOTEAMENTO DE COLUNAS

Escreva uma função Scilab `function [Q,R,P] = qr_GSP(A)` que implementa o Método de Gram-Schmidt modificado com Pivoteamento de colunas. Nesse Método, na primeira iteração, escolhe-se a maior entre as colunas da matriz A para ser a primeira, fazendo a troca necessária, e normalizando para obter  $q_1$ . A partir da segunda iteração, a cada iteração subtrai-se das colunas restantes as projeções delas sobre o subespaço gerado pela última coluna ortonormal obtida e escolhe-se aquela de maior norma resultante para ser a próxima coluna processada. Para tal faz-se a troca necessária. O objetivo desse procedimento é escolher sempre a “melhor coluna”, isto é, a mais independente das anteriores. Essa função deverá retornar também a matriz de permutação P que contém as trocas de colunas efetuadas, de forma que  $AP = QR$ . Testar a sua função com as mesmas matrizes usadas nos testes dos itens anteriores. Comparar a precisão e estabilidade dos Métodos.

### 4) MÉTODO DE HOUSEHOLDER

Escreva uma função Scilab `function [U,R] = qr_House(A)` que implementa o Método de Householder para determinar a decomposição QR de uma matriz A. A matriz U, triangular inferior, deve conter em suas colunas os vetores unitários que geraram as matrizes dos refletores de Householder usadas para gerar a decomposição QR.

Escreva também uma função Scilab `function [Q] = constroi_Q_House(U)` que constrói a matriz ortogonal Q da decomposição  $A = QR$  a partir da matriz U retornada pela função `function [U,R] = qr_House(A)`.

4.1) Testar as suas funções com as mesmas matrizes usadas nos testes dos itens anteriores. Comparar a precisão dos Métodos.

4.2) Testar as suas funções com a matriz  $A = \begin{bmatrix} 0,70000 & 0,70711 \\ 0,70001 & 0,70711 \end{bmatrix}$ . Comparar a ortogonalidade das matrizes  $Q$  produzidas pelos Métodos.

4.3) Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ . Calcule a decomposição QR (reduzida) usando os

métodos de Gram-Schmidt, Householder e a função “qr” do Scilab. Compare os três resultados. Comente.

## 5) ALGORITMO QR para AUTOVALORES

Escreva uma função Scilab `function [S] = espectro(A, tol)` que calcula os autovalores de uma matriz simétrica  $A$  usando o Algoritmo QR. Os autovalores calculados devem ser devolvidos no vetor  $S$ . Use como critério de parada a norma infinito da diferença entre dois espectros consecutivos menor do que uma tolerância `tol` dada ( $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ , ...). Teste a sua função com matrizes simétricas das quais você saiba quais são os autovalores.