Trabalho Computacional 3 - ALN

João Lucas Duim

25 de Abril de 2021

1 Questão 1

No arquivo "Metodo-Potencia-1.sci" encontra-se o código da função utilizada para determinar o autovalor dominante (lambda) de A usando o Método da Potência, de acordo com o algoritmo - versão 1 dado.

No arquivo "Metodo-Potencia-2.sci" encontra-se o código da função utilizada para determinar o autovalor dominante (lambda) de A usando o Método da Potência, de acordo com o algoritmo - versão 2 dado.

2 Questão 2

No arquivo "Potencia-Deslocada-inversa.sci" encontra-se o código da função utilizada para determinar o autovalor de A mais próximo de "alfa" usando o Método da Potência Deslocada com Iteração Inversa, de acordo com o algoritmo dado.

3 Questão 3

No arquivo "Potencia-Deslocada-Rayleigh.sci" encontra-se o código da função utilizada para determinar o autovalor de A mais próximo de "alfa" usando o Método da Potência Deslocada com Iteração de Rayleigh, de acordo com o algoritmo dado.

4 Questão 4

Primeiramente, vamos testar as funções da questão 1 com a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e usando o vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ como aproximação inicial.

Veja, na figura 1, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

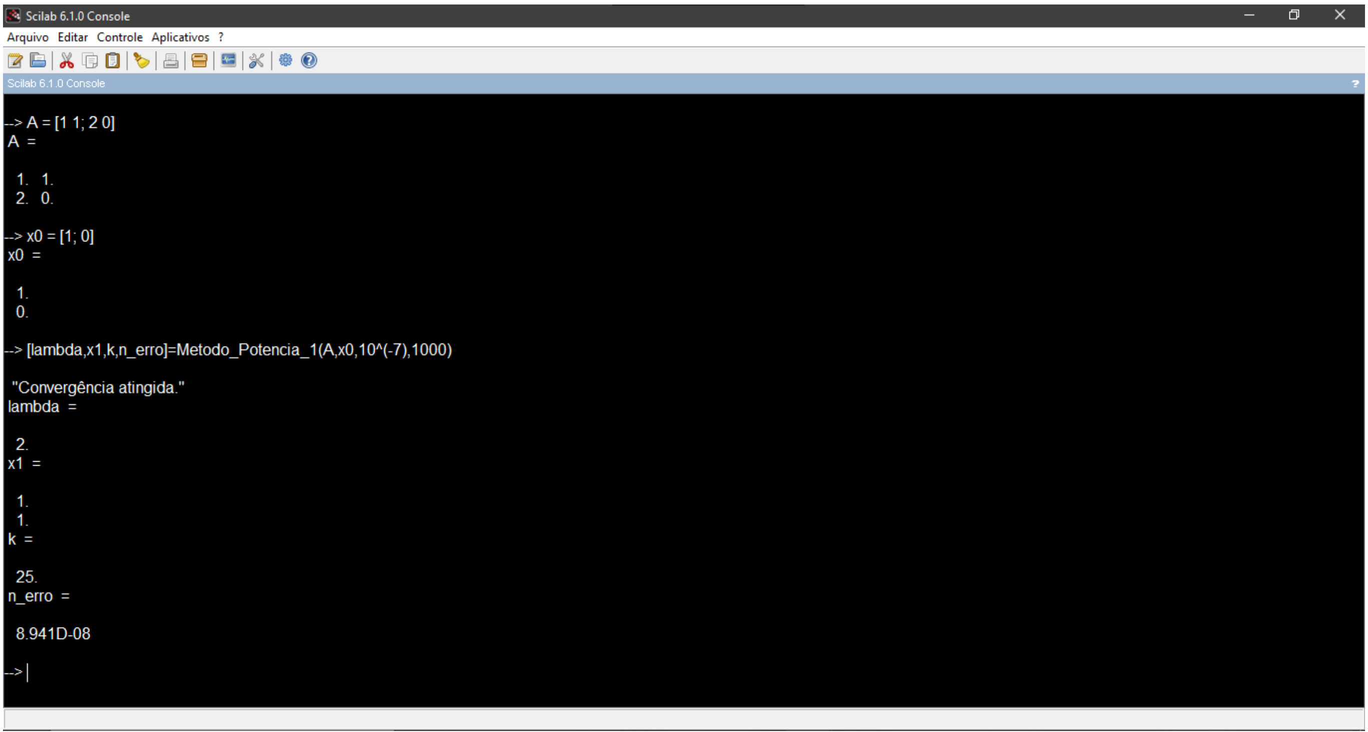

Figure 1: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 2, a função Metodo-Potencia-2 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

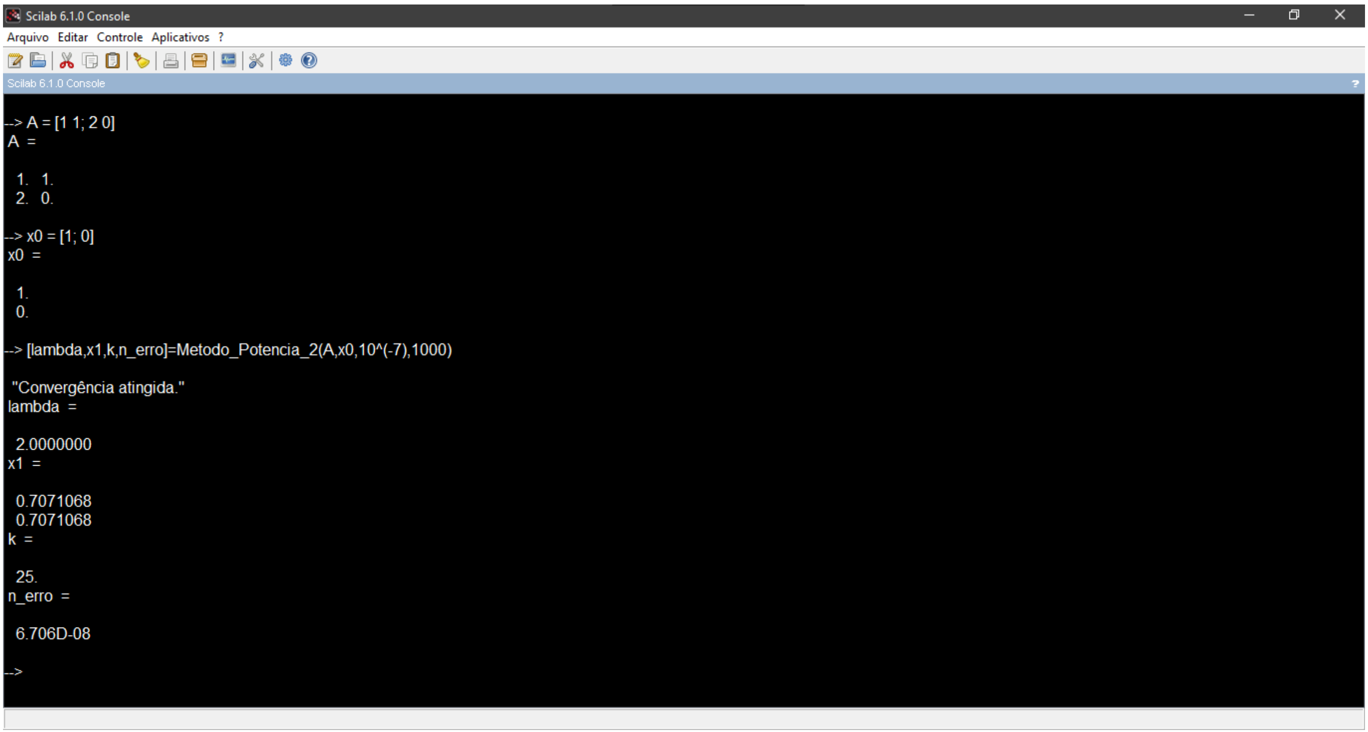

Figure 2: Função Metodo-Potencia-2 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 3, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-20}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

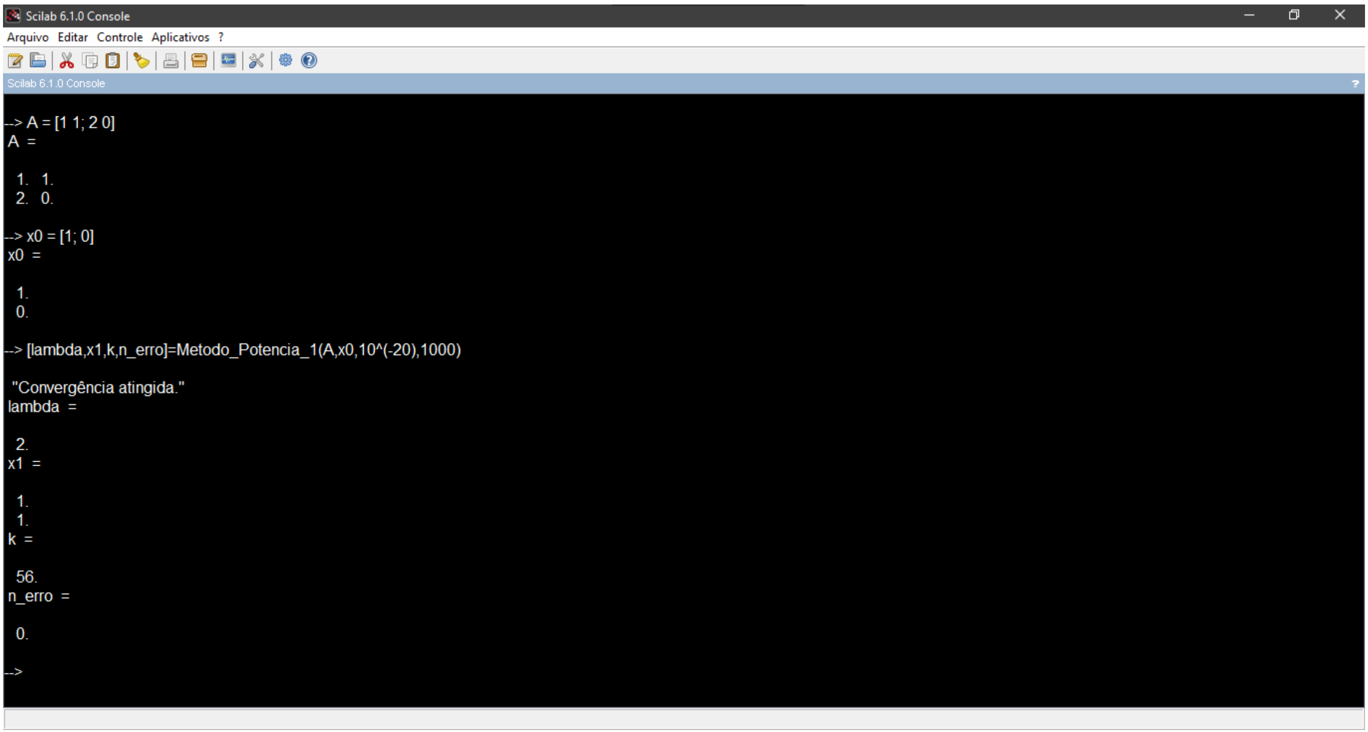

Figure 3: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-20}$

Veja, na figura 4, a função Metodo-Potencia-2 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-20}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

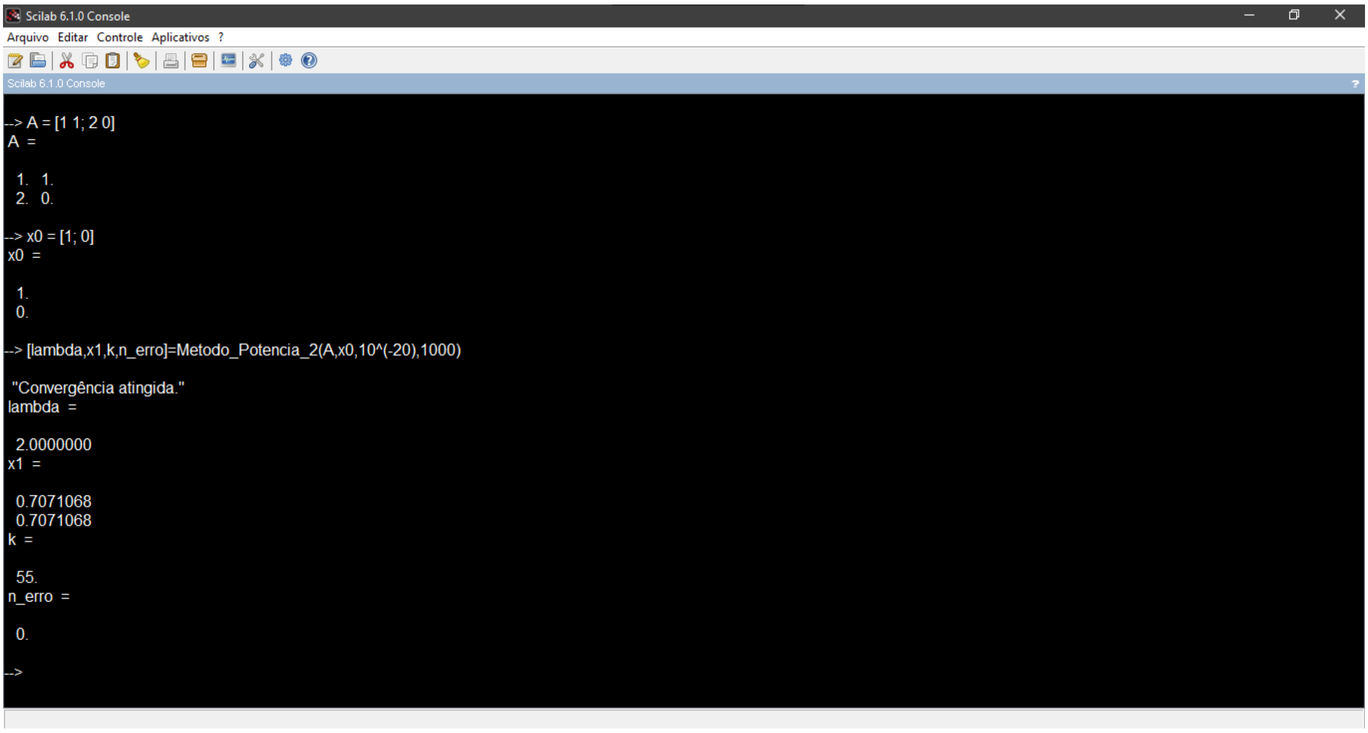

Figure 4: Função Metodo-Potencia-2 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-20}$

Agora, vamos testar as funções da questão 1 com a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -6 \\ -4 & 12 & -12 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$ e usando o vetor

$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ como aproximação inicial.

Veja, na figura 5, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

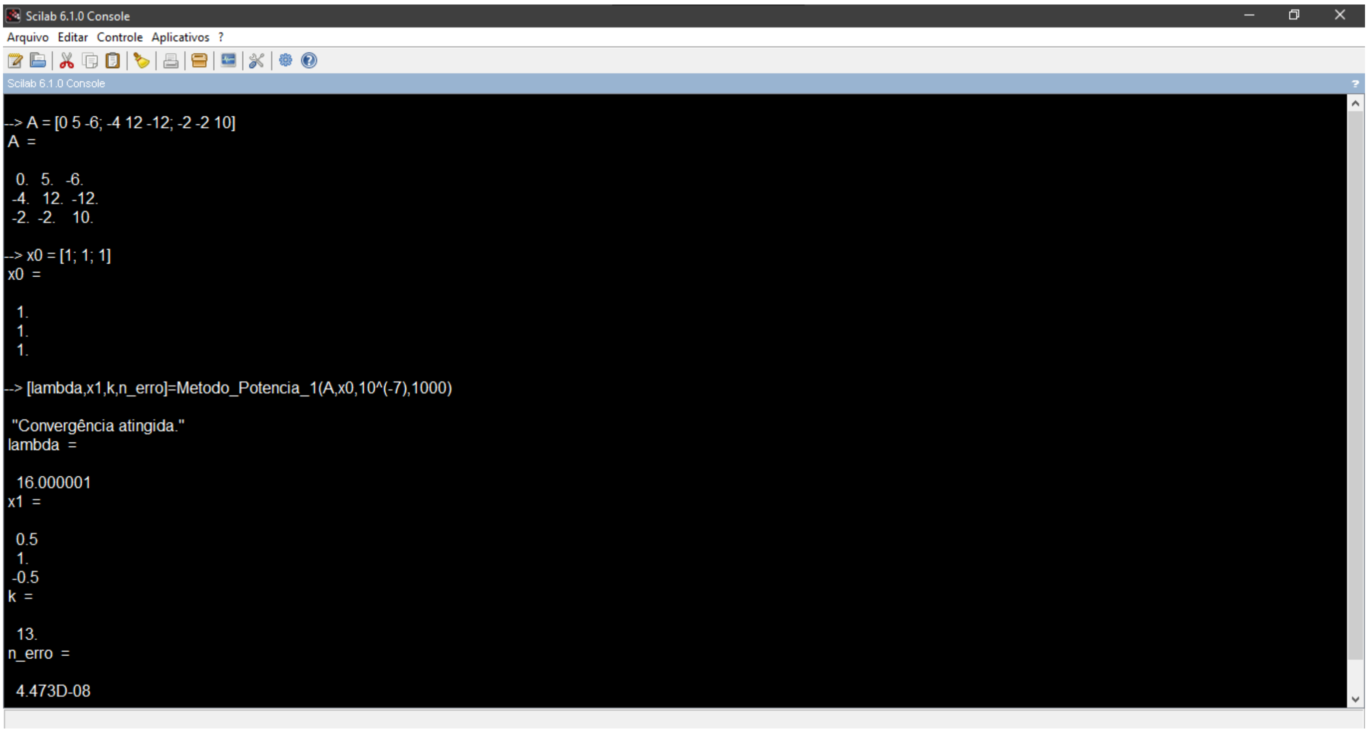

Figure 5: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 6, a função Metodo-Potencia-2 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

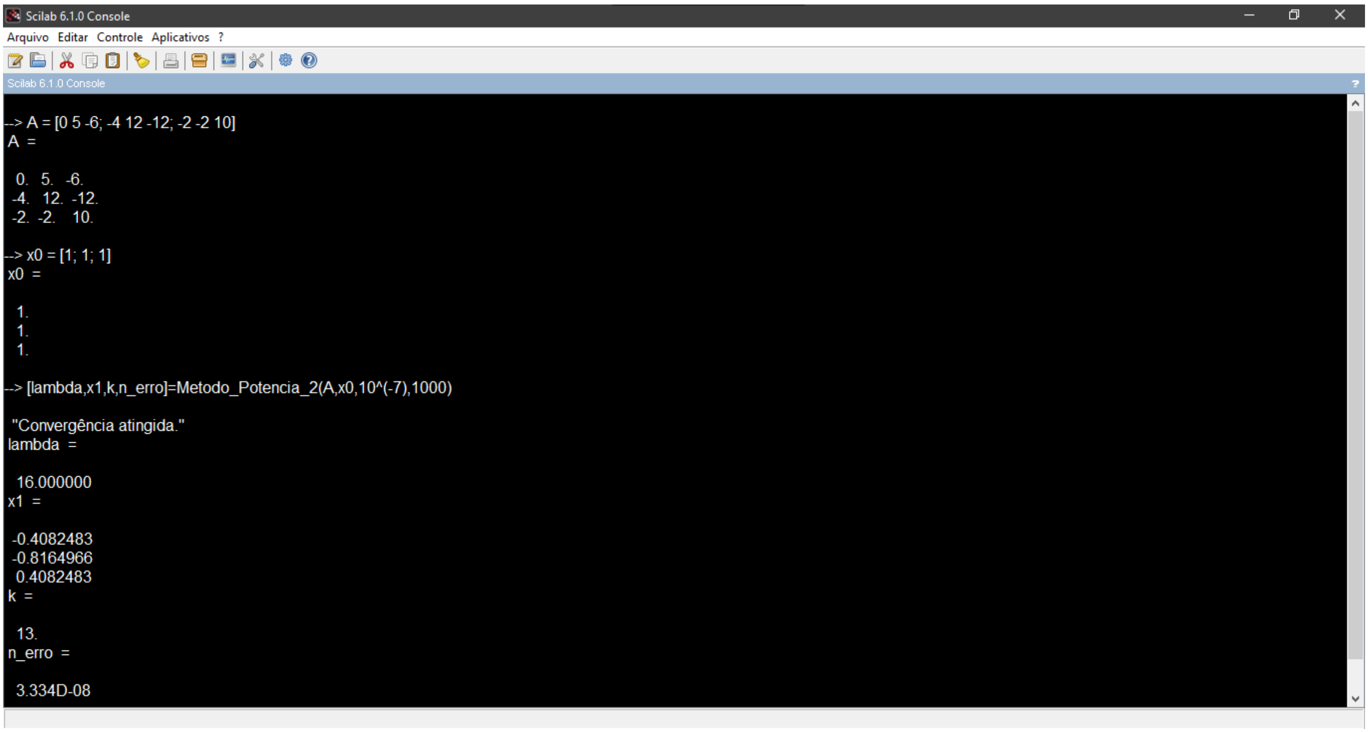

Figure 6: Função Metodo-Potencia-2 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 7, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-20}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

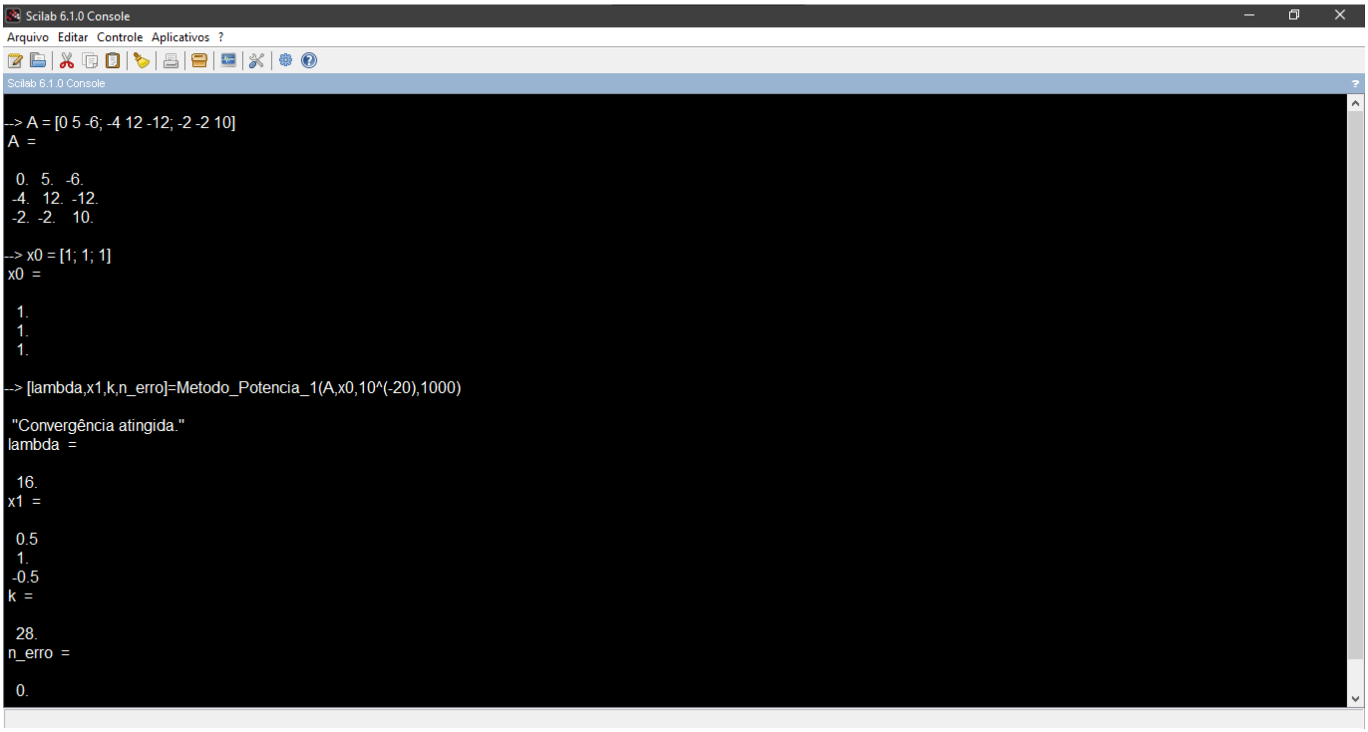

Figure 7: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-20}$

Veja, na figura 8, a função Metodo-Potencia-2 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-20}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

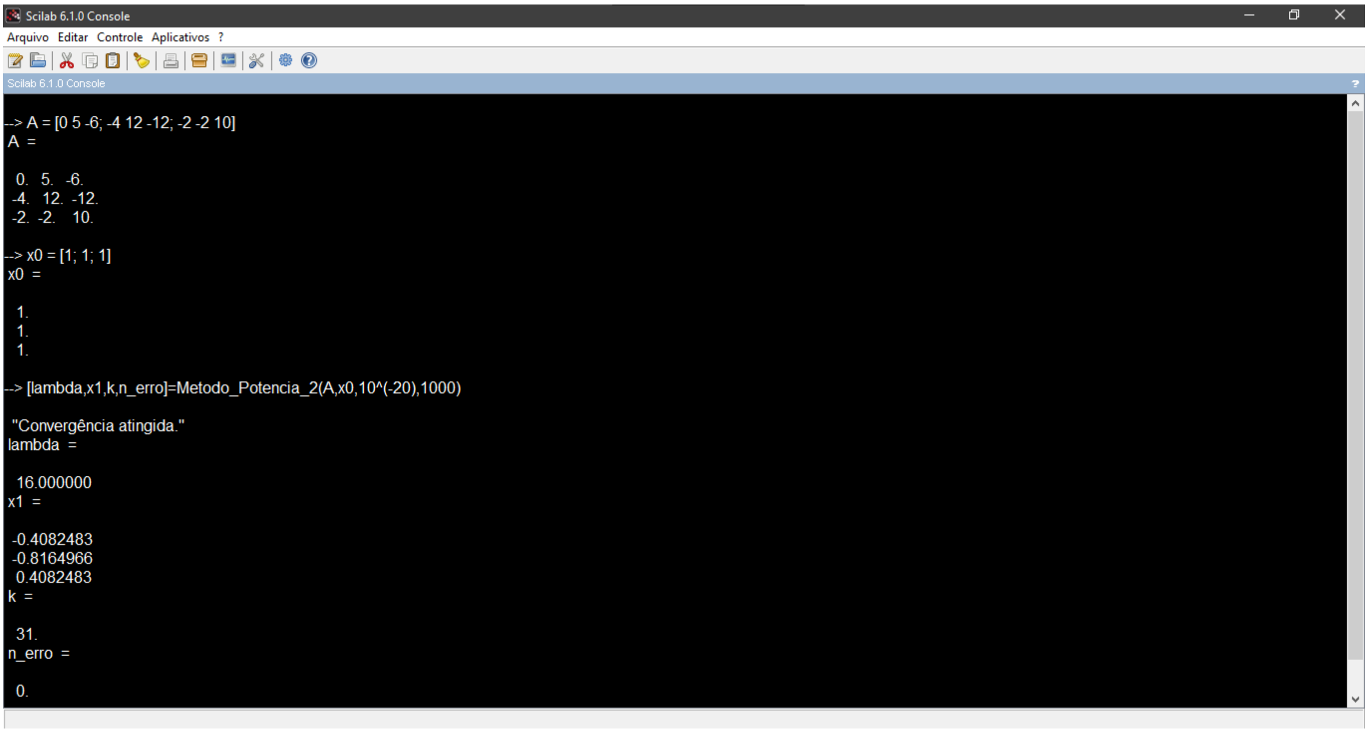

Figure 8: Função Metodo-Potencia-2 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-20}$

Finalmente, vamos testar as funções da questão 1 com a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 3 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.75 & 7 \end{bmatrix}$ e usando o vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ como aproximação inicial.

Veja, na figura 9, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

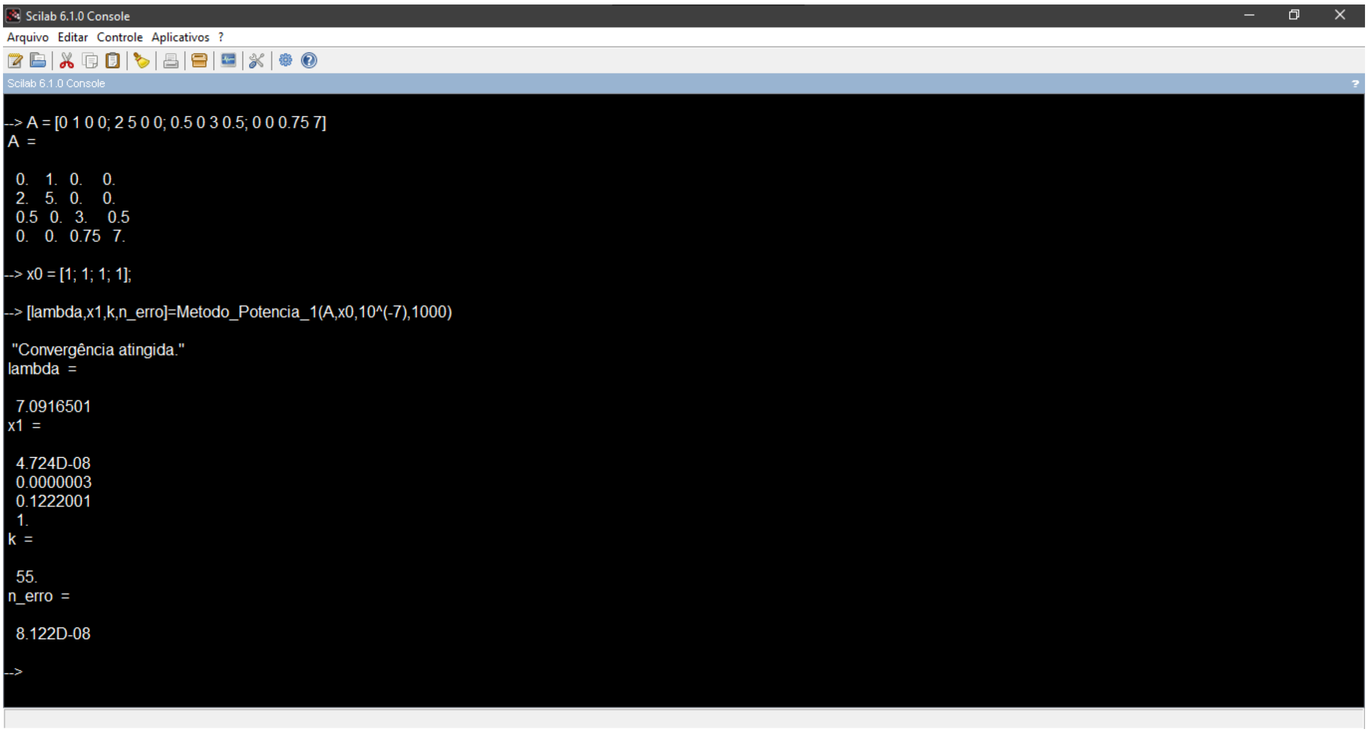

Figure 9: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 10, a função Metodo-Potencia-2 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

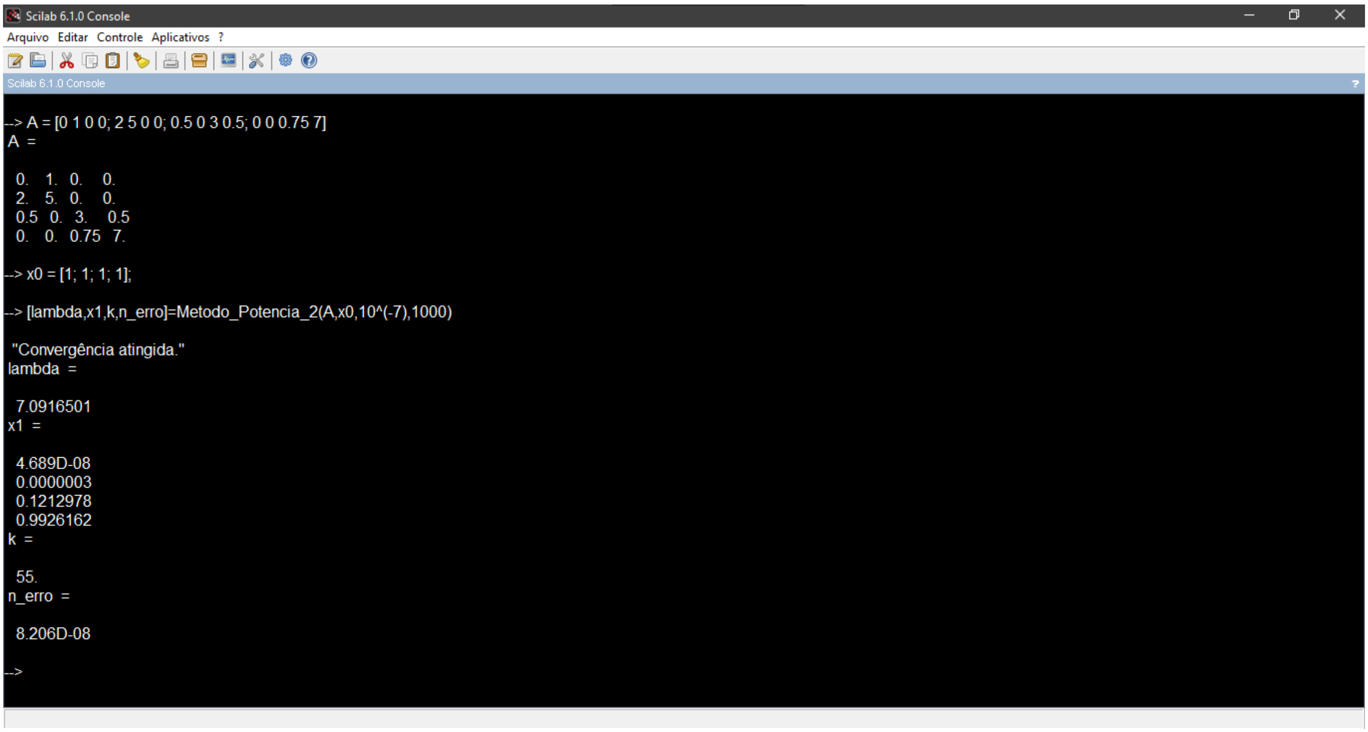

Figure 10: Função Metodo-Potencia-2 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 11, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-20}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

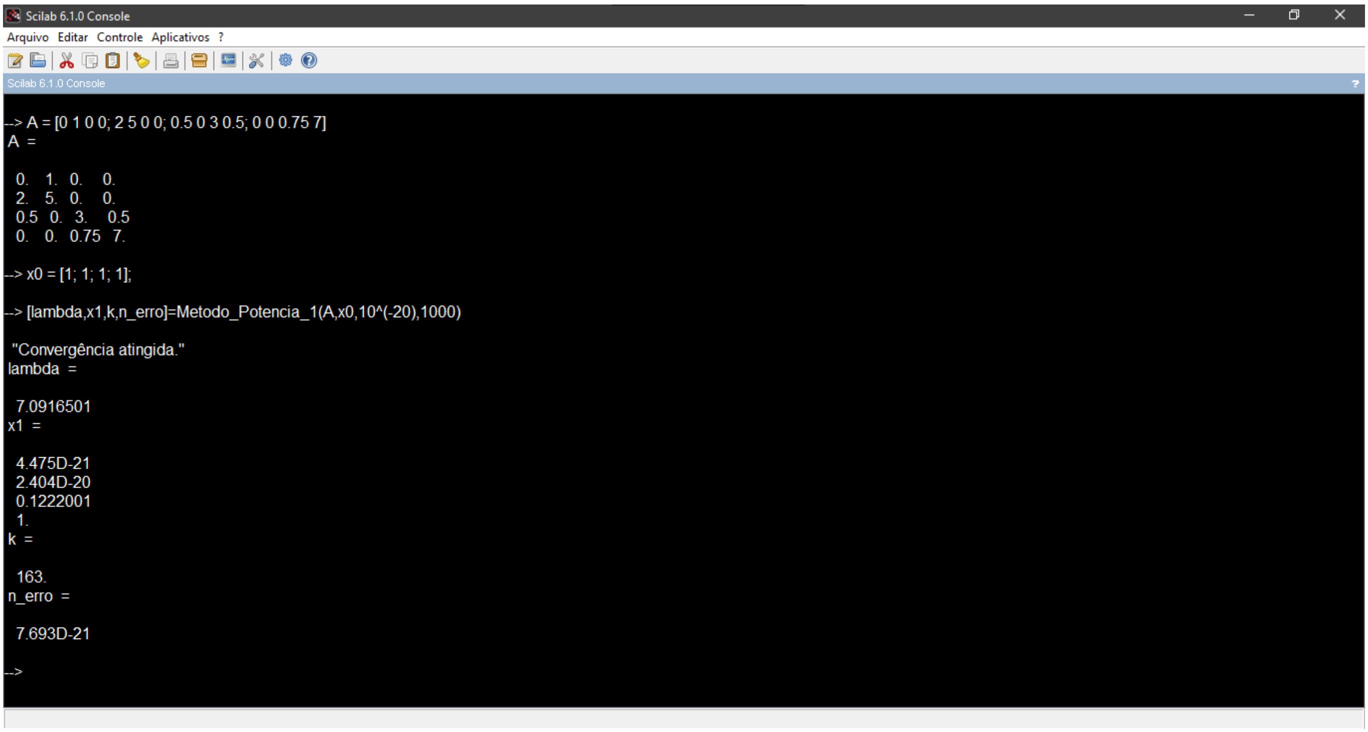

Figure 11: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-20}$

Veja, na figura 12, a função Metodo-Potencia-2 aplicada à matriz A e ao vetor x_0 usando $\epsilon = 10^{-20}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

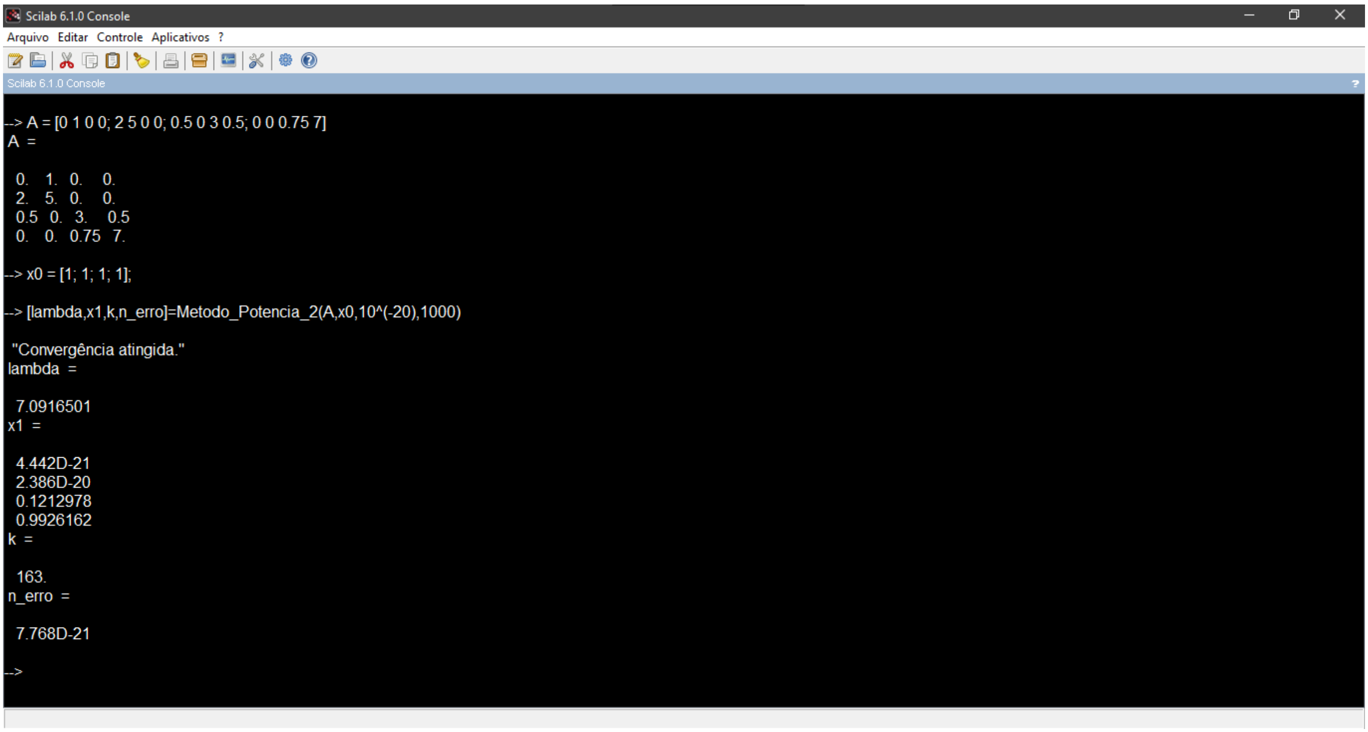

Figure 12: Função Metodo-Potencia-2 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-20}$

Vamos, a seguir, coletar os tempos de execução de cada um dos testes feitos até então.

Veja, na figura 13, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 1 e 2.

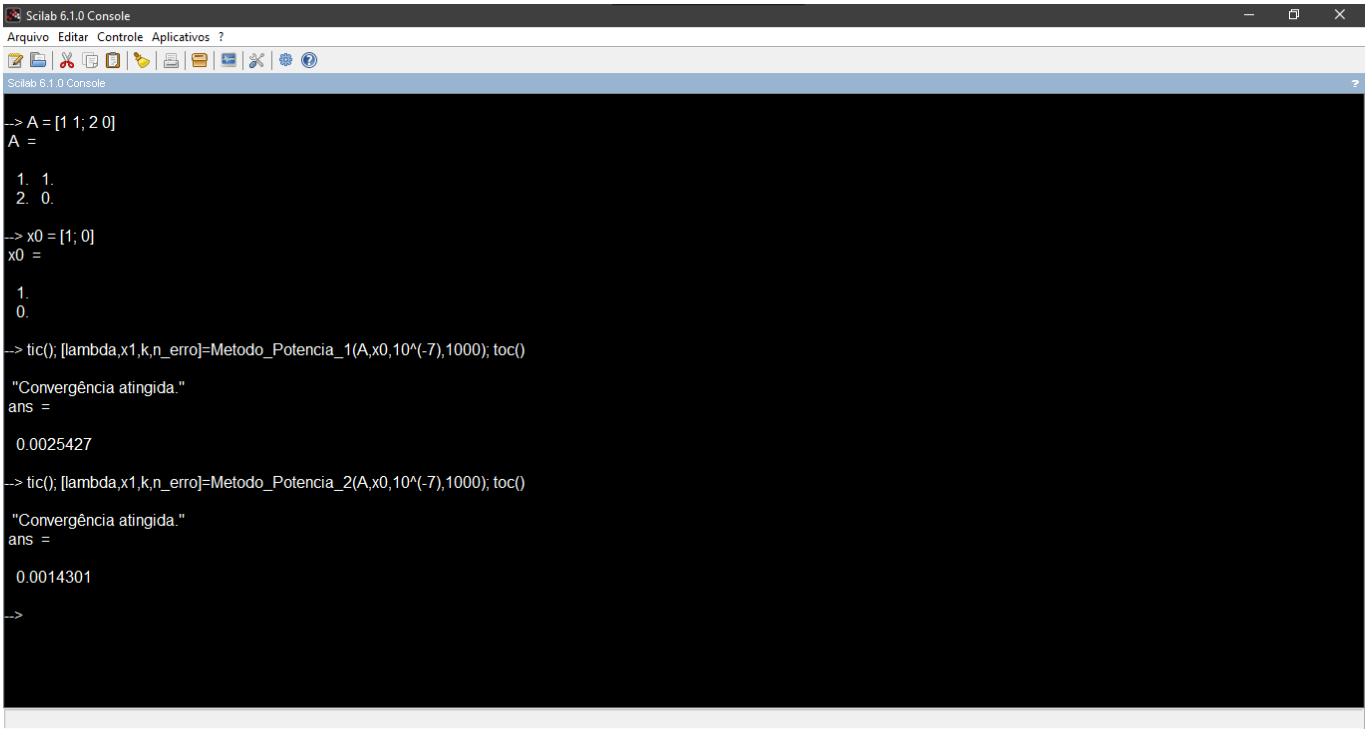

Figure 13: Runtime dos testes executados nas figuras 1 e 2

Veja, na figura 14, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 3 e 4.

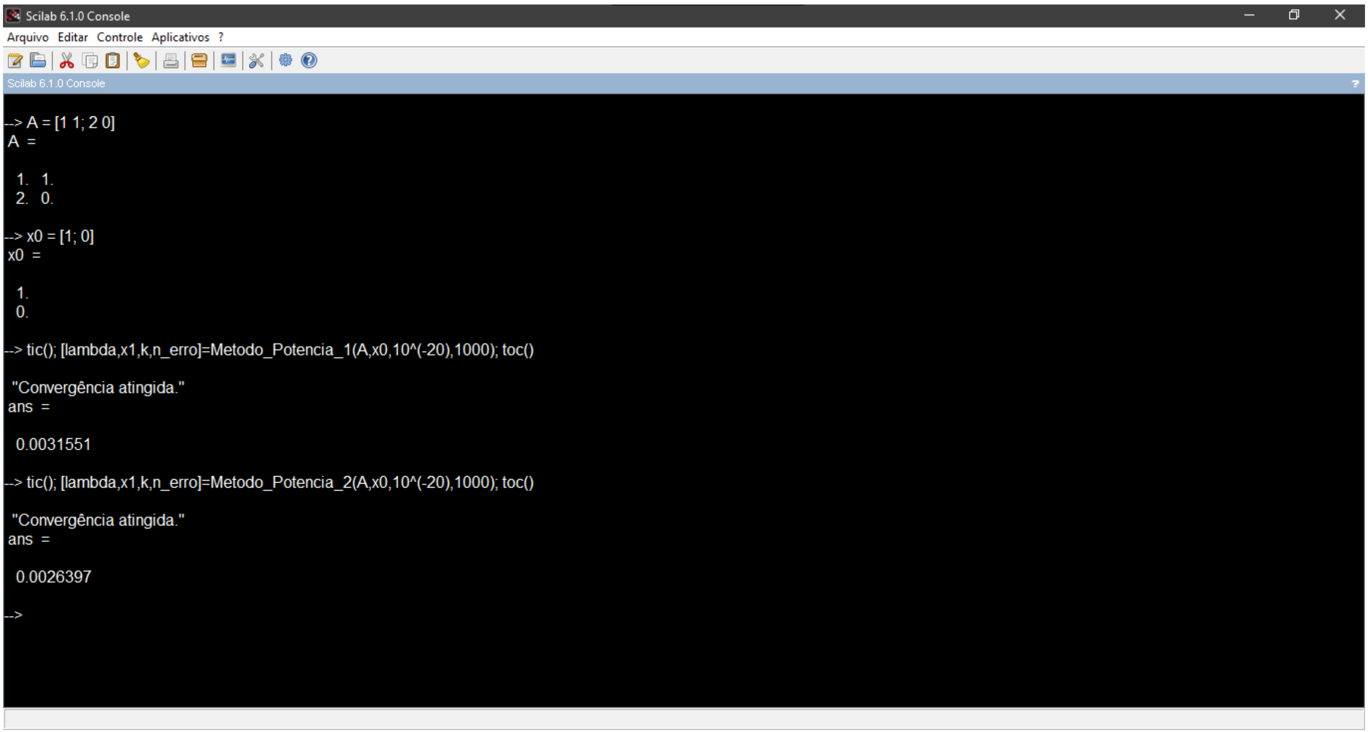

Figure 14: Runtime dos testes executados nas figuras 3 e 4

Veja, na figura 15, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 5 e 6.

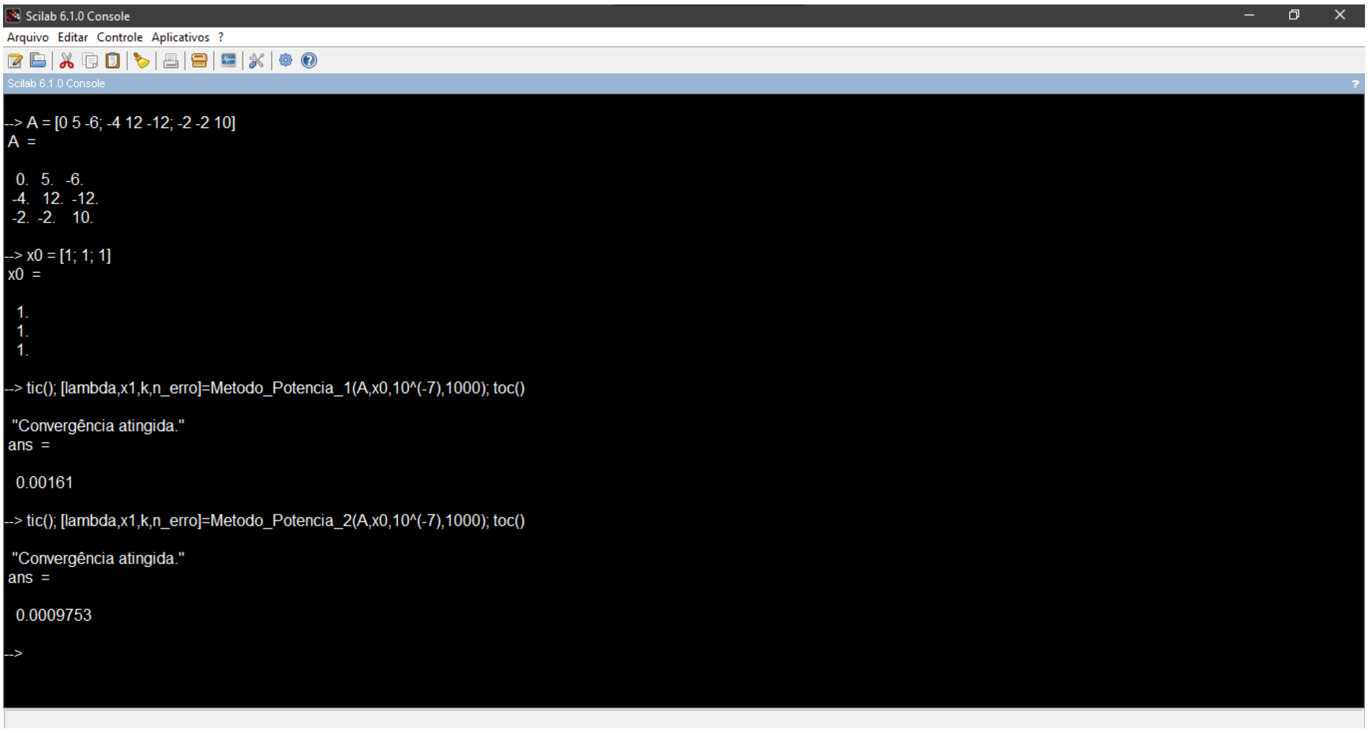

Figure 15: Runtime dos testes executados nas figuras 5 e 6

Veja, na figura 16, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 7 e 8.

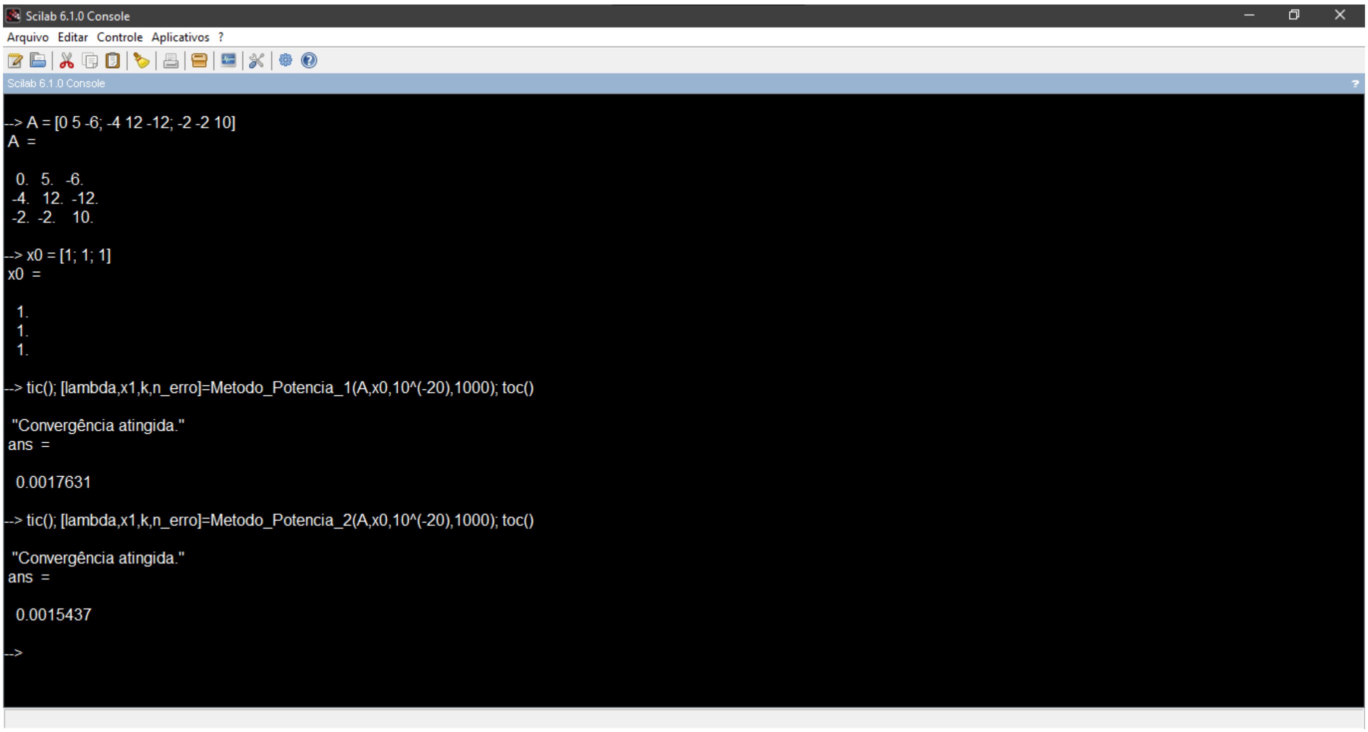

Figure 16: Runtime dos testes executados nas figuras 7 e 8

Veja, na figura 17, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 9 e 10.

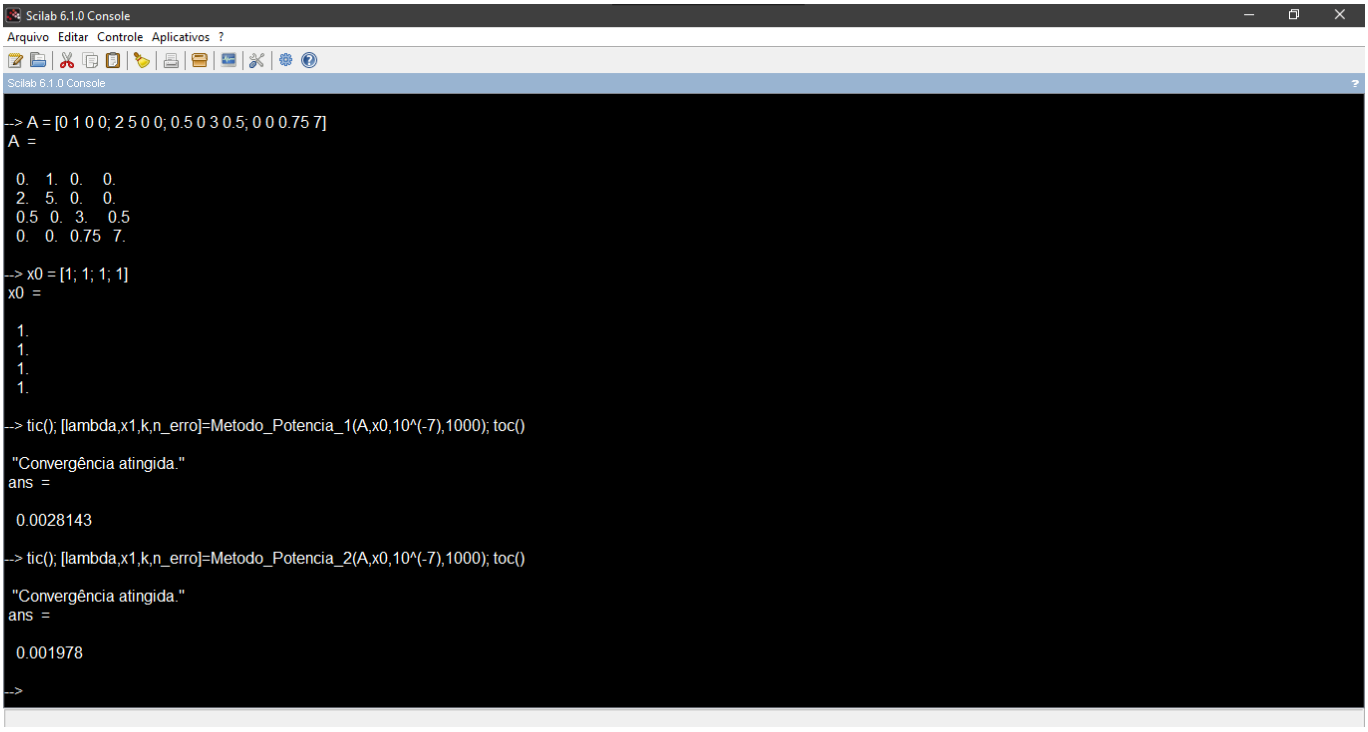

Figure 17: Runtime dos testes executados nas figuras 9 e 10

Veja, na figura 18, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 11 e 12.

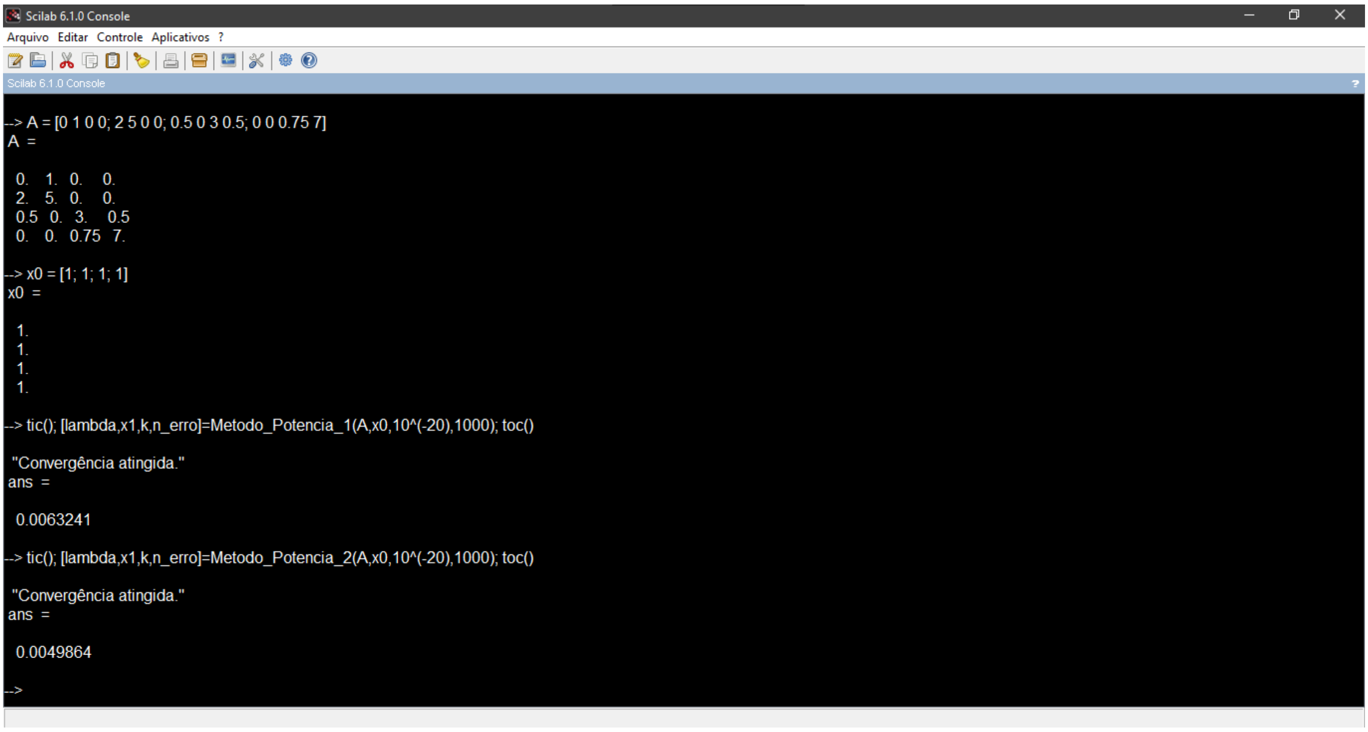

Figure 18: Runtime dos testes executados nas figuras 11 e 12

Por fim, vamos plotar esses tempos de execução em gráficos para facilitar a nossa análise.

Veja, na figura 19, o gráfico dos tempos de execução obtidos nas figuras 13, 15 e 17. Em uma mesma vertical, a matriz testada para as duas funções é a mesma. Na vertical de abscissa 1, 2 e 3, encontram-se, respectivamente, os tempos de execução coletados na figura 13, 15 e 17.

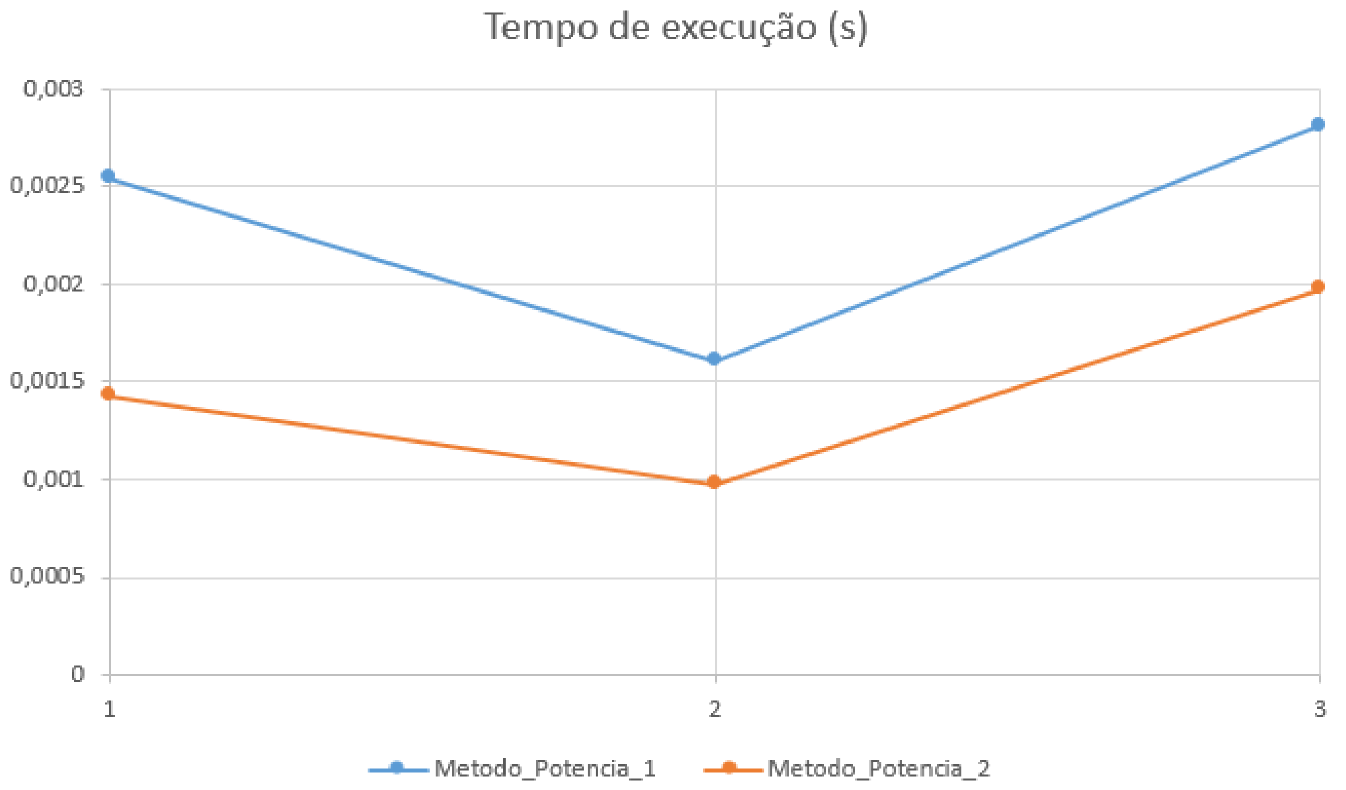

Figure 19: Tempos de execução das funções Metodo-Potencia-1 e Metodo-Potencia-2 fixados x_0 e $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 20, o gráfico dos tempos de execução obtidos nas figuras 14, 16 e 18. Em uma mesma vertical, a matriz testada para as duas funções é a mesma. Na vertical de abscissa 1, 2 e 3, encontram-se, respectivamente, os tempos de execução coletados na figura 14, 16 e 18.

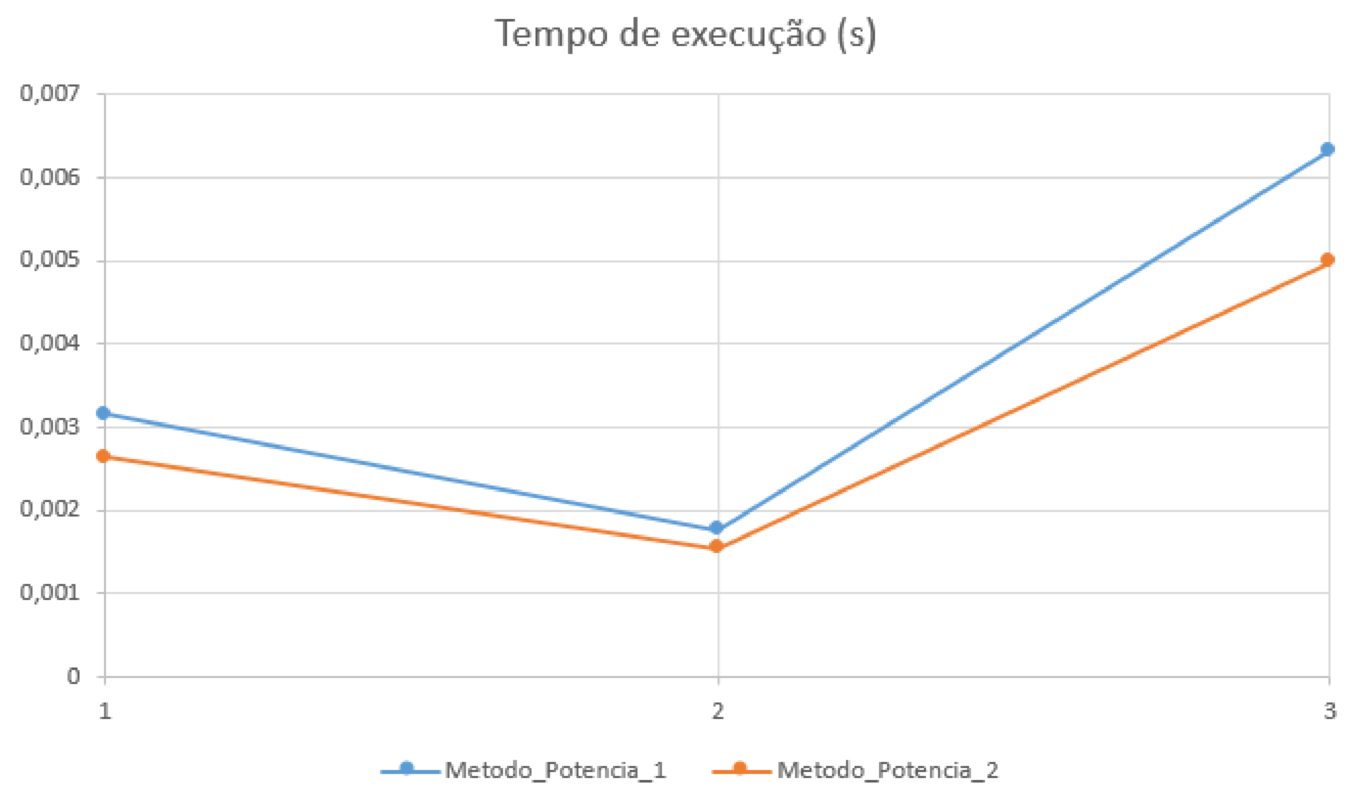

Figure 20: Tempos de execução das funções Metodo-Potencia-1 e Metodo-Potencia-2 fixados x_0 e $\epsilon = 10^{-20}$

Comentários: Podemos ver que ambas as funções foram testadas em várias matrizes de ordens diferentes, variando as variáveis de entrada de cada função. Vale ressaltar que todos os autovalores e autovetores retornados coincidem com os encontrados por cálculos feitos previamente e com os que são retornados pela função "spec(A)" nativa do scilab, reforçando a corretude das funções (Note que os autovetores retornados pelas duas funções são o mesmo, porém normalizado com normas diferentes). Nas figuras de 1 a 12, podemos ver que, para os exatos mesmos parâmetros de entrada, as funções Metodo-Potencia-1 e Metodo-Potencia-2 realizam aproximadamente o mesmo número de iterações. No entanto, nas figuras 19 e 20, vemos que, em geral, a função Metodo-Potencia-2 tem execução mais rápida que a função Metodo-Potencia-1. Isso ocorre porque a cada iteração, encontrar a coordenada de maior módulo de um vetor é mais custoso computacionalmente do que calcular o quociente de Rayleigh. Note também, comparando as figuras 19 e 20, que fixados os outros parâmetros de entrada, para se obter um resultado mais preciso com $\epsilon = 10^{-20}$ é gasto um tempo maior do que com $\epsilon = 10^{-7}$, além de que um número bem maior de iterações é executado, como pode-se notar nas figuras de 1 a 12.

5 Questão 5

Primeiramente, construímos a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Veja, na figura 21, os Discos de Gerschgorin associados a essa matriz.

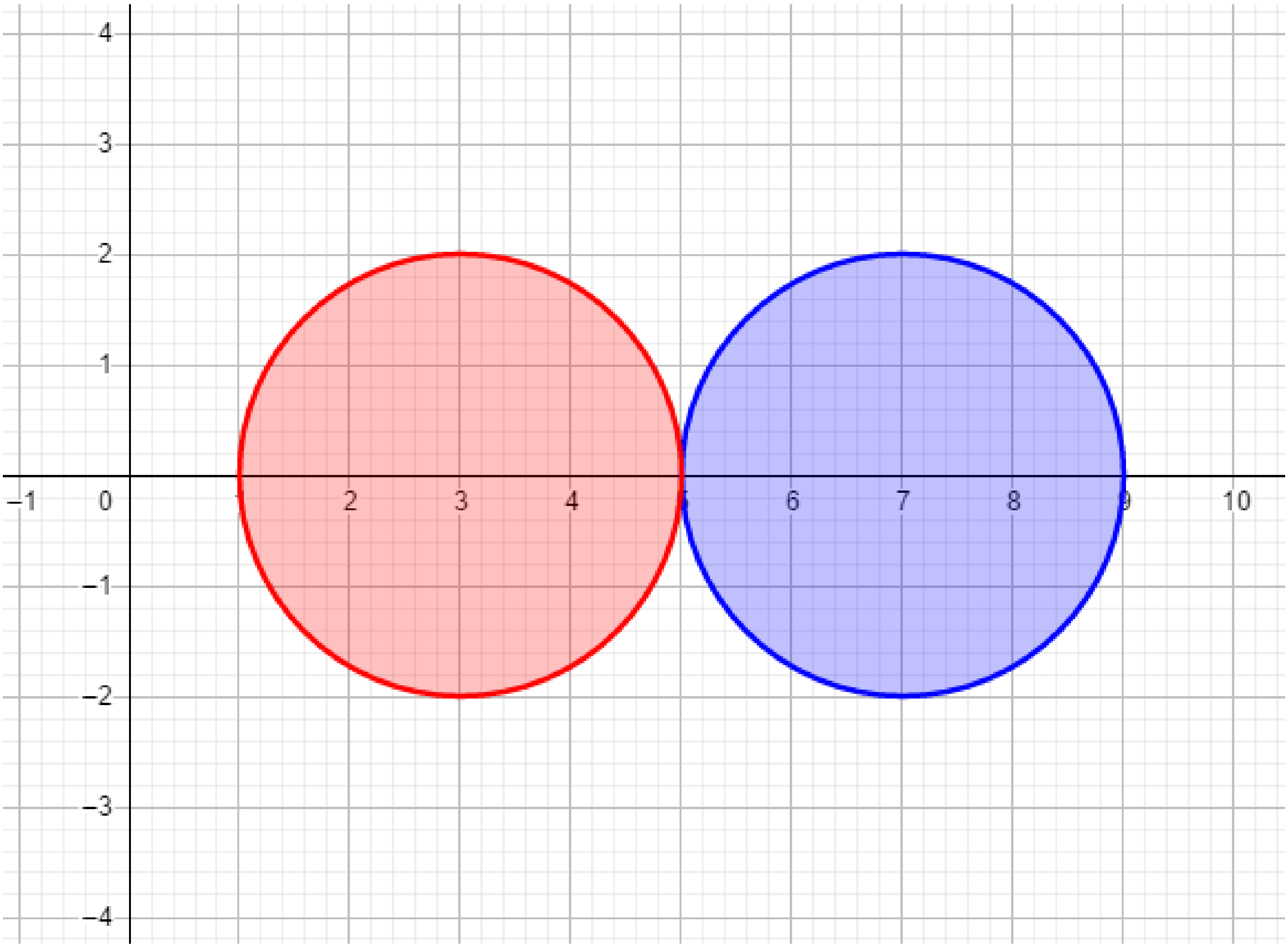

Figure 21: Discos de Gerschgorin associados à matriz A

Vemos, então, que um dos autovalores de A está próximo de 7 e o outro está próximo de 3. Portanto, vamos aplicar as funções Potencia-Deslocada-Inversa e Potencia-Deslocada-Rayleigh para encontrar esses autovalores usando $\alpha = 7$ e em seguida $\alpha = 3$. Note também que, como A é simétrica, o Teorema Espectral garante que todos os seus autovalores são reais.

Veja, na figura 22, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 7$

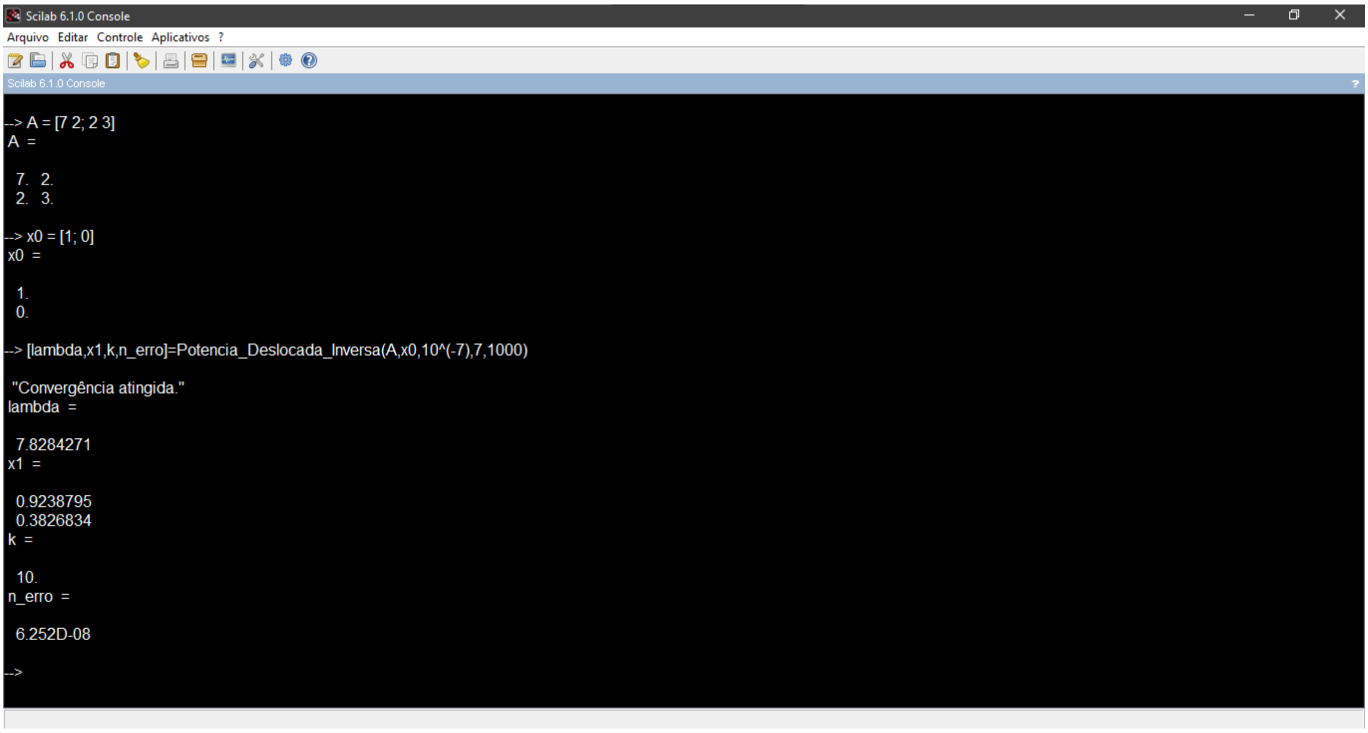

Figure 22: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 7$

Veja, na figura 23, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 7$

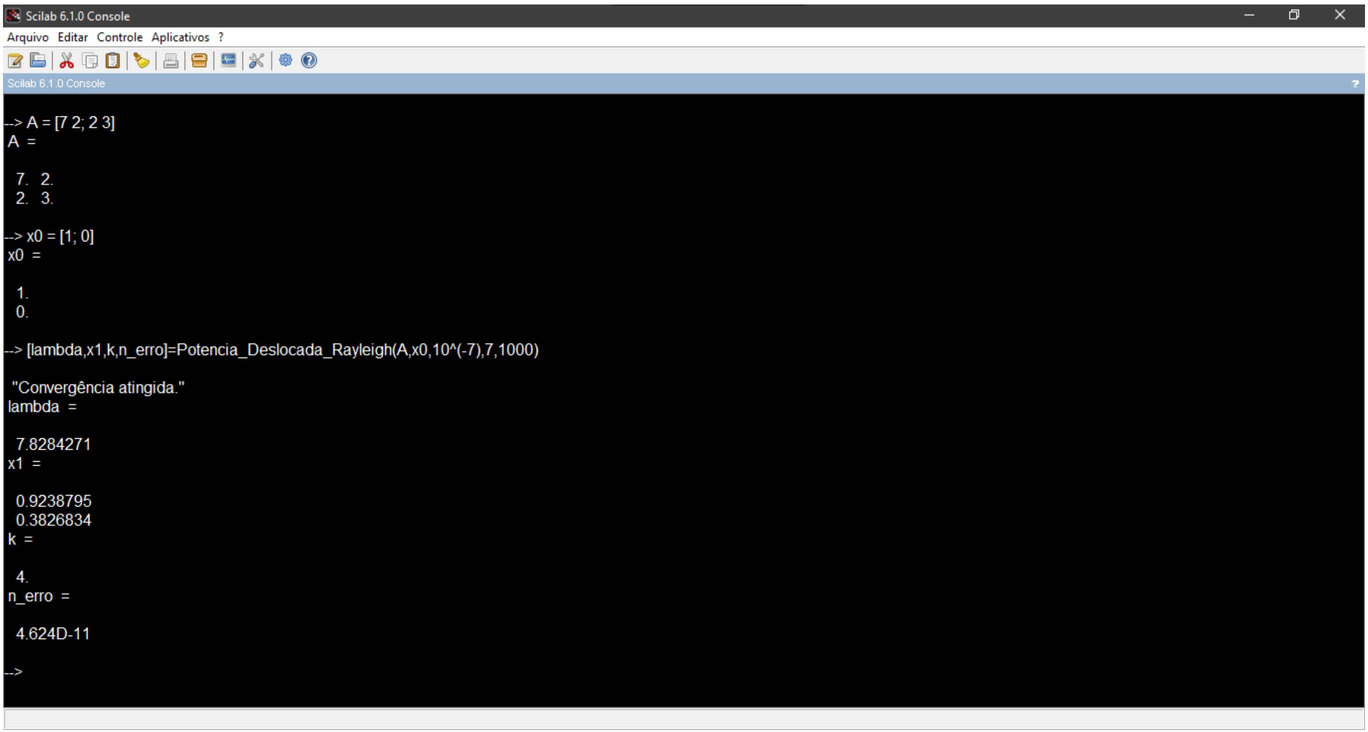

Figure 23: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 7$

Veja, na figura 24, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 3$

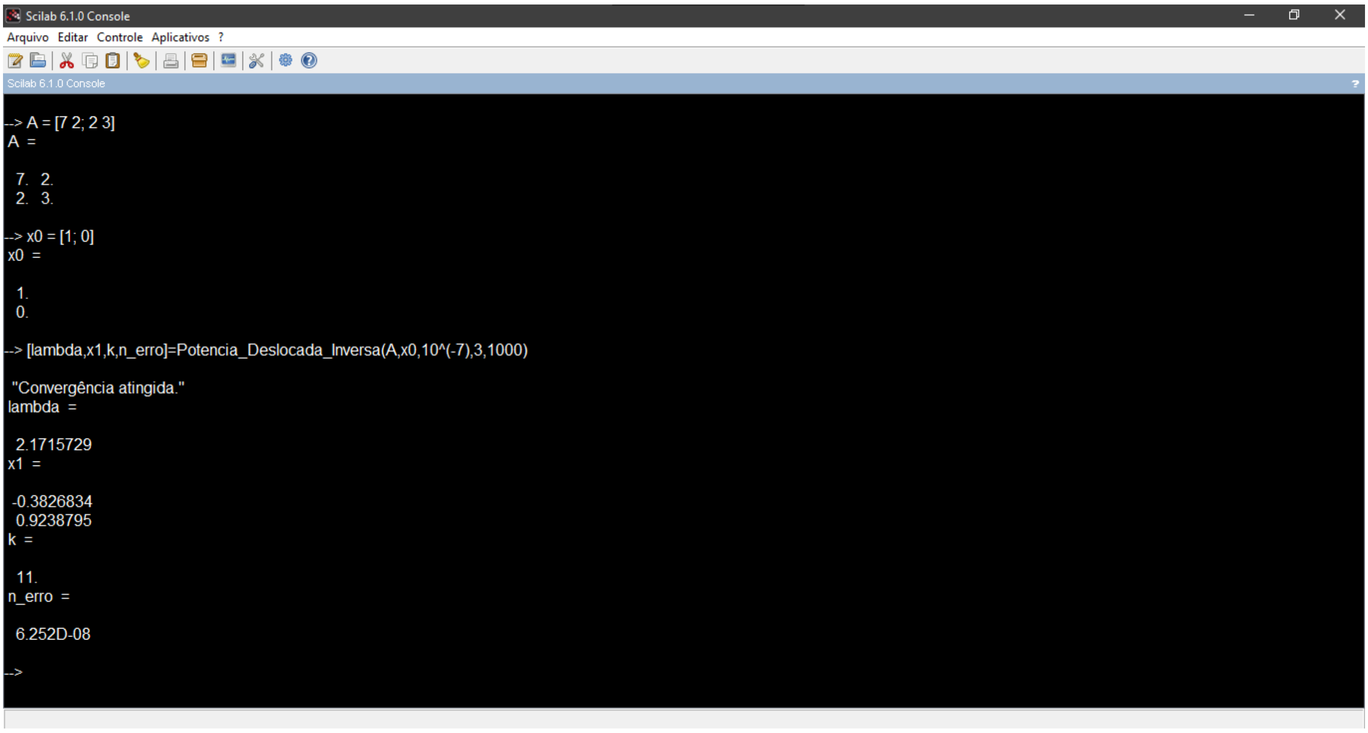

Figure 24: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 3$

Veja, na figura 25, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 3$

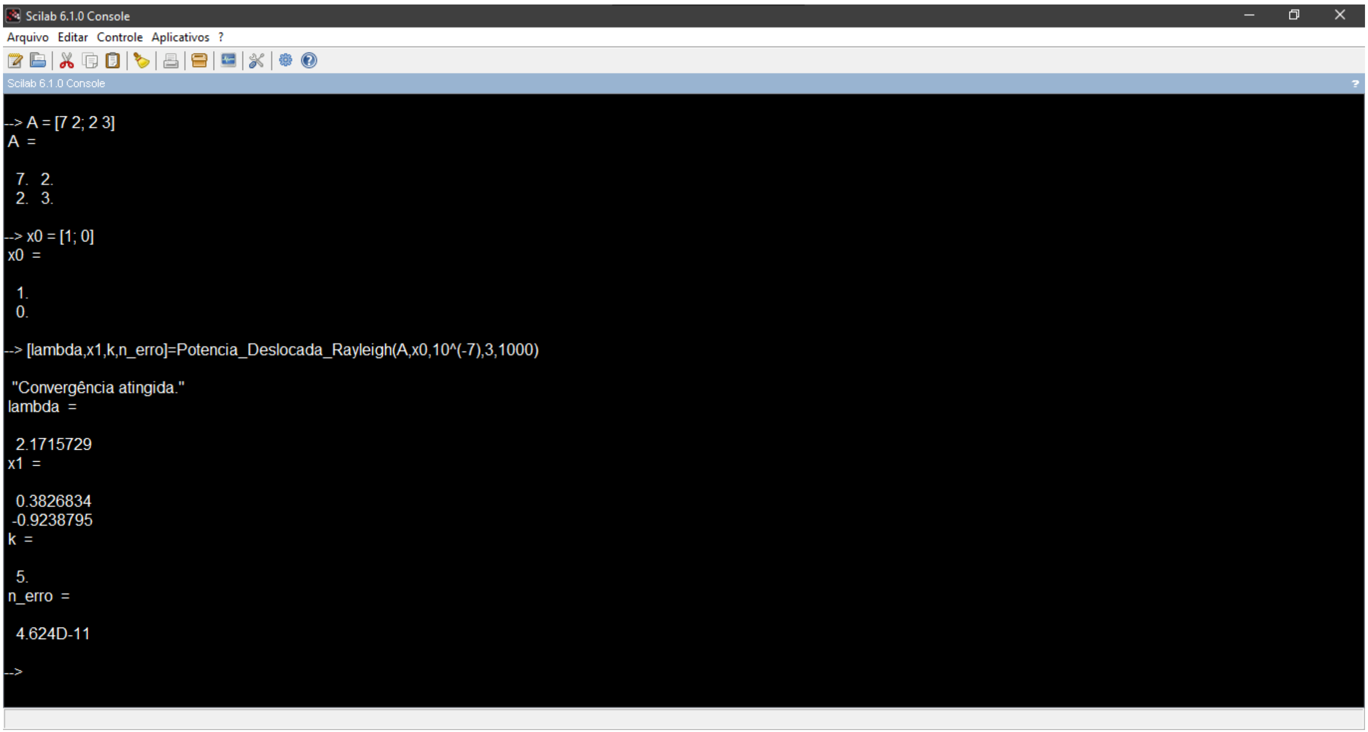

Figure 25: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 3$

Agora, construímos a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Veja, na figura 26, os Discos de Gerschgorin associados a essa matriz.

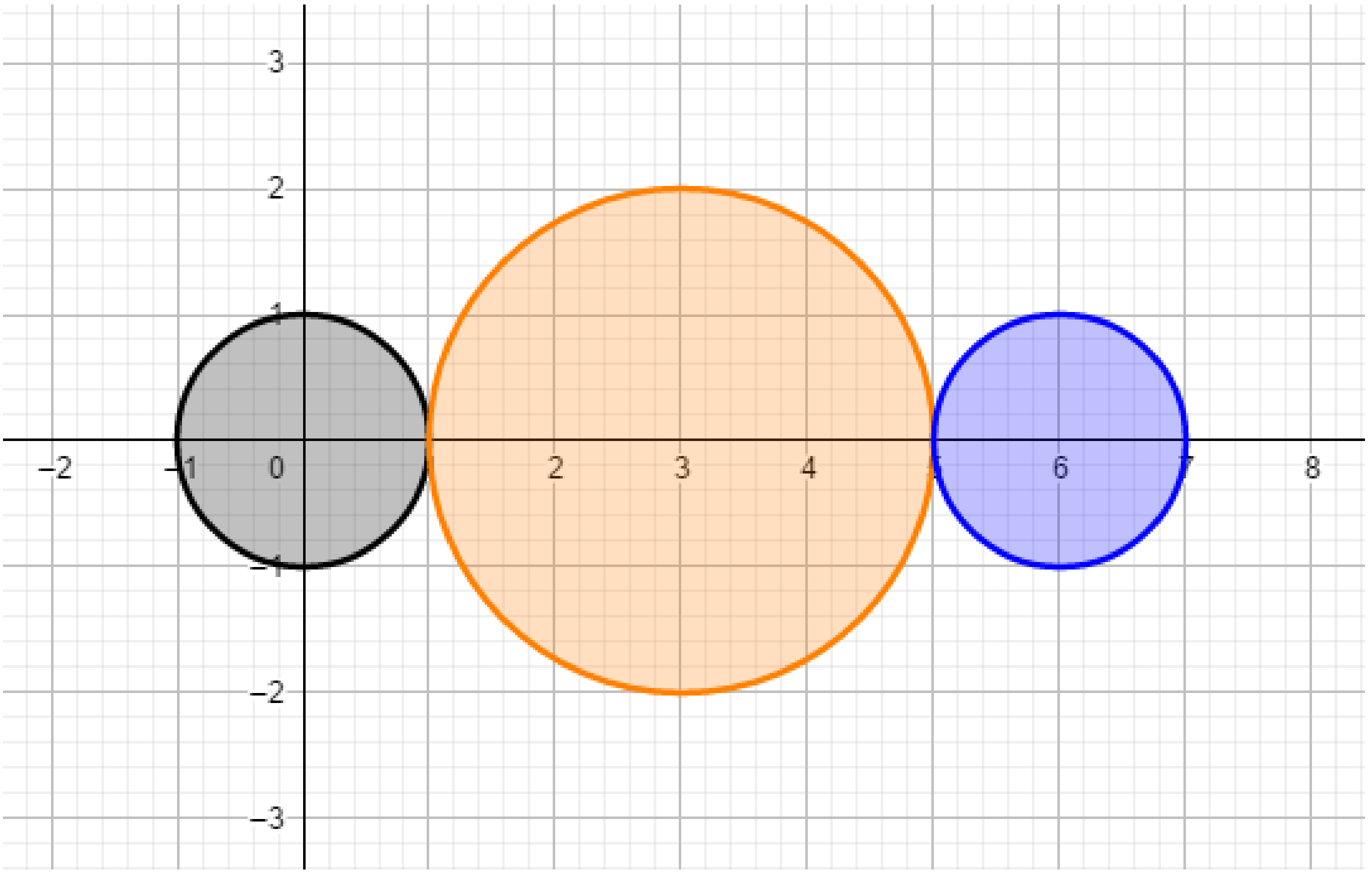

Figure 26: Discos de Gerschgorin associados à matriz A

Vemos, então, que um dos autovalores de A está próximo de 0, outro autovalor está próximo de 3 e o outro está próximo de 6. Portanto, vamos aplicar as funções Potencia-Deslocada-Inversa e Potencia-Deslocada-Rayleigh para encontrar esses autovalores usando $\alpha = 0$, em seguida $\alpha = 4$ (não vamos utilizar $\alpha = 3$ porque, como veremos, 3 é exatamente um dos autovalores de A, o que daria problema em ambas as funções ao aplicar a Gaussian-Elimination-4 a $A - 3 * I$, que não é uma matriz invertível) e por último, $\alpha = 6$. Note também que, como A é simétrica, o Teorema Espectral garante que todos os seus autovalores são reais.

Veja, na figura 27, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 0$

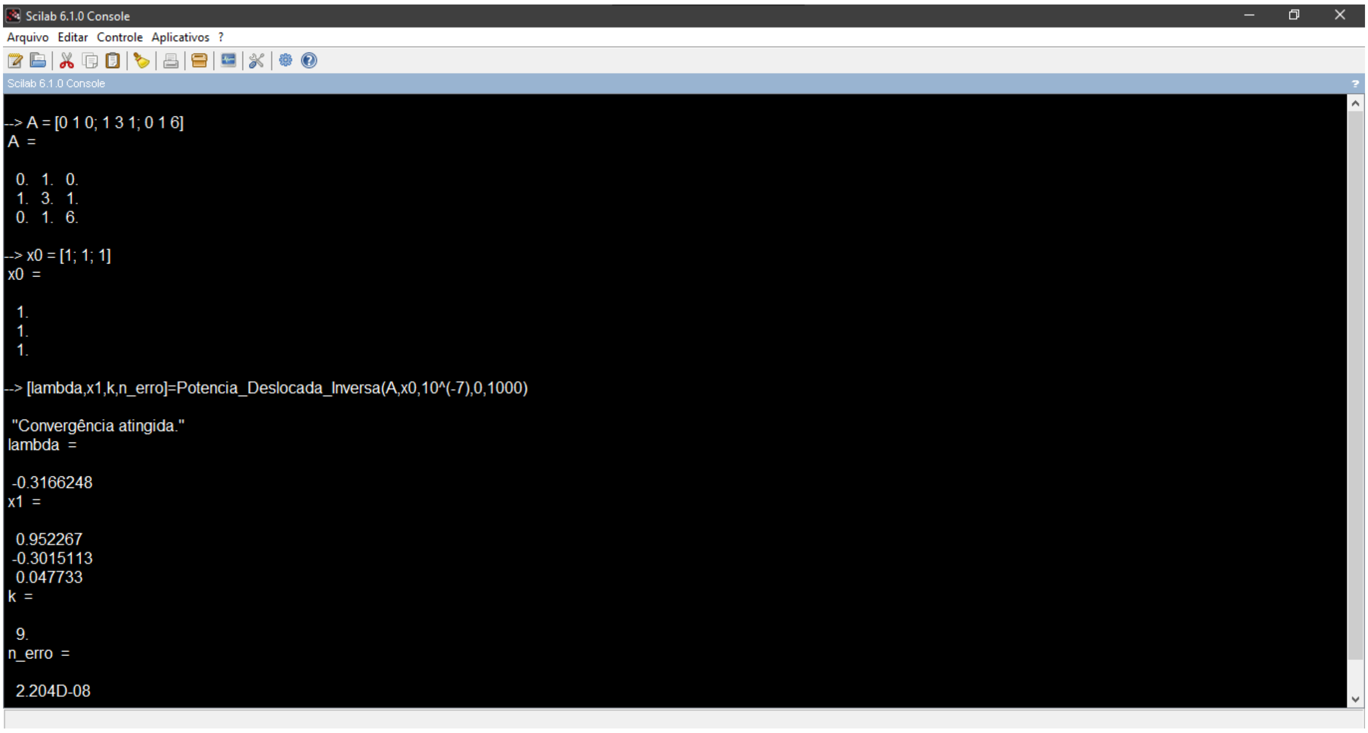

Figure 27: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 0$

Veja, na figura 28, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 0$

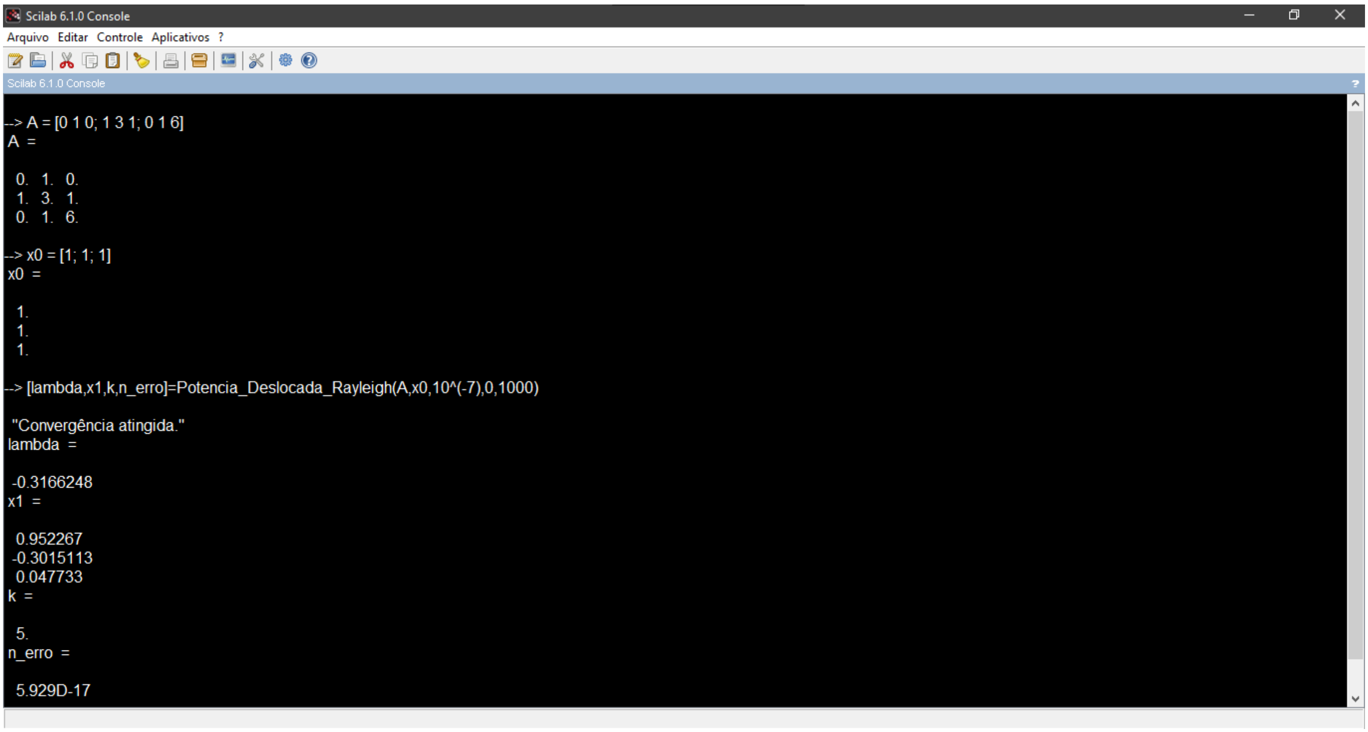

Figure 28: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 0$

Veja, na figura 29, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 4$

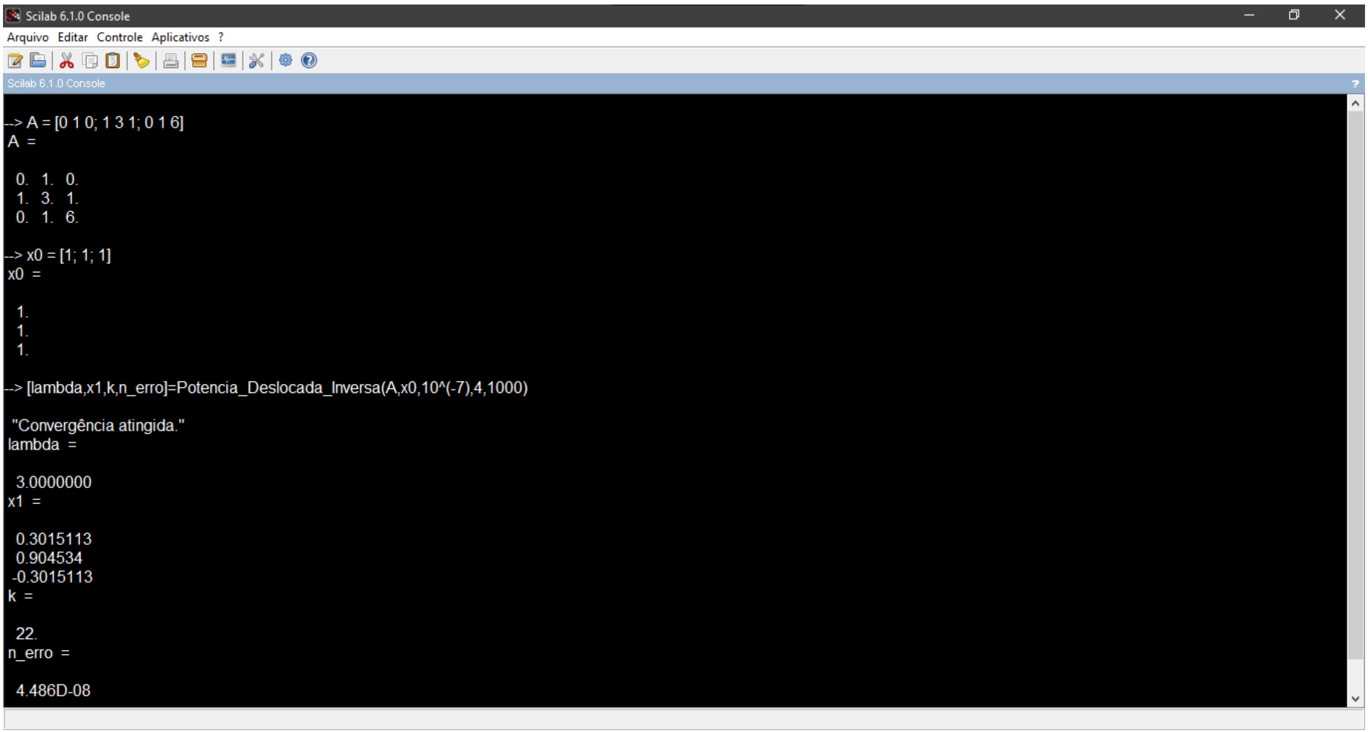

Figure 29: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 4$

Veja, na figura 30, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 4$

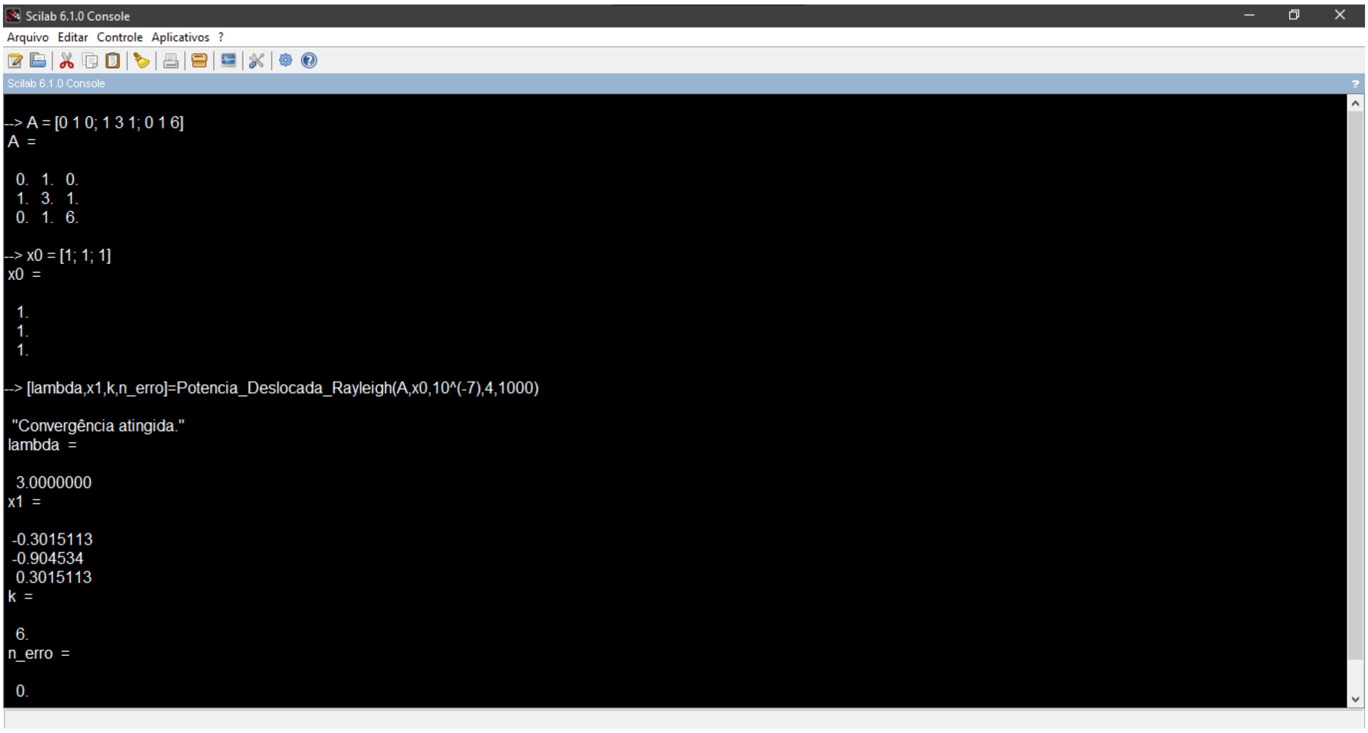

Figure 30: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 4$

Veja, na figura 31, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 6$

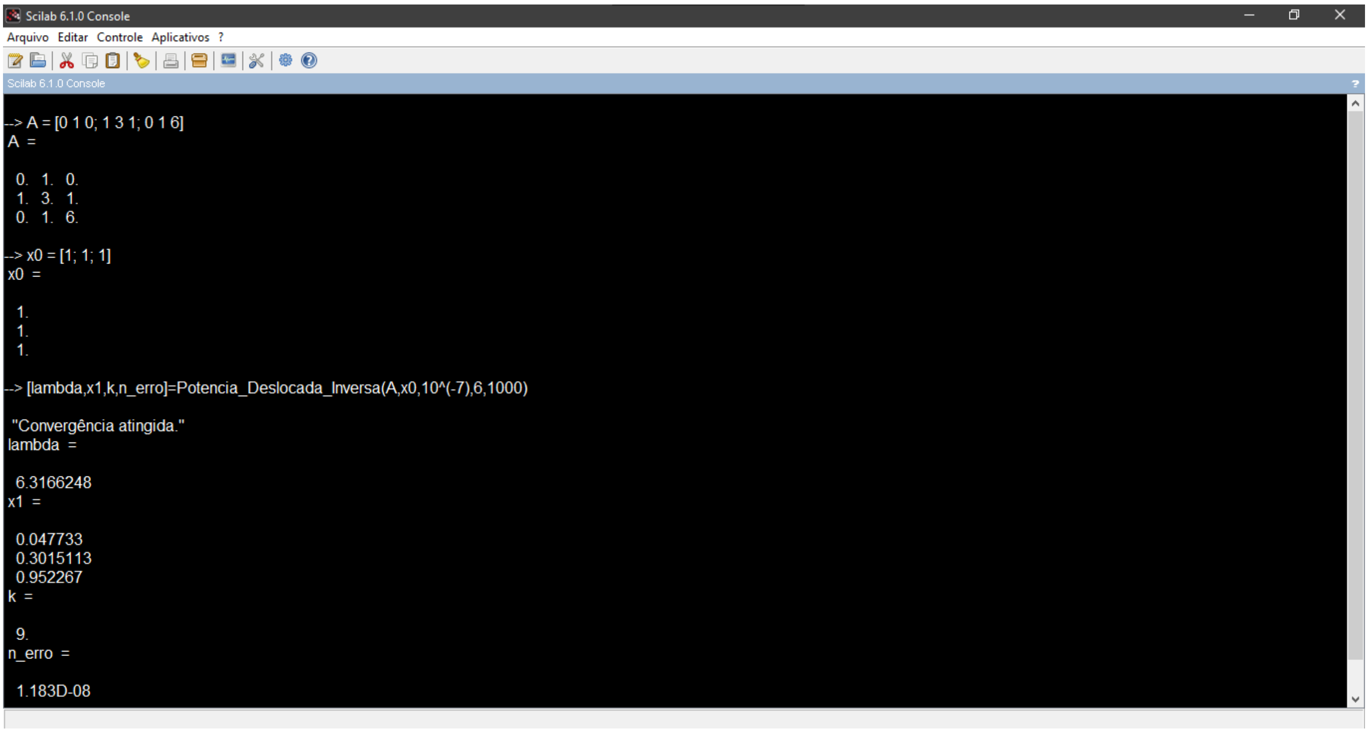

Figure 31: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 6$

Veja, na figura 32, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 6$

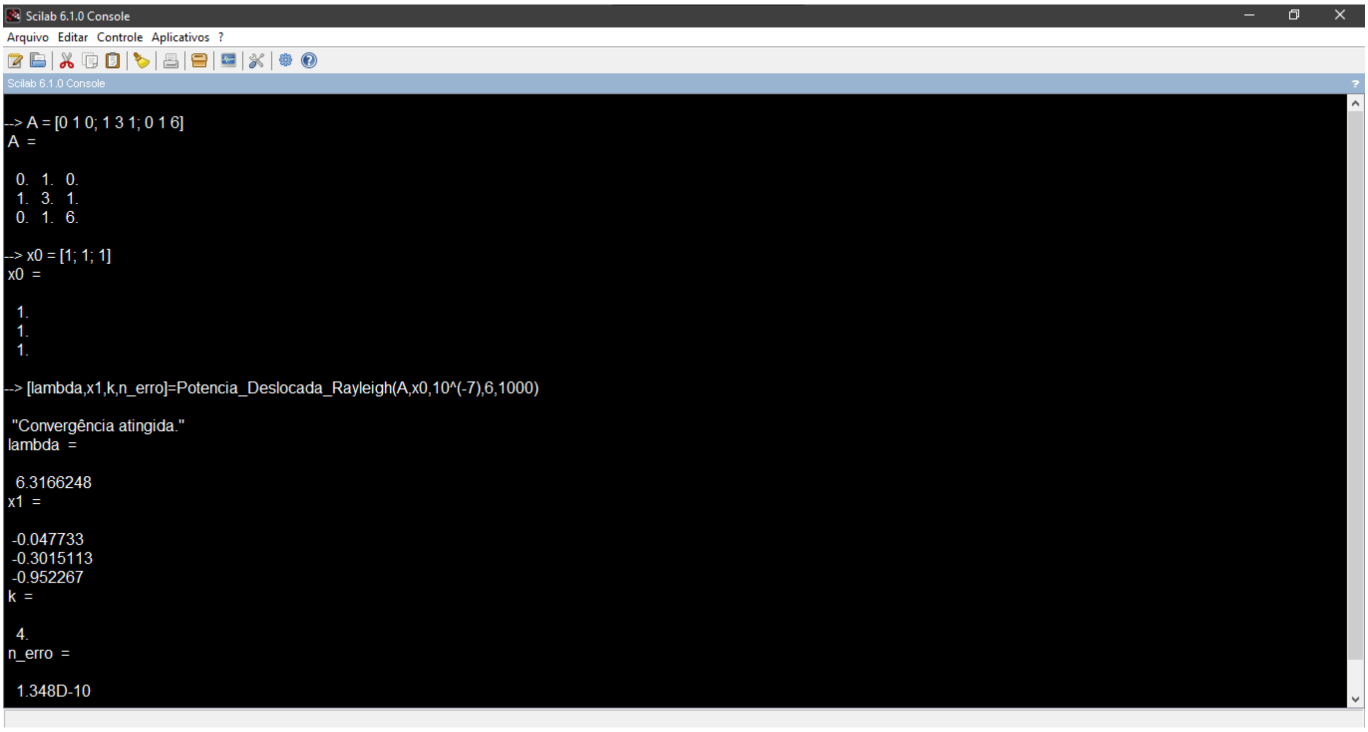

Figure 32: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 6$

Finalmente, construímos a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 4 & 15 & -4 \\ 8 & -4 & 20 \end{bmatrix}$.

Veja, na figura 33, os Discos de Gerschgorin associados a essa matriz.

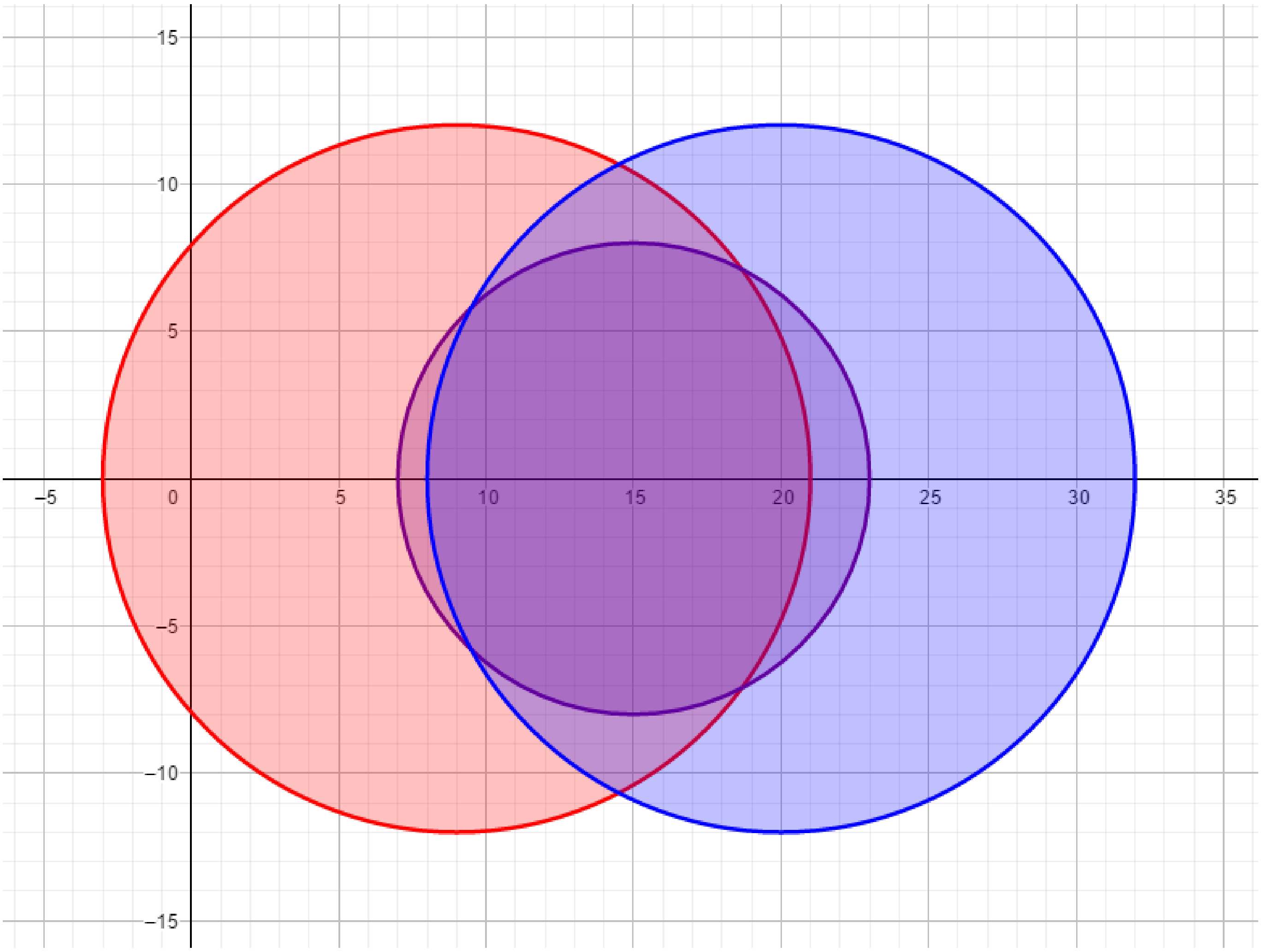

Figure 33: Discos de Gerschgorin associados à matriz A

Vemos, então, que um dos autovalores de A está próximo de 2, outro autovalor está próximo de 15 e o outro está próximo de 30. Portanto, vamos aplicar as funções Potencia-Deslocada-Inversa e Potencia-Deslocada-Rayleigh para encontrar esses autovalores usando $\alpha = 2$, em seguida $\alpha = 15$ e por último, $\alpha = 30$. Note também que, como A é simétrica, o Teorema Espectral garante que todos os seus autovalores são reais.

Veja, na figura 34, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 2$

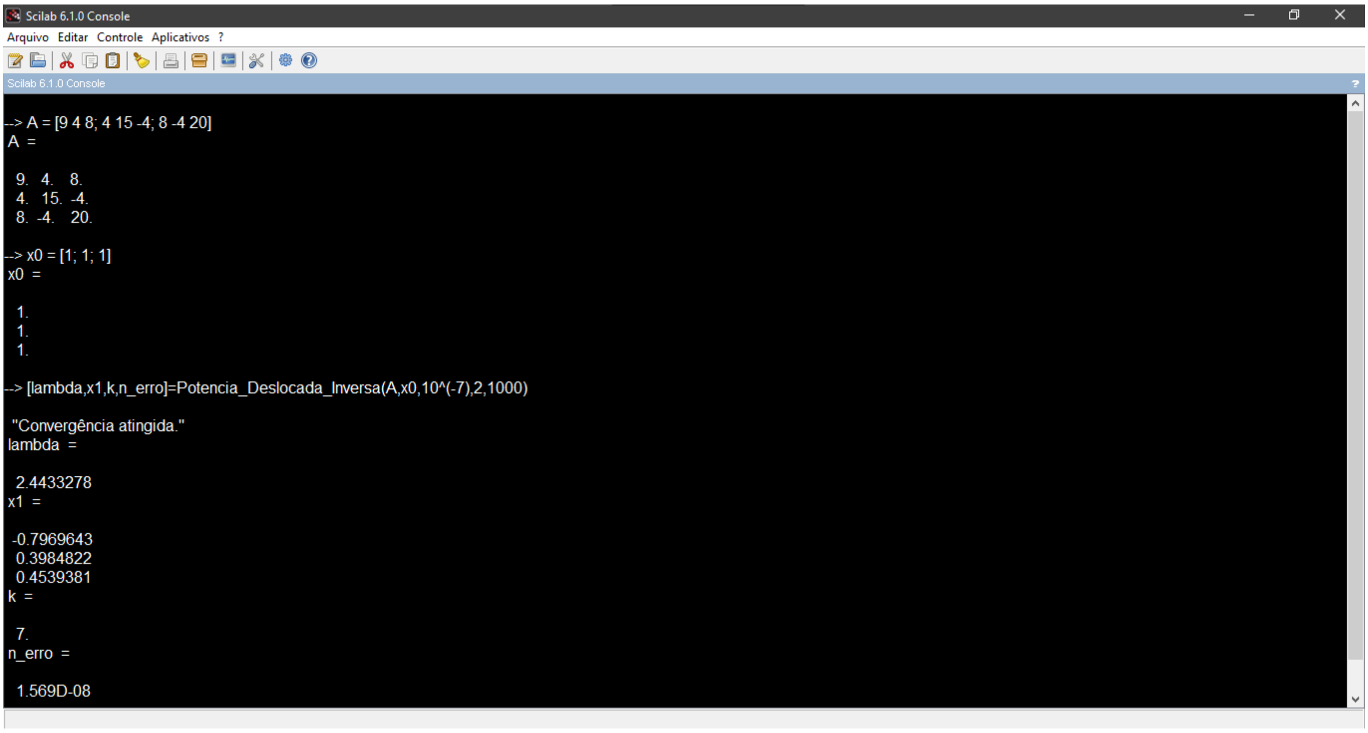

Figure 34: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 2$

Veja, na figura 35, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 2$

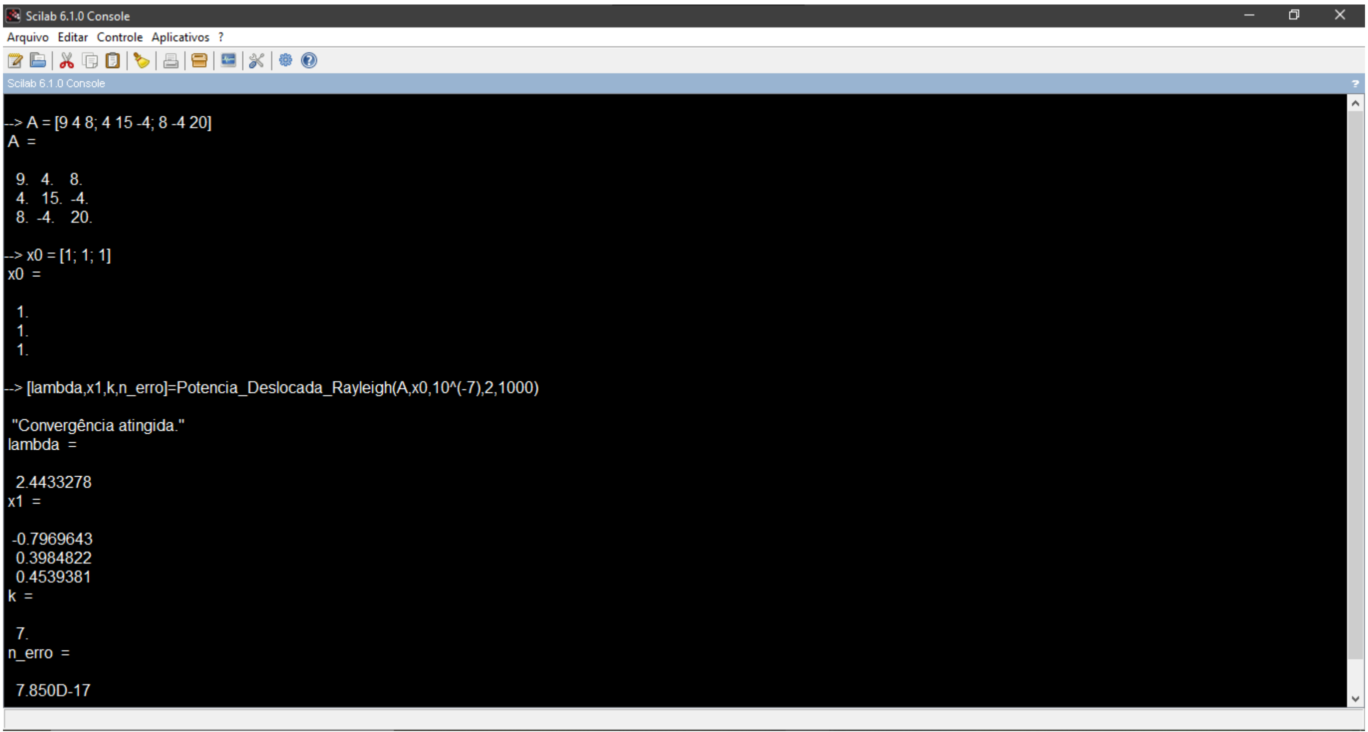

Figure 35: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 2$

Veja, na figura 36, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 15$

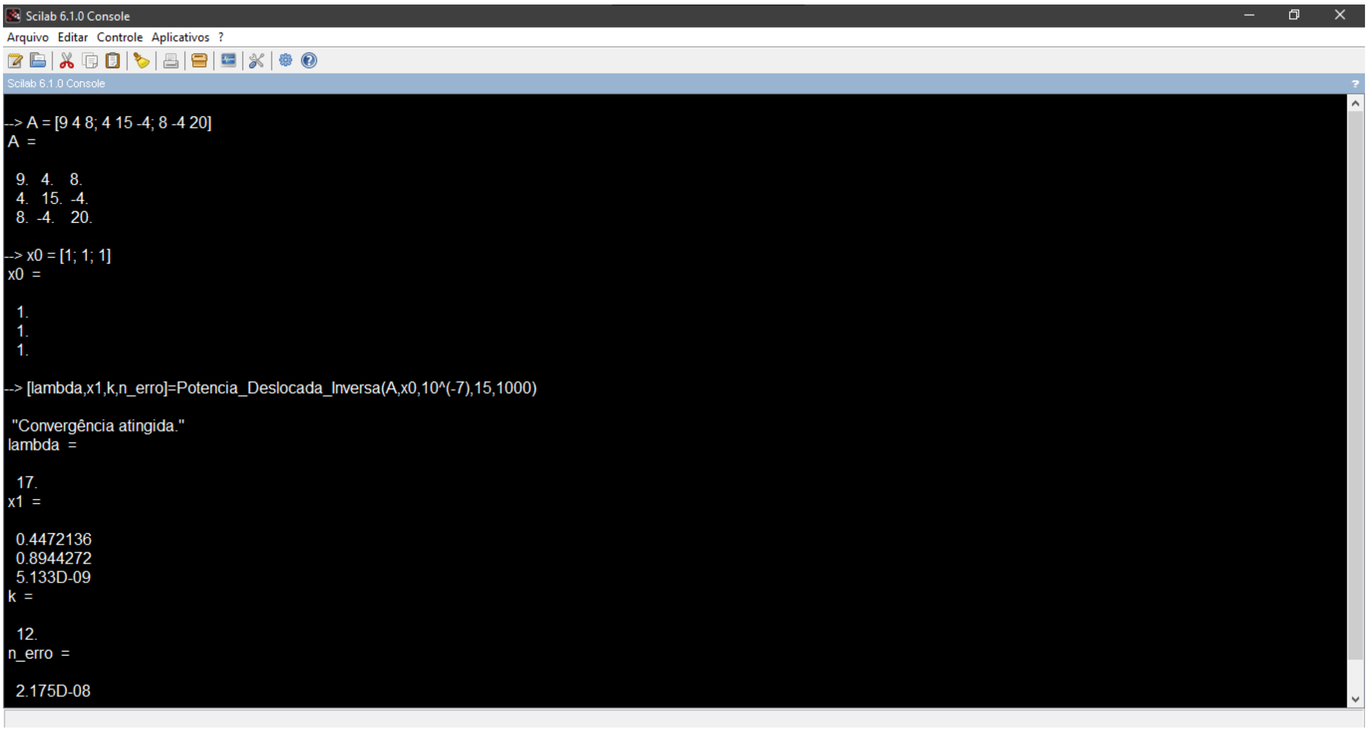

Figure 36: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 15$

Veja, na figura 37, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 15$

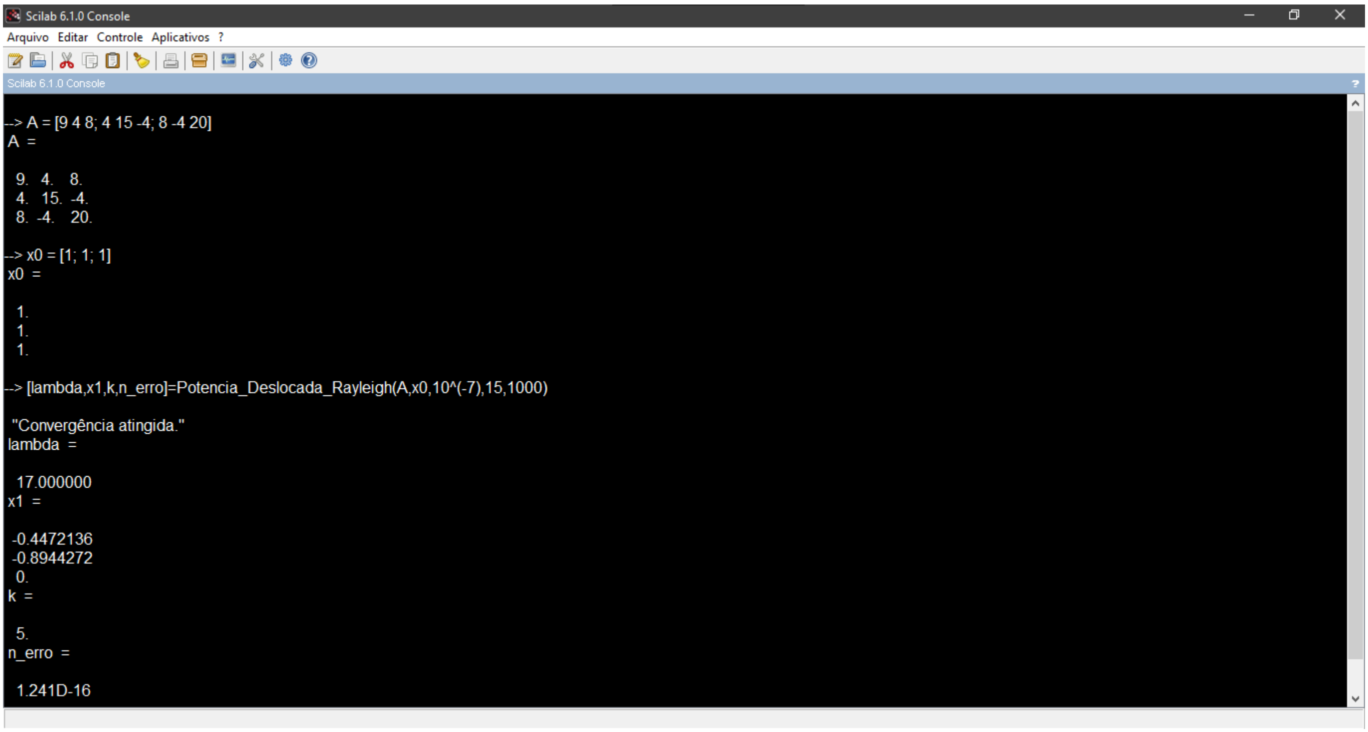

Figure 37: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 15$

Veja, na figura 38, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 30$

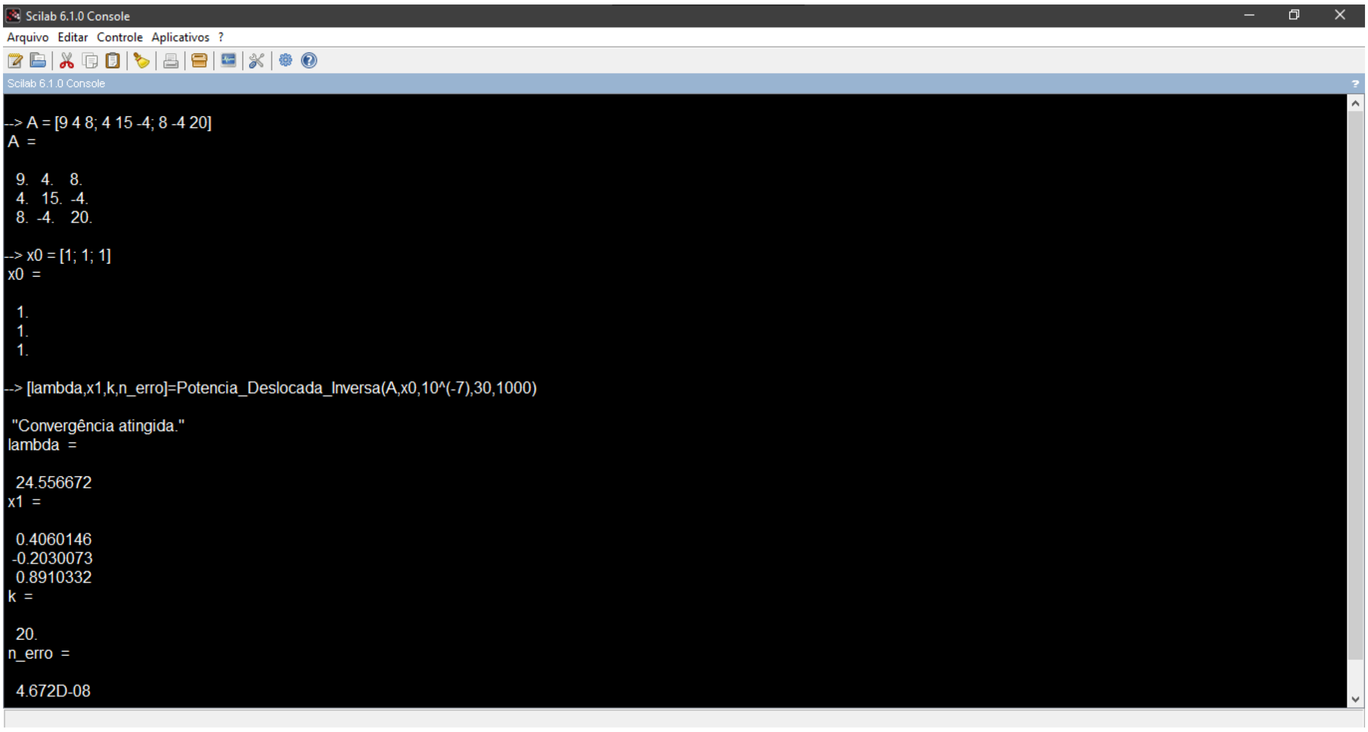

Figure 38: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 30$

Veja, na figura 39, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 30$

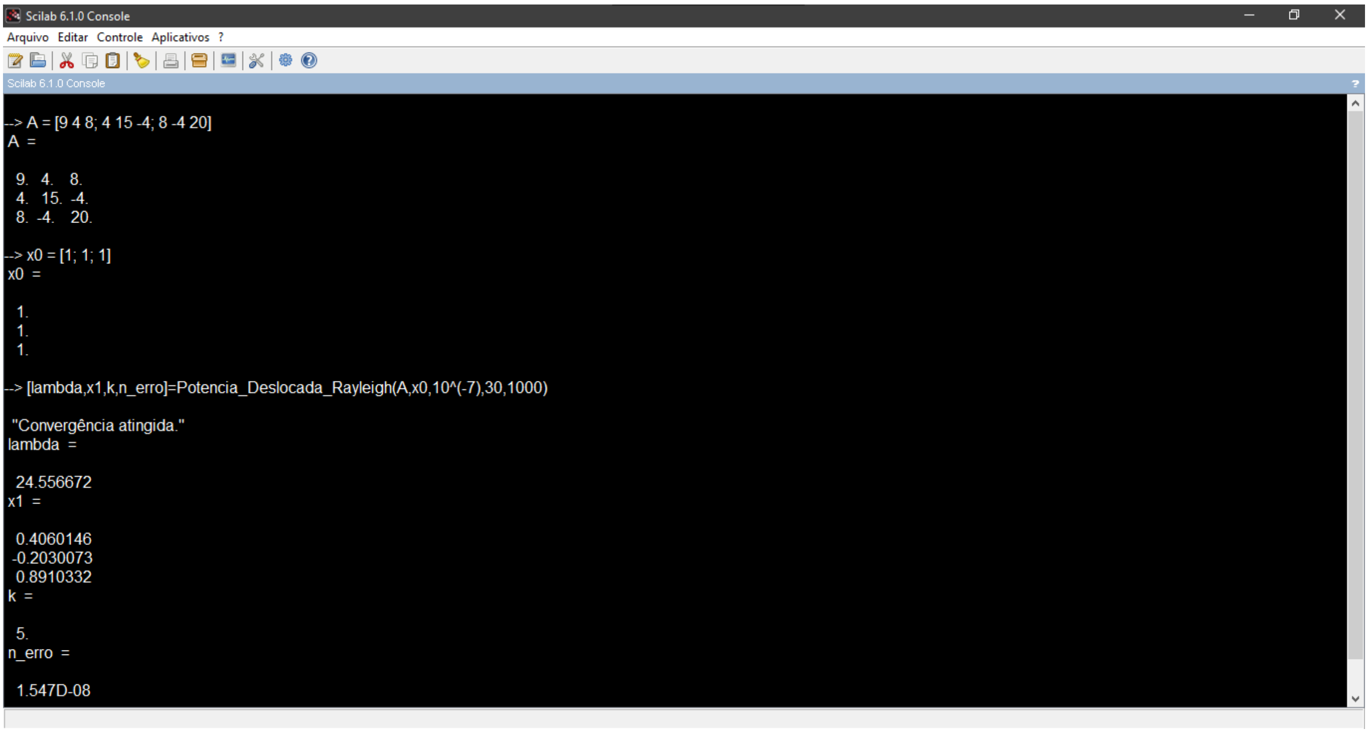

Figure 39: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 30$

Vamos, a seguir, coletar os tempos de execução de cada um dos testes feitos até então.

Veja, na figura 40, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 22 e 23.

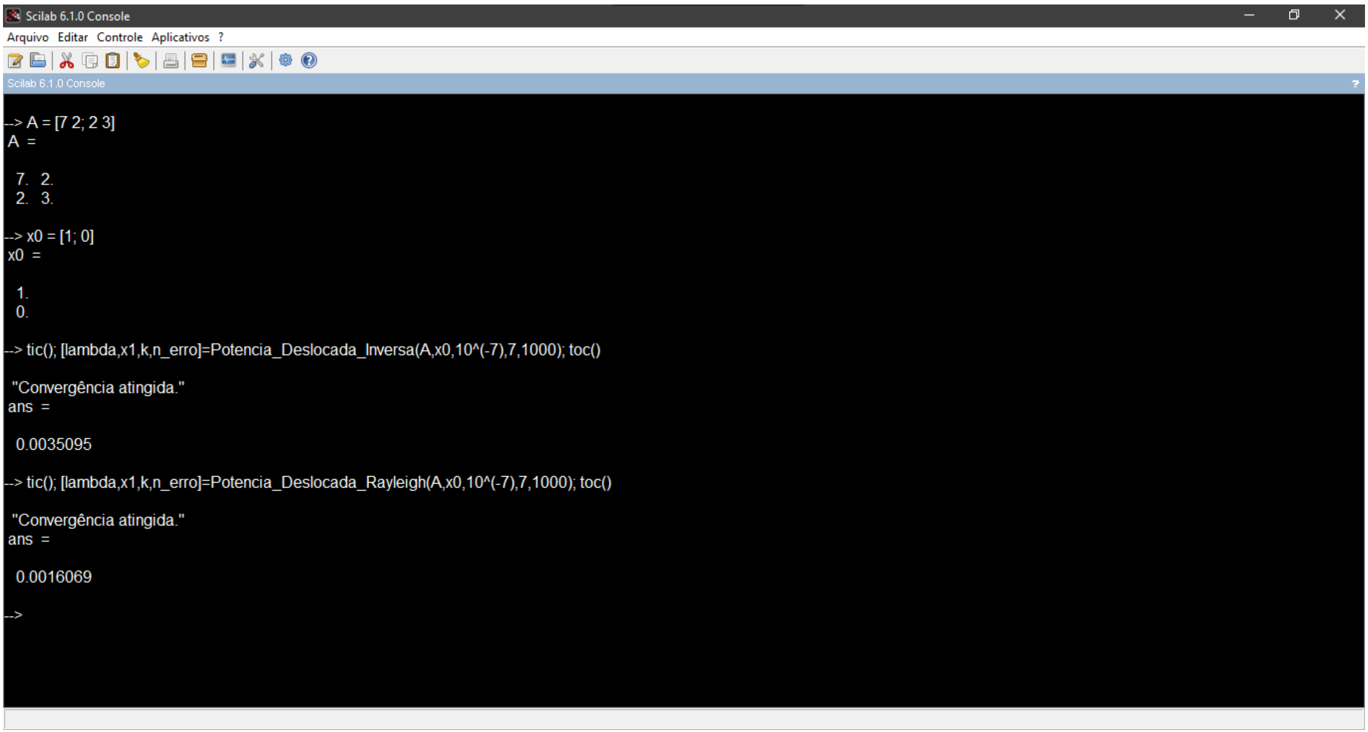

Figure 40: Runtime dos testes executados nas figuras 22 e 23

Veja, na figura 41, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 24 e 25.

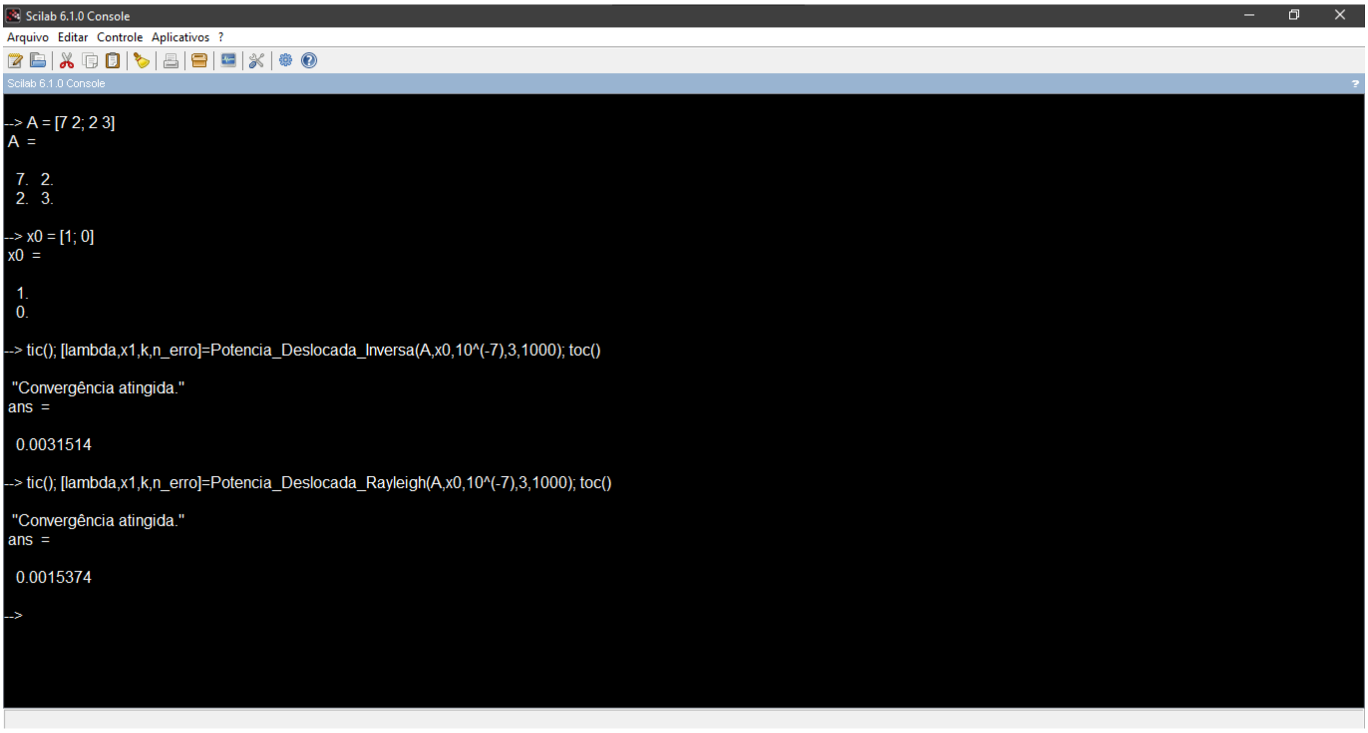

Figure 41: Runtime dos testes executados nas figuras 24 e 25

Veja, na figura 42, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 27 e 28.

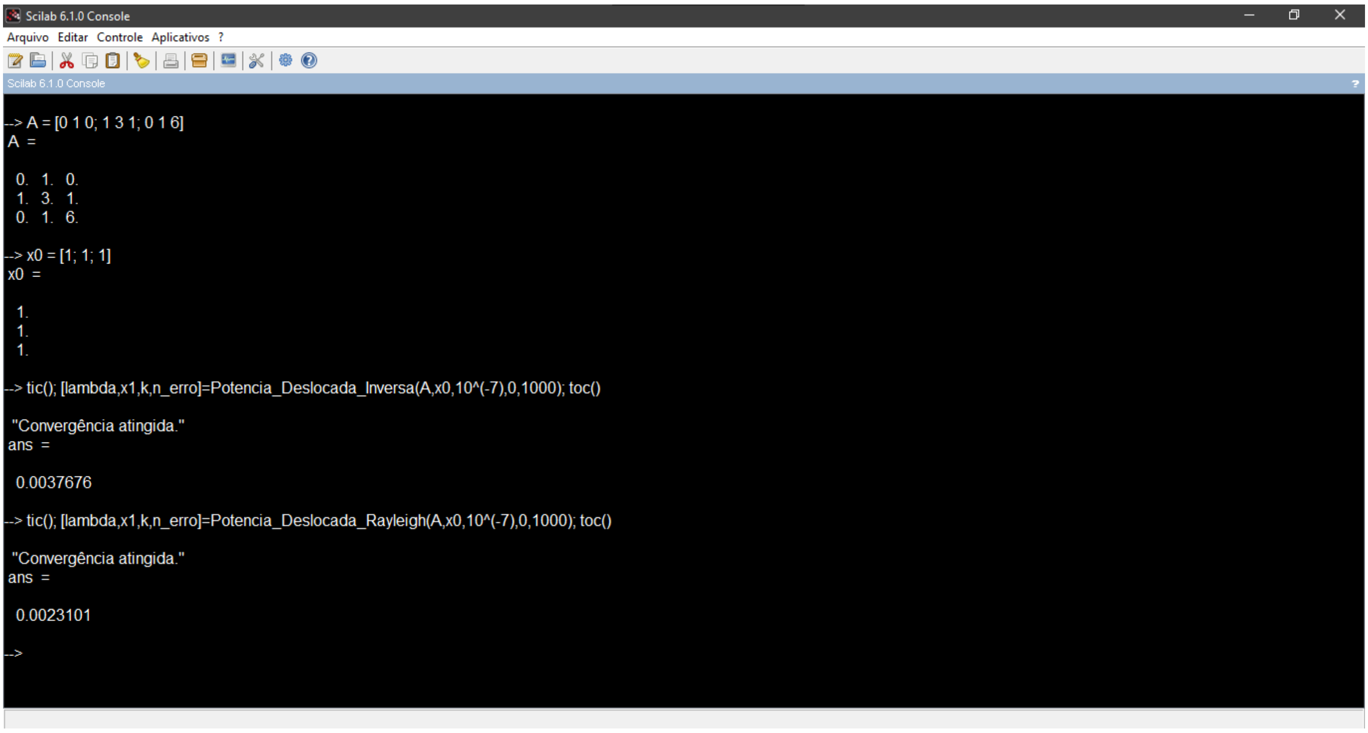

Figure 42: Runtime dos testes executados nas figuras 27 e 28

Veja, na figura 43, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 29 e 30.

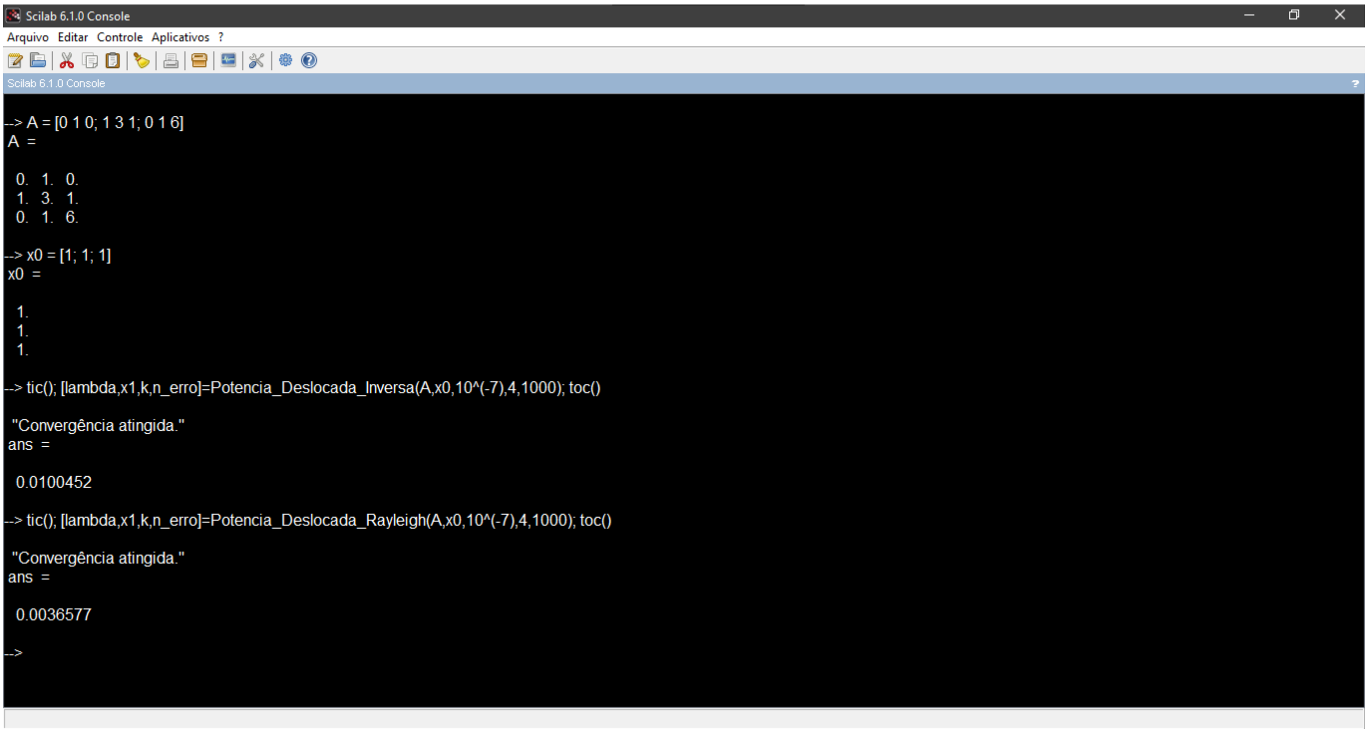

Figure 43: Runtime dos testes executados nas figuras 29 e 30

Veja, na figura 44, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 31 e 32.

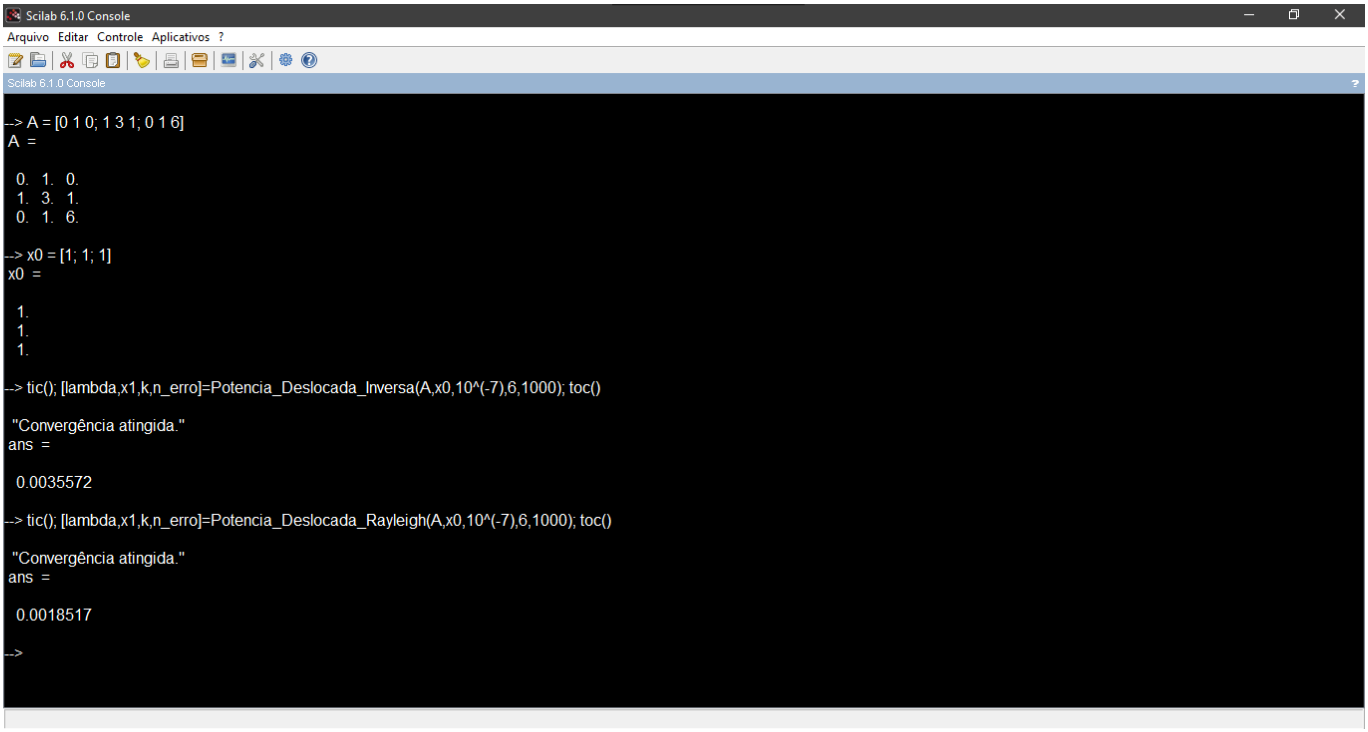

Figure 44: Runtime dos testes executados nas figuras 31 e 32

Veja, na figura 45, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 34 e 35.

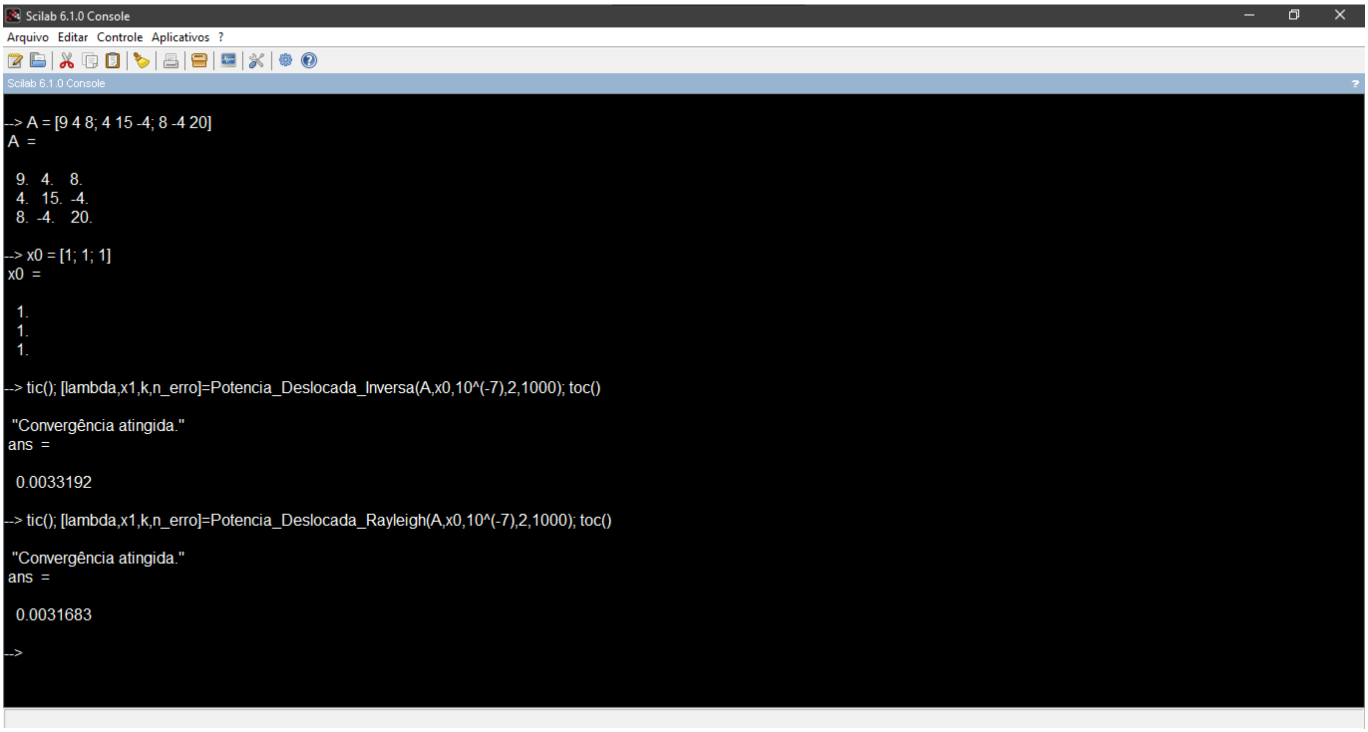

Figure 45: Runtime dos testes executados nas figuras 34 e 35

Veja, na figura 46, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 36 e 37.

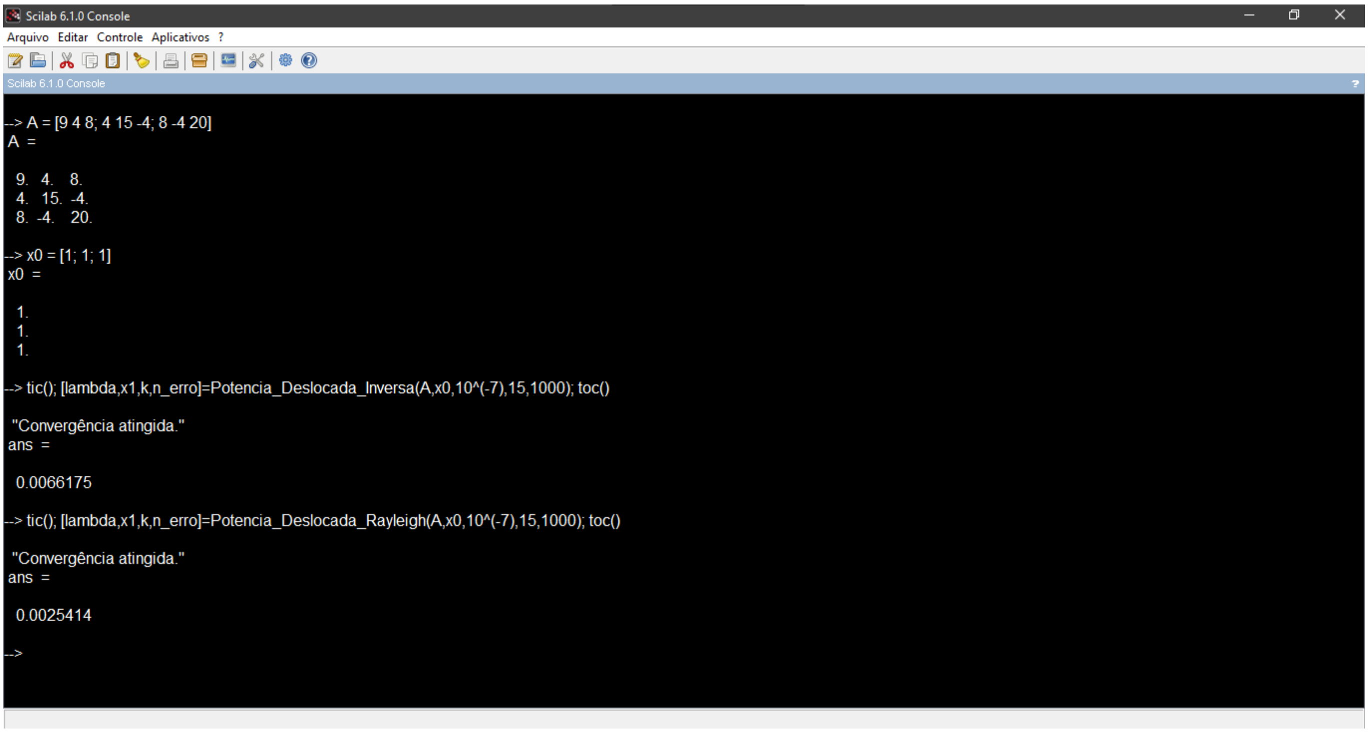

Figure 46: Runtime dos testes executados nas figuras 36 e 37

Veja, na figura 47, os tempos de execução dos testes realizados nas figuras 38 e 39.

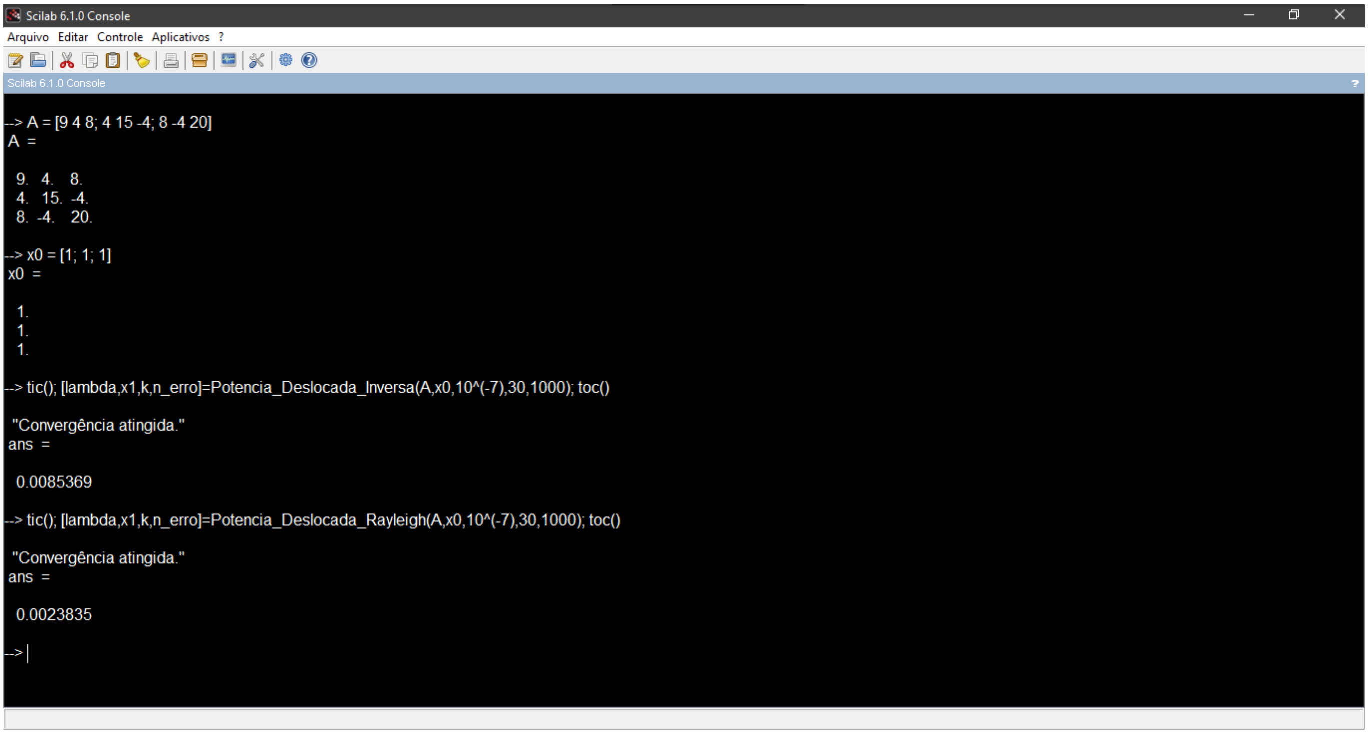

Figure 47: Runtime dos testes executados nas figuras 38 e 39

Por fim, vamos plotar esses tempos de execução em gráficos para facilitar a nossa análise.

Veja, na figura 48, o gráfico dos tempos de execução obtidos nas figuras 40 e 41. Em uma mesma vertical, o valor de α testado é o mesmo. Na vertical de abscissa 1 e 2, encontram-se, respectivamente, os tempos de execução coletados na figura 40 e 41.

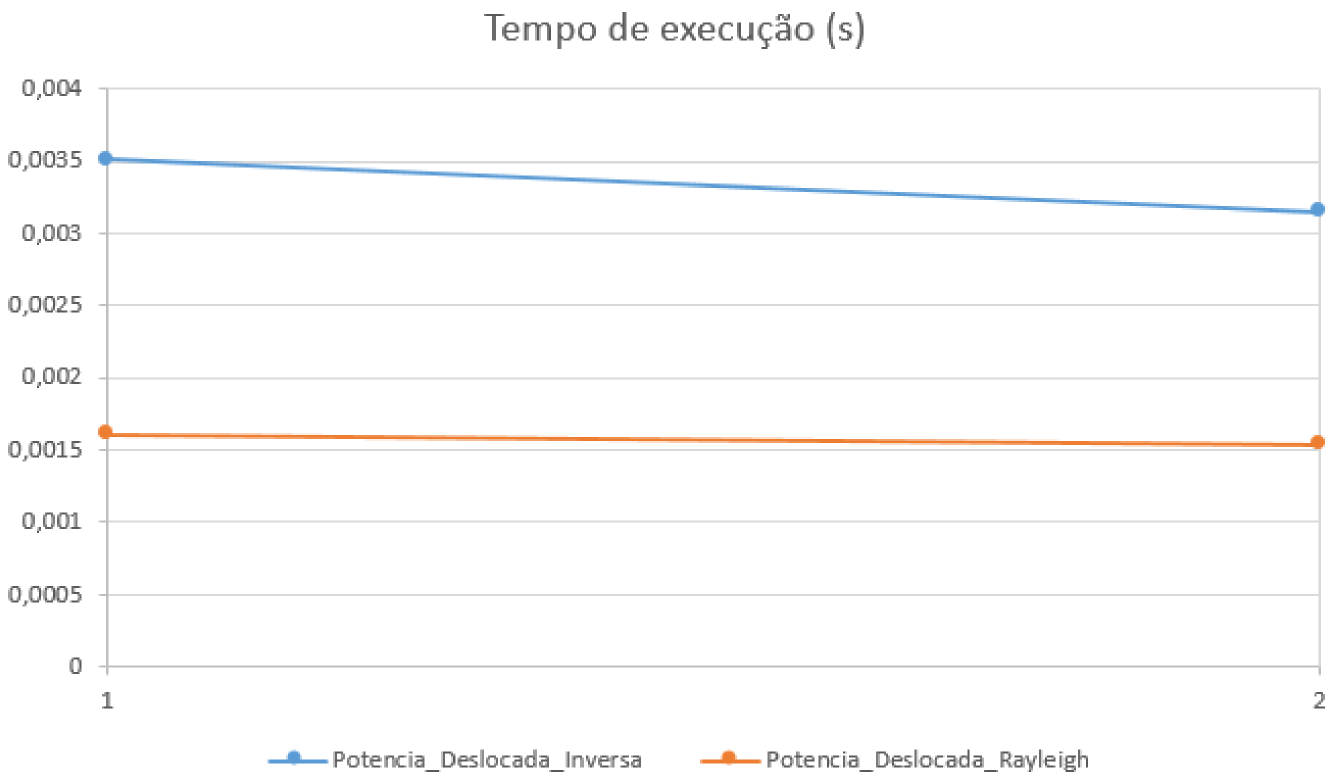

Figure 48: Tempos de execução das funções Potencia-Deslocada-Inversa e Potencia-Deslocada-Rayleigh fixados A, x_0 e $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 49, o gráfico dos tempos de execução obtidos nas figuras 42, 43 e 44. Em uma mesma vertical, o valor de α testado é o mesmo. Na vertical de abscissa 1, 2 e 3, encontram-se, respectivamente, os tempos de execução coletados na figura 42, 43 e 44.

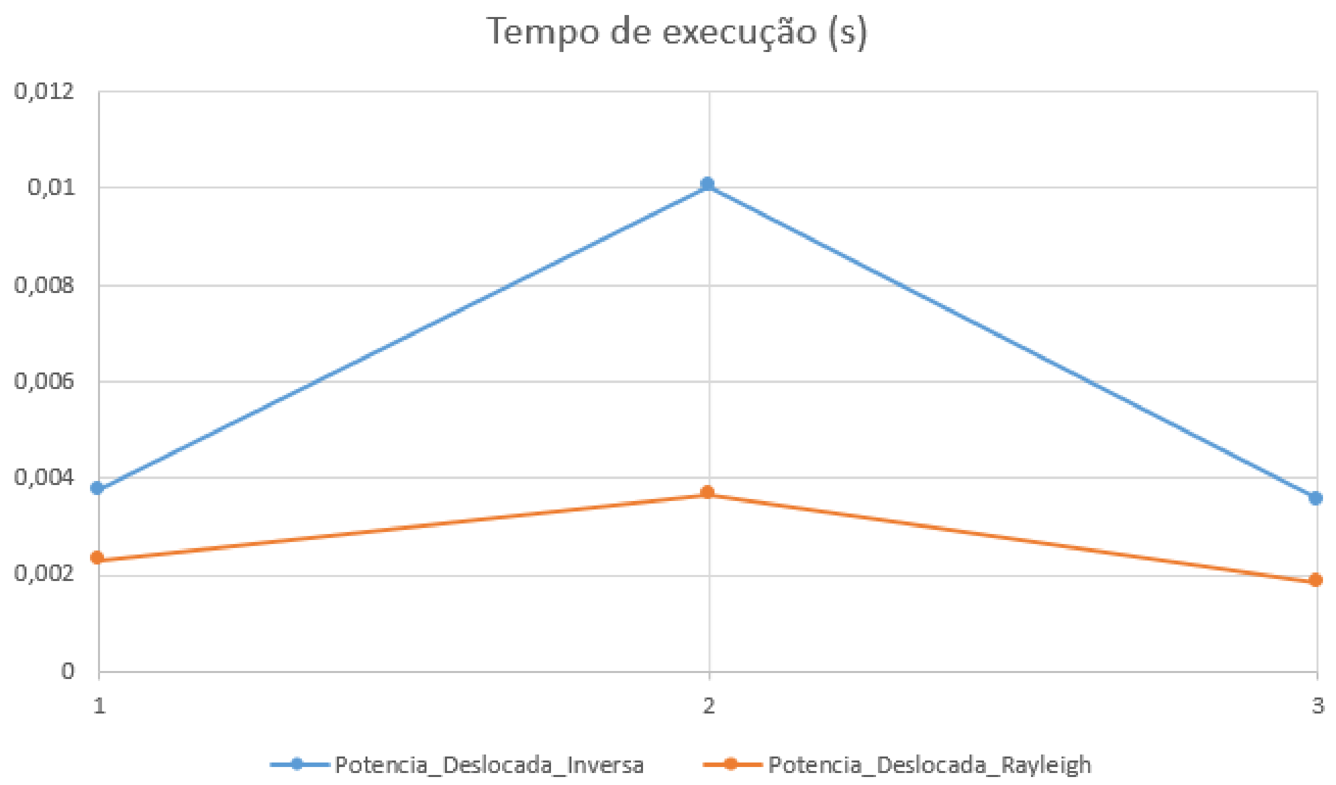

Figure 49: Tempos de execução das funções Potencia-Deslocada-Inversa e Potencia-Deslocada-Rayleigh fixados A, x_0 e $\epsilon = 10^{-7}$

Veja, na figura 50, o gráfico dos tempos de execução obtidos nas figuras 45, 46 e 47. Em uma mesma vertical, o valor de α testado é o mesmo. Na vertical de abscissa 1, 2 e 3, encontram-se, respectivamente, os tempos de execução coletados na figura 45, 46 e 47.

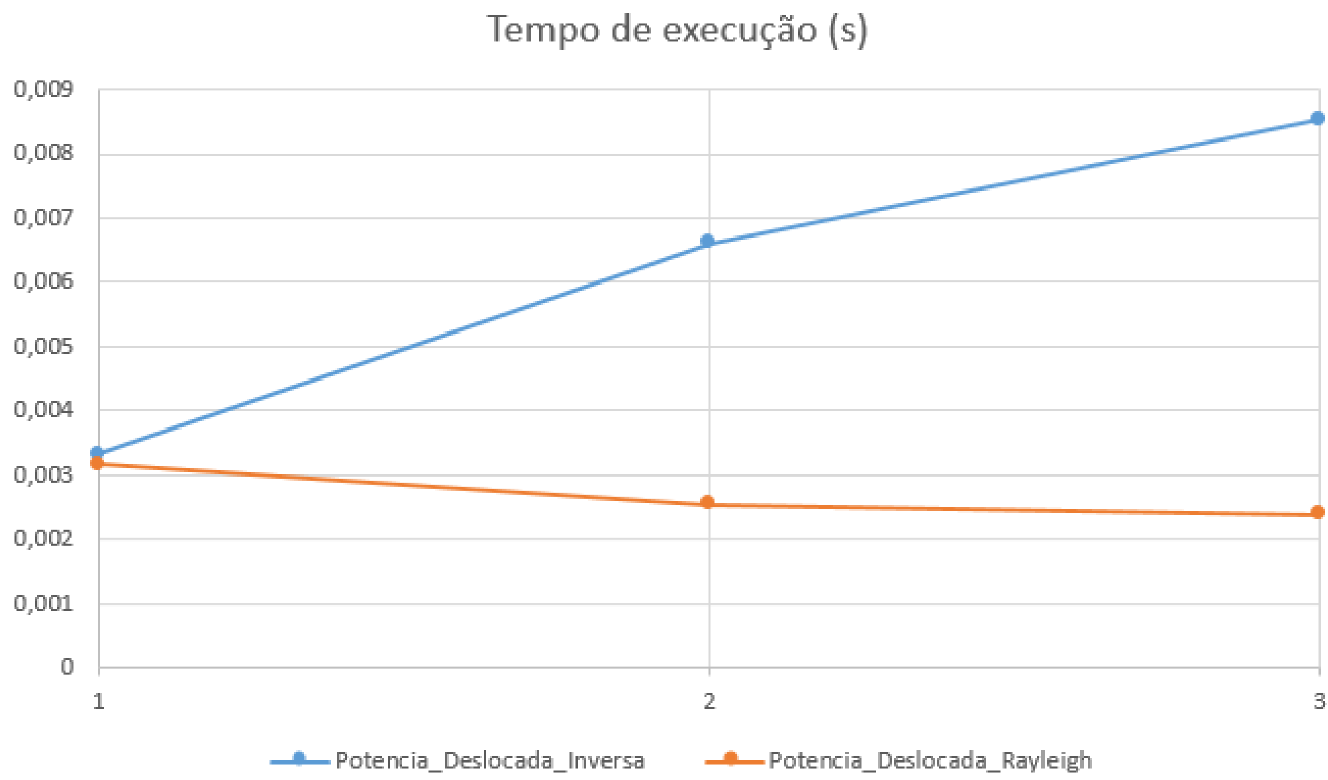

Figure 50: Tempos de execução das funções Potencia-Deslocada-Inversa e Potencia-Deslocada-Rayleigh fixados A, x_0 e $\epsilon = 10^{-7}$

Comentários: Podemos ver que todas as matrizes construídas são simétricas, e usamos os Discos de Gerschgorin para nos guiar na escolha do α para estimar o autovalor de A mais próximo de α. Vale ressaltar que todos os autovalores e autovetores retornados coincidem com os que são retornados pela função "spec(A)" nativa do scilab e são realmente os autovalores mais próximos de α. No entanto, essas funções falham ou retornam valores errôneos se α for muito próximo do autovalor que desejamos encontrar pelo fato de que ao aplicar a Gaussian-Elimination-4 a $A - \alpha \cdot I$, erros de aproximação tornam a matriz igual a $A - \lambda \cdot I$, que não é uma matriz invertível e, portanto, não sendo tratável pela referida função. Nas figuras de 22 a 39, exceto as figuras 26 e 33, podemos ver que, para os exatos mesmos parâmetros de entrada, em geral, a função Potencia-Deslocada-Inversa realiza um número significativamente maior de iterações que a função Potencia-Deslocada-Rayleigh. Além disso, nas figuras de 48 a 50, vemos que, em geral, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh tem execução mais rápida que a função Potencia-Deslocada-Inversa. Isso ocorre porque a cada iteração, a função Potencia-Deslocada-Rayleigh atualiza o valor de α de forma a se aproximar mais rapidamente do autovalor desejado, tornando essa função mais eficiente.

6 Questão 6

Vamos usar os métodos implementados nas funções scilab para encontrar todos os autovalores e respectivos autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Veja, na figura 51, os Discos de Gerschgorin associados a essa matriz.

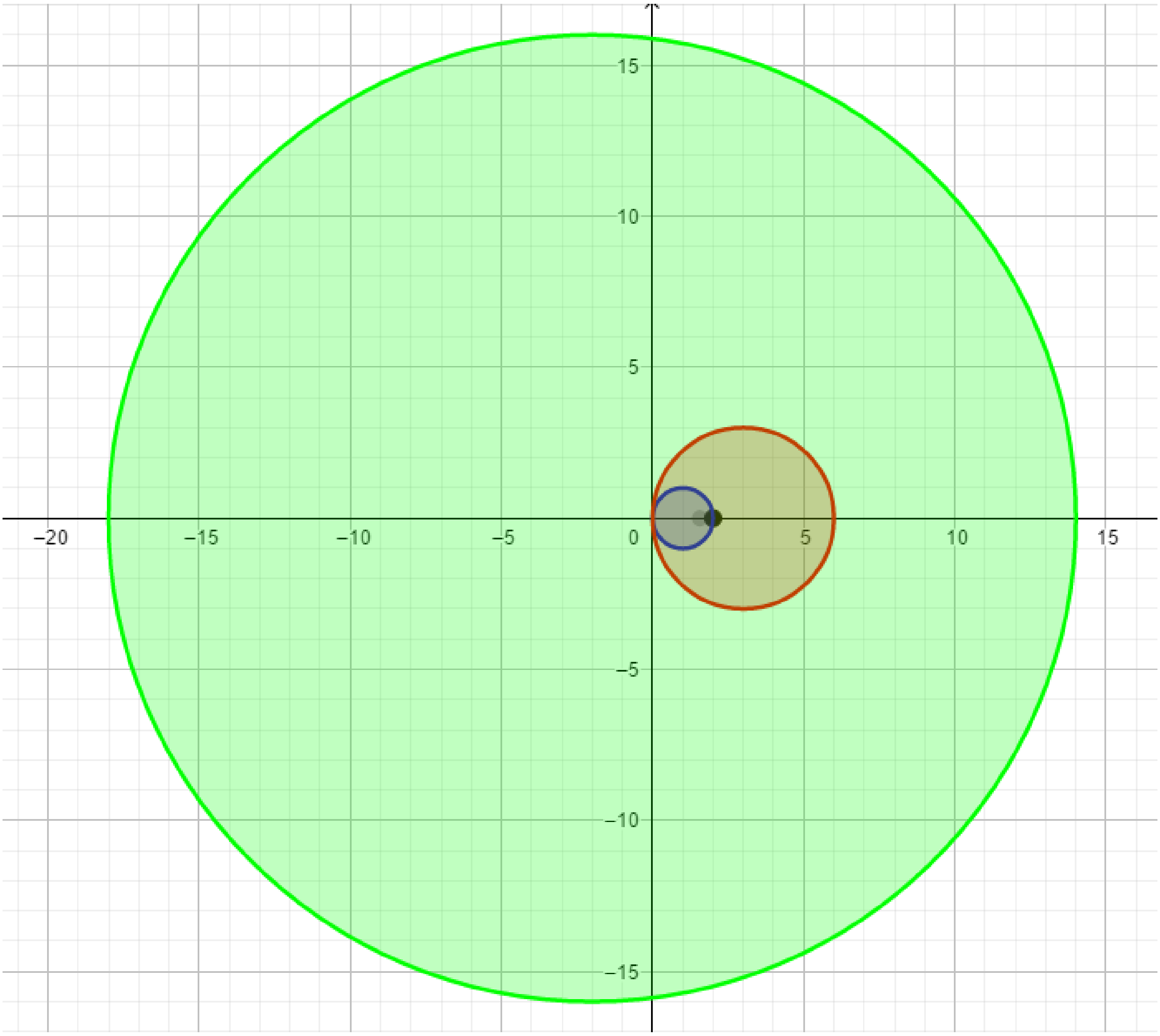

Figure 51: Discos de Gerschgorin associados à matriz A

Primeiramente, vamos aplicar a função Metodo-Potencia-1 para encontrar o autovalor dominante de A.

Veja, na figura 52, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

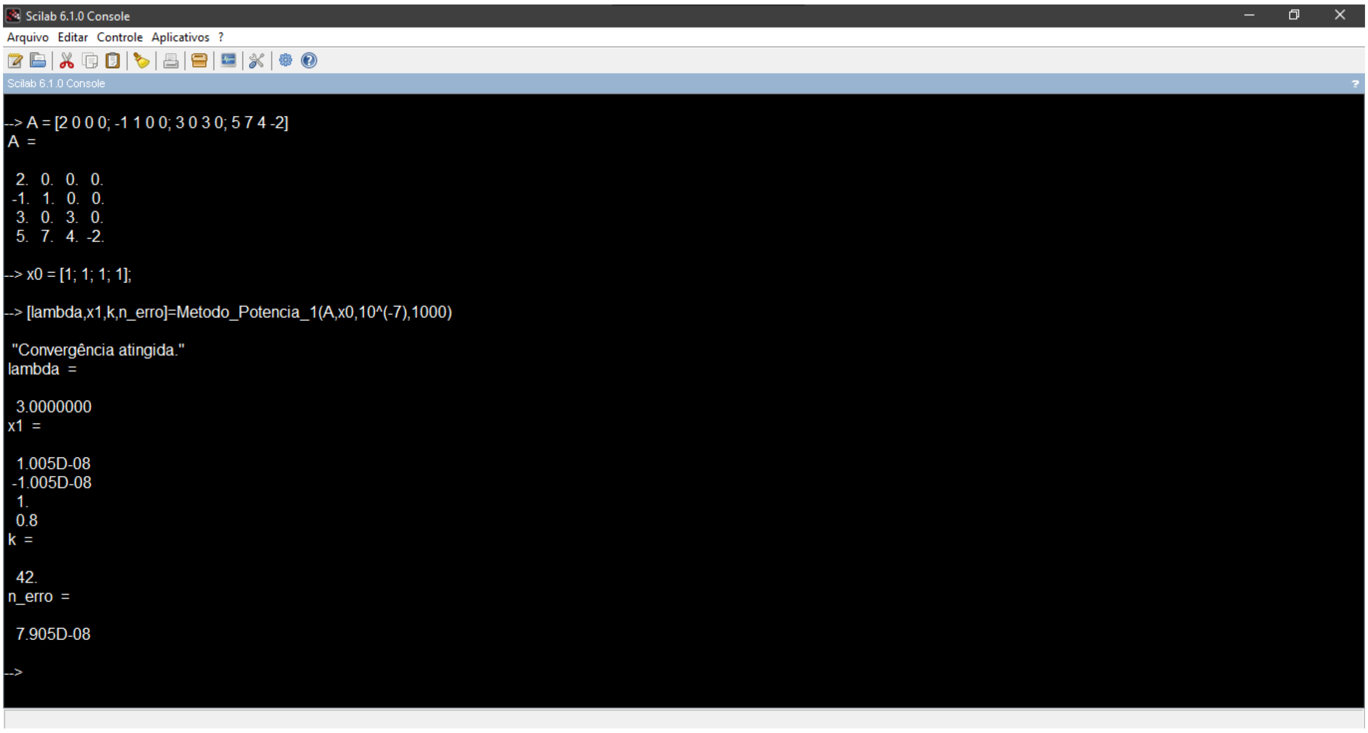

Figure 52: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Logo, o autovalor dominante de A é $\lambda_1 = 3$. Temos que, sendo λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 os autovalores de A, então os autovalores de $A - \lambda_1 \cdot I$ são 0, $\lambda_2 - 3$, $\lambda_3 - 3$ e $\lambda_4 - 3$. Vamos, então, atualizar a matriz A para $A - 3 \cdot I$ e aplicar a função Metodo-Potencia-1 novamente para encontrar o autovalor dominante de A.

Veja, na figura 53, a função Metodo-Potencia-1 aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor dominante de A.

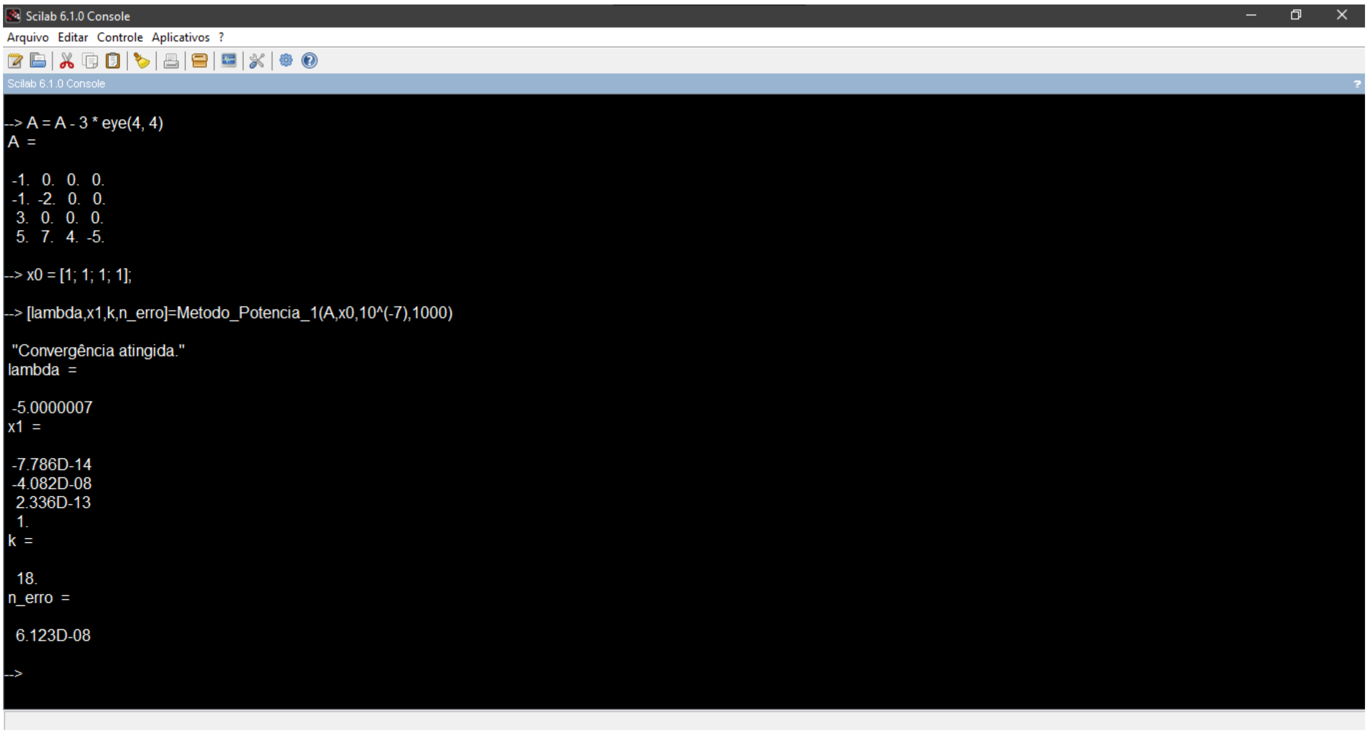

Figure 53: Função Metodo-Potencia-1 aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$

Logo, o autovalor dominante de $A - 3 \cdot I$ é $\lambda_2 - 3 = -5 \Rightarrow \lambda_2 = -2$.

Vamos, agora, aplicar a função Potencia-Deslocada-Inversa à matriz A original usando $\alpha = -20$ para verificar se existe algum autovalor de A mais próximo de -20 que o -2 (lembrando que fora da união dos Discos de Gerschgorin não se encontra nenhum autovalor).

Veja, na figura 54, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = -20$

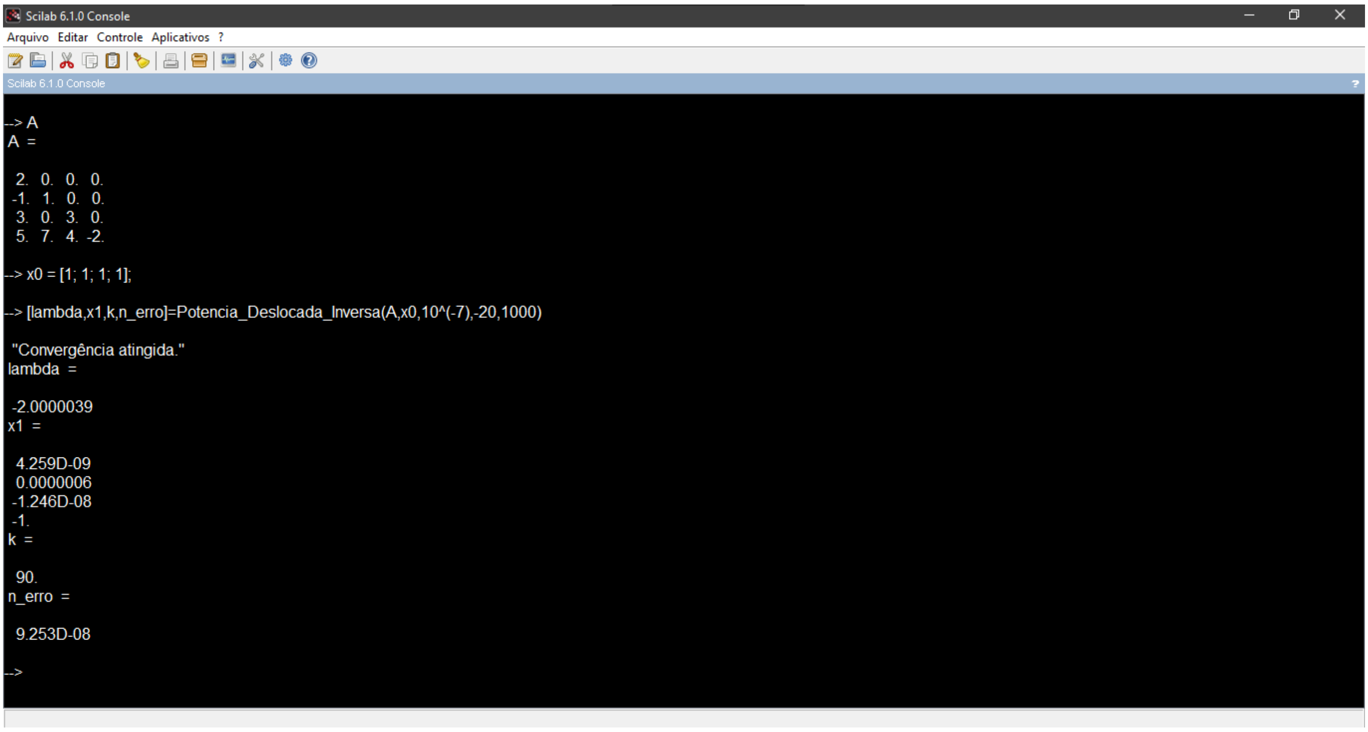

Figure 54: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = -20$

Logo, A não possui um autovalor mais próximo de -20 que o -2. Vamos, agora, aplicar a função Potencia-Deslocada-Inversa à matriz A original usando $\alpha = 15$ para verificar se existe algum autovalor de A mais próximo de 15 que o 3 (lembrando que fora da união dos Discos de Gerschgorin não se encontra nenhum autovalor).

Veja, na figura 55, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 15$

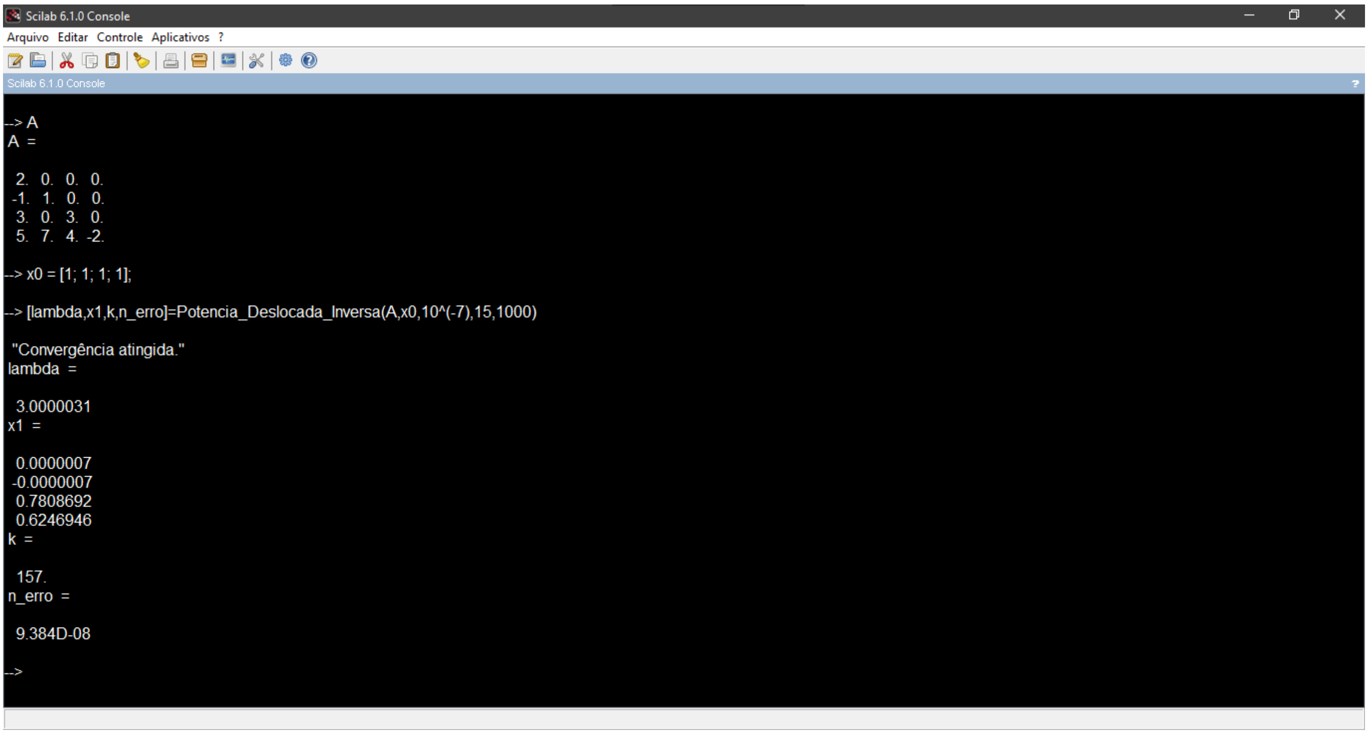

Figure 55: Função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 15$

Logo, A não possui um autovalor mais próximo de 15 que o 3. Vamos, a seguir, verificar se encontramos um novo autovalor de A que esteja próximo de 0.

Veja, na figura 56, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 0$

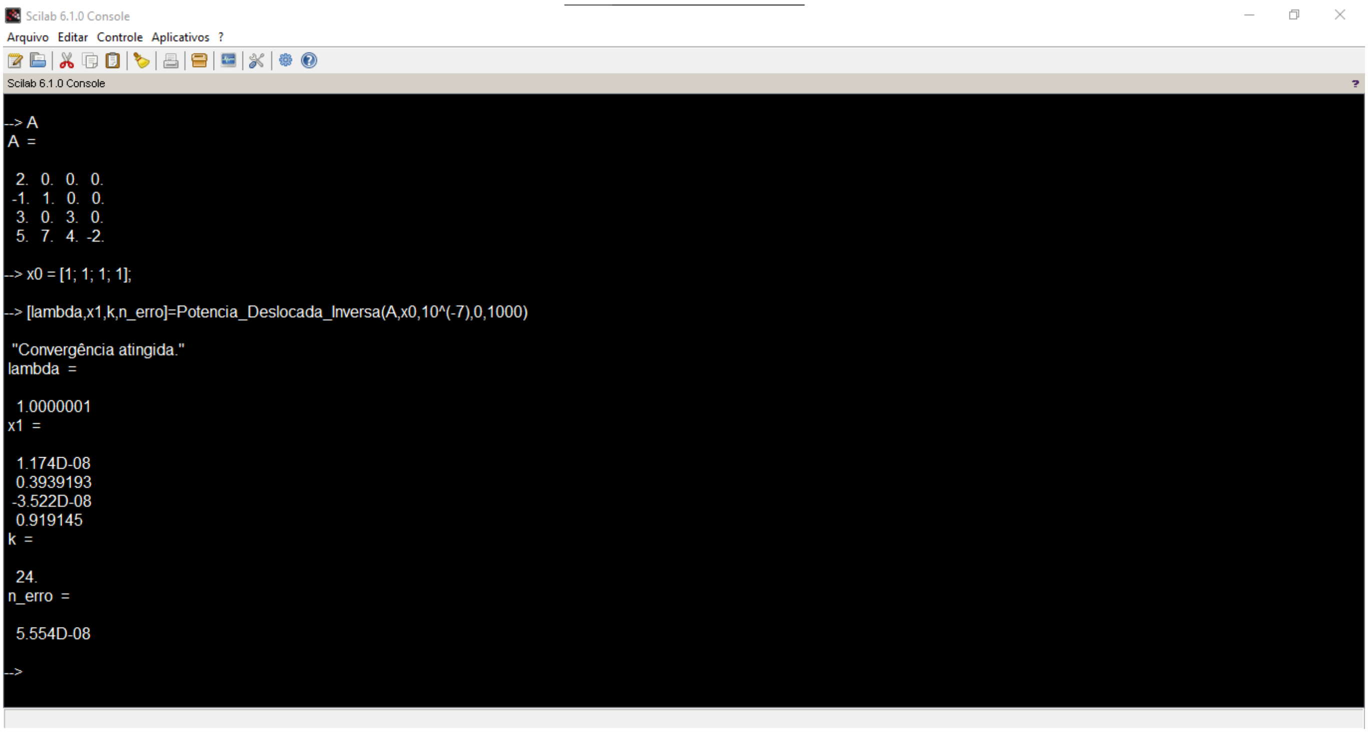

Figure 56: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 0$

Então, 1 é o terceiro autovalor de A que encontramos. Como falta apenas um autovalor, ele deve ser também um número real, pois caso contrário seu par conjugado complexo também seria autovalor. Apliquemos, então, a função Potencia-Deslocada-Inversa à matriz A original usando $\alpha = 1.6$ para verificar se encontramos algum autovalor entre 1 e 3.

Veja, na figura 57, a função Potencia-Deslocada-Inversa aplicada à matriz A e ao vetor $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando $\epsilon = 10^{-7}$ para encontrar o autovalor de A mais próximo de $\alpha = 1.6$

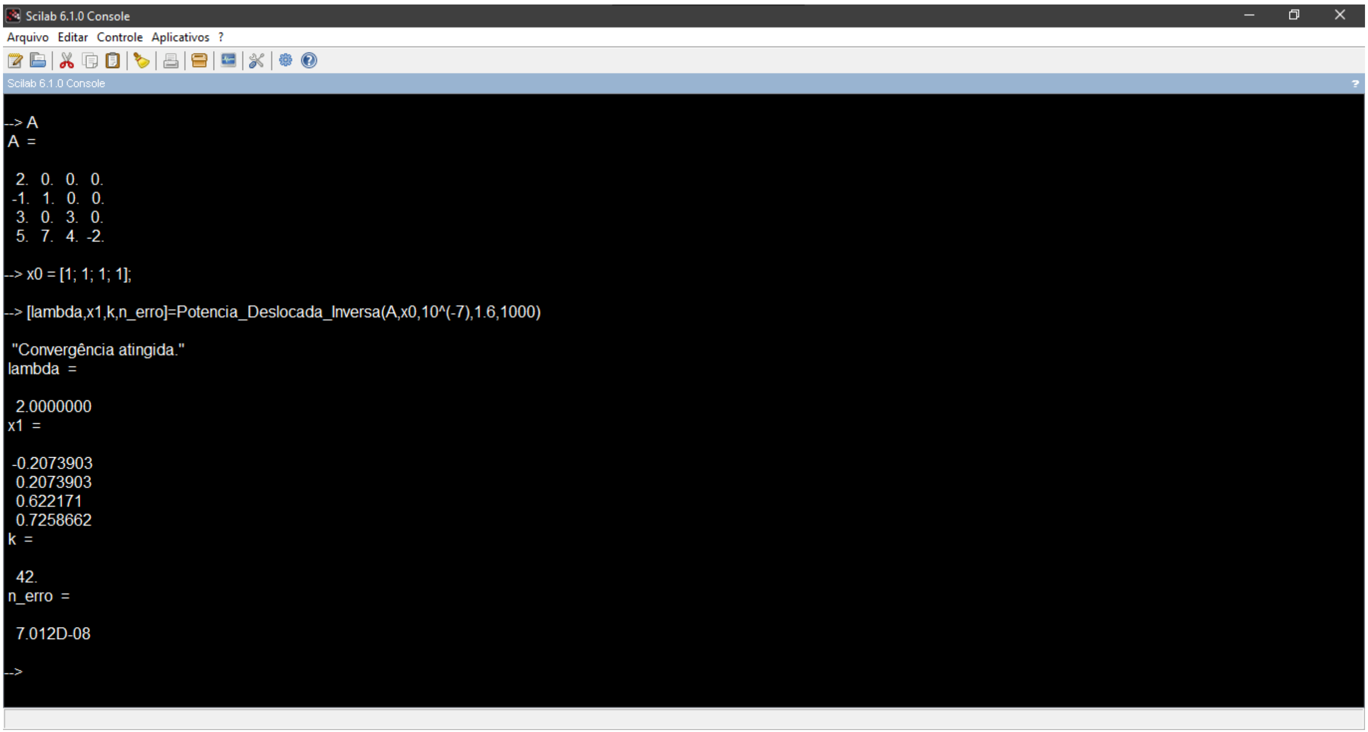

Figure 57: Função Potencia-Deslocada-Rayleigh aplicada a A e x_0 com $\epsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 1.6$

Logo, 2 é o quarto autovalor de A que buscávamos.

Comentários: Essa questão mostrou que fomos capazes de determinar os 4 autovalores de A $= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, que são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2$ e $\lambda_4 = 1$ (que são exatamente as entradas da diagonal principal de A, já que se trata de uma matriz triangular), e seus respectivos autovetores, que são $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ e $x_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}$. Portanto, o objetivo desse exemplo é demonstrar o poder das funções implementadas quando combinadas, em conjunto com a teoria desenvolvida no curso.