

Trabalho Computacional 3 - ALN

João Lucas Duim

25 de Abril de 2021

1 Questão 1

No arquivo “Metodo-Potencia-1.sci” encontra-se o código da função utilizada para determinar o autovalor dominante (λ) de A usando o Método da Potência, de acordo com o algoritmo - versão 1 dado.

No arquivo “Metodo-Potencia-2.sci” encontra-se o código da função utilizada para determinar o autovalor dominante (λ) de A usando o Método da Potência, de acordo com o algoritmo - versão 2 dado.

2 Questão 2

No arquivo “Potencia-Deslocada-inversa.sci” encontra-se o código da função utilizada para determinar o autovalor de A mais próximo de “alfa” usando o Método da Potência Deslocada com Iteração Inversa, de acordo com o algoritmo dado.

3 Questão 3

No arquivo “Potencia-Deslocada-Rayleigh.sci” encontra-se o código da função utilizada para determinar o autovalor de A mais próximo de “alfa” usando o Método da Potência Deslocada com Iteração de Rayleigh, de acordo com o algoritmo dado.

4 Questão 4

Primeiramente, vamos testar as funções da questão 1 com a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e usando o vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ como aproximação inicial.

Veja, na figura 1, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [1 1; 2 0]
A =

  1.  1.
  2.  0.

--> x0 = [1; 0]
x0 =

  1.
  0.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-7),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  2.
x1 =

  1.
  1.
k =

  25.
n_erro =

  8.941D-08

-->|
```

Figure 1: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 2, a função Metodo-Potencia-2 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [1 1; 2 0]
A =

  1.  1.
  2.  0.

--> x0 = [1; 0]
x0 =

  1.
  0.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_2(A,x0,10^(-7),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  2.0000000
x1 =

  0.7071068
  0.7071068
k =

  25.
n_erro =

  6.706D-08

-->
```

Figure 2: Função Metodo-Potencia-2 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 3, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-20}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [1 1; 2 0]
A =

1. 1.
2. 0.

--> x0 = [1; 0]
x0 =

1.
0.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-20),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

2.
x1 =

1.
1.
k =

56.
n_erro =

0.

-->

```

Figure 3: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-20}$

Veja, na figura 4, a função Metodo-Potencia-2 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-20}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [1 1; 2 0]
A =

1. 1.
2. 0.

--> x0 = [1; 0]
x0 =

1.
0.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_2(A,x0,10^(-20),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

2.0000000
x1 =

0.7071068
0.7071068
k =

55.
n_erro =

0.

-->

```

Figure 4: Função Metodo-Potencia-2 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-20}$

Agora, vamos testar as funções da questão 1 com a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -6 \\ -4 & 12 & -12 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$ e usando o vetor

$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ como aproximação inicial.

Veja, na figura 5, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [0 5 -6; -4 12 -12; -2 -2 10]
A =

    0.  5. -6.
   -4. 12. -12.
   -2. -2. 10.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

    1.
    1.
    1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-7),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

    16.0000001
x1 =

    0.5
    1.
   -0.5
k =

    13.
n_erro =

    4.473D-08

```

Figure 5: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 6, a função Metodo-Potencia-2 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo Editar Controle Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [0 5 -6; -4 12 -12; -2 -2 10]
A =

  0.  5. -6.
 -4. 12. -12.
 -2. -2. 10.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

  1.
  1.
  1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_2(A,x0,10^(-7),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

 16.000000
x1 =

-0.4082483
-0.8164966
 0.4082483
k =

 13.
n_erro =

 3.334D-08
```

Figure 6: Função Metodo-Potencia-2 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 7, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-20}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo Editar Controle Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [0 5 -6; -4 12 -12; -2 -2 10]
A =

  0.  5. -6.
 -4. 12. -12.
 -2. -2. 10.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

  1.
  1.
  1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-20),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

 16.
x1 =

 0.5
  1.
 -0.5
k =

 28.
n_erro =

 0.
```

Figure 7: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-20}$

Veja, na figura 8, a função Metodo-Potencia-2 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-20}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [0 5 -6; -4 12 -12; -2 -2 10]
A =

    0.   5.  -6.
   -4.  12. -12.
   -2.  -2.  10.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

    1.
    1.
    1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_2(A,x0,10^(-20),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

16.000000
x1 =

-0.4082483
-0.8164966
 0.4082483
k =

31.
n_erro =

0.

```

Figure 8: Função Metodo-Potencia-2 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-20}$

Finalmente, vamos testar as funções da questão 1 com a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 3 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.75 & 7 \end{bmatrix}$ e usando o vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ como aproximação inicial.

Veja, na figura 9, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [0 1 0 0; 2 5 0 0; 0.5 0 3 0.5; 0 0 0.75 7]
A =

  0.  1.  0.  0.
  2.  5.  0.  0.
  0.5  0.  3.  0.5
  0.  0.  0.75  7.

--> x0 = [1; 1; 1; 1];
--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-7),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  7.0916501
x1 =

  4.724D-08
  0.0000003
  0.1222001
  1.
k =

  55.
n_erro =

  8.122D-08
-->

```

Figure 9: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 10, a função Metodo-Potencia-2 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [0 1 0 0; 2 5 0 0; 0.5 0 3 0.5; 0 0 0.75 7]
A =

  0.  1.  0.  0.
  2.  5.  0.  0.
  0.5  0.  3.  0.5
  0.  0.  0.75  7.

--> x0 = [1; 1; 1; 1];
--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_2(A,x0,10^(-7),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  7.0916501
x1 =

  4.689D-08
  0.0000003
  0.1212978
  0.9926162
k =

  55.
n_erro =

  8.206D-08
-->

```

Figure 10: Função Metodo-Potencia-2 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 11, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-20}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [0 1 0 0; 2 5 0 0; 0.5 0 3 0.5; 0 0 0.75 7]
A =

0.  1.  0.  0.
2.  5.  0.  0.
0.5  0.  3.  0.5
0.  0.  0.75  7.

--> x0 = [1; 1; 1; 1];

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-20),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

7.0916501
x1 =

4.475D-21
2.404D-20
0.1222001
1.
k =

163.
n_erro =

7.693D-21

-->

```

Figure 11: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-20}$

Veja, na figura 12, a função Metodo-Potencia-2 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-20}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [0 1 0 0; 2 5 0 0; 0.5 0 3 0.5; 0 0 0.75 7]
A =

0.  1.  0.  0.
2.  5.  0.  0.
0.5  0.  3.  0.5
0.  0.  0.75  7.

--> x0 = [1; 1; 1; 1];

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_2(A,x0,10^(-20),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

7.0916501
x1 =

4.442D-21
2.386D-20
0.1212978
0.9926162
k =

163.
n_erro =

7.768D-21

-->

```

Figure 12: Função Metodo-Potencia-2 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-20}$

Vamos, a seguir, coletar os tempos de execução de cada um dos testes feitos até então.

Veja, na figura 13, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 1 e 2.


```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [1 1; 2 0]
A =

  1.  1.
  2.  0.

--> x0 = [1; 0]
x0 =

  1.
  0.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-7),1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

  0.0025427

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_2(A,x0,10^(-7),1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

  0.0014301

-->
```

Figure 13: Runtime dos testes executados nas figuras 1 e 2

Veja, na figura 14, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 3 e 4.

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [1 1; 2 0]
A =

  1.  1.
  2.  0.

--> x0 = [1; 0]
x0 =

  1.
  0.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-20),1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

  0.0031551

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_2(A,x0,10^(-20),1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

  0.0026397

-->
```

Figure 14: Runtime dos testes executados nas figuras 3 e 4

Veja, na figura 15, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 5 e 6.

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console

--> A = [0 5 -6; -4 12 -12; -2 -2 10]
A =

    0.    5.   -6.
   -4.   12.  -12.
   -2.   -2.   10.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

    1.
    1.
    1.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-7),1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

    0.00161

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_2(A,x0,10^(-7),1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

    0.0009753

-->
```

Figure 15: Runtime dos testes executados nas figuras 5 e 6

Veja, na figura 16, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 7 e 8.

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console

--> A = [0 5 -6; -4 12 -12; -2 -2 10]
A =

    0.    5.   -6.
   -4.   12.  -12.
   -2.   -2.   10.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

    1.
    1.
    1.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-20),1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

    0.0017631

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_2(A,x0,10^(-20),1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

    0.0015437

-->
```

Figure 16: Runtime dos testes executados nas figuras 7 e 8

Veja, na figura 17, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 9 e 10.

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo Editar Controle Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [0 1 0 0; 2 5 0 0; 0.5 0 3 0.5; 0 0 0.75 7]
A =

0. 1. 0. 0.
2. 5. 0. 0.
0.5 0. 3. 0.5
0. 0. 0.75 7.

--> x0 = [1; 1; 1; 1]
x0 =

1.
1.
1.
1.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-7),1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

0.0028143

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_2(A,x0,10^(-7),1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

0.001978

-->
```

Figure 17: Runtime dos testes executados nas figuras 9 e 10

Veja, na figura 18, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 11 e 12.

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo Editar Controle Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [0 1 0 0; 2 5 0 0; 0.5 0 3 0.5; 0 0 0.75 7]
A =

0. 1. 0. 0.
2. 5. 0. 0.
0.5 0. 3. 0.5
0. 0. 0.75 7.

--> x0 = [1; 1; 1; 1]
x0 =

1.
1.
1.
1.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-20),1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

0.0063241

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_2(A,x0,10^(-20),1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

0.0049864

-->
```

Figure 18: Runtime dos testes executados nas figuras 11 e 12

Por fim, vamos plotar esses tempos de execução em gráficos para facilitar a nossa análise.

Veja, na figura 19, o gráfico dos tempos de execução obtidos nas figuras 13, 15 e 17. Em uma mesma vertical, a matriz testada para as duas funções é a mesma. Na vertical de abscissa 1, 2 e 3, encontram-se, respectivamente, os tempos de execução coletados na figura 13, 15 e 17.

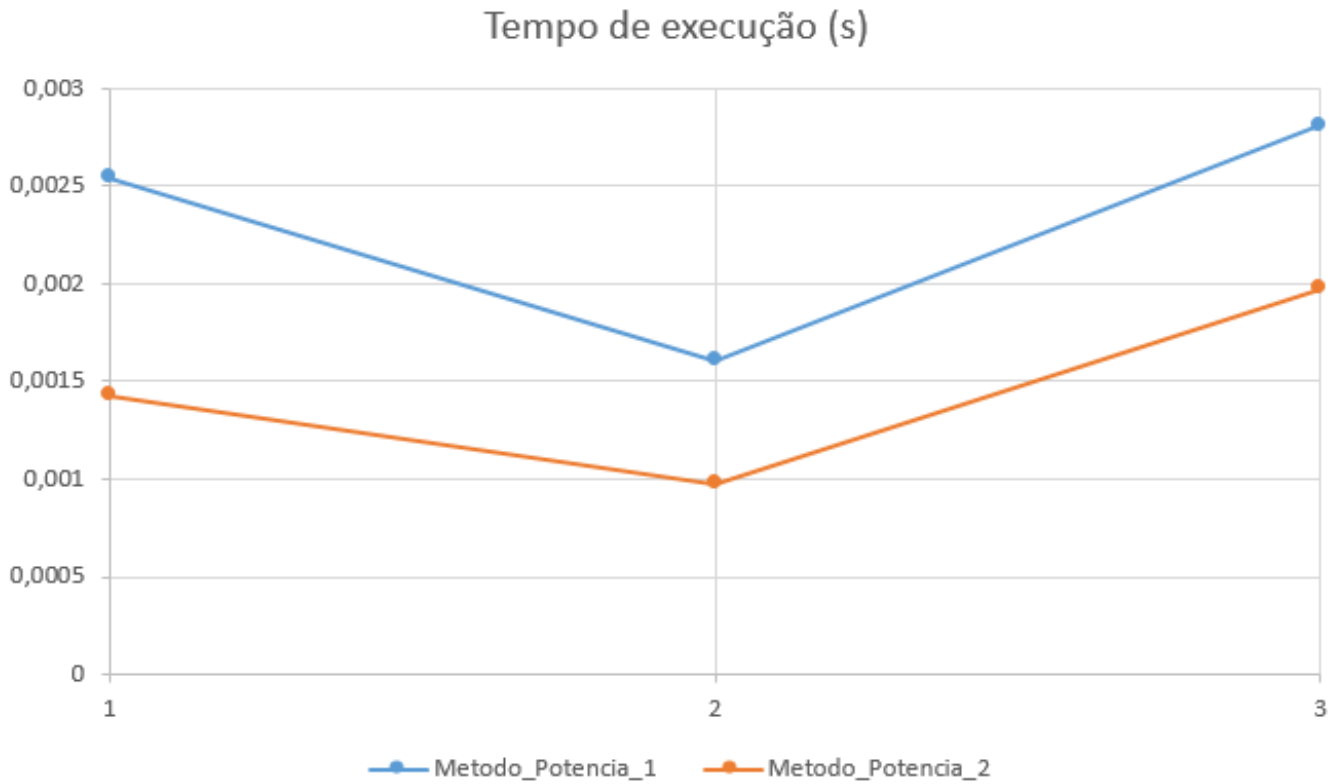


Figure 19: Tempos de execução das funções Metodo-Potencia-1 e Metodo-Potencia-2 fixados x_0 e $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 20, o gráfico dos tempos de execução obtidos nas figuras 14, 16 e 18. Em uma mesma vertical, a matriz testada para as duas funções é a mesma. Na vertical de abscissa 1, 2 e 3, encontram-se, respectivamente, os tempos de execução coletados na figura 14, 16 e 18.

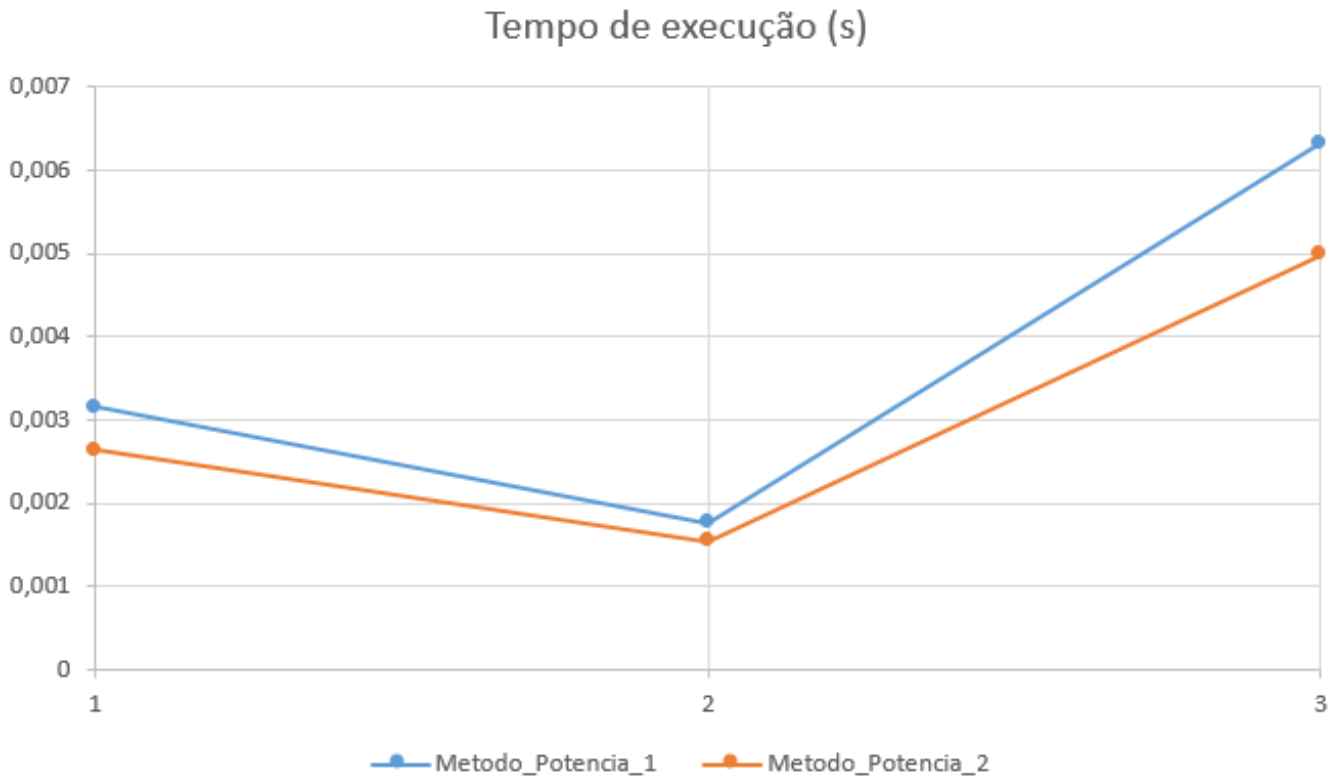


Figure 20: Tempos de execução das funções Metodo-Potencia-1 e Metodo-Potencia-2 fixados x_0 e $\epsilon = 10^{-20}$

Comentários: Podemos ver que ambas as funções foram testadas em várias matrizes de ordens diferentes, variando as variáveis de entrada de cada função. Vale ressaltar que todos os autovalores e autovetores retornados coincidem com os encontrados por cálculos feitos previamente e com os que são retornados pela função “spec(A)” nativa do scilab, reforçando a corretude das funções (Note que os autovetores retornados pelas duas funções são o mesmo, porém normalizado com normas diferentes). Nas figuras de 1 a 12, podemos ver que, para os exatos mesmos parâmetros de entrada, as funções Metodo-Potencia-1 e Metodo-Potencia-2 realizam aproximadamente o mesmo número de iterações. No entanto, nas figuras 19 e 20, vemos que, em geral, a função Metodo-Potencia-2 tem execução mais rápida que a função Metodo-Potencia-1. Isso ocorre porque a cada iteração, encontrar a coordenada de maior módulo de um vetor é mais custoso computacionalmente do que calcular o quociente de Rayleigh. Note também, comparando as figuras 19 e 20, que fixados os outros parâmetros de entrada, para se obter um resultado mais preciso com $\epsilon = 10^{-20}$ é gasto um tempo maior do que com $\epsilon = 10^{-7}$, além de que um número bem maior de iterações é executado, como pode-se notar nas figuras de 1 a 12.

5 Questão 5

Primeiramente, construímos a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Veja, na figura 21, os Discos de Gerschgorin associados a essa matriz.

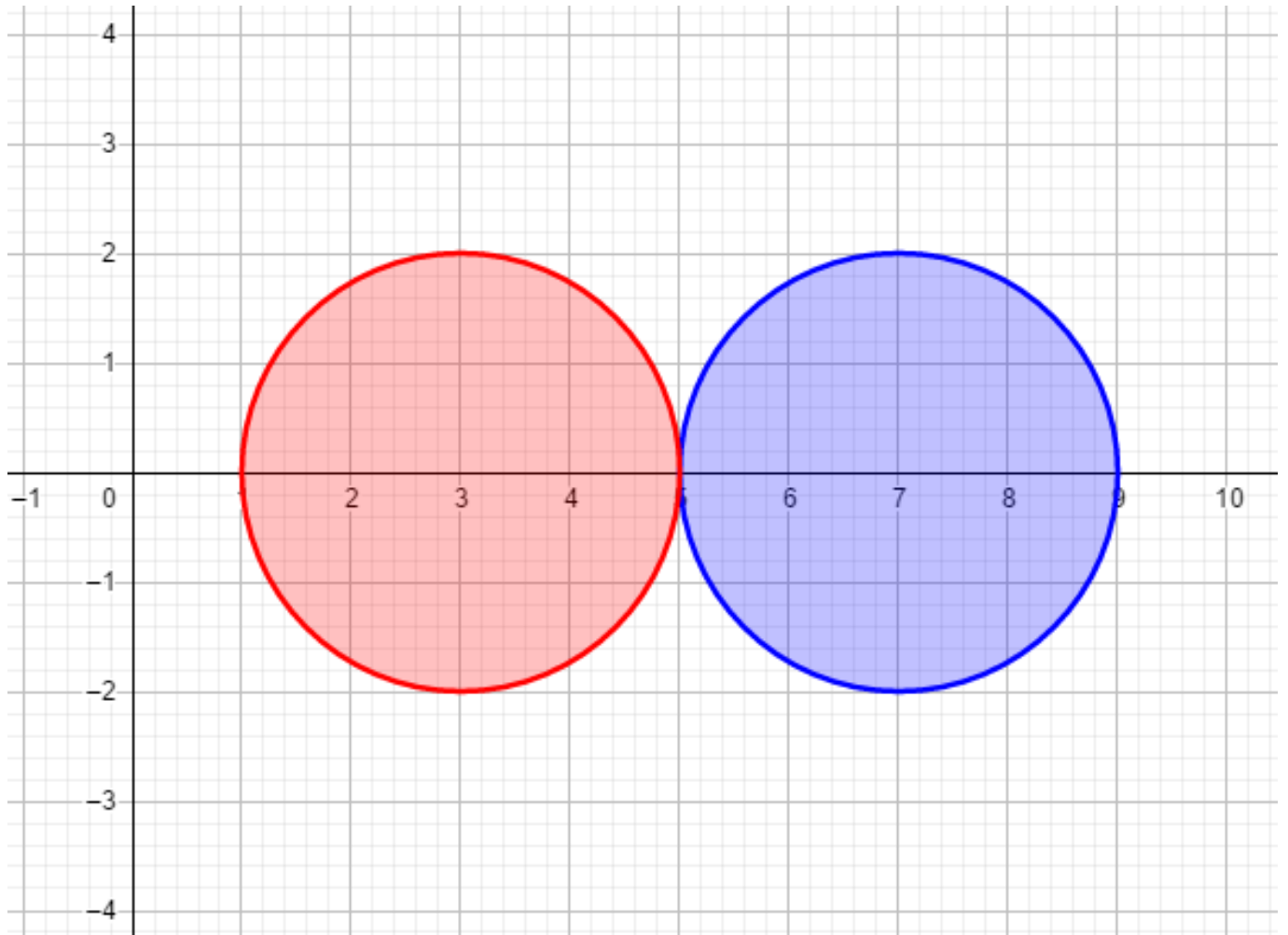


Figure 21: Discos de Gerschgorin associados à matriz A

Vemos, então, que um dos autovalores de A está próximo de 7 e o outro está próximo de 3. Portanto, vamos aplicar as funções Potencia-Deslocada-Inversa e Potencia-Deslocada-Rayleigh para encontrar esses autovalores usando $\alpha = 7$ e em seguida $\alpha = 3$. Note também que, como A é simétrica, o Teorema Espectral garante que todos os seus autovalores são reais.

Veja, na figura 22, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 7$

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo Editar Controle Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [7 2; 2 3]
A =

  7.  2.
  2.  3.

--> x0 = [1; 0]
x0 =

  1.
  0.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),7,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  7.8284271
x1 =

  0.9238795
  0.3826834
k =

  10.
n_erro =

  6.252D-08

-->

```

Figure 22: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 7$

Veja, na figura 23, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 7$

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo Editar Controle Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [7 2; 2 3]
A =

  7.  2.
  2.  3.

--> x0 = [1; 0]
x0 =

  1.
  0.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),7,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  7.8284271
x1 =

  0.9238795
  0.3826834
k =

  4.
n_erro =

  4.624D-11

-->

```

Figure 23: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 7$

Veja, na figura 24, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 3$

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [7 2; 2 3]
A =

  7.  2.
  2.  3.

--> x0 = [1; 0]
x0 =

  1.
  0.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),3,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  2.1715729
x1 =

 -0.3826834
  0.9238795
k =

  11.
n_erro =

  6.252D-08

-->

```

Figure 24: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 3$

Veja, na figura 25, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 3$

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [7 2; 2 3]
A =

  7.  2.
  2.  3.

--> x0 = [1; 0]
x0 =

  1.
  0.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),3,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  2.1715729
x1 =

  0.3826834
 -0.9238795
k =

  5.
n_erro =

  4.624D-11

-->

```

Figure 25: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 3$

Agora, construímos a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Veja, na figura 26, os Discos de Gerschgorin associados a essa matriz.

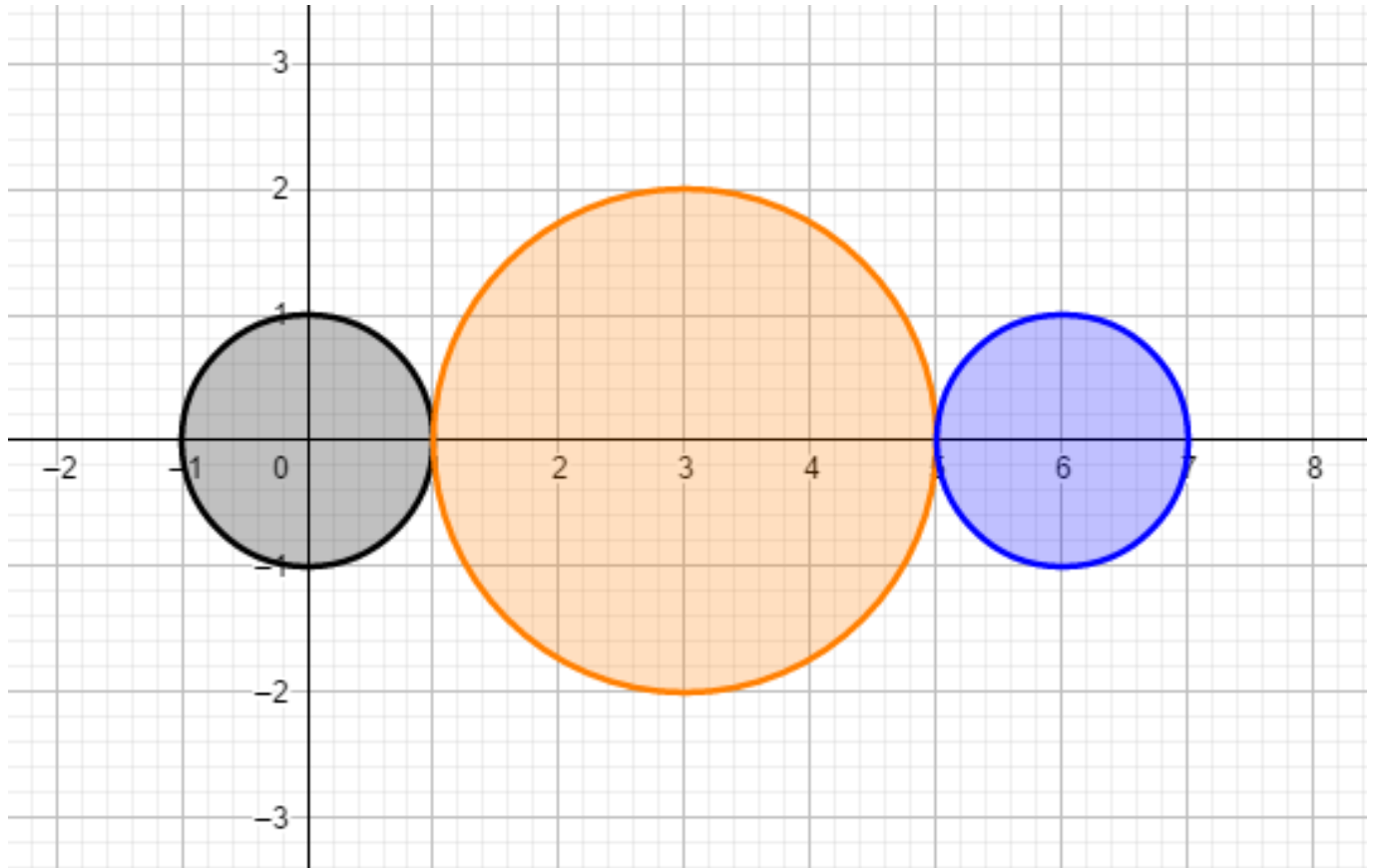


Figure 26: Discos de Gerschgorin associados à matriz A

Vemos, então, que um dos autovalores de A está próximo de 0, outro autovalor está próximo de 3 e o outro está próximo de 6. Portanto, vamos aplicar as funções Potencia-Deslocada-Inversa e Potencia-Deslocada-Rayleigh para encontrar esses autovalores usando $\alpha = 0$, em seguida $\alpha = 4$ (não vamos utilizar $\alpha = 3$ porque, como veremos, 3 é exatamente um dos autovalores de A , o que daria problema em ambas as funções ao aplicar a Gaussian-Elimination-4 a $A - 3 * I$, que não é uma matriz invertível) e por último, $\alpha = 6$. Note também que, como A é simétrica, o Teorema Espectral garante que todos os seus autovalores são reais.

Veja, na figura 27, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 0$

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [0 1 0; 1 3 1; 0 1 6]
A =

0.  1.  0.
1.  3.  1.
0.  1.  6.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

1.
1.
1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),0,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

-0.3166248
x1 =

0.952267
-0.3015113
0.047733
k =

9.
n_erro =

2.204D-08

```

Figure 27: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 0$

Veja, na figura 28, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 0$

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [0 1 0; 1 3 1; 0 1 6]
A =

0.  1.  0.
1.  3.  1.
0.  1.  6.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

1.
1.
1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),0,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

-0.3166248
x1 =

0.952267
-0.3015113
0.047733
k =

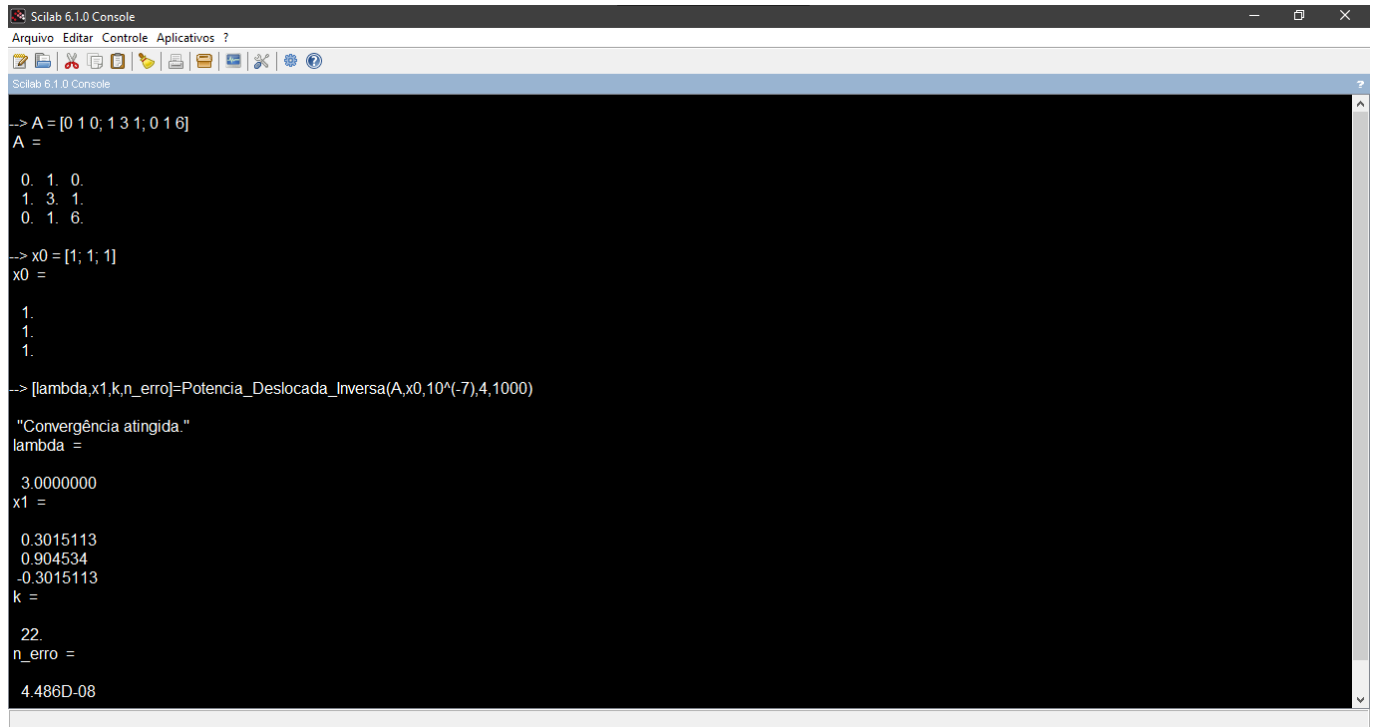
5.
n_erro =

5.929D-17

```

Figure 28: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 0$

Veja, na figura 29, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 4$



```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [0 1 0; 1 3 1; 0 1 6]
A =

  0.  1.  0.
  1.  3.  1.
  0.  1.  6.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

  1.
  1.
  1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),4,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  3.0000000
x1 =

  0.3015113
  0.904534
 -0.3015113
k =

  22.
n_erro =

  4.486D-08

```

Figure 29: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 4$

Veja, na figura 30, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 4$

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [0 1 0; 1 3 1; 0 1 6]
A =

0.  1.  0.
1.  3.  1.
0.  1.  6.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

1.
1.
1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),4,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

3.0000000
x1 =

-0.3015113
-0.904534
0.3015113
k =

6.
n_erro =

0.

```

Figure 30: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 4$

Veja, na figura 31, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 6$

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [0 1 0; 1 3 1; 0 1 6]
A =

0.  1.  0.
1.  3.  1.
0.  1.  6.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

1.
1.
1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),6,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

6.3166248
x1 =

0.047733
0.3015113
0.952267
k =

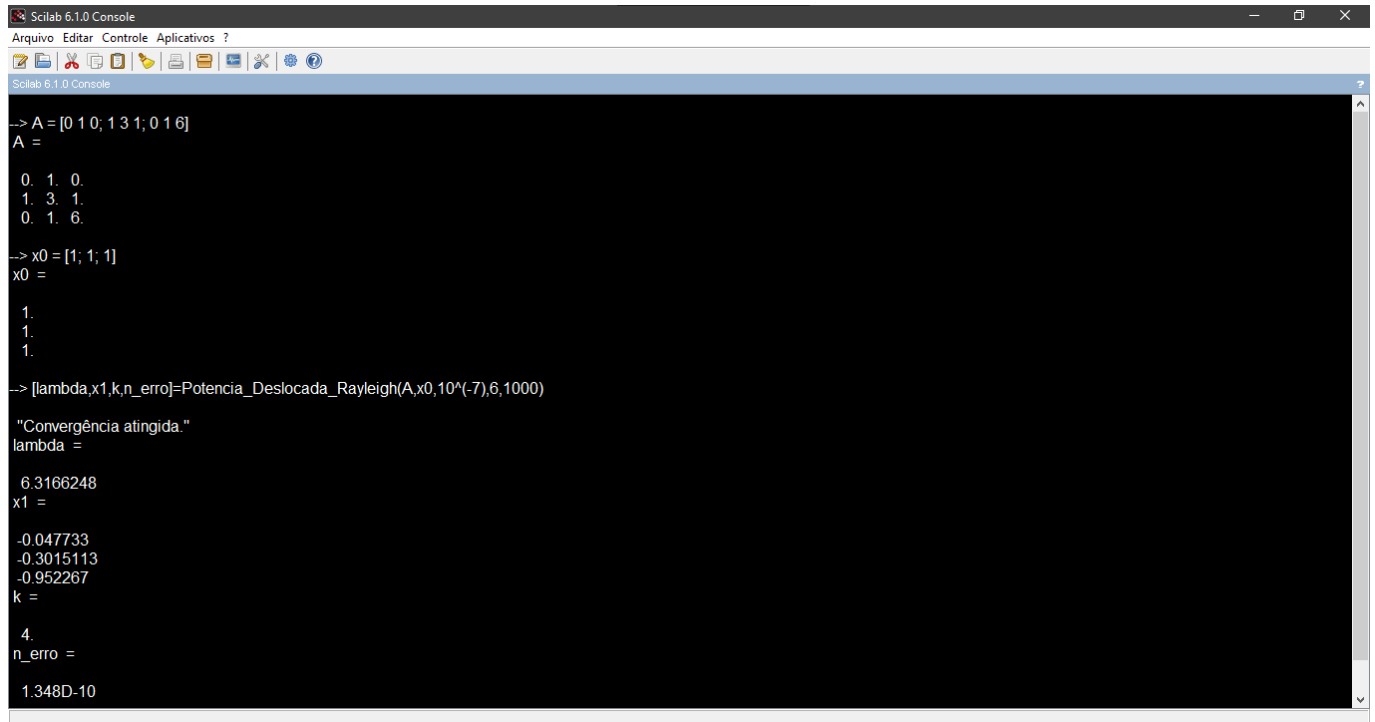
9.
n_erro =

1.183D-08

```

Figure 31: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 6$

Veja, na figura 32, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 6$



```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [0 1 0; 1 3 1; 0 1 6]
A =

  0.  1.  0.
  1.  3.  1.
  0.  1.  6.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

  1.
  1.
  1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),6,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  6.3166248
x1 =

 -0.047733
 -0.3015113
 -0.952267
k =

  4.
n_erro =

  1.348D-10

```

Figure 32: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 6$

Finalmente, construímos a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 4 & 15 & -4 \\ 8 & -4 & 20 \end{bmatrix}$.

Veja, na figura 33, os Discos de Gerschgorin associados a essa matriz.

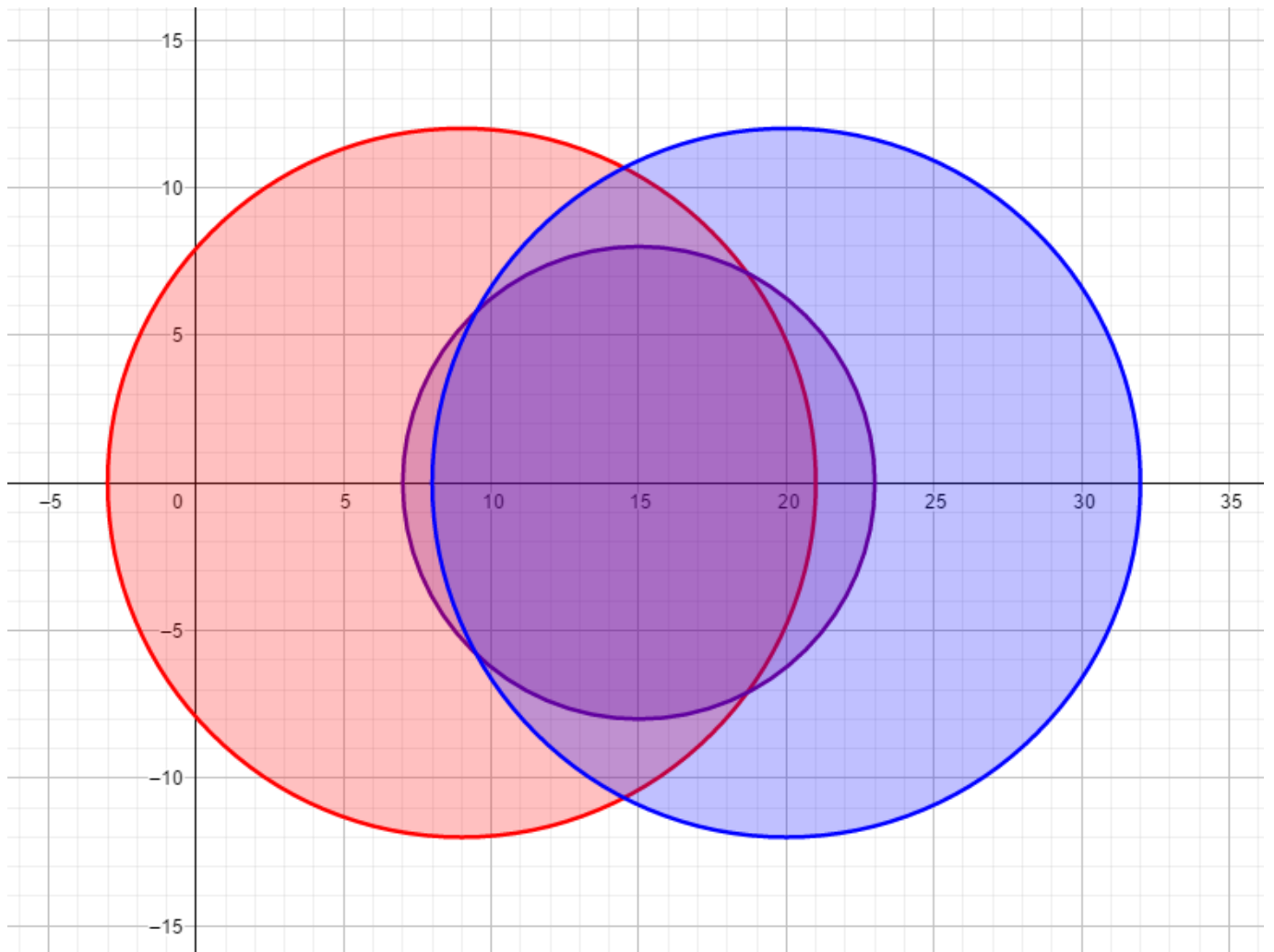


Figure 33: Discos de Gerschgorin associados à matriz A

Vemos, então, que um dos autovalores de A está próximo de 2, outro autovalor está próximo de 15 e o outro está próximo de 30. Portanto, vamos aplicar as funções Potencia-Deslocada-Inversa e Potencia-Deslocada-Rayleigh para encontrar esses autovalores usando $\alpha = 2$, em seguida $\alpha = 15$ e por último, $\alpha = 30$. Note também que, como A é simétrica, o Teorema Espectral garante que todos os seus autovalores são reais.

Veja, na figura 34, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 2$

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [9 4 8; 4 15 -4; 8 -4 20]
A =

  9.  4.  8.
  4. 15. -4.
  8. -4. 20.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

  1.
  1.
  1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),2,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  2.4433278
x1 =

 -0.7969643
  0.3984822
  0.4539381
k =

  7.
n_erro =

  1.569D-08

```

Figure 34: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 2$

Veja, na figura 35, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 2$

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [9 4 8; 4 15 -4; 8 -4 20]
A =

  9.  4.  8.
  4. 15. -4.
  8. -4. 20.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

  1.
  1.
  1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),2,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  2.4433278
x1 =

 -0.7969643
  0.3984822
  0.4539381
k =

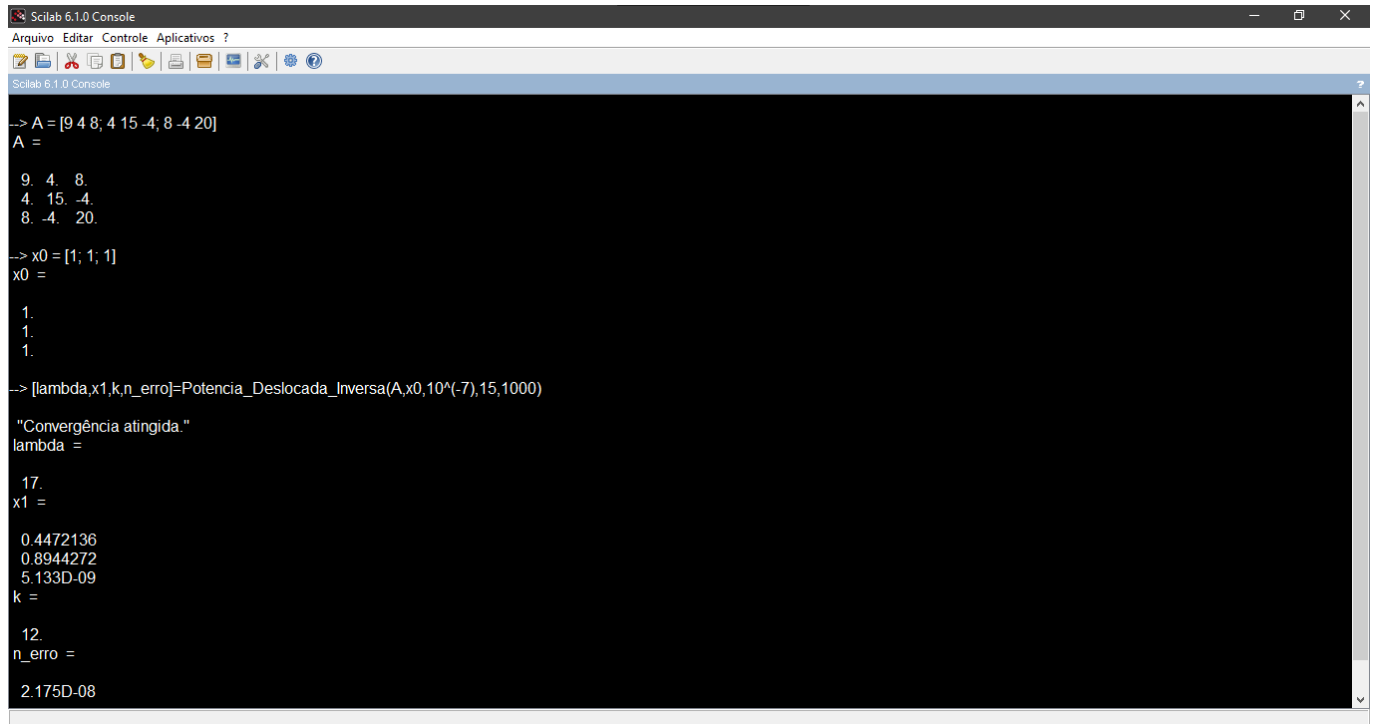
  7.
n_erro =

  7.850D-17

```

Figure 35: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 2$

Veja, na figura 36, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 15$



```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [9 4 8; 4 15 -4; 8 -4 20]
A =

  9.  4.  8.
  4. 15. -4.
  8. -4. 20.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

  1.
  1.
  1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),15,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

 17.
x1 =

 0.4472136
 0.8944272
 5.133D-09
k =

 12.
n_erro =

 2.175D-08

```

Figure 36: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 15$

Veja, na figura 37, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 15$


```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [9 4 8; 4 15 -4; 8 -4 20]
A =

   9.   4.   8.
   4.  15.  -4.
   8.  -4.  20.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

   1.
   1.
   1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),15,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

 17.000000
x1 =

-0.4472136
-0.8944272
   0.
k =

   5.
n_erro =

 1.241D-16

```

Figure 37: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 15$

Veja, na figura 38, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 30$

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [9 4 8; 4 15 -4; 8 -4 20]
A =

   9.   4.   8.
   4.  15.  -4.
   8.  -4.  20.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

   1.
   1.
   1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),30,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

 24.556672
x1 =

 0.4060146
-0.2030073
 0.8910332
k =

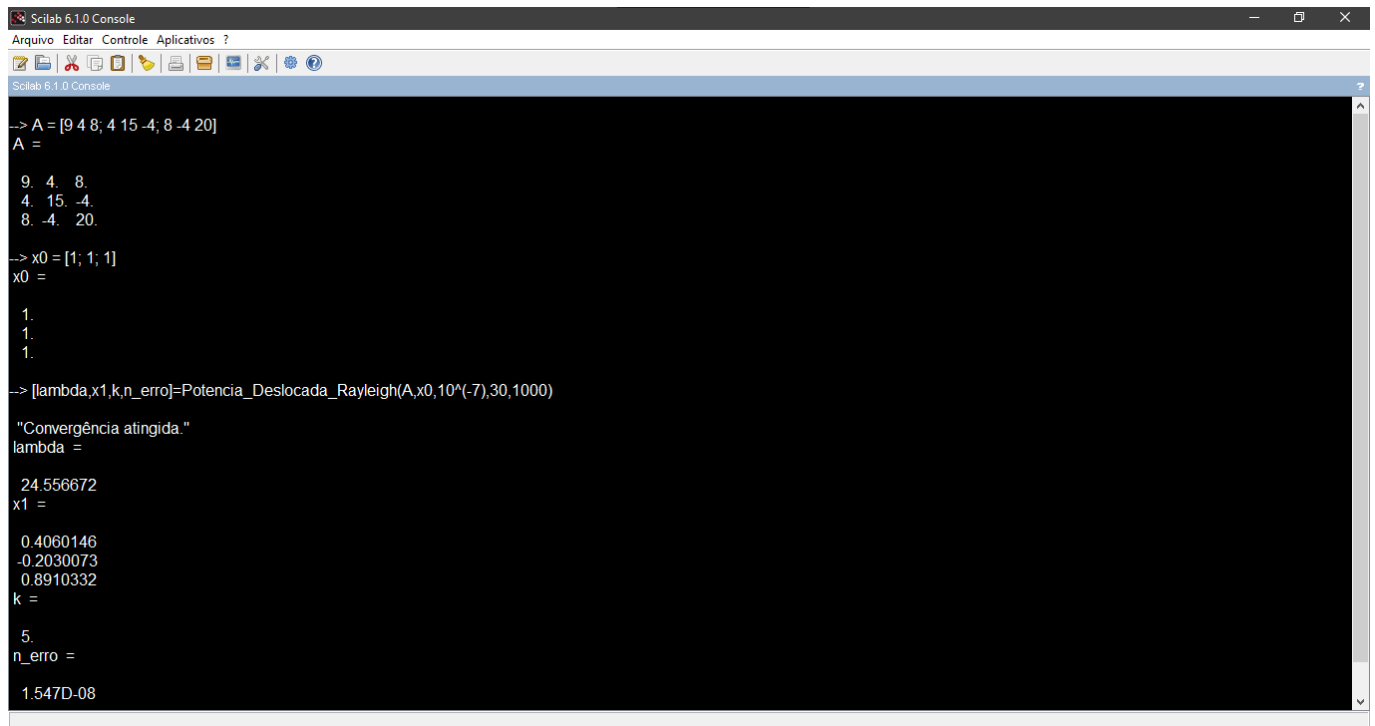
 20.
n_erro =

 4.672D-08

```

Figure 38: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 30$

Veja, na figura 39, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 30$



```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?

--> A = [9 4 8; 4 15 -4; 8 -4 20]
A =

    9.    4.    8.
    4.   15.   -4.
    8.   -4.   20.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

    1.
    1.
    1.

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),30,1000)
"Convergência atingida."
lambda =

    24.556672
x1 =

    0.4060146
   -0.2030073
    0.8910332
k =

    5.
n_erro =

    1.547D-08
  
```

Figure 39: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 30$

Vamos, a seguir, coletar os tempos de execução de cada um dos testes feitos até então.

Veja, na figura 40, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 22 e 23.

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [7 2; 2 3]
A =

  7.  2.
  2.  3.

--> x0 = [1; 0]
x0 =

  1.
  0.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),7,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

  0.0035095

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),7,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

  0.0016069

-->
```

Figure 40: Runtime dos testes executados nas figuras 22 e 23

Veja, na figura 41, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 24 e 25.

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [7 2; 2 3]
A =

  7.  2.
  2.  3.

--> x0 = [1; 0]
x0 =

  1.
  0.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),3,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

  0.0031514

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),3,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

  0.0015374

-->
```

Figure 41: Runtime dos testes executados nas figuras 24 e 25

Veja, na figura 42, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 27 e 28.

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [0 1 0; 1 3 1; 0 1 6]
A =

0.  1.  0.
1.  3.  1.
0.  1.  6.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

1.
1.
1.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),0,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

0.0037676

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),0,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

0.0023101

-->
```

Figure 42: Runtime dos testes executados nas figuras 27 e 28

Veja, na figura 43, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 29 e 30.

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [0 1 0; 1 3 1; 0 1 6]
A =

0.  1.  0.
1.  3.  1.
0.  1.  6.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

1.
1.
1.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),4,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

0.0100452

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),4,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

0.0036577

-->
```

Figure 43: Runtime dos testes executados nas figuras 29 e 30

Veja, na figura 44, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 31 e 32.

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [0 1 0; 1 3 1; 0 1 6]
A =

0.  1.  0.
1.  3.  1.
0.  1.  6.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

1.
1.
1.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),6,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

0.0035572

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),6,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

0.0018517

-->
```

Figure 44: Runtime dos testes executados nas figuras 31 e 32

Veja, na figura 45, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 34 e 35.

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [9 4 8; 4 15 -4; 8 -4 20]
A =

9.  4.  8.
4. 15. -4.
8. -4. 20.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

1.
1.
1.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),2,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

0.0033192

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),2,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

0.0031683

-->
```

Figure 45: Runtime dos testes executados nas figuras 34 e 35

Veja, na figura 46, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 36 e 37.

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo Editar Controle Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [9 4 8; 4 15 -4; 8 -4 20]
A =

  9.  4.  8.
  4. 15. -4.
  8. -4. 20.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

  1.
  1.
  1.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),15,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

  0.0086175

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),15,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

  0.0025414

-->
```

Figure 46: Runtime dos testes executados nas figuras 36 e 37

Veja, na figura 47, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 38 e 39.

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo Editar Controle Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [9 4 8; 4 15 -4; 8 -4 20]
A =

  9.  4.  8.
  4. 15. -4.
  8. -4. 20.

--> x0 = [1; 1; 1]
x0 =

  1.
  1.
  1.

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),30,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

  0.0085369

--> tic(); [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Rayleigh(A,x0,10^(-7),30,1000); toc()

"Convergência atingida."
ans =

  0.0023835

-->|
```

Figure 47: Runtime dos testes executados nas figuras 38 e 39

Por fim, vamos plotar esses tempos de execução em gráficos para facilitar a nossa análise.

Veja, na figura 48, o gráfico dos tempos de execução obtidos nas figuras 40 e 41. Em uma mesma vertical, o valor de α testado é o mesmo. Na vertical de abscissa 1 e 2, encontram-se, respectivamente, os tempos de execução coletados na figura 40 e 41.

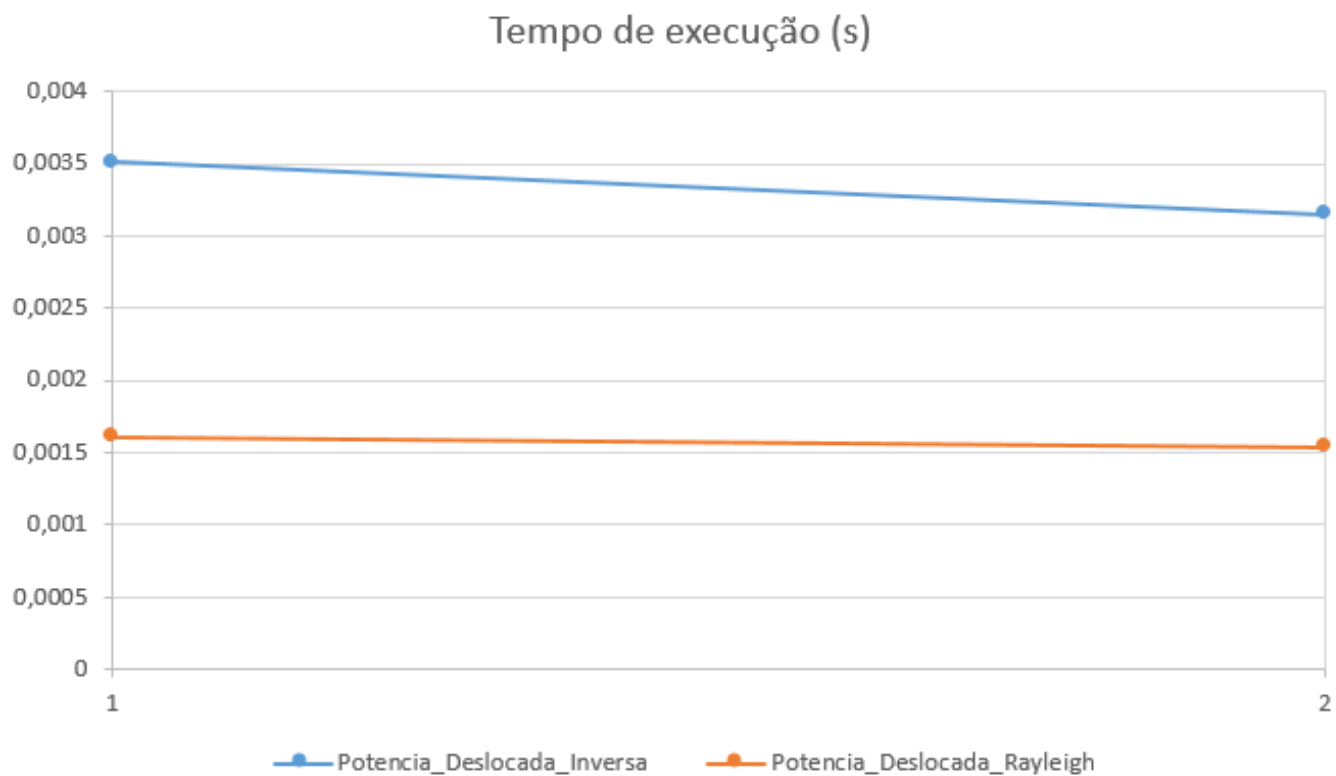


Figure 48: Tempos de execução das funções Potencia-Deslocada-Inversa e Potencia-Deslocada-Rayleigh fixados A , x_0 e $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 49, o gráfico dos tempos de execução obtidos nas figuras 42, 43 e 44. Em uma mesma vertical, o valor de α testado é o mesmo. Na vertical de abscissa 1, 2 e 3, encontram-se, respectivamente, os tempos de execução coletados na figura 42, 43 e 44.

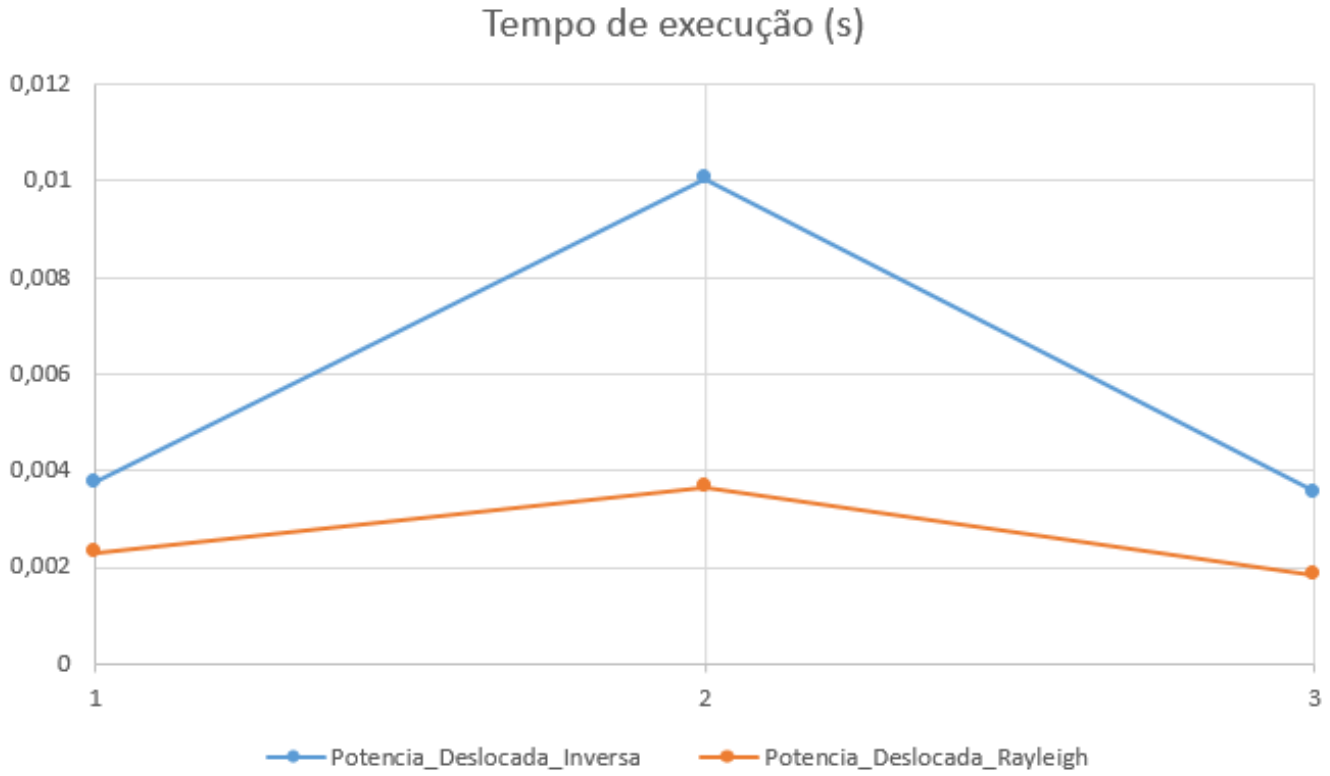


Figure 49: Tempos de execução das funções Potencia-Deslocada-Inversa e Potencia-Deslocada-Rayleigh fixados A , x_0 e $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 50, o gráfico dos tempos de execução obtidos nas figuras 45, 46 e 47. Em uma mesma vertical, o valor de α testado é o mesmo. Na vertical de abscissa 1, 2 e 3, encontram-se, respectivamente, os tempos de execução coletados na figura 45, 46 e 47.

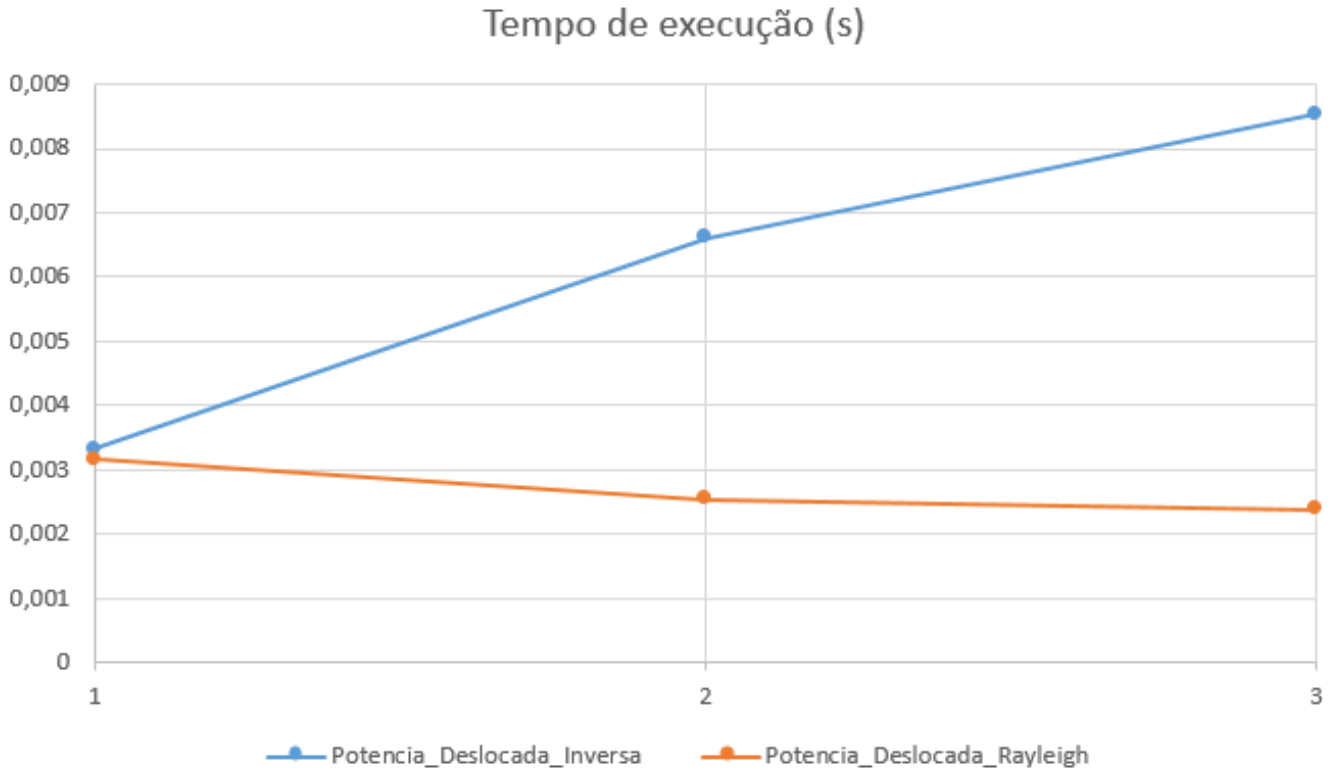


Figure 50: Tempos de execução das funções Potencia-Deslocada-Inversa e Potencia-Deslocada-Rayleigh fixados A , x_0 e $\epsilon = 10^{-7}$

Comentários: Podemos ver que todas as matrizes construídas são simétricas, e usamos os Discos de Gerschgorin para nos guiar na escolha do α para estimar o autovalor de A mais próximo de α . Vale ressaltar que todos os autovalores e autovetores retornados coincidem com os que são retornados pela função “spec(A)” nativa do scilab e são realmente os autovalores mais próximos de α . No entanto, essas funções falham ou retornam valores errôneos se α for muito próximo do autovalor que desejamos encontrar pelo fato de que ao aplicar a Gaussian-Elimination-4 a $A - \alpha \cdot I$, erros de aproximação tornam a matriz igual a $A - \lambda \cdot I$, que não é uma matriz invertível e, portanto, não sendo tratável pela referida função. Nas figuras de 22 a 39, exceto as figuras 26 e 33, podemos ver que, para os exatos mesmos parâmetros de entrada, em geral, a função Potencia-Deslocada-Inversa realiza um número significativamente maior de iterações que a função Potencia-Deslocada-Rayleigh. Além disso, nas figuras de 48 a 50, vemos que, em geral, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh tem execução mais rápida que a função Potencia-Deslocada-Inversa. Isso ocorre porque a cada iteração, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh atualiza o valor de α de forma a se aproximar mais rapidamente do autovalor desejado, tornando essa função mais eficiente.

6 Questão 6

Vamos usar os métodos implementados nas funções scilab para encontrar todos os autovalores e

respectivos autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Veja, na figura 51, os Discos de Gerschgorin associados a essa matriz.

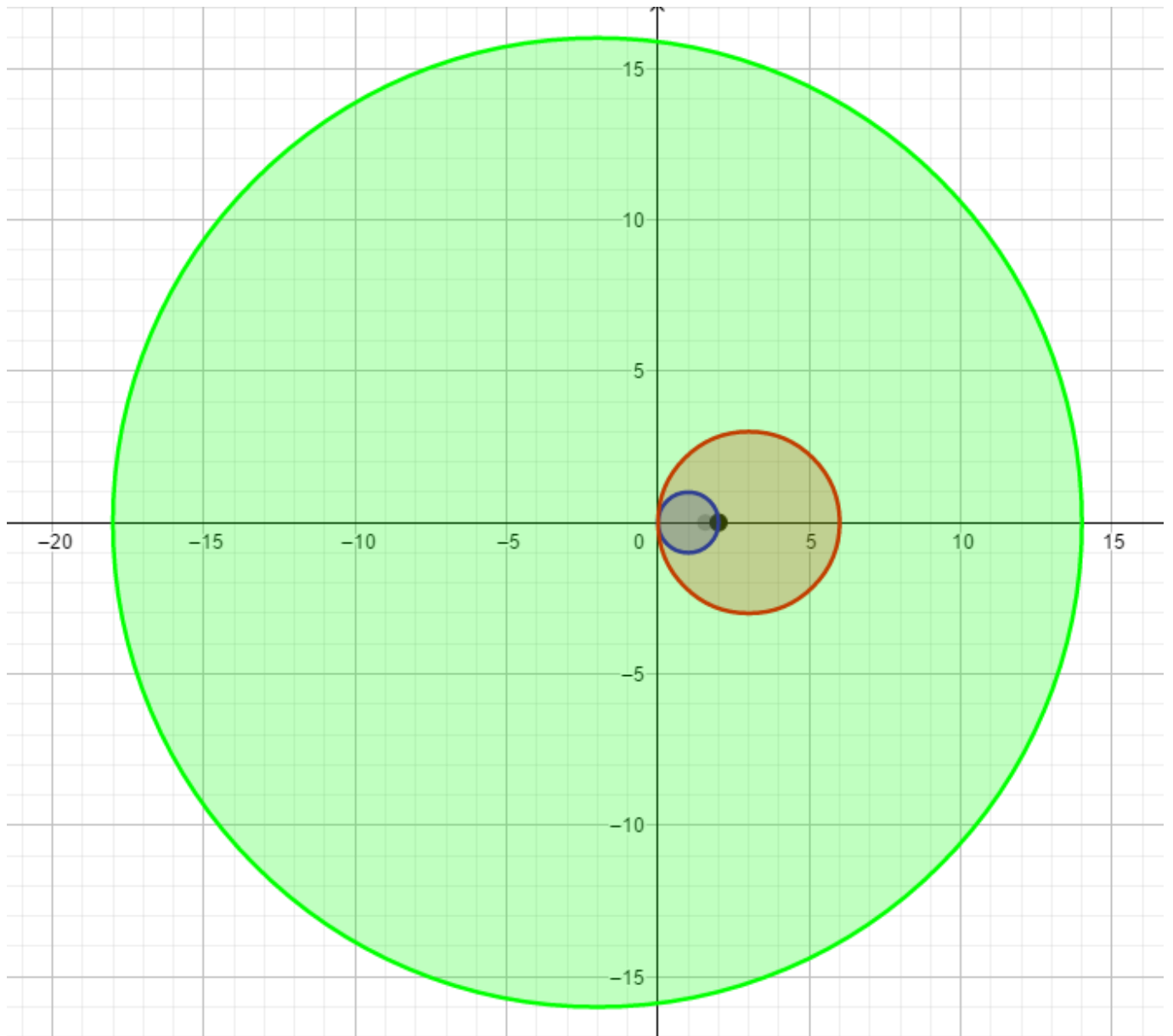


Figure 51: Discos de Gerschgorin associados à matriz A

Primeiramente, vamos aplicar a função Metodo-Potencia-1 para encontrar o autovalor dominante de A .

Veja, na figura 52, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = [2 0 0 0; -1 1 0 0; 3 0 3 0; 5 7 4 -2]
A =

  2.  0.  0.  0.
 -1.  1.  0.  0.
  3.  0.  3.  0.
  5.  7.  4. -2.

--> x0 = [1; 1; 1; 1];
--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-7),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  3.0000000
x1 =

  1.005D-08
 -1.005D-08
  1.
  0.8
k =

  42
n_erro =

  7.905D-08
-->

```

Figure 52: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Logo, o autovalor dominante de A é $\lambda_1 = 3$. Temos que, sendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 os autovalores de A , então os autovalores de $A - \lambda_1 \cdot I$ são $0, \lambda_2 - 3, \lambda_3 - 3$ e $\lambda_4 - 3$. Vamos, então, atualizar a matriz A para $A - 3 \cdot I$ e aplicar a função Metodo-Potencia-1 novamente para encontrar o autovalor dominante de A .

Veja, na figura 53, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A .

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A = A - 3 * eye(4, 4)
A =

-1.  0.  0.  0.
-1. -2.  0.  0.
 3.  0.  0.  0.
 5.  7.  4. -5.

--> x0 = [1; 1; 1; 1];

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Metodo_Potencia_1(A,x0,10^(-7),1000)

"Convergência atingida."
lambda =

-5.0000007
x1 =

-7.786D-14
-4.082D-08
 2.336D-13
 1.
k =

18.
n_erro =

6.123D-08

-->

```

Figure 53: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Logo, o autovalor dominante de $A - 3 \cdot I$ é $\lambda_2 - 3 = -5 \Rightarrow \lambda_2 = -2$.

Vamos, agora, aplicar a função Potencia-Deslocada-Inversa à matriz A original usando $\alpha = -20$ para verificar se existe algum autovalor de A mais próximo de -20 que o -2 (lembrando que fora da união dos Discos de Gerschgorin não se encontra nenhum autovalor).

Veja, na figura 54, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = -20$

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos  ?

--> A
A =

  2.  0.  0.  0.
 -1.  1.  0.  0.
  3.  0.  3.  0.
  5.  7.  4. -2.

--> x0 = [1; 1; 1; 1];

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),-20,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

-2.0000039
x1 =

  4.259D-09
  0.0000006
 -1.246D-08
  -1.
k =

  90.
n_erro =

  9.253D-08

-->

```

Figure 54: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = -20$

Logo, A não possui um autovalor mais próximo de -20 que o -2 . Vamos, agora, aplicar a função Potencia-Deslocada-Inversa à matriz A original usando $\alpha = 15$ para verificar se existe algum autovalor de A mais próximo de 15 que o 3 (lembrando que fora da união dos Discos de Gerschgorin não se encontra nenhum autovalor).

Veja, na figura 55, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 15$

```
Scilab 6.1.0 Console
Arquivo  Editar  Controle  Aplicativos ?
Scilab 6.1.0 Console
--> A
A =

  2.  0.  0.  0.
-1.  1.  0.  0.
  3.  0.  3.  0.
  5.  7.  4. -2.

--> x0 = [1; 1; 1; 1];
--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),15,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  3.0000031
x1 =

  0.0000007
-0.0000007
  0.7808692
  0.6246946
k =

  157.
n_erro =

  9.384D-08
-->
```

Figure 55: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 15$

Logo, A não possui um autovalor mais próximo de 15 que o 3. Vamos, a seguir, verificar se encontramos um novo autovalor de A que esteja próximo de 0.

Veja, na figura 56, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 0$

```

Scilab 6.1.0 Console
Arquivo Editar Controle Aplicativos ?
[Icons]
Scilab 6.1.0 Console
--> A
A =

  2.  0.  0.  0.
-1.  1.  0.  0.
  3.  0.  3.  0.
  5.  7.  4. -2.

--> x0 = [1; 1; 1; 1];

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),0,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  1.0000001
x1 =

  1.174D-08
  0.3939193
-3.522D-08
  0.919145
k =

  24.
n_erro =

  5.554D-08
-->

```

Figure 56: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 0$

Então, 1 é o terceiro autovalor de A que encontramos. Como falta apenas um autovalor, ele deve ser também um número real, pois caso contrário seu par conjugado complexo também seria autovalor. Apliquemos, então, a função Potencia-Deslocada-Inversa à matriz A original usando $\alpha = 1.6$ para verificar se encontramos algum autovalor entre 1 e 3.

Veja, na figura 57, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 1.6$

```

--> A
A =

  2.  0.  0.  0.
-1.  1.  0.  0.
  3.  0.  3.  0.
  5.  7.  4. -2.

--> x0 = [1; 1; 1; 1];

--> [lambda,x1,k,n_erro]=Potencia_Deslocada_Inversa(A,x0,10^(-7),1.6,1000)

"Convergência atingida."
lambda =

  2.0000000
x1 =

-0.2073903
 0.2073903
 0.622171
 0.7258662
k =

  42
n_erro =

  7.012D-08

-->

```

Figure 57: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 1.6$

Logo, 2 é o quarto autovalor de A que buscávamos.

Comentários: Essa questão mostrou que fomos capazes de determinar os 4 autovalores de $A =$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, que são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2$ e $\lambda_4 = 1$ (que são exatamente as entradas da diagonal principal de A , já que se trata de uma matriz triangular), e seus respectivos autovetores,

que são $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ e $x_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}$. Portanto, o objetivo desse exemplo

é demonstrar o poder das funções implementadas quando combinadas, em conjunto com a teoria desenvolvida no curso.