# Seção 1:

11 a) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} a =$

$= 0 \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) - a = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (V)

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (2a_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (V)

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+2} = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

(V)

d) $0 \leq |a_n - a| < \frac{1}{n}$, $n > 10^4$ e $\lim\limits_{n\to\infty} 0 =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ Pelo Teo. do Confronto,

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (V)

e) Suponha, por absurdo, que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a > c \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tq. $n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$

Tomemos $\varepsilon = a - c > 0$, pois, por hipótese, $a > c$.

$\Rightarrow a - u_n \leq |u_n - a| < \varepsilon = a - c \Rightarrow u_n > c$, absurdo.

(V)

f) Suponha, por absurdo, que $a_n < 2,351167$, $\forall n > n_0$. Pelo item anterior, segue que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n <$
$< 2,351167$, absurdo. (V)

g) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tq. $n > n_0$
$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Da desigualdade triangular, temos
$|a| < |a_n| + |a - a_n| \Rightarrow -|a_n - a| < |a_n| - |a|$;
$|a_n| < |a| + |a_n - a| \Rightarrow |a_n| - |a| < |a_n - a|$;
Logo, $-|a_n - a| < |a_n| - |a| < |a_n - a| \Rightarrow$
$\Rightarrow \big||a_n| - |a|\big| < |a_n - a| < \varepsilon$, $\forall n > n_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = |a|$ (V)

h) Contraexemplo: $a_n = (-1)^n$ é tq. $|a_n|$ converge mas $a_n$ não converge. (F)

Seção 3:

1 a) $x_n = \begin{cases} 2, & n \text{ par.} \\ 0, & n \text{ ímpar.} \end{cases} \Rightarrow$ sequência alternante

$\Rightarrow (x_n)$ diverge.

b) $\frac{1}{2^n} \to 0$ quando $n \to \infty$;

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} (x_n)_{n \text{ par}} = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} (x_n)_{n \text{ ímpar}} = -1 \end{array}\right\} (x_n) \text{ diverge.}$$

c) $x_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot (-1)^n$ ; $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ quando $n \to \infty$;

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} (x_n)_{n \text{ par}} = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} (x_n)_{n \text{ ímpar}} = -1 \end{array}\right\} (x_n) \text{ diverge.}$$

d) $x_n = \frac{2}{1+\frac{2}{n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) \to 2 \cdot (1-1) = 0$

quando $n \to \infty \Rightarrow (x_n)$ converge.

2) $a_n = n + \frac{1}{n}$ diverge
$b_n = n$ diverge

$$\left.\begin{array}{l} a_n = n + \frac{1}{n} \text{ diverge} \\ b_n = n \text{ diverge} \end{array}\right\} a_n - b_n = \frac{1}{n} \to 0 \text{ quando}$$

$n \to \infty$.

3) $$\left.\begin{array}{l} x_n = \frac{1}{n} \text{ é convergente} \\ y_n = n \text{ é divergente} \end{array}\right\} x_n y_n = 1 \text{ é convergente.}$$

9) a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 - 7n + 1}{n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{6 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{6}{1} = 6.$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n - 2}{n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^4 - 3n^3 + \frac{n^2}{2} - \pi n + 1}{\frac{n^5}{500} + 2n + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{2n^3} - \frac{\pi}{n^4} + \frac{1}{n^5}}{\frac{1}{500} + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^5}} = \frac{0}{\frac{1}{500}} = 0.$$

d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-67)(2n+18)(n-9)(n+10)(7n+1)}{n^5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-67}{n}\right)\left(\frac{2n+18}{n}\right)\left(\frac{n-9}{n}\right)\left(\frac{n+10}{n}\right)\left(\frac{7n+1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{67}{n}\right)\left(2+\frac{18}{n}\right)\left(1-\frac{9}{n}\right)\left(1+\frac{10}{n}\right)\left(7+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7 = 14.$$

e) $$\lim_{n\to\infty} \frac{11n^6 - 6n^2 + n - \sqrt{3}}{5n^8 - 9} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{11}{n^2} - \frac{6}{n^6} + \frac{1}{n^7} - \frac{\sqrt{3}}{n^8}}{5 - \frac{9}{n^8}} =$$

$$= \frac{0}{5} = 0.$$

10 (i) Falsa.

(ii) Afirmação (c) justifica com um contraexemplo válido.

12 a) Sim, pois é limitada e não tem limite.

b) Sim, pois é limitada e não tem limite.

c) Não, pois não é limitada.

d) Não, pois não é limitada.

e) Sim, pois é limitada e tem limite.

## Seção 4:

2

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)_{n \text{ par}} = \infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)_{n \text{ ímpar}} = -\infty \end{array}\right\} \text{(a) e (b) são falsas.}$$

$$|a_n| = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & \text{para } n \text{ ímpar} \\ \dfrac{n}{2} & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)_{n \text{ par}} = \infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)_{n \text{ ímpar}} = \infty \end{array}\right\} \lim |a_n| = \infty$$

$\Rightarrow$ (c) é correta.

3 $\left.\begin{array}{l} a_n = n+6 \\ b_n = -n \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ e

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} 6 = 6.$$

4 $\left.\begin{array}{l} a_n = 2n \\ b_n = -n \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ e

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

5 $\left.\begin{array}{l} a_n = n \\ b_n = -2n \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ e

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty$$

6 $\left.\begin{array}{l} a_n = n^2 \\ b_n = -n \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty.$$

7 $\left.\begin{array}{l} a_n = n \\ b_n = -n^2 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0.$$

10 a) $(a_n)$ é crescente $\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{n+1} > \sqrt{n} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{n+1})^2 > (\sqrt{n})^2 \Leftrightarrow n+1 > n$

$\Leftrightarrow 1 > 0$ (V) $\therefore (a_n)$ é crescente.

$(a_n)$ é limitada $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ tq: $0 \leq a_n \leq M$,

$\forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{n} \leq M \Leftrightarrow (\sqrt{n})^2 \leq M^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \leq M^2, \forall n \in \mathbb{N}$, o que é falso pois $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente $\therefore (a_n)$ é não limitada.

b) $a_n = \sqrt{n}$ é crescente e não limitada $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt{n} = \infty \therefore \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow$

$(b_n)$ é convergente.

c) $-1 \leq \cos n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

e $\lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$. Logo, pelo Teorema do Confronto, $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$.

12 a) $K < m \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{j=0}^{K} a_j n^j}{\sum_{i=0}^{m} b_i n^i} =$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^m \cdot \sum_{j=0}^{k} a_j n^{j-m}}{n^m \cdot \sum_{i=0}^{m} b_i n^{i-m}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{n^{m-j}}}{\sum_{i=0}^{m} \frac{b_i}{n^{m-i}}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{0}{b_m} = 0 .$$

b) $k > m \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{j=0}^{k} a_j n^j}{\sum_{i=0}^{m} b_i n^i} =$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^k \cdot \sum_{j=0}^{k} a_j n^{j-k}}{n^k \cdot \sum_{i=0}^{m} b_i n^{i-k}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{n^{k-j}}}{\sum_{i=0}^{m} \frac{b_i}{n^{k-i}}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a_k}{0} = \pm\infty$$

c) $k = m \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{j=0}^{k} a_j n^j}{\sum_{i=0}^{m} b_i n^i} =$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^k \cdot \sum_{j=0}^{k} a_j n^{j-k}}{n^m \cdot \sum_{i=0}^{m} b_i n^{i-m}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{n^{k-j}}}{\sum_{i=0}^{m} \frac{b_i}{n^{m-i}}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a_k}{b_m} = \frac{a_k}{b_m} .$$

13 a) Falsa. Contraexemplo: $a_n = (n-1)^2$, pois $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, mas $(a_n)$ não é monótona crescente.

b) Falsa. Contraexemplo: $a_n = -n$, pois $(a_n)$ não é limitada, mas $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

c) Falsa. Contraexemplo: $x_n = n+1$ e $y_n = n$, pois $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, mas $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 1 \neq 0$.

d) Falsa. Contraexemplo: $x_n = 2n$ e $y_n = n$, pois $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, mas $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 2 \neq 1$.

14 a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+8}{n^2+10^9} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{8}{n^2}}{1+\frac{10^9}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (u_n)$ converge para 1.

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+1}{n-10} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(3+\frac{1}{n^3}\right)}{n\left(1-\frac{10}{n}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{3+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{10}{n}}\right) = \infty \Rightarrow (u_n) \text{ diverge para } \infty.$$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+10^{30}}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{10^{30}}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (u_n)$ converge para $0$.

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\left(\frac{n+3}{n}\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow (u_n)$

converge para $1$.

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{3n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{5}{n}}{3+\frac{7}{n}} = \frac{1}{3} \Rightarrow (u_n)$

converge para $\frac{1}{3}$.

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+10)(n-6)(2n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (n+10)\left(\frac{n-6}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} (n+10)\left(1-\frac{6}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} (n+10) \cdot 1 \cdot 2 =$

$= \lim_{n\to\infty} 2(n+10) = \infty \Rightarrow (u_n)$ diverge para $\infty$.

# Exercícios Suplementares:

17 $x_n = (-1)^n$

$y_n = -(-1)^n$ $\Rightarrow$ $x_n$ e $y_n$ divergem

$x_n + y_n$ converge para 0.