Graduação FGV

A2 de Cálculo em uma Variável

Prof.: Antonio Carlos Saraiva Branco

Curso: Matemática Aplicada PERÍODO: 1º

Aluno (a) ____

Data: 22/06/2020

Instruções Básicas:

Início da prova: 9 horas

Término da prova: 11 horas e 30 minutos

Tempo de duração da prova: 2 horas e 30 minutos

A prova foi elaborada para ser resolvida em até 2h30min

Espera-se que a prova seja feita SEM o uso de calculadora.

Consulta permitida SOMENTE ao livro texto e a anotações pessoais.

Você tem até as 12 horas (meio-dia) para fazer o upload para o eClass.

BOA PROVA!!!

1) Considere a função $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$.

a) **(0,5 pto)** Determine os intervalos em que *f* é crescente e os intervalos em que *f* é decrescente.

b) **(0,5 pto)** Determine os intervalos em que *f* é côncava para cima e os intervalos em que *f* é côncava para baixo.

2) Determine, se existirem, as assíntotas horizontais das funções a seguir:

a) **(0,5 pto)** $f(x)=\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

b) **(0,5 pto)** $g(x)=(1+e^{-x})^{e^x}$

3) Calcule, se existirem, os valores extremos (máximo e mínimo absolutos) das funções a seguir nos intervalos indicados:

a) **(0,75 pto)** $f(x)=\frac{x^2}{1+x^4}$, $(-\infty, \infty)$.

b) **(0,75 pto)** $g(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, $[1, \infty)$.

4) a) **(0,5 pto)** Prove que se *f* é diferenciável no intervalo (*a*, *b*) e *f* muda de sinal de – para + em algum ponto de (*a*, *b*), então $f'(x)>0$ para algum $x\in(a,b)$.

b) **(0,5 pto)** Mostre que $\ln(1+x)<x$, para todo $x>0$.
(Sugestão: use o Teorema do Valor Médio)

5) **(1,0 pto)** Calcule $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n^2+i^2}$.

(Sugestão: divida o numerador e o denominador por n^2).

6) a) **(0,75 pto)** Suponha que $f(x) = x\,g(x)$, onde $g(x)$ tem derivada contínua para $x > 0$ e $g(a) = 0$ para algum $a > 0$. Mostre que $\int_1^a f'(x)\ln(x)\,dx = \int_a^1 g(x)\,dx$.

b) **(0,75 pto)** Calcule $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

7) Considere a região do plano limitada pelas curvas $y = 2 + x - x^2$ e $x - y + 1 = 0$.

a) **(0,5 pto)** Faça um esboço da região citada.

b) **(0,75 pto)** Calcule a área dessa região.

c) **(0,75 pto)** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região citada em torno da reta de equação $y + 2 = 0$.

8) Calcule as integrais a seguir:

a) **(0,5 pto)** $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$

b) **(0,5 pto)** $\int \frac{2}{x^2 - 4}dx$

1) a) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$

$\Rightarrow D(f) = (0, +\infty)$

$\rightarrow f'(x) > 0 \iff \frac{x-1}{x^2} > 0 \iff x - 1 > 0 \iff$

$x > 1 \therefore f$ é crescente em $(1, +\infty)$.

$\rightarrow f'(x) < 0 \iff \frac{x-1}{x^2} < 0 \iff x - 1 < 0 \iff$

$\iff x < 1 \therefore f$ é decrescente em $(0, 1)$.

b) $f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3}$

$\rightarrow f''(x) < 0$ para $x > 2$

$\rightarrow f''(x) > 0$ para $0 < x < 2$

$\therefore f$ é côncava para cima em $(0, 2)$ e
" " " " baixo " $(2, +\infty)$.

2) a) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \Rightarrow D(f) = (0, +\infty) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

L'hospital

$\Rightarrow y = 0$ é assíntota horizontal de f.

b) $g(x) = \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^{e^x} = y \Rightarrow \ln y = e^x \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$

$$\rightarrow \lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{\frac{1}{e^x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} \cdot \left(-\frac{1}{e^x}\right)}{\left(-\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} =$$

$$= 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} y = e^1 = e$$

$$\rightarrow \lim_{x\to-\infty} \ln y = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} y = e^0 = 1$$

$\therefore$ $y = 1$ e $y = e$ são assíntotas horizontais de g.

3 a) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(1+x^4)\cdot 2x - x^2 \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} =$

$= \dfrac{2x - 2x^5}{(1+x^4)^2} \Rightarrow \exists f'(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2x^5 = 0 \Leftrightarrow$

$2x(1-x^4) = 2x(1-x^2)(1+x^2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$, $x = -1$ ou $x = 1$

$f(0) = 0$

$f(-1) = f(1) = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{4x^3} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{2x^2} = 0$

L'Hospital

$\therefore$ valor máx. abs. $= \dfrac{1}{2}$ e valor mín. abs. $= 0$.

b) $g(x) = \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} =$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$g(e) = \frac{1}{e}$$

$$g(1) = 0$$

L'hospital

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) \overset{\text{L'hospital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\therefore$ valor mín. abs. $= 0$ e valor máx. abs. $= \frac{1}{e}$.

4 a) Temos $x_1, x_2 \in (a,b)$, $f(x_2) > f(x_1)$ e $x_2 > x_1 \overset{TVM}{\Longrightarrow}$

$\exists c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

b) $\ln(1+x) < x$, $\forall x > 0$

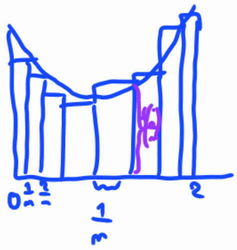
$$f(x) = x - \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \cdot 1 =$$

$= 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{x+1} > 0$, $\forall x > 0$ (f é estritamente crescente nesse intervalo) $\Rightarrow$

Como $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$, $x - \ln(1+x) > 0$, $\forall x > 0 \Rightarrow \ln(1+x) < x$, $\forall x > 0$.

⑤ $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\left(\frac{i}{n}\right)}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=$$

$$=\int_0^2\frac{x}{1+x^2}\,dx=\int_1^5\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int_1^5\frac{du}{u}=$$



$$1+x^2=u\Rightarrow du=2x\,dx\Rightarrow x\,dx=\frac{du}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln u\right]_1^5=\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 1=\frac{1}{2}\ln 5.$$

⑥ a) $f(a)=a\cdot g(a)=a\cdot 0=0$;

$$u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}\,dx\ ;\ v=f(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dv=f'(x)\,dx$$

$$u=\ln x \qquad du=\frac{1}{x}\,dx$$
$$dv=f'(x)\,dx \qquad v=f(x)$$

$$\int_1^a f'(x)\ln x\,dx=\left[f(x)\cdot\ln x\right]_1^a-\int_1^a\frac{f(x)}{x}\,dx=$$

$$=\cancelto{0}{f(a)\ln a}-\cancelto{0}{f(1)\ln 1}+\int_a^1\frac{f(x)}{x}\,dx=\int_a^1 g(x)\,dx$$

b) $$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\underset{\uparrow}{=}\int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2\theta}{\left(\sqrt{1+tg^2\theta}\right)^3}\,d\theta=$$

$\hookrightarrow x = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta \, d\theta \;, \; \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{|\sec^3\theta|} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sec\theta} \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos\theta \, d\theta =$$

$$= \left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi/4} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen} 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

8 a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x} \, dx + \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx = 2$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x} \, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 e^x \, dx = \lim_{t \to -\infty} \left[e^x\right]_t^0 =$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left(e^0 - e^t\right) = \lim_{t \to -\infty} \left(1 - e^t\right) = 1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x} \, dx = \lim_{t \to \infty} \int_0^t \frac{1}{e^x} \, dx = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{e^x}\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{e^t} + \frac{1}{e^0}\right) = \lim_{t \to +\infty} \left(1 - e^{-t}\right) = 1$$

b) $$\int \frac{2}{x^2 - 4} \, dx =$$

$$\frac{2}{x^2-4} = \frac{2}{(x-2)(x+2)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A-2B)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B=2 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2},\quad B=-\frac{1}{2}$$

$$\int\left[\frac{\frac{1}{2}}{(x-2)} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+2)}\right]dx = \int \frac{1}{2x-4}\,dx - \int \frac{1}{2x+4}\,dx$$

$$= \frac{\ln|2x-4| - \ln|2x+4|}{2} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-4}{2x+4}\right| + C$$

Extra: $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{x^2\cdot 3x^2 - (x^3+1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x^4-2x}{x^4} = 1 - \frac{2}{x^3}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow y = x + b \text{ é assín-}$$

↳ queremos encontrar

tota oblíqua $\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3+1}{x^2} - x - b \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1 - bx^2}{x^2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x^2} - b \right) = 0 - b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$\therefore$ $y = x$ é assíntota oblíqua