Trabalho Computacional 5 - ALN

João Lucas Duim

06 de Junho de 2021

1 Questão 1

No arquivo "Metodo-Gram-Schmidt-1.sci" encontra-se o código da função que implementa o Método de Gram-Schmidt, utilizada para determinar a decomposição QR de uma matriz A com colunas linearmente independentes.

Primeiramente, tomemos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ com colunas $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tal que $\{x_1, x_2, x_3\}$ é um conjunto linearmente independente. Vamos usar o Método de Gram-Schmidt para determinar a decomposição QR de A:

Começamos colocando $v_1 = x_1$. Em seguida, calculamos a componente ortogonal de x_2 em relação a span$\{v_1\}$:

$$v_2 = x_2 - \left(\frac{v_1 \cdot x_2}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{2}{4}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos determinar a componente ortogonal de x_3 em relação a span$\{x_1, x_2\}$ = span$\{v_1, v_2\}$:

$$v_3 = x_3 - \left(\frac{v_1 \cdot x_3}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 - \left(\frac{v_2 \cdot x_3}{v_2 \cdot v_2}\right) v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{\frac{15}{2}}{5}\right) \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Temos agora uma base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3\}$ de span$\{x_1, x_2, x_3\}$. Para obter uma base ortonormal, normalizamos cada vetor:

$$q_1 = \left(\frac{1}{||v_1||}\right) v_1 = \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \left(\frac{1}{||v_2||}\right) v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{5}}{10} \\ \frac{3\sqrt{5}}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix}$$

$$q_3 = \left(\frac{1}{||v_3||}\right) v_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

Temos, então, a matriz $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$

Para achar R, usamos o fato de que Q tem colunas ortonormais e, consequentemente, $Q^T A = Q^T QR = IR = R$:

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3\sqrt{5}}{10} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{3\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto, a fatoração $A = QR$ obtida é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{3\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$

Veja, na figura 1, os cálculos descritos acima feitos no Scilab, além do teste de precisão do método:

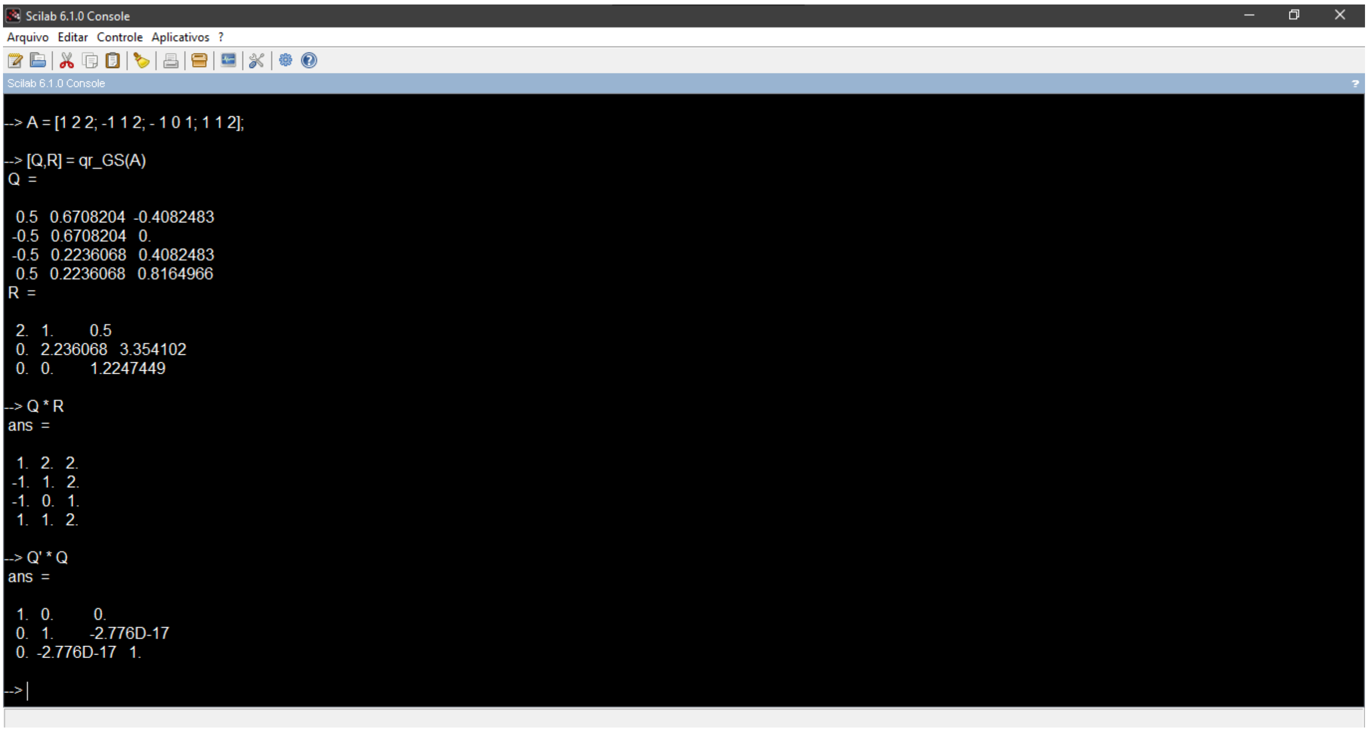

Figure 1: Método de Gram-Schmidt aplicado à matriz em questão

Tomemos agora a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ com colunas $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tal que $\{x_1, x_2\}$ é um conjunto linearmente independente. Vamos usar o Método de Gram-Schmidt para determinar a decomposição QR de A:

Começamos colocando $v_1 = x_1$. Em seguida, calculamos a componente ortogonal de x_2 em relação a span$\{v_1\}$:

$$v_2 = x_2 - \left(\frac{v_1 \cdot x_2}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{12}{6}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Temos agora uma base ortogonal $\{v_1, v_2\}$ de span$\{x_1, x_2\}$. Para obter uma base ortonormal, normalizamos cada vetor:

$$q_1 = \left(\frac{1}{||v_1||}\right) v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \left(\frac{1}{||v_2||}\right) v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Temos, então, a matriz $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$

Para achar R, usamos o fato de que Q tem colunas ortonormais e, consequentemente, $Q^T A = Q^T Q R = I R = R$:

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Portanto, a fatoração $A = QR$ obtida é $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Veja, na figura 2, os cálculos descritos acima feitos no Scilab, além do teste de precisão do método:

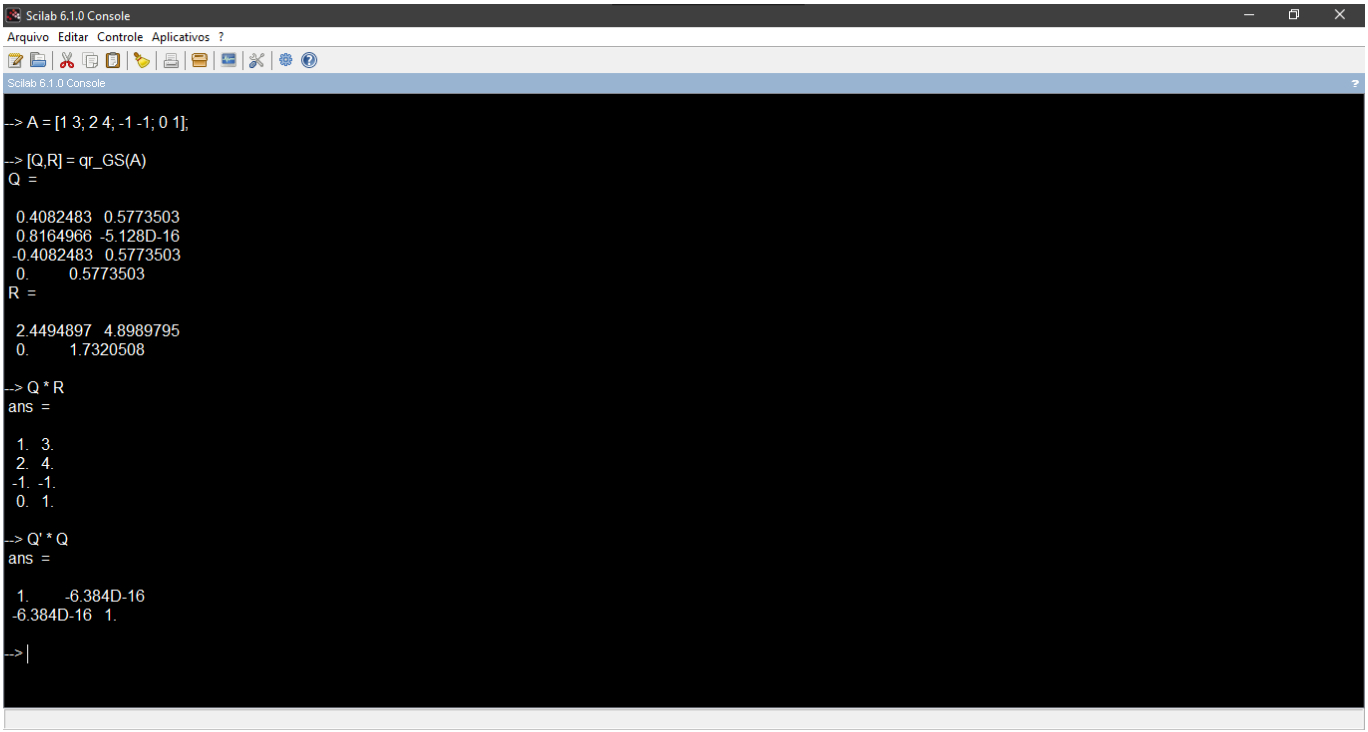

Figure 2: Método de Gram-Schmidt aplicado à matriz em questão

Por fim, tomemos a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ com colunas $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tal que $\{x_1, x_2, x_3\}$ é um conjunto linearmente independente. Vamos usar o Método de Gram-Schmidt para determinar a decomposição QR de A:

Começamos colocando $v_1 = x_1$. Em seguida, calculamos a componente ortogonal de x_2 em relação a span$\{v_1\}$:

$$v_2 = x_2 - \left(\frac{v_1 \cdot x_2}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} - \left(\frac{27}{9}\right) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos determinar a componente ortogonal de x_3 em relação a span$\{x_1, x_2\} =$ span$\{v_1, v_2\}$:

$$v_3 = x_3 - \left(\frac{v_1 \cdot x_3}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 - \left(\frac{v_2 \cdot x_3}{v_2 \cdot v_2}\right) v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{9}\right) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \left(\frac{4}{36}\right) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{9} \\ -\frac{14}{9} \\ \frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

Temos agora uma base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3\}$ de span$\{x_1, x_2, x_3\}$. Para obter uma base ortonormal, normalizamos cada vetor:

$$q_1 = \left(\frac{1}{||v_1||}\right) v_1 = \left(\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \left(\frac{1}{||v_2||}\right) v_2 = \left(\frac{1}{6}\right) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$q_3 = \left(\frac{1}{||v_3||}\right) v_3 = \left(\frac{3}{7}\right) \begin{bmatrix} \frac{14}{9} \\ -\frac{14}{9} \\ \frac{7}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Temos, então, a matriz $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Para achar R, usamos o fato de que Q tem colunas ortonormais e, consequentemente, $Q^T A = Q^T Q R = IR = R$:

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Portanto, a fatoração $A = QR$ obtida é $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 9 & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

Veja, na figura 3, os cálculos descritos acima feitos no Scilab, além do teste de precisão do método:

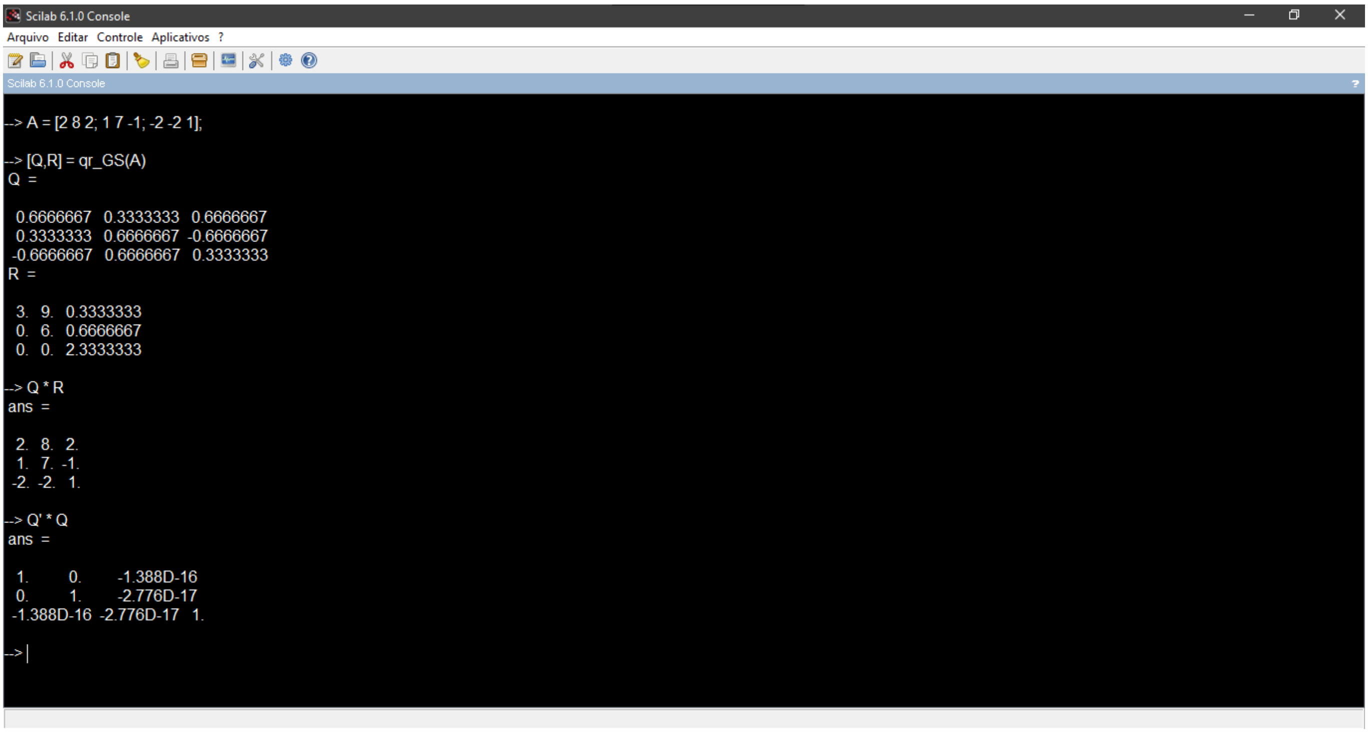

Figure 3: Método de Gram-Schmidt aplicado à matriz em questão

Comentários: Podemos ver que a função foi testada em algumas matrizes de ordens diferentes. Note que todos os resultados obtidos computacionalmente coincidem exatamente com os cálculos feitos acima (exceto pelo arredondamento na sétima casa decimal, feito automaticamente pelo Scilab) reforçando a corretude das funções. Além disso, é importante ressaltar que as matrizes Q e R obtidas pela função satisfazem perfeitamente $A = QR$ e $Q^T Q = I$ (assim como se repetirá nos testes seguintes, erros de arredondamento do Scilab fazem com que ele retorne uma potência de 10 muito próxima de 0 em alguns casos), como podemos ver nas figuras de 1 a 3.

2 Questão 2

No arquivo "Metodo-Gram-Schmidt-2.sci" encontra-se o código da função que implementa o Método de Gram-Schmidt Modificado, utilizada para determinar a decomposição QR de uma matriz A com colunas linearmente independentes.

Primeiramente, tomemos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ com colunas $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tal que $\{x_1, x_2, x_3\}$ é um conjunto linearmente independente. Vamos usar o Método de Gram-Schmidt Modificado para determinar a decomposição QR de A:

$v_1^{(1)} = x_1$

Normalizando, obtemos:

$$q_1 = \left(\frac{1}{||v_1^{(1)}||}\right) v_1^{(1)} = \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Em seguida, calculamos a componente ortogonal de x_2 em relação a $\text{span}\{x_1\} = \text{span}\{v_1^{(1)}\}$:

$v_2^{(1)} = x_2$

$$v_2^{(2)} = v_2^{(1)} - \left(\frac{q_1 \cdot v_2^{(1)}}{q_1 \cdot q_1}\right) q_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{1}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Normalizando, obtemos:

$$q_2 = \left(\frac{1}{||v_2^{(2)}||}\right) v_2^{(2)} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{5}}{10} \\ \frac{3\sqrt{5}}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos determinar a componente ortogonal de x_3 em relação a $\text{span}\{x_1, x_2\} = \text{span}\{v_1^{(1)}, v_2^{(2)}\}$:

$v_3^{(1)} = x_3$

$$v_3^{(2)} = v_3^{(1)} - \left(\frac{q_1 \cdot v_3^{(1)}}{q_1 \cdot q_1}\right) q_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{9}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

$$v_3^{(3)} = v_3^{(2)} - \left(\frac{q_2 \cdot v_3^{(2)}}{q_2 \cdot q_2}\right) q_2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{9}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix} - \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right) \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{5}}{10} \\ \frac{3\sqrt{5}}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalizando, obtemos:

$$q_3 = \left(\frac{1}{||v_3^{(3)}||}\right) v_3^{(3)} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

Temos agora uma base ortonormal $\{q_1, q_2, q_3\}$ de span$\{x_1, x_2, x_3\}$.

Temos, então, a matriz $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$

Para achar R, usamos o fato de que Q tem colunas ortonormais e, consequentemente, $Q^T A = Q^T QR = IR = R$:

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3\sqrt{5}}{10} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{3\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto, a fatoração $A = QR$ obtida é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{3\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$

Veja, na figura 4, os cálculos descritos acima feitos no Scilab, além do teste de precisão do método:

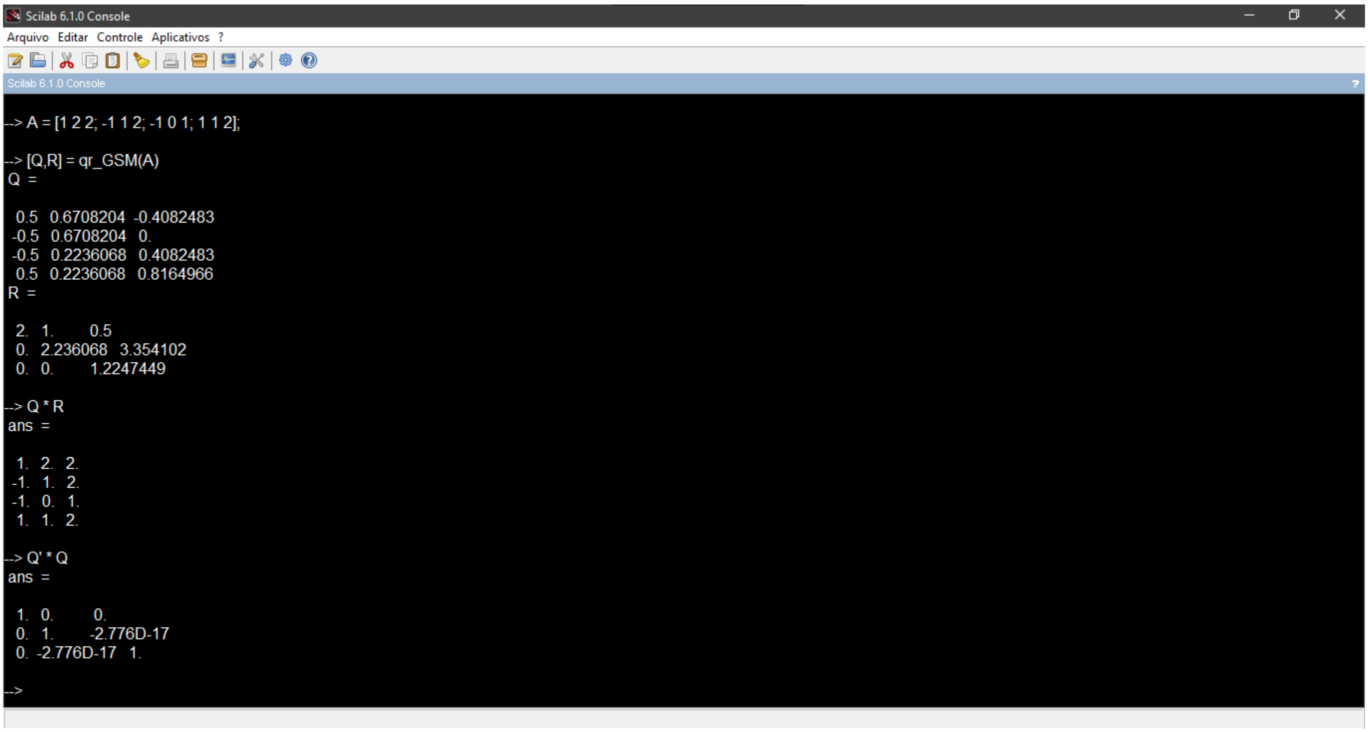

Figure 4: Método de Gram-Schmidt Modificado aplicado à matriz em questão

Tomemos agora a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ com colunas $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tal que $\{x_1, x_2\}$

é um conjunto linearmente independente. Vamos usar o Método de Gram-Schmidt Modificado para determinar a decomposição QR de A:

$v_1^{(1)} = x_1$

Normalizando, obtemos:

$$q_1 = \left(\frac{1}{||v_1^{(1)}||}\right) v_1^{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Em seguida, calculamos a componente ortogonal de x_2 em relação a $\text{span}\{x_1\} = \text{span}\{v_1^{(1)}\}$:

$v_2^{(1)} = x_2$

$$v_2^{(2)} = v_2^{(1)} - \left(\frac{q_1 \cdot v_2^{(1)}}{q_1 \cdot q_1}\right) q_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{12}{6}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalizando, obtemos:

$$q_2 = \left(\frac{1}{||v_2^{(2)}||}\right) v_2^{(2)} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Temos, então, a matriz $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$

Para achar R, usamos o fato de que Q tem colunas ortonormais e, consequentemente, $Q^T A = Q^T Q R = IR = R$:

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Portanto, a fatoração $A = QR$ obtida é $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Veja, na figura 5, os cálculos descritos acima feitos no Scilab, além do teste de precisão do método:

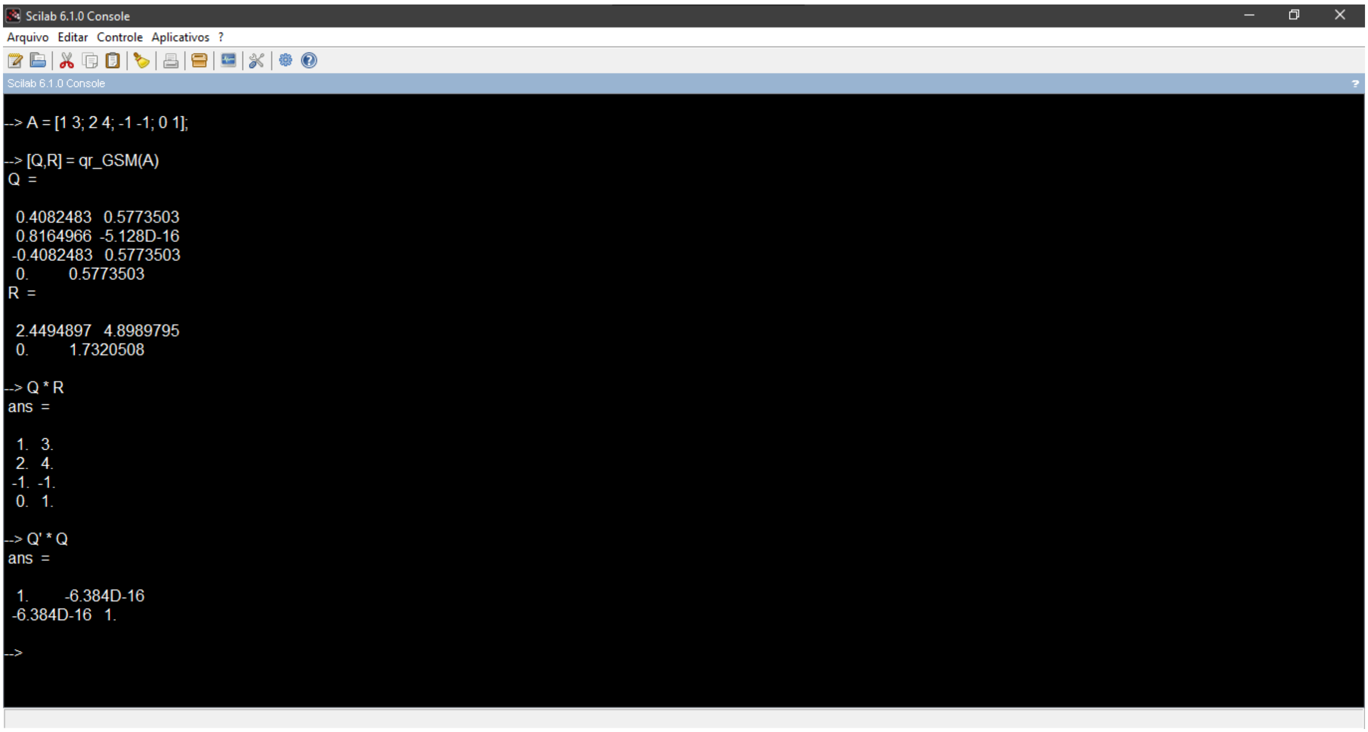

Figure 5: Método de Gram-Schmidt Modificado aplicado à matriz em questão

Por fim, tomemos a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ com colunas $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tal que $\{x_1, x_2, x_3\}$ é um conjunto linearmente independente. Vamos usar o Método de Gram-Schmidt Modificado para determinar a decomposição QR de A:

$v_1^{(1)} = x_1$

Normalizando, obtemos:

$$q_1 = \left(\frac{1}{||v_1^{(1)}||}\right) v_1^{(1)} = \left(\tfrac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Em seguida, calculamos a componente ortogonal de x_2 em relação a $\text{span}\{x_1\} = \text{span}\{v_1^{(1)}\}$:

$v_2^{(1)} = x_2$

$$v_2^{(2)} = v_2^{(1)} - \left(\frac{q_1 \cdot v_2^{(1)}}{q_1 \cdot q_1}\right) q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} - (9) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Normalizando, obtemos:

$$q_2 = \left(\frac{1}{||v_2^{(2)}||}\right) v_2^{(2)} = \left(\tfrac{1}{6}\right) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos determinar a componente ortogonal de x_3 em relação a $\text{span}\{x_1, x_2\} = \text{span}\{v_1^{(1)}, v_2^{(2)}\}$:

$v_3^{(1)} = x_3$

$$v_3^{(2)} = v_3^{(1)} - \left(\frac{q_1 \cdot v_3^{(1)}}{q_1 \cdot q_1}\right) q_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(-\frac{8}{3}\right) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{10}{9} \\ -\frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

$$v_3^{(3)} = v_3^{(2)} - \left(\frac{q_2 \cdot v_3^{(2)}}{q_2 \cdot q_2}\right) q_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{10}{9} \\ -\frac{7}{9} \end{bmatrix} - \left(-\frac{36}{27}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Normalizando, obtemos:

$$q_3 = \left(\frac{1}{||v_3^{(3)}||}\right) v_3^{(3)} = (3) \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Temos, então, a matriz $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Para achar R, usamos o fato de que Q tem colunas ortonormais e, consequentemente, $Q^T A = Q^T Q R = IR = R$:

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Portanto, a fatoração $A = QR$ obtida é $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 9 & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

Veja, na figura 6, os cálculos descritos acima feitos no Scilab, além do teste de precisão do método:

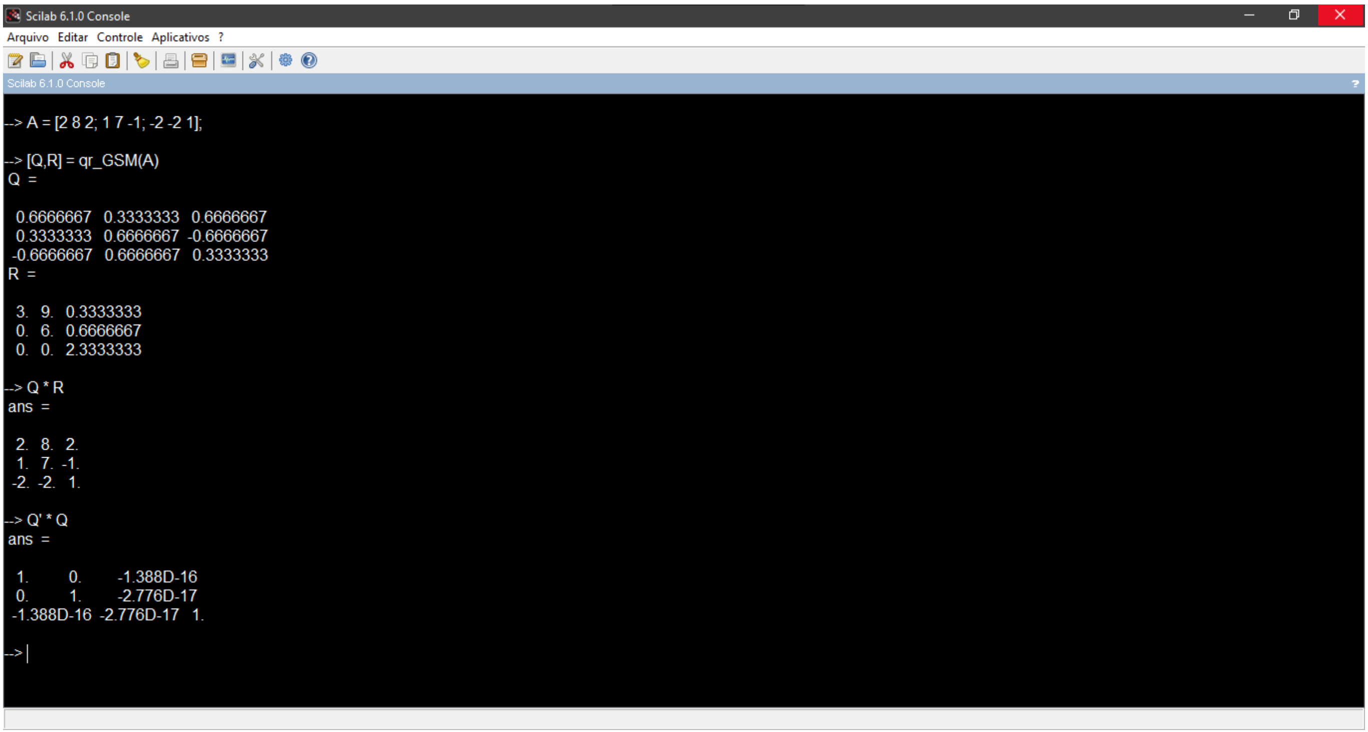

Figure 6: Método de Gram-Schmidt Modificado aplicado à matriz em questão

Comentários: Podemos ver que a função foi testada em algumas matrizes de ordens diferentes. Note que todos os resultados obtidos computacionalmente coincidem exatamente com os cálculos feitos acima (exceto pelo arredondamento na sétima casa decimal, feito automaticamente pelo Scilab) reforçando a corretude das funções. Além disso, é importante ressaltar que as matrizes Q e R obtidas pela função satisfazem perfeitamente $A = QR$ e $Q^T Q = I$ (salvo os erros de arredondamento já citados), como podemos ver nas figuras de 4 a 6. O Método de Gram-Schmidt Modificado é naturalmente mais preciso computacionalmente, pois ele foi pensado justamente como uma melhoria do Método de Gram-Schmidt, ao ortogonalizar os vetores seguintes em relação aos vetores já ortogonalizados. Apesar de essa diferença não ficar muito clara nos exemplos acima, podemos afirmar que o Método de Gram-Schmidt Modificado é mais estável e traz menos erros de arredondamentos quando comparado ao Método de Gram-Schmidt.

3 Questão 3

No arquivo "Metodo-Gram-Schmidt-3.sci" encontra-se o código da função que implementa o Método de Gram-Schmidt Modificado com Pivoteamento de Colunas, utilizada para determinar a decomposição QR de uma matriz A com colunas linearmente independentes.

Primeiramente, tomemos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ com colunas $x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tal que $\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\}$ é um conjunto linearmente independente. Vamos usar o Método de Gram-Schmidt Modificado com Pivoteamento de Colunas para determinar a decomposição $AP = QR$:

Inicialmente, consideramos $P = I_3$ e toda troca de colunas a ser feita em A pelo pivoteamento deve ser realizada em P de forma que AP seja a matriz A com tais colunas trocadas.

Como $||x_1^{(1)}||_2 = \sqrt{4} = 2$, $||x_2^{(1)}||_2 = \sqrt{6}$ e $||x_3^{(1)}||_2 = \sqrt{13}$, devemos proceder com o pivoteamento trocando a coluna $x_3^{(1)}$ com a coluna $x_1^{(1)}$. Temos, então:

$$x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } x_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Normalizando $x_1^{(2)}$, obtemos:

$$q_1 = \left(\frac{1}{||x_1^{(2)}||}\right) x_1^{(2)} = \left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{1}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{\sqrt{13}}{13} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix}$$

Em seguida, calculamos a componente ortogonal de $x_2^{(2)}$ e $x_3^{(2)}$ em relação a $\text{span}\{q_1\} = \text{span}\{x_3^{(1)}\}$:

$$x_2^{(3)} = x_2^{(2)} - \left(\frac{q_1 \cdot x_2^{(2)}}{q_1 \cdot q_1}\right) q_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{8}{\sqrt{13}}\right) \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{\sqrt{13}}{13} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{13} \\ -\frac{3}{13} \\ -\frac{8}{13} \\ -\frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(3)} = x_3^{(2)} - \left(\frac{q_1 \cdot x_3^{(2)}}{q_1 \cdot q_1}\right) q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{\sqrt{13}}{13} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{13} \\ -\frac{15}{13} \\ -\frac{14}{13} \\ \frac{11}{13} \end{bmatrix}$$

Como $||x_2^{(3)}||_2 = \sqrt{\frac{14}{13}}$ e $||x_3^{(3)}||_2 = \sqrt{\frac{51}{13}}$, devemos proceder com o pivoteamento trocando a coluna $x_3^{(3)}$ com a coluna $x_2^{(3)}$. Temos, então:

$$x_2^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{11}{13} \\ -\frac{15}{13} \\ -\frac{14}{13} \\ \frac{11}{13} \end{bmatrix} \text{ e } x_3^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{10}{13} \\ -\frac{3}{13} \\ -\frac{8}{13} \\ -\frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Normalizando $x_2^{(4)}$, obtemos:

$$q_2 = \left(\frac{1}{||x_2^{(4)}||}\right) x_2^{(4)} = \left(\sqrt{\frac{13}{51}}\right) \begin{bmatrix} \frac{11}{13} \\ -\frac{15}{13} \\ -\frac{14}{13} \\ \frac{11}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{\sqrt{663}} \\ -\frac{15}{\sqrt{663}} \\ -\frac{14}{\sqrt{663}} \\ \frac{11}{\sqrt{663}} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos determinar a componente ortogonal de $x_3^{(4)}$ em relação a $\text{span}\{q_2\} = \text{span}\{x_2^{(4)}\}$:

$$x_3^{(5)} = x_3^{(4)} - \left(\frac{q_2 \cdot x_3^{(4)}}{q_2 \cdot q_2}\right) q_2 = \begin{bmatrix} \frac{10}{13} \\ -\frac{3}{13} \\ -\frac{8}{13} \\ -\frac{3}{13} \end{bmatrix} - \left(\frac{18}{\sqrt{663}}\right) \begin{bmatrix} \frac{11}{\sqrt{663}} \\ -\frac{15}{\sqrt{663}} \\ -\frac{14}{\sqrt{663}} \\ \frac{11}{\sqrt{663}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{312}{663} \\ \frac{117}{663} \\ -\frac{156}{663} \\ -\frac{351}{663} \end{bmatrix}$$

Normalizando, obtemos:

$$q_3 = \left(\frac{1}{||x_3^{(5)}||}\right) x_3^{(5)} = \left(\frac{663}{\sqrt{258570}}\right) \begin{bmatrix} \frac{312}{663} \\ \frac{117}{663} \\ -\frac{156}{663} \\ -\frac{351}{663} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{312}{\sqrt{258570}} \\ \frac{117}{\sqrt{258570}} \\ -\frac{156}{\sqrt{258570}} \\ -\frac{351}{\sqrt{258570}} \end{bmatrix}$$

Temos, então, a matriz $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} & \frac{11}{\sqrt{663}} & \frac{312}{\sqrt{258570}} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} & -\frac{15}{\sqrt{663}} & \frac{117}{\sqrt{258570}} \\ \frac{\sqrt{13}}{13} & -\frac{14}{\sqrt{663}} & -\frac{156}{\sqrt{258570}} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} & \frac{11}{\sqrt{663}} & -\frac{351}{\sqrt{258570}} \end{bmatrix}$

Para achar R, usamos o fato de que Q tem colunas ortonormais e, consequentemente, $Q^T AP = Q^T QR = IR = R$:

$$R = Q^TAP = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} & \frac{2\sqrt{13}}{13} & \frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{11}{\sqrt{663}} & -\frac{15}{\sqrt{663}} & -\frac{14}{\sqrt{663}} & \frac{11}{\sqrt{663}} \\ \frac{312}{\sqrt{258570}} & \frac{117}{\sqrt{258570}} & -\frac{156}{\sqrt{258570}} & -\frac{351}{\sqrt{258570}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{13} & \frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{8\sqrt{13}}{13} \\ 0 & \frac{51}{\sqrt{663}} & \frac{18}{\sqrt{663}} \\ 0 & 0 & \frac{390}{\sqrt{258570}} \end{bmatrix}$$

Portanto, a fatoração $AP = QR$ obtida é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} & \frac{11}{\sqrt{663}} & \frac{312}{\sqrt{258570}} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} & -\frac{15}{\sqrt{663}} & \frac{117}{\sqrt{258570}} \\ \frac{\sqrt{13}}{13} & -\frac{14}{\sqrt{663}} & -\frac{156}{\sqrt{258570}} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} & \frac{11}{\sqrt{663}} & -\frac{351}{\sqrt{258570}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{13} & \frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{8\sqrt{13}}{13} \\ 0 & \frac{51}{\sqrt{663}} & \frac{18}{\sqrt{663}} \\ 0 & 0 & \frac{390}{\sqrt{258570}} \end{bmatrix}$$

Veja, na figura 7, os cálculos descritos acima feitos no Scilab, além do teste de precisão do método:

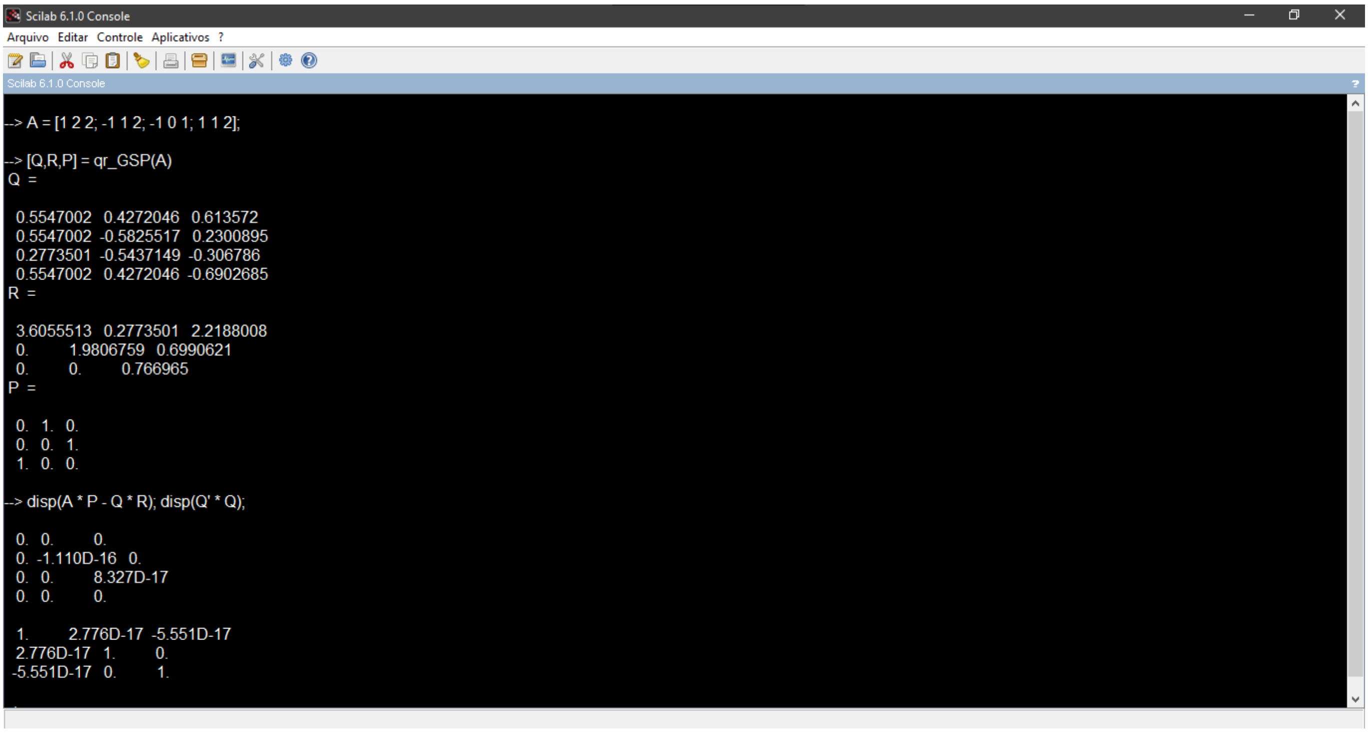

Figure 7: Método de Gram-Schmidt Modificado com Pivoteamento de Colunas aplicado à matriz em questão

Tomemos agora a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ com colunas $x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tal que $\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\}$ é um conjunto linearmente independente. Vamos usar o Método de Gram-Schmidt Modificado com Pivoteamento de Colunas para determinar a decomposição $AP = QR$:

Inicialmente, consideramos $P = I_2$ e toda troca de colunas a ser feita em A pelo pivoteamento deve ser realizada em P de forma que AP seja a matriz A com tais colunas trocadas.

Como $||x_1^{(1)}||_2 = \sqrt{6}$ e $||x_2^{(1)}||_2 = \sqrt{27}$, devemos proceder com o pivoteamento trocando a coluna $x_2^{(1)}$ com a coluna $x_1^{(1)}$. Temos, então:

$$x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Normalizando $x_1^{(2)}$, obtemos:

$$q_1 = \left(\frac{1}{||x_1^{(2)}||}\right) x_1^{(2)} = \left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right) \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{27}} \\ \frac{4}{\sqrt{27}} \\ -\frac{1}{\sqrt{27}} \\ \frac{1}{\sqrt{27}} \end{bmatrix}$$

Em seguida, calculamos a componente ortogonal de $x_2^{(2)}$ em relação a $\text{span}\{q_1\} = \text{span}\{x_2^{(1)}\}$:

$$x_2^{(3)} = x_2^{(2)} - \left(\frac{q_1 \cdot x_2^{(2)}}{q_1 \cdot q_1}\right) q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{12}{\sqrt{27}}\right) \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{27}} \\ \frac{4}{\sqrt{27}} \\ -\frac{1}{\sqrt{27}} \\ \frac{1}{\sqrt{27}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{27} \\ \frac{6}{27} \\ -\frac{15}{27} \\ -\frac{12}{27} \end{bmatrix}$$

Normalizando $x_2^{(3)}$, obtemos:

$$q_2 = \left(\frac{1}{||x_2^{(3)}||}\right) x_2^{(3)} = \left(\frac{9}{\sqrt{54}}\right) \begin{bmatrix} -\frac{9}{27} \\ \frac{6}{27} \\ -\frac{15}{27} \\ -\frac{12}{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{54}} \\ \frac{2}{\sqrt{54}} \\ -\frac{5}{\sqrt{54}} \\ -\frac{4}{\sqrt{54}} \end{bmatrix}$$

Temos, então, a matriz $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{27}} & -\frac{3}{\sqrt{54}} \\ \frac{4}{\sqrt{27}} & \frac{2}{\sqrt{54}} \\ -\frac{1}{\sqrt{27}} & -\frac{5}{\sqrt{54}} \\ \frac{1}{\sqrt{27}} & -\frac{4}{\sqrt{54}} \end{bmatrix}$

Para achar R, usamos o fato de que Q tem colunas ortonormais e, consequentemente, $Q^TAP = Q^TQR = IR = R$:

$$R = Q^TAP = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{27}} & \frac{4}{\sqrt{27}} & -\frac{1}{\sqrt{27}} & \frac{1}{\sqrt{27}} \\ -\frac{3}{\sqrt{54}} & \frac{2}{\sqrt{54}} & -\frac{5}{\sqrt{54}} & -\frac{4}{\sqrt{54}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{27} & \frac{12}{\sqrt{27}} \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{54}} \end{bmatrix}$$

Portanto, a fatoração $AP = QR$ obtida é $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{27}} & -\frac{3}{\sqrt{54}} \\ \frac{4}{\sqrt{27}} & \frac{2}{\sqrt{54}} \\ -\frac{1}{\sqrt{27}} & -\frac{5}{\sqrt{54}} \\ \frac{1}{\sqrt{27}} & -\frac{4}{\sqrt{54}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{27} & \frac{12}{\sqrt{27}} \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{54}} \end{bmatrix}$

Veja, na figura 8, os cálculos descritos acima feitos no Scilab, além do teste de precisão do método:

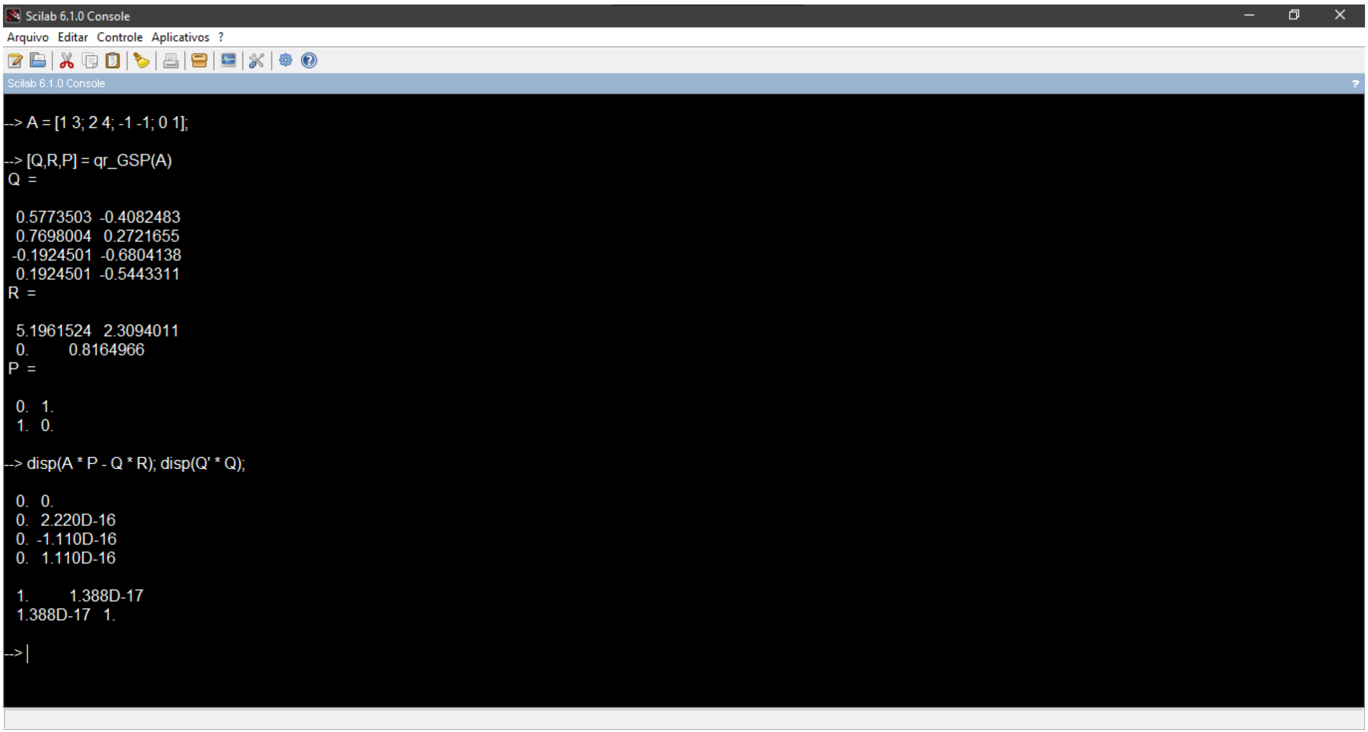

Figure 8: Método de Gram-Schmidt Modificado com Pivoteamento de Colunas aplicado à matriz em questão

Por fim, tomemos a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ com colunas $x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $x_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $x_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tal que $\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\}$ é um conjunto linearmente independente. Vamos usar o Método de Gram-Schmidt Modificado com Pivoteamento de Colunas para determinar a decomposição $AP = QR$:

Inicialmente, consideramos $P = I_3$ e toda troca de colunas a ser feita em A pelo pivoteamento deve ser realizada em P de forma que AP seja a matriz A com tais colunas trocadas.

Como $||x_1^{(1)}||_2 = \sqrt{9} = 3$, $||x_2^{(1)}||_2 = \sqrt{117}$ e $||x_3^{(1)}||_2 = \sqrt{6}$, devemos proceder com o pivoteamento trocando a coluna $x_2^{(1)}$ com a coluna $x_1^{(1)}$. Temos, então:

$$x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \; x_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ e } x_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Normalizando $x_1^{(2)}$, obtemos:

$$q_1 = \left(\frac{1}{||x_1^{(2)}||}\right) x_1^{(2)} = \left(\frac{1}{\sqrt{117}}\right) \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{117}} \\ \frac{7}{\sqrt{117}} \\ -\frac{2}{\sqrt{117}} \end{bmatrix}$$

Em seguida, calculamos a componente ortogonal de $x_2^{(2)}$ e $x_3^{(2)}$ em relação a $\text{span}\{q_1\} = \text{span}\{x_2^{(1)}\}$:

$$x_2^{(3)} = x_2^{(2)} - \left(\frac{q_1 \cdot x_2^{(2)}}{q_1 \cdot q_1}\right) q_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \left(\frac{27}{\sqrt{117}}\right) \begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{117}} \\ \frac{7}{\sqrt{117}} \\ -\frac{2}{\sqrt{117}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{117} \\ -\frac{72}{117} \\ -\frac{180}{117} \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(3)} = x_3^{(2)} - \left(\frac{q_1 \cdot x_3^{(2)}}{q_1 \cdot q_1}\right) q_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{7}{\sqrt{117}}\right) \begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{117}} \\ \frac{7}{\sqrt{117}} \\ -\frac{2}{\sqrt{117}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{178}{117} \\ -\frac{166}{117} \\ \frac{131}{117} \end{bmatrix}$$

Como $||x_2^{(3)}||_2 = \frac{\sqrt{37908}}{117}$ e $||x_3^{(3)}||_2 = \frac{\sqrt{76401}}{117}$, devemos proceder com o pivoteamento trocando a coluna $x_3^{(3)}$ com a coluna $x_2^{(3)}$. Temos, então:

$$x_2^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{178}{117} \\ -\frac{166}{117} \\ \frac{131}{117} \end{bmatrix} \text{ e } x_3^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{18}{117} \\ -\frac{72}{117} \\ -\frac{180}{117} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Normalizando $x_2^{(4)}$, obtemos:

$$q_2 = \left(\frac{1}{||x_2^{(4)}||}\right) x_2^{(4)} = \left(\frac{117}{\sqrt{76401}}\right) \begin{bmatrix} \frac{178}{117} \\ -\frac{166}{117} \\ \frac{131}{117} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{178}{\sqrt{76401}} \\ -\frac{166}{\sqrt{76401}} \\ \frac{131}{\sqrt{76401}} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos determinar a componente ortogonal de $x_3^{(4)}$ em relação a span$\{q_2\}$ = span$\{x_2^{(4)}\}$:

$$x_3^{(5)} = x_3^{(4)} - \left(\frac{q_2 \cdot x_3^{(4)}}{q_2 \cdot q_2}\right) q_2 = \begin{bmatrix} \frac{18}{117} \\ -\frac{72}{117} \\ -\frac{180}{117} \end{bmatrix} - \left(-\frac{72}{\sqrt{76401}}\right) \begin{bmatrix} \frac{178}{\sqrt{76401}} \\ -\frac{166}{\sqrt{76401}} \\ \frac{131}{\sqrt{76401}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24570}{76401} \\ -\frac{58968}{76401} \\ -\frac{108108}{76401} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{210}{653} \\ -\frac{504}{653} \\ -\frac{924}{653} \end{bmatrix}$$

Normalizando, obtemos:

$$q_3 = \left(\frac{1}{||x_3^{(5)}||}\right) x_3^{(5)} = \left(\frac{653}{\sqrt{1151892}}\right) \begin{bmatrix} \frac{210}{653} \\ -\frac{504}{653} \\ -\frac{924}{653} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{210}{\sqrt{1151892}} \\ -\frac{504}{\sqrt{1151892}} \\ -\frac{924}{\sqrt{1151892}} \end{bmatrix}$$

Temos, então, a matriz $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{117}} & \frac{178}{\sqrt{76401}} & \frac{210}{\sqrt{1151892}} \\ \frac{7}{\sqrt{117}} & -\frac{166}{\sqrt{76401}} & -\frac{504}{\sqrt{1151892}} \\ -\frac{2}{\sqrt{117}} & \frac{131}{\sqrt{76401}} & -\frac{924}{\sqrt{1151892}} \end{bmatrix}$

Para achar R, usamos o fato de que Q tem colunas ortonormais e, consequentemente, $Q^TAP = Q^TQR = IR = R$:

$$R = Q^TAP = \begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{117}} & \frac{7}{\sqrt{117}} & -\frac{2}{\sqrt{117}} \\ \frac{178}{\sqrt{76401}} & -\frac{166}{\sqrt{76401}} & \frac{131}{\sqrt{76401}} \\ \frac{210}{\sqrt{1151892}} & -\frac{504}{\sqrt{1151892}} & -\frac{924}{\sqrt{1151892}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{117} & \frac{7}{\sqrt{117}} & \frac{27}{\sqrt{117}} \\ 0 & \frac{653}{\sqrt{76401}} & -\frac{72}{\sqrt{76401}} \\ 0 & 0 & \frac{1764}{\sqrt{1151892}} \end{bmatrix}$$

Portanto, a fatoração $AP = QR$ obtida é

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{117}} & \frac{178}{\sqrt{76401}} & \frac{210}{\sqrt{1151892}} \\ \frac{7}{\sqrt{117}} & -\frac{166}{\sqrt{76401}} & -\frac{504}{\sqrt{1151892}} \\ -\frac{2}{\sqrt{117}} & \frac{131}{\sqrt{76401}} & -\frac{924}{\sqrt{1151892}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{117} & \frac{7}{\sqrt{117}} & \frac{27}{\sqrt{117}} \\ 0 & \frac{653}{\sqrt{76401}} & -\frac{72}{\sqrt{76401}} \\ 0 & 0 & \frac{1764}{\sqrt{1151892}} \end{bmatrix}$$

Veja, na figura 9, os cálculos descritos acima feitos no Scilab, além do teste de precisão do método:

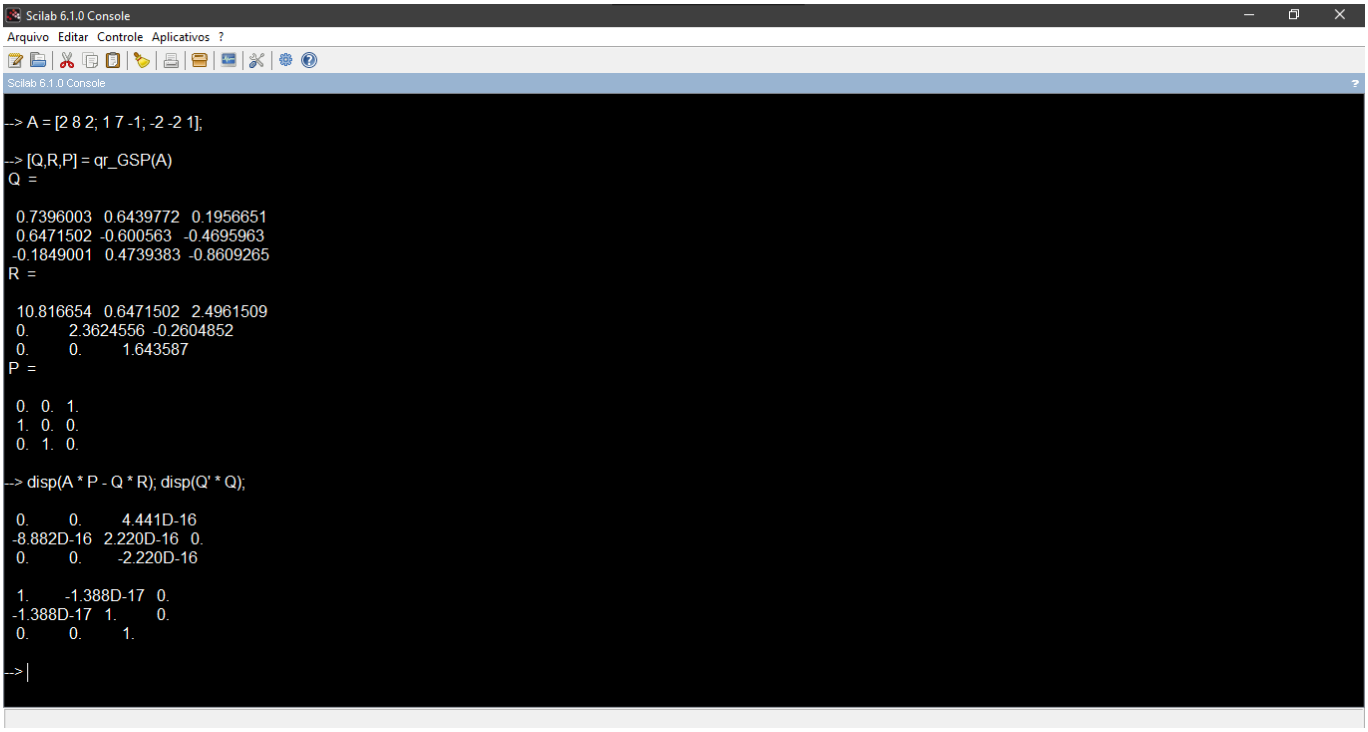

Figure 9: Método de Gram-Schmidt Modificado com Pivoteamento de Colunas aplicado à matriz em questão

Comentários: Podemos ver que a função foi testada em algumas matrizes de ordens diferentes. Note que todos os resultados obtidos computacionalmente coincidem exatamente com os cálculos feitos acima (exceto pelo arredondamento na sétima casa decimal, feito automaticamente pelo Scilab) reforçando a corretude das funções. Além disso, é importante ressaltar que as matrizes P, Q e R obtidas pela função satisfazem perfeitamente $AP = QR \iff AP - QR = 0$ e $Q^TQ = I$ (salvo os erros de arredondamento já citados), como podemos ver nas figuras de 7 a 9. O Método de Gram-Schmidt Modificado com Pivoteamento de Colunas é ainda mais preciso computacionalmente, pois ele foi pensado justamente como uma melhoria do Método de Gram-Schmidt Modificado, ao pivotear as colunas preferindo processar antes as colunas de maiores normas, evitando uma maior propagação de erros. Apesar de esse método realizar a decomposição de AP em vez de A (o que talvez seja sua maior desvantagem), podemos afirmar que Método de Gram-Schmidt Modificado com Pivoteamento de Colunas é mais estável e traz menos erros de arredondamentos que o Método de Gram-Schmidt Modificado, que por sua vez é mais estável e traz menos erros de arredondamentos que o Método de Gram-Schmidt.

4 Questão 4

4.1

Primeiramente, tomemos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Veja, na figura 10, a aplicação do Método de Householder pelas funções Scilab implementadas, além do teste de precisão do método:

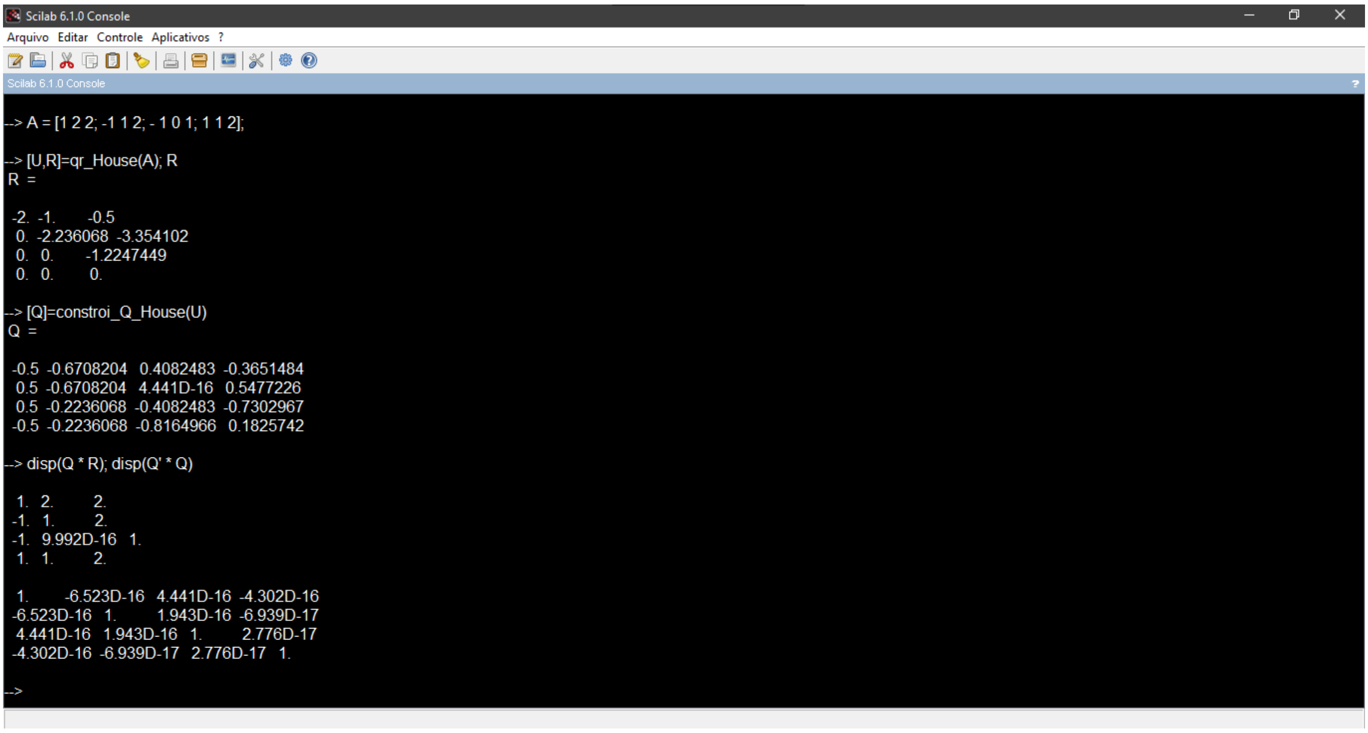

Figure 10: Método de Householder aplicado à matriz em questão

Tomemos agora a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Veja, na figura 11, a aplicação do Método de Householder pelas funções Scilab implementadas, além do teste de precisão do método:

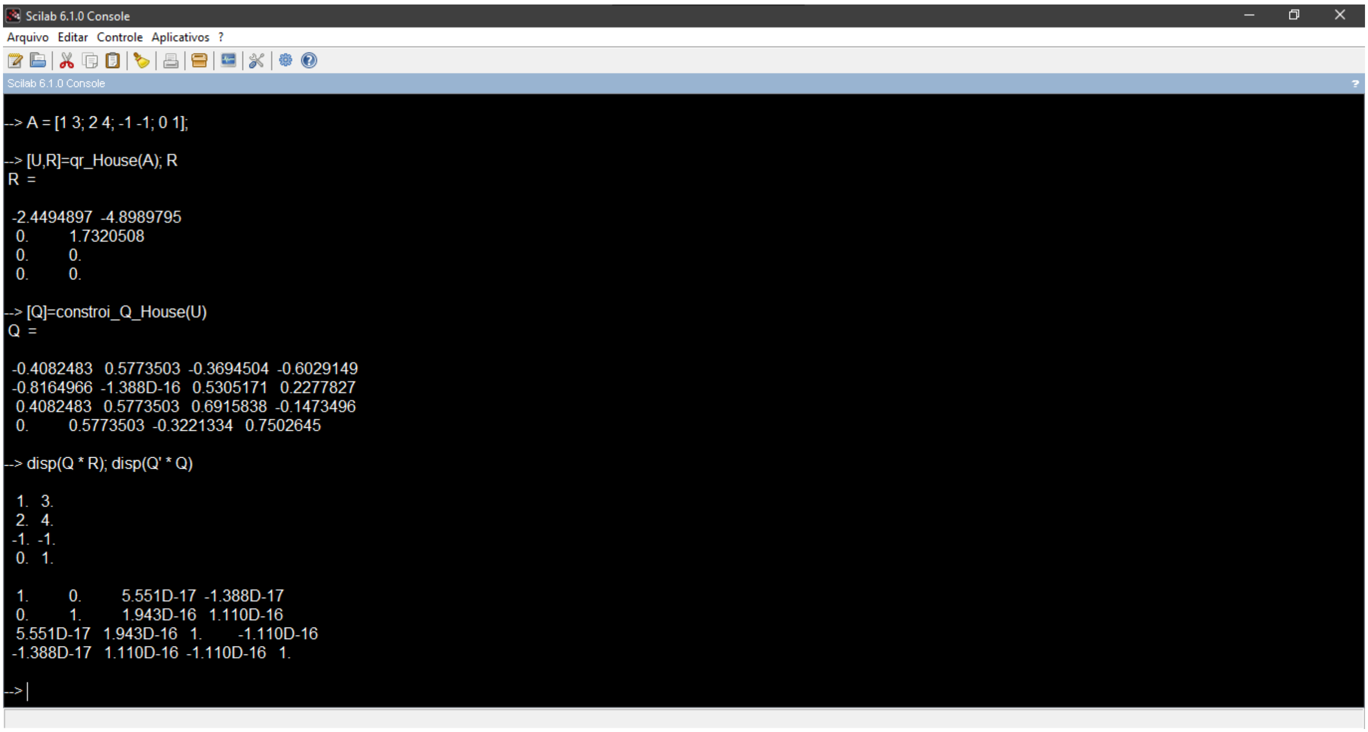

Figure 11: Método de Householder aplicado à matriz em questão

Por fim, tomemos a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Veja, na figura 12, a aplicação do Método de Householder pelas funções Scilab implementadas, além do teste de precisão do método:

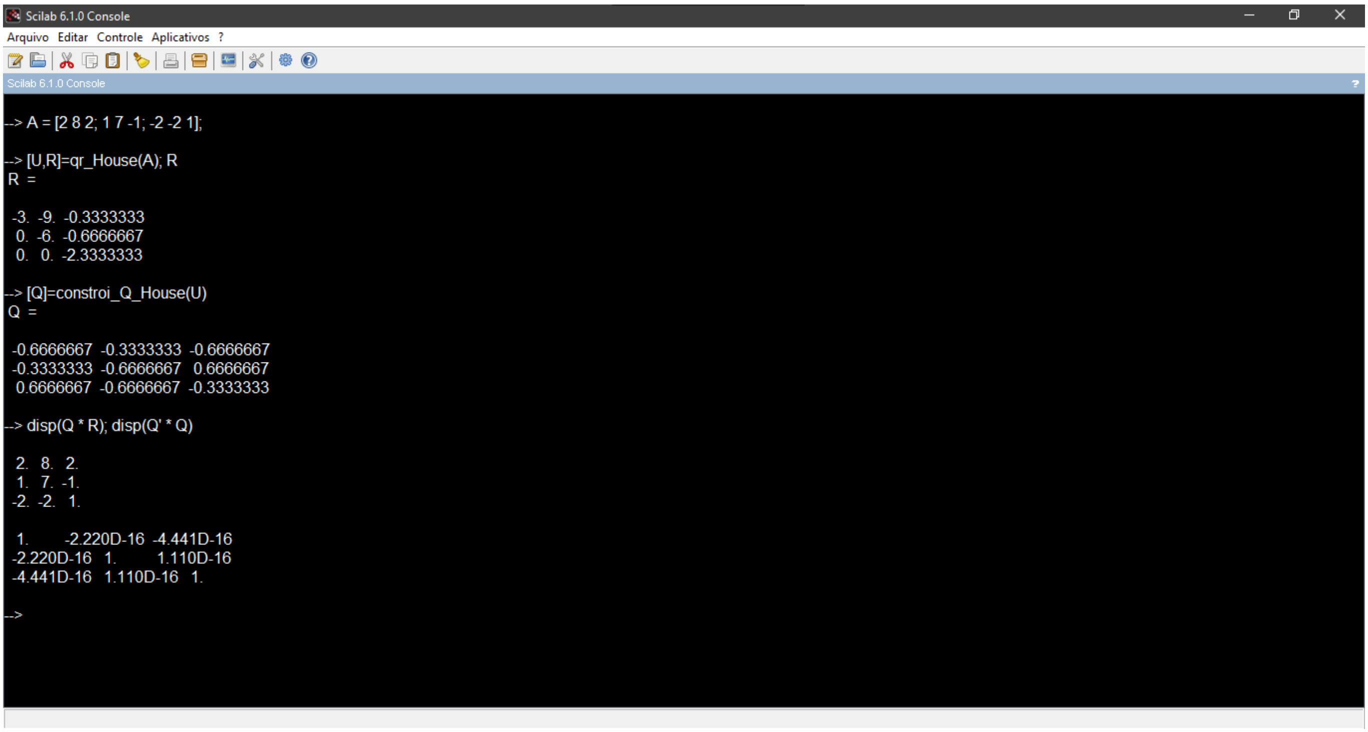

Figure 12: Método de Householder aplicado à matriz em questão

Comentários: Podemos ver que as funções foram testadas em algumas matrizes de ordens diferentes. Apesar de as matrizes Q e R obtidas serem diferentes (esse método produz Q m x m e R m x n) das obtidas nas questões 1 e 2, note que as matrizes Q e R obtidas pelas funções satisfazem perfeitamente $A = QR$ e $Q^T Q = I$ (salvo os erros de arredondamento já citados), como podemos ver nas figuras de 10 a 12. Podemos ver que esse método é mais preciso que o Método de Gram-Schmidt e que o Método de Gram-Schmidt Modificado, visto que ele não faz ortogonalização de vetores, que pode trazer instabilidade ao trabalhar com vetores muito próximos de serem múltiplos um do outro. Portanto, podemos afirmar que o Método de Householder é mais estável e traz menos erros de arredondamentos quando comparado aos métodos de Gram-Schmidt e de Gram-Schmidt Modificado.

4.2

Conforme pedido, para essa subseção consideraremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 0,70000 & 0,70711 \\ 0,70001 & 0,70711 \end{bmatrix}$

Veja, na figura 13, a aplicação do Método de Gram-Schmidt pela função Scilab implementada, além do teste de precisão do método:

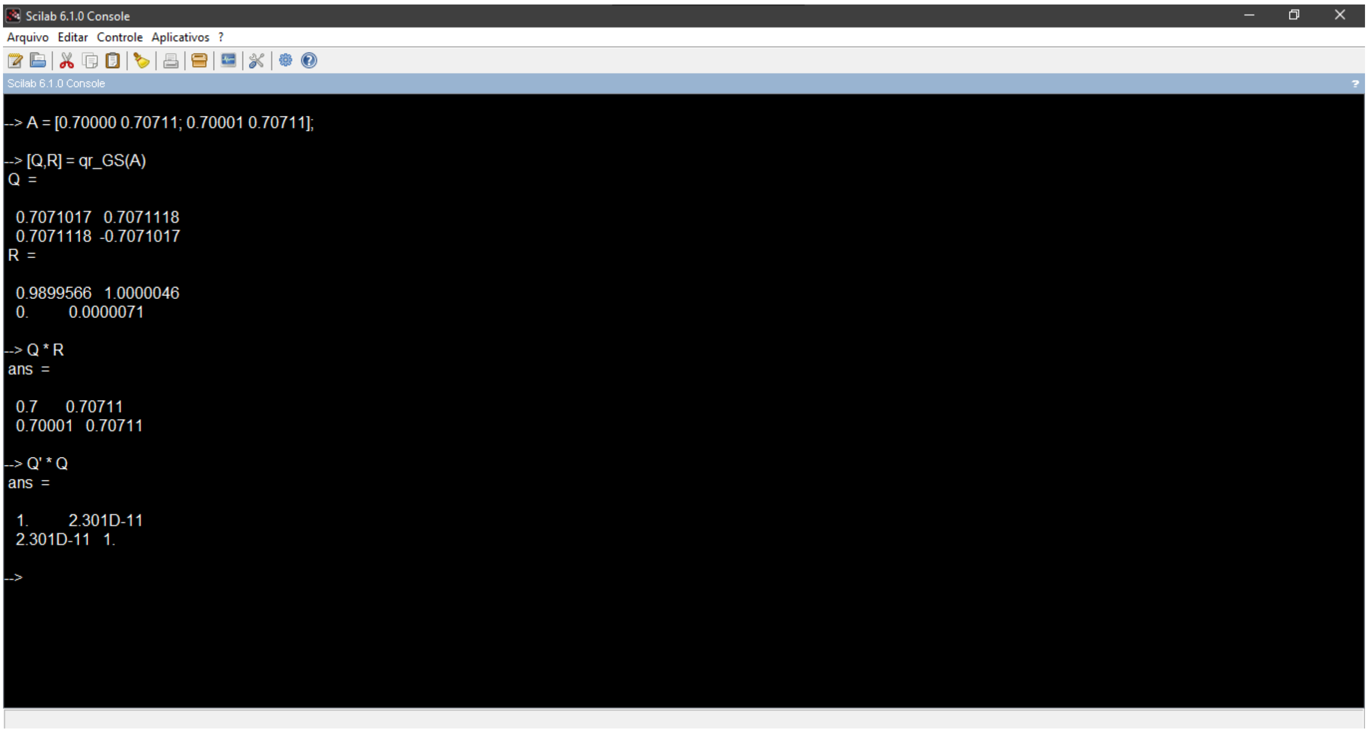

Figure 13: Método de Gram-Schmidt aplicado à matriz em questão

Veja, na figura 14, a aplicação do Método de Gram-Schmidt Modificado pela função Scilab implementada, além do teste de precisão do método:

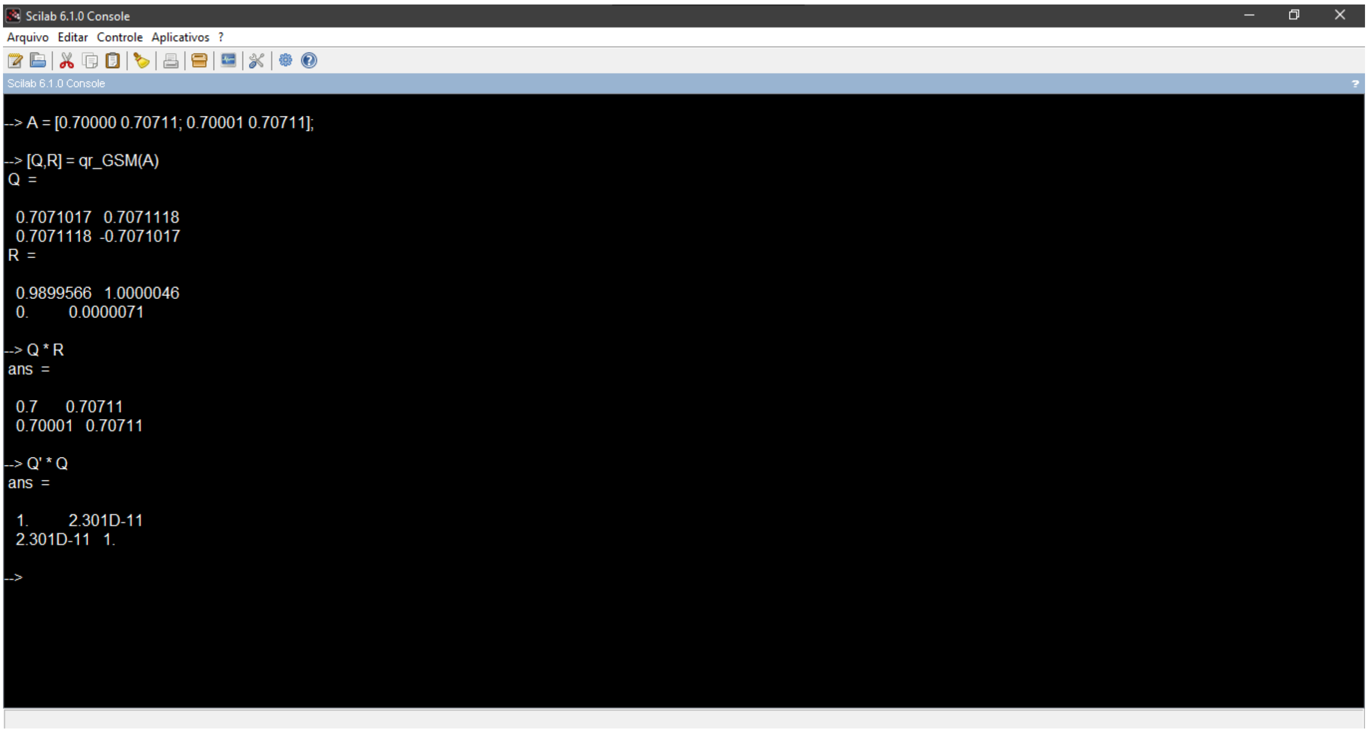

Figure 14: Método de Gram-Schmidt Modificado aplicado à matriz em questão

Veja, na figura 15, a aplicação do Método de Householder pelas funções Scilab implementadas, além do teste de precisão do método:

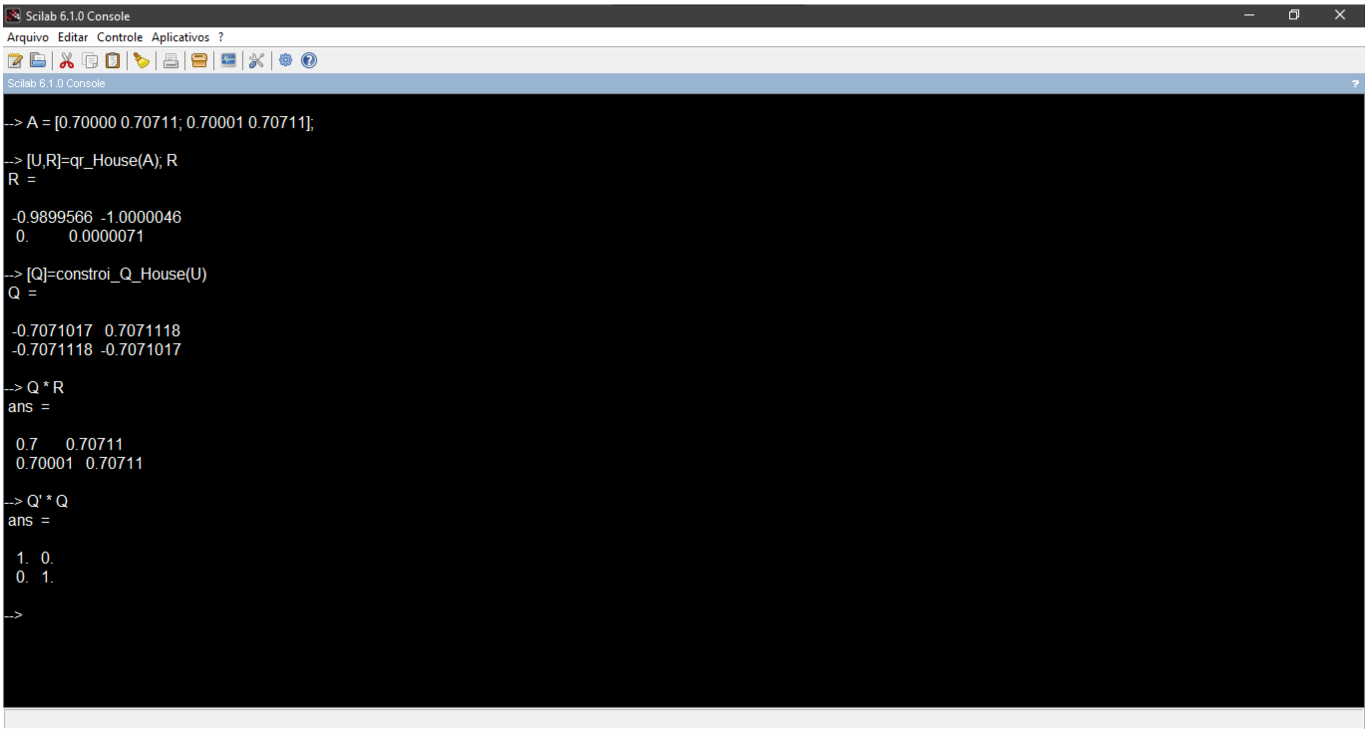

Figure 15: Método de Householder aplicado à matriz em questão

Comentários: Podemos ver que 3 métodos diferentes foram aplicados à mesma matriz. Apesar de as matrizes Q e R obtidas obtidas pelo Método de Householder serem diferentes das obtidas pelos métodos de Gram-Schmidt e Gram-Schmidt Modificado, note que as matrizes Q e R obtidas pelos 3 métodos satisfazem perfeitamente $A = QR$ e $Q^TQ = I$ (salvo os erros de arredondamento já citados), como podemos ver nas figuras de 13 a 15. Exatamente como dito nos comentários da 4.1, a matriz A tem vetores colunas x_1 e x_2 muito próximos de serem múltiplos um do outro. Quando aplicados os métodos de Gram-Schmidt e Gram-Schmidt Modificado, será calculada a componente ortogonal de x_2 em relação a x_1, que será um vetor de norma muito próxima de 0. Ao normalizar esse vetor, será feita uma divisão de cada entrada pela sua norma, o que propagará erros, e isso não ocorre na aplicação do Método de Householder. A diferença é notada ao se testar a ortogonalidade das matrizes Q obtidas, reforçando a maior estabilidade e precisão do Método de Householder.

4.3

Conforme pedido, para essa subseção consideraremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Veja, na figura 16, a aplicação do Método de Gram-Schmidt pela função Scilab implementada, além do teste de precisão do método:

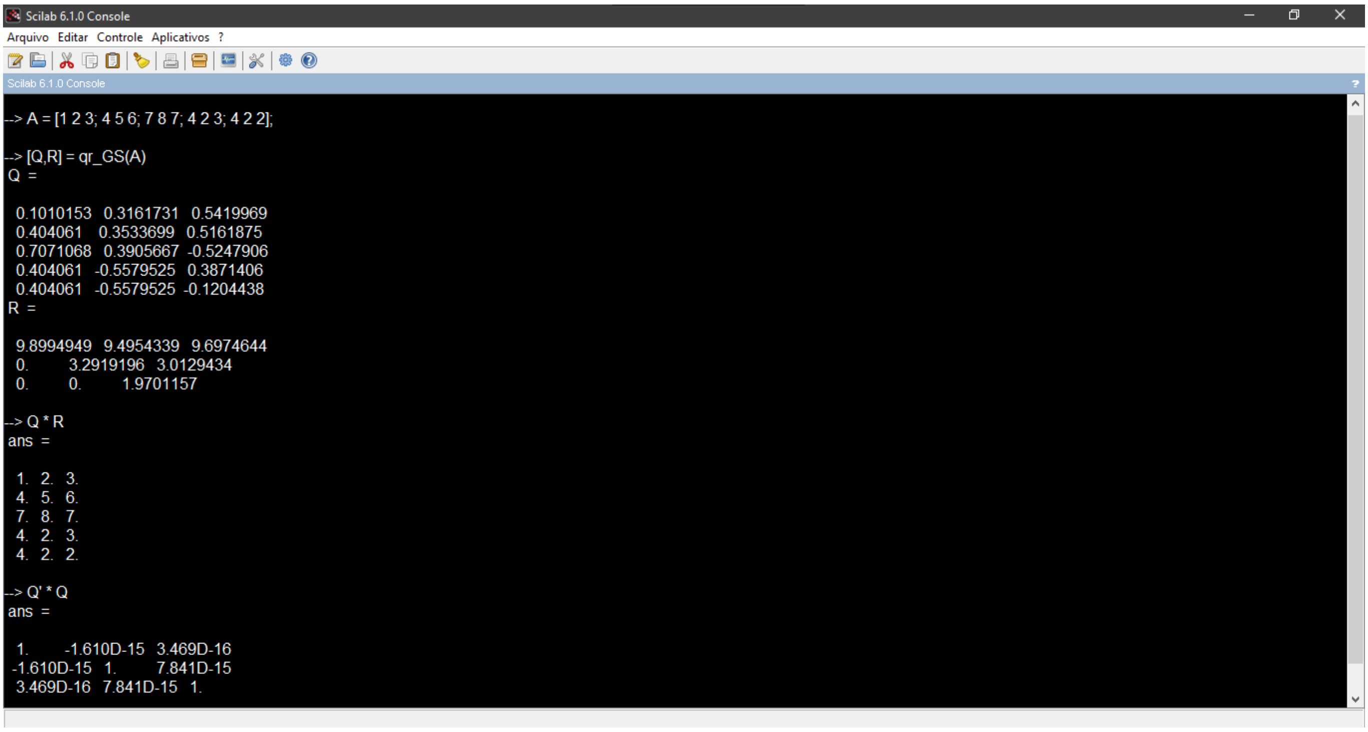

Figure 16: Método de Gram-Schmidt aplicado à matriz em questão

Veja, na figura 17, a aplicação do Método de Householder pelas funções Scilab implementadas, além do teste de precisão do método:

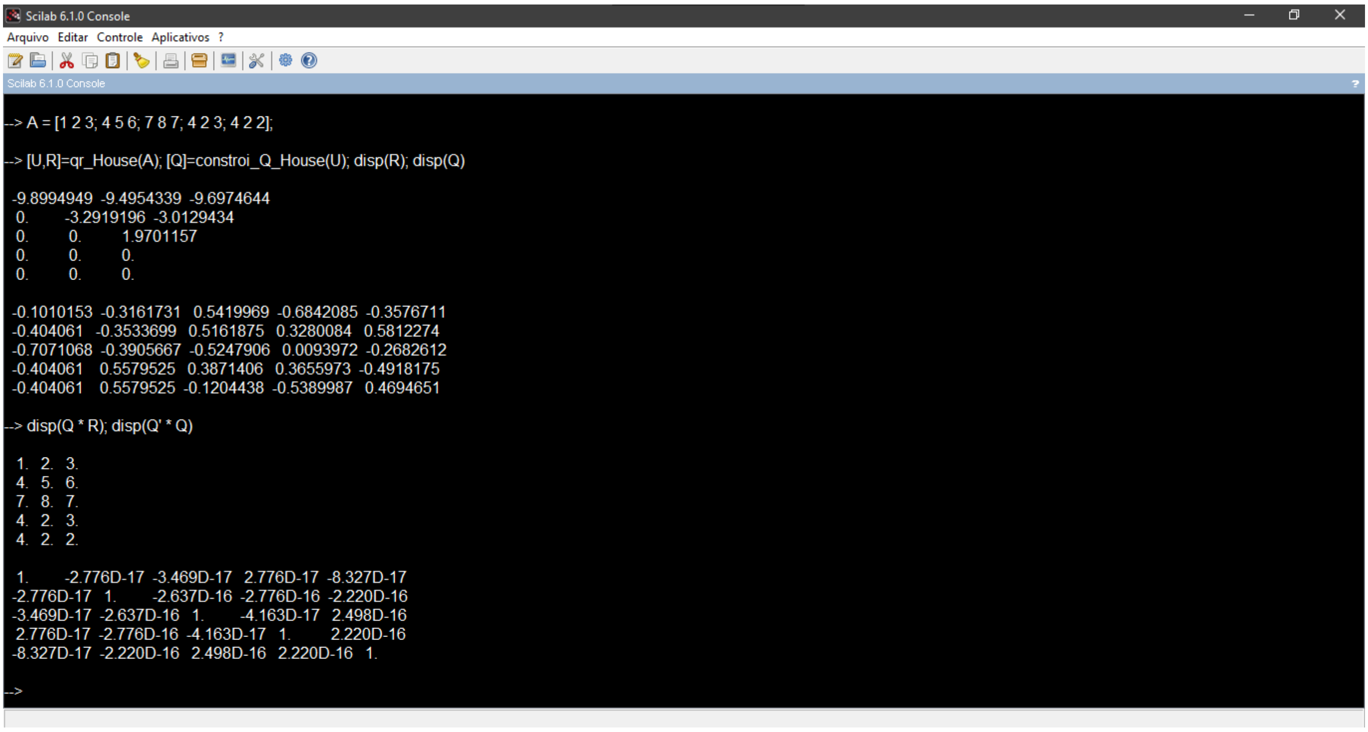

Figure 17: Método de Householder aplicado à matriz em questão

Veja, na figura 18, a aplicação da função "qr" nativa do Scilab, além do teste de precisão dos cálculos:

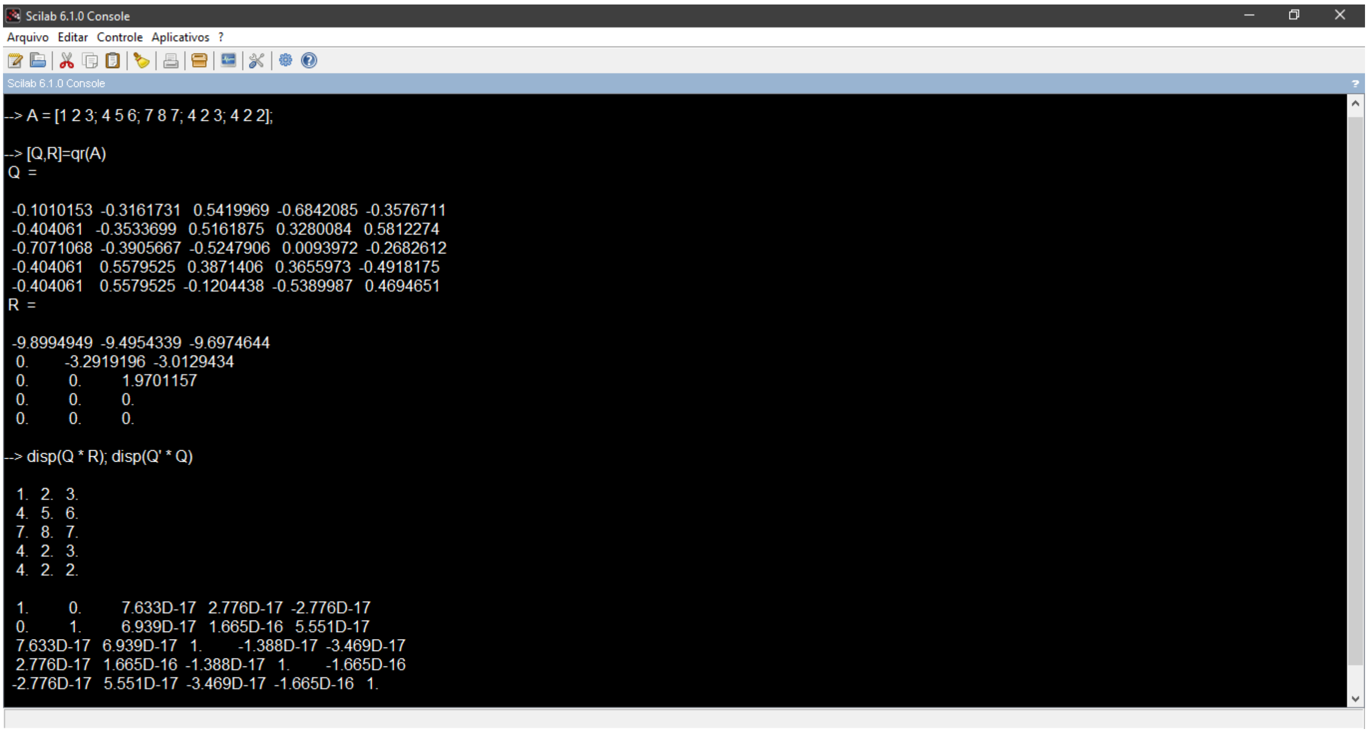

Figure 18: Função "qr" nativa do Scilab aplicada à matriz em questão

Comentários: Podemos ver que 3 funções diferentes foram aplicadas à mesma matriz. Apesar de as matrizes Q e R obtidas pelo Método de Gram-Schmidt serem diferentes das obtidas pelo Método de Householder e pela função "qr" nativa do Scilab (que obtiveram matrizes Q e R iguais entre si), note que as matrizes Q e R obtidas pelos 3 métodos satisfazem perfeitamente $A = QR$ e $Q^T Q = I$

(salvo os erros de arredondamento já citados), como podemos ver nas figuras de 16 a 18. De forma semelhante à subseção 4.2, vamos comparar os métodos analisando a ortogonalidade de Q. Podemos ver facilmente que, no cálculo de $Q^T Q$, os elementos fora da diagonal principal são mais próximos de 0 para Q retornada pela função “qr” do que para Q retornada pelo Método de Householder, que por sua vez são mais próximos de 0 que para Q retornada pelo Método de Gram-Schmidt, o que era esperado pelo fato de o Método de Householder ser mais preciso e estável que o Método de Gram-Schmidt (conforme visto anteriormente) e a função “qr” nativa do Scilab está constantemente recebendo melhorias, otimizando tempo de execução e precisão. Portanto, podemos afirmar que a função “qr” nativa do Scilab é mais estável e traz menos erros de arredondamentos quando comparada ao Método de Householder, que por sua vez é mais estável e traz menos erros de arredondamentos que o Método de Gram-Schmidt Modificado.

5 Questão 5

No arquivo “Calcula-Autovalores.sci” encontra-se o código da função que implementa o Algoritmo QR para Autovalores, utilizada para calcular os autovalores de uma matriz simétrica A.

Primeiramente, consideremos $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

O polinômio característico de A é $(7-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 2\cdot 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 17 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{10+\sqrt{39}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{10-\sqrt{39}}{2}$

Veja, na figura 19, os autovalores de A obtidos pela função “espectro” implementada no Scilab, além dos autovalores obtidos pela função “spec” nativa do Scilab:

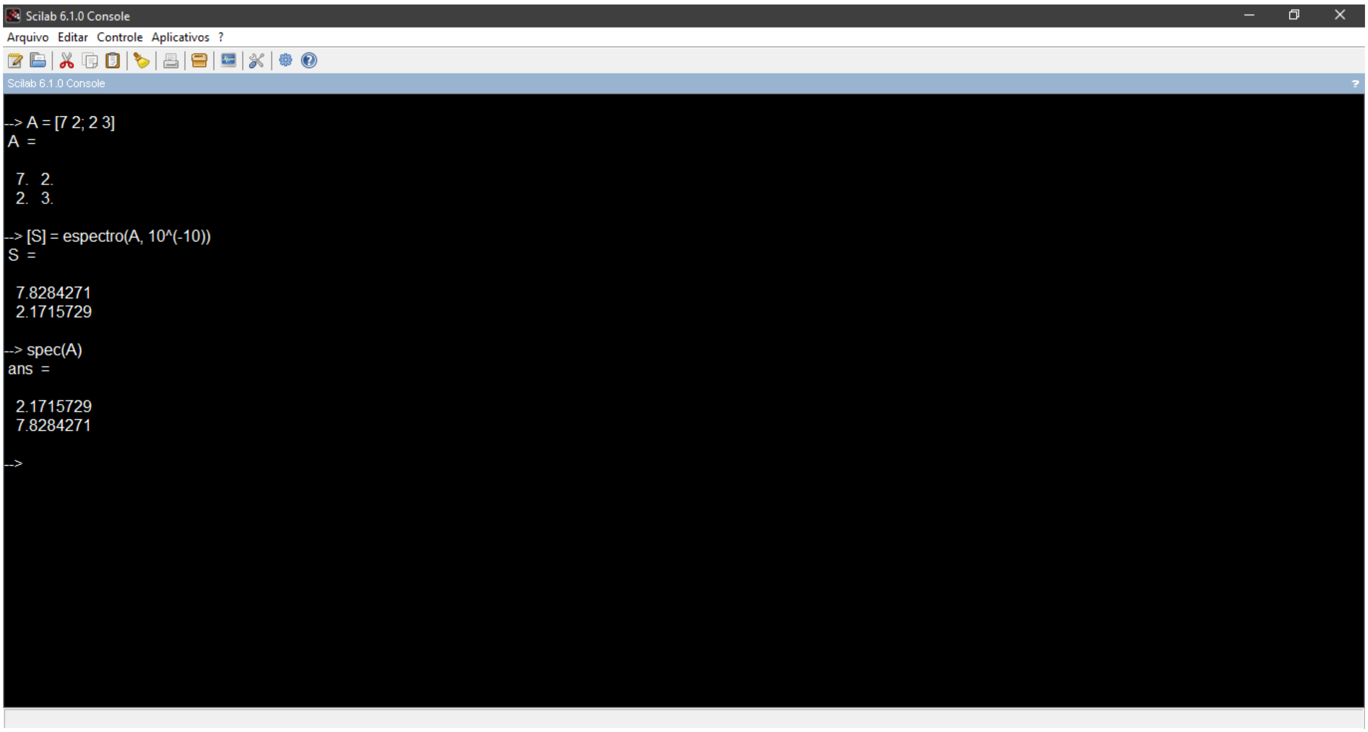

Figure 19: Algoritmo QR para Autovalores aplicado à matriz em questão

Agora, consideremos $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

O polinômio característico de A é $(-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(6-\lambda)-(6-\lambda)-(-\lambda)=0 \Rightarrow (3-\lambda)\cdot(\lambda^2-6\lambda)-2\cdot(3-\lambda)=0 \Rightarrow (3-\lambda)\cdot(\lambda^2-6\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda_1=3,\ \lambda_2=\frac{6+\sqrt{44}}{2}=3+\sqrt{11}$ e $\lambda_3=\frac{6-\sqrt{44}}{2}=3-\sqrt{11}$

Veja, na figura 20, os autovalores de A obtidos pela função "espectro" implementada no Scilab, além dos autovalores obtidos pela função "spec" nativa do Scilab:

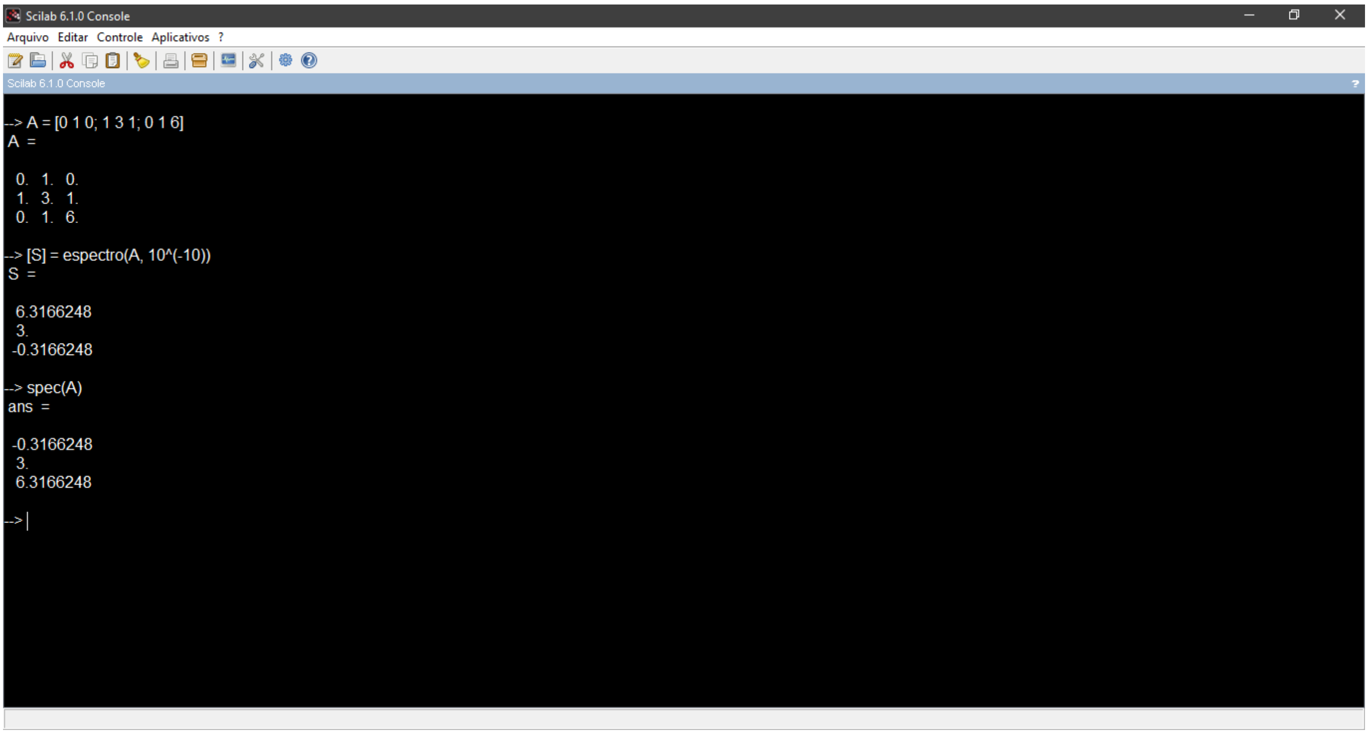

Figure 20: Algoritmo QR para Autovalores aplicado à matriz em questão

Por fim, consideremos $A=\begin{bmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 4 & 15 & -4 \\ 8 & -4 & 20 \end{bmatrix}$

O polinômio característico de A é $(9-\lambda)\cdot(15-\lambda)\cdot(20-\lambda)-128-128-64\cdot(15-\lambda)-16\cdot(20-\lambda)-16\cdot(9-\lambda)=0 \Rightarrow (9-\lambda)\cdot(\lambda^2-35\cdot\lambda+300)-256-960+64\cdot\lambda-320+16\cdot\lambda-144+16\cdot\lambda=0 \Rightarrow -\lambda^3+44\cdot\lambda^2-615\cdot\lambda+2700+96\cdot\lambda-1680=0 \Rightarrow -\lambda^3+44\cdot\lambda^2-519\cdot\lambda+1020=0 \Rightarrow \lambda^3-44\cdot\lambda^2+519\cdot\lambda-1020=0 \Rightarrow (\lambda-17)\cdot(\lambda^2-27\cdot\lambda+60)=0 \Rightarrow \lambda_1=17,\ \lambda_2=\frac{27+\sqrt{489}}{2}$ e $\lambda_3=\frac{27-\sqrt{489}}{2}$

Veja, na figura 21, os autovalores de A obtidos pela função "espectro" implementada no Scilab, além dos autovalores obtidos pela função "spec" nativa do Scilab:

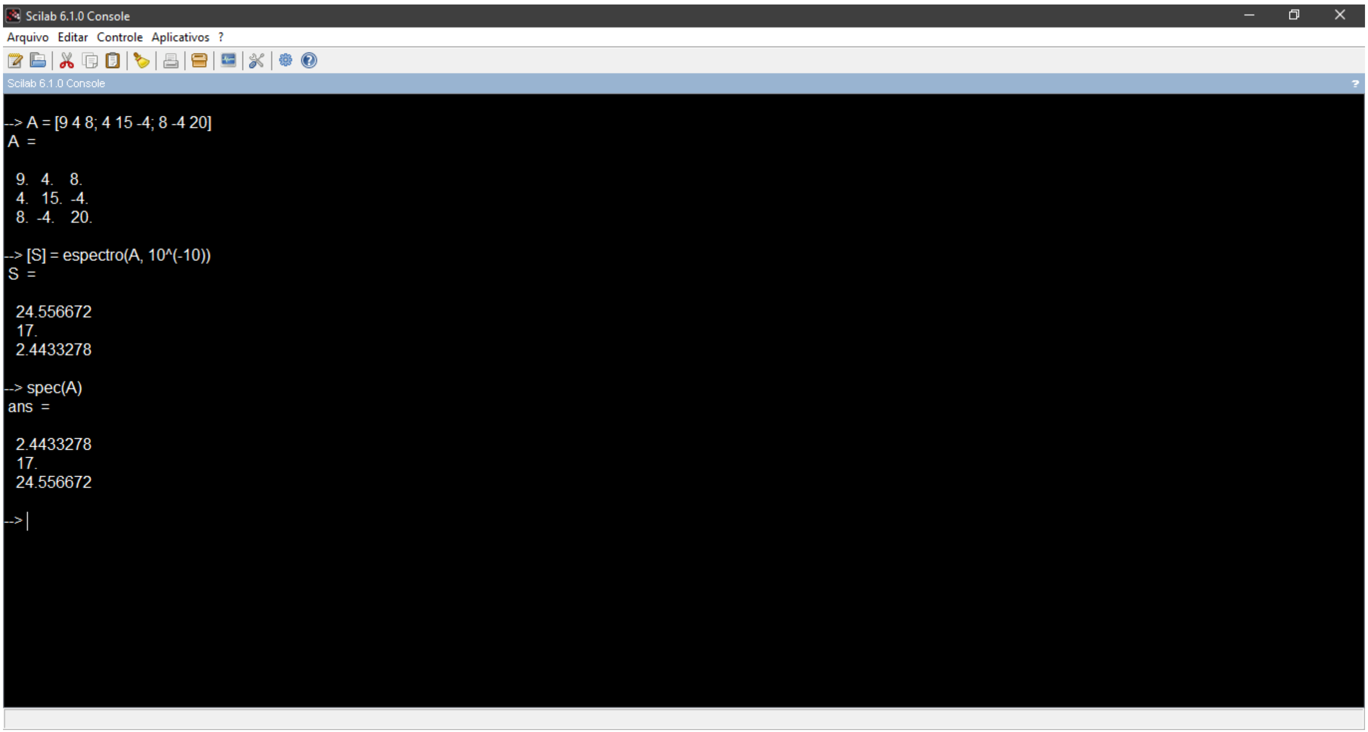

Figure 21: Algoritmo QR para Autovalores aplicado à matriz em questão

Como extra, consideremos $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ usada no relatório do Trabalho Computacional 3, onde encontramos todos os autovalores de A: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ e $\lambda_4 = -2$.

Veja, na figura 22, os autovalores de A obtidos pela função "espectro" implementada no Scilab, além dos autovalores obtidos pela função "spec" nativa do Scilab:

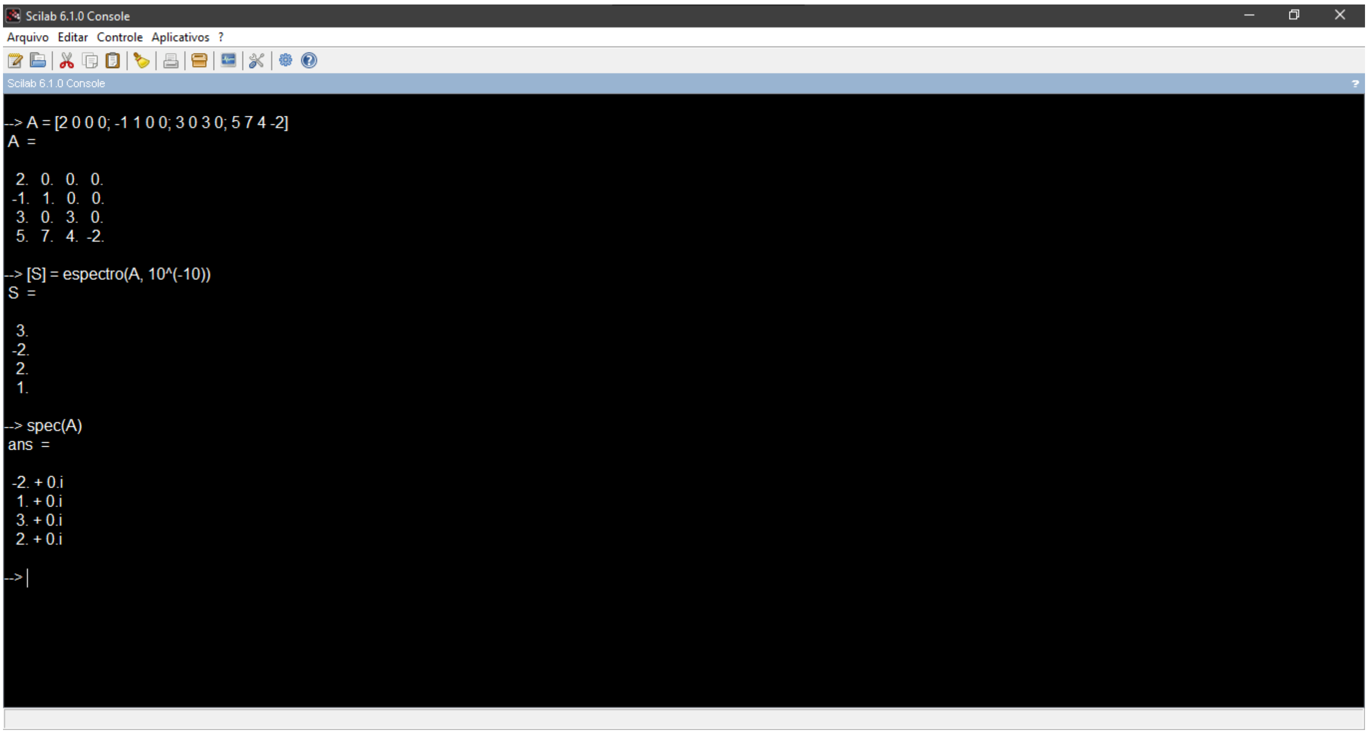

Figure 22: Algoritmo QR para Autovalores aplicado à matriz em questão

Comentários: Podemos ver que a função foi testadas em algumas matrizes de diferentes ordens. Note que todos os autovalores obtidos computacionalmente coincidem exatamente com os cálculos feitos acima (exceto pelo arredondamento na sétima casa decimal, feito automaticamente pelo Scilab) e com os que são retornados pela função "spec" nativa do scilab, reforçando a corretude da função, como podemos ver nas figuras de 19 a 22.