Graduação FGV

Teste de Cálculo em uma Variável

Prof.: Antonio Carlos Saraiva Branco

Curso: Matemática Aplicada/Ciências de Dados   PERÍODO: 1º

Aluno (a) ____

Data: 07/06/2020

Instruções Básicas:

Início da prova: 10 horas

Término da prova: 11 horas e 30 minutos

Tempo de duração da prova: 1 hora e 30 minutos

A prova foi elaborada para ser resolvida em até 1h30min

Espera-se que a prova seja feita sem o uso de calculadora.

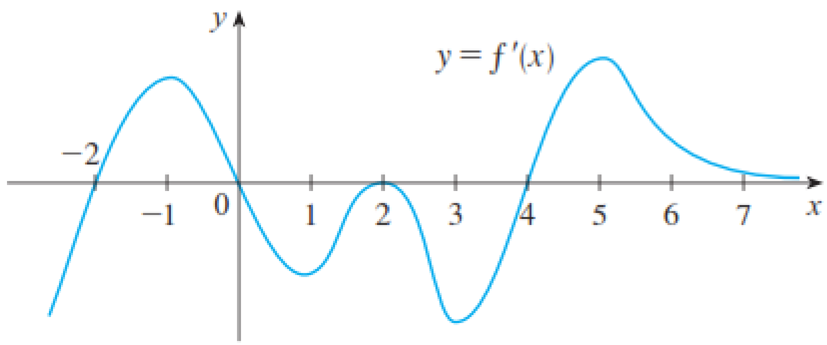
Consulta permitida ao livro texto e a anotações pessoais.

Você tem até as 12 horas (meio-dia) para fazer o upload para o eClass.

BOA PROVA!!!

T2 - 2020:

1) A figura a seguir é o gráfico da derivada f' de uma função f.



a) **(0,5 pto)** Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?
b) **(0,5 pto)** Para que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?
c) **(0,5 pto)** A função f tem pontos de inflexão? Se tiver, quais?
d) **(0,5 pto)** Esboce o gráfico de f''.
e) **(0,5 pto)** Esboce um possível gráfico da função f.

2) **(1,5 pto)** O ponto (−2, 1) é um ponto de inflexão da curva $y = ax^3 - bx^2$. Determine os valores das constantes a e b.

3) **(2,0 pto)** Considere a parábola de equação $y = 4 - x^2$. Determine o ponto dessa parábola no qual a reta tangente determina com os eixos coordenados, no primeiro quadrante, o triângulo de área mínima.

4) **(1,5 pto)** Se f é uma função par, contínua e $\int_0^{2\sqrt{2}} f(x)\,dx = 3$,

calcule $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(4sen\,\theta)\cdot(\cos\theta)\,d\theta$.

5) Considere a região do plano-xy delimitada pelas curvas

$$y = sen(x),\ y = \frac{4+\pi^2}{4} - x^2 \text{ e } x = 0 \text{ (eixo-}y\text{)}.$$

a) **(1,0 pto)** Esboce graficamente a região citada.
b) **(1,5 pto)** Calcule a área dessa região.

A1 - 2020:

4) a) **(0,75 pto)** Sendo $y = \ell n(sen(3x)) + sen(\ell n(3x))$, onde $\ell n(x)$ representa o logaritmo neperiano de x, calcule $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{6}}$.

b) **(0,75 pto)** Em qual ponto da curva $y = \sqrt{1+3x}$ a reta tangente é paralela à reta $3x - 10y + 7 = 0$?

5) a) **(1,0 pto)** Considere a curva de equação $y + x\cos y = x^2 y$. Calcule a inclinação da reta tangente a essa curva no ponto $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) **(1,0 pto)** Considere a função $y = \dfrac{\sqrt{x+1}\cdot(2-x)^5}{(2x+3)^7}$.

Calcule $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

6) Às 10h da manhã, uma pessoa A está a 2,4km a oeste de uma pessoa B. A pessoa A está caminhando para o sul a uma velocidade de 2,4km/h e a pessoa B está caminhando para oeste a uma velocidade de 4,8km/h.

a) **(1,0 pto)** Às 10h20min, quão rápido a distância entre as duas pessoas está variando? Nesse instante, a distância entre elas está aumentando ou diminuindo?

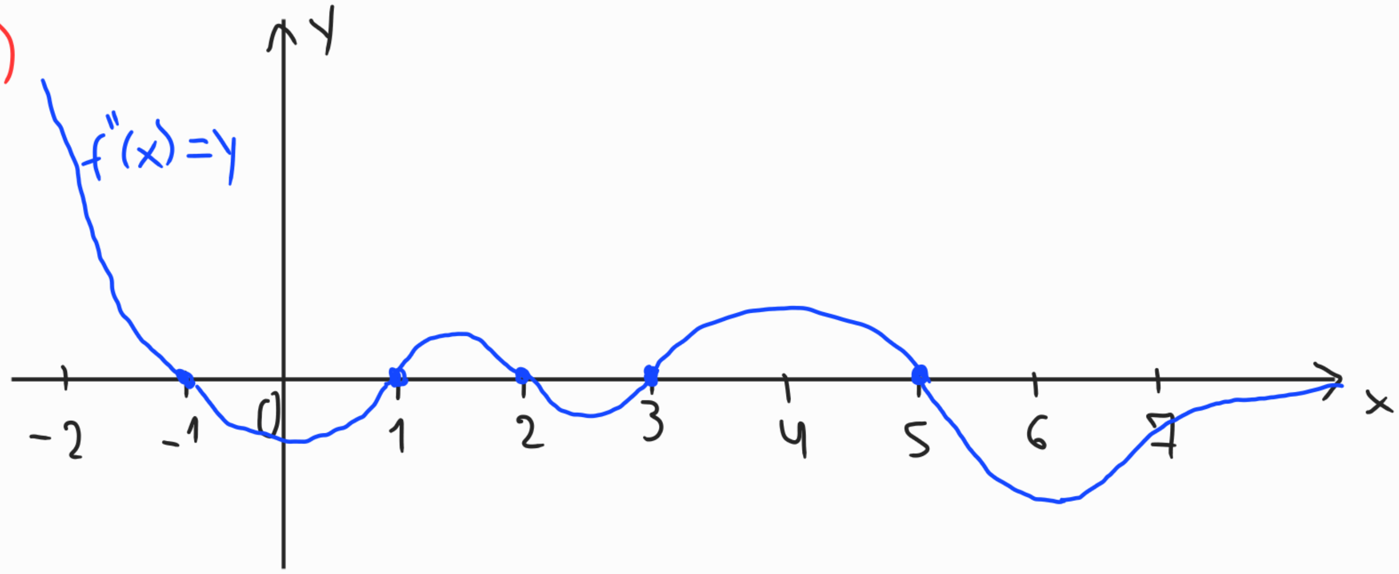
b) **(0,5 pto)** Às 10h40min, quão rápido a distância entre as duas pessoas está variando? Nesse instante, a distância entre elas está aumentando ou diminuindo?

1 a) Decrescente em $(-\infty, -2), (0,2), (2,4)$.
Crescente em $(-2,0), (4,+\infty)$

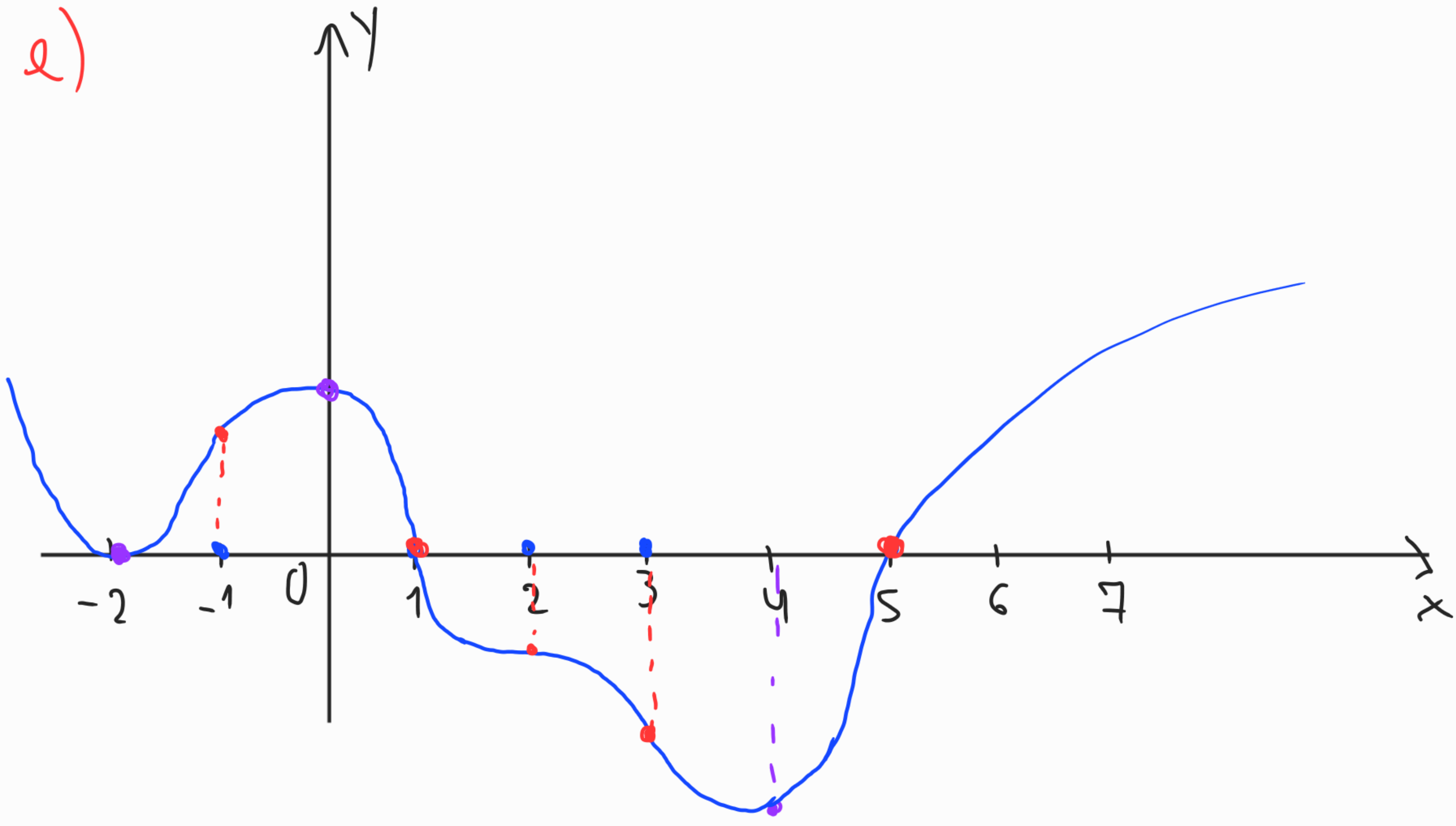
b) Máx local: $x=0$
Mín. local: $x=-2$ e $x=4$

c) Ptos. inflexão: $x=-1$, $x=1$, $x=2$, $x=3$ e $x=5$.

d)



e)



2) $y = ax^3 - bx^2$; $(-2,1) \in$ curva $\Rightarrow 1 = a\cdot(-2)^3 - b\cdot(-2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -8a - 4b = 1 \Rightarrow 8a + 4b = -1$

$y' = 3ax^2 - 2bx \Rightarrow y'' = 6ax - 2b \Rightarrow 6a\cdot(-2) - 2b = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6a = -b$

$$\begin{aligned} 8a + 4b &= -1 \\ 6a &= -b \end{aligned} \Rightarrow 4b = -24a \Rightarrow -16a = -1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{16}}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -\frac{3}{8}}.$$

3) $y = 4 - x^2 \Rightarrow y' = -2x$

$(x_0, 4 - x_0^2)$ é o ponto que queremos.

$t: y = -2x_0 \cdot x + b$; $(x_0, 4 - x_0^2) \in t \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - x_0^2 = -2x_0 \cdot x_0 + b \Rightarrow b = 4 - x_0^2 + 2x_0^2 = 4 + x_0^2.$

$t: y = -2x_0 \cdot x + 4 + x_0^2.$

$$\begin{aligned} t \cap \vec{Ox} &= \left\{\left(\frac{4 + x_0^2}{2x_0}, 0\right)\right\} \\ t \cap \vec{Oy} &= \left\{\left(0, 4 + x_0^2\right)\right\} \end{aligned} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \frac{4+x_0^2}{2x_0} & 0 & 1 \\ 0 & 4+x_0^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(4+x_0^2)^2}{2x_0}\right) = \frac{(4+x_0^2)^2}{4x_0} \Rightarrow$$

$$A' = \frac{4x_0 \cdot 2(4+x_0^2) \cdot 2x_0 - (4+x_0^2)^2 \cdot 4}{16x_0^2} =$$

$$= 4+x_0^2 - \frac{(4+x_0^2)^2}{4x_0^2} = 0 \Rightarrow \underbrace{(4+x_0^2)}_{\neq 0}\left[1 - \frac{(4+x_0^2)}{4x_0^2}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4+x_0^2}{4x_0^2} = 1 \Rightarrow 4+x_0^2 = 4x_0^2 \Rightarrow 3x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ O ponto pedido é $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$.

4) $y = \ln(\text{sen}\, 3x) + \text{sen}(\ln(3x)) \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{6}} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{sen}\, 3x} \cdot \cos(3x) \cdot 3 + \cos(\ln(3x)) \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 =$$

$$= \frac{3\cos(3x)}{\text{sen}(3x)} + \frac{\cos(\ln(3x))}{x} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{3.0}{1} + \frac{\cos\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\frac{\pi}{6}} = \frac{6}{\pi}\cos\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

b) $y = \sqrt{1+3x}$; $3x - 10y + 7 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{10}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1+3x}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{3}{2\sqrt{1+3x_0}} = \frac{3}{10}$$

$\Rightarrow \sqrt{1+3x_0} = 5 \Rightarrow 1+3x_0 = 25 \Rightarrow x_0 = 8 \Rightarrow$ O ponto pedido é $(8,5)$.

5 a) $y + x\cos y = x^2 y \Rightarrow \frac{d}{dx}(y + x\cos y) = \frac{d}{dx}(x^2 y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + 1.\cos y + x.(-\operatorname{sen} y).\frac{dy}{dx} = 2x.y + x^2.\frac{dy}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - x\operatorname{sen} y\,\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} = 2xy - \cos y$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2.1.\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}}{1 - 1.\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - 1^2} = \frac{\pi - 0}{-1} = -\pi.$$

b) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}\cdot(2-x)^5}{(2x+3)^7} \Rightarrow \ln y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x+1}\cdot(2-x)^5}{(2x+3)^7}\right) =$

$= \ln\left(\sqrt{x+1}\cdot(2-x)^5\right) - \ln\left((2x+3)^7\right) =$

$= \ln\left(\sqrt{x+1}\right) + \ln\left((2-x)^5\right) - \ln\left((2x+3)^7\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\ln(x+1) + 5\ln(2-x) - 7\ln(2x+3).$

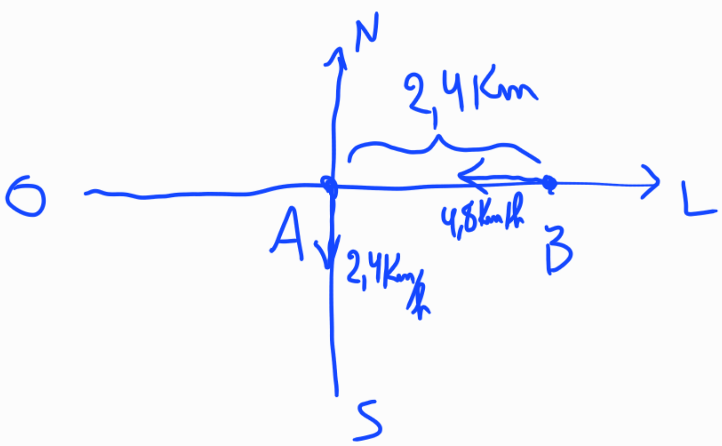
$\dfrac{d}{dx}(\ln y) = \dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}\cdot 1 + 5\cdot\dfrac{1}{2-x}\cdot(-1) - 7\cdot\dfrac{1}{2x+3}\cdot 2$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y\left(\dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{5}{2-x} - \dfrac{14}{2x+3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=\left(1,\frac{\sqrt{2}}{5^7}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{5^7}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{1} - \dfrac{14}{5}\right) =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{5^7}\left(\dfrac{5 - 5\cdot 4\cdot 5 - 14\cdot 4}{4\cdot 5}\right) = \dfrac{-151\sqrt{2}}{4\cdot 5^8}.$

6



$r_A(t) = (0; -2,4t)$

$r_B(t) = (2,4 - 4,8t; 0)$

$d_{AB}(t) = \sqrt{(2,4-4,8t)^2 + (2,4t)^2} \simeq \sqrt{28,8t^2 - 23,04t + 5,76}$

$$\frac{d}{dt} d_{AB}(t) = \frac{1}{2\, d_{AB}(t)} \cdot (57,6t - 23,04)$$

a) $\frac{d}{dt} d_{AB}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3,2 - 7,68 + 5,76}} \cdot (19,2 - 23,04) =$

$= \frac{-3,84}{2\sqrt{1,28}} = \frac{-3 \cdot 1,28}{2\sqrt{1,28}} = -\frac{3}{2}\sqrt{1,28} \cong -1,7$ Km/h $< 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ a dist. entre A e B está diminuindo.

b) $\frac{d}{dt} d_{AB}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3,2}} \cdot 15,36 = \frac{4,8 \cdot 3,2}{2\sqrt{3,2}} = 2,4\sqrt{3,2} \cong$

$\cong 4,29$ Km/h $> 0 \Rightarrow$ a dist. entre A e B está aumentando.

$\boxed{L4}$ 23 f'' cont. em $\mathbb{R}$

$f'(2) = 0$

$f''(2) = -5$

pto. crítico

max. local em $x = 2$.