Graduação FGV

A1 de Cálculo em uma Variável
Prof.: Antonio Carlos Saraiva Branco
Curso: Matemática Aplicada PERÍODO: 1º
Aluno (a) ____
Data: 13/04/2020

Instruções Básicas:

Início da prova: 9 horas

Término da prova: 11 horas e 30 minutos

Tempo de duração da prova: 2 horas e 30 minutos

A prova foi elaborada para ser resolvida em até 2h30min

Espera-se que a prova seja feita sem o uso de calculadora.

Consulta permitida ao livro texto e a anotações pessoais.

Você tem até as 12 horas (meio-dia) para fazer o upload para o eClass.

BOA PROVA!!!

1) Calcule os limites:

   a) **(0,5 pto)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+x}\right)$

   b) **(0,5 pto)** $\lim_{x\to 3}\dfrac{3x-9}{sen(6-2x)}$.

   c) **(0,5 pto)** $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$

2) a) **(1,0 pto)** Determine todos os valores reais de k para os quais a função $f(x)=\begin{cases}3x+1 & ,se\ x<k\\ x^2-3 & ,se\ x\geq k\end{cases}$ é contínua em todo o conjunto dos reais.

   b) **(1,0 pto)** Seja C uma curva fechada, convexa e "suave", isto é, uma curva sem pontos terminais e tal que qualquer segmento de reta definido por dois de seus pontos fica integralmente dentro de C (uma elipse é um exemplo; "suave" significa que ela tem reta tangente em cada um de seus pontos).
   Seja P um ponto qualquer de C. Mostre que sempre existem pontos Q e R pertencentes a C tais que o triângulo PQR é equilátero.

3) Considere a função real de variável real definida por $f(x)=x\cdot e^{-x}$.
   a) **(0,75 pto)** Determine os pontos onde essa função tem tangente horizontal.
   b) **(0,75 pto)** Determine a equação da reta tangente ao gráfico dessa função no ponto de abcissa x = 2.

4) a) **(0,75 pto)** Sendo $y = \ell n(sen(3x)) + sen(\ell n(3x))$, onde $\ell n(x)$ representa o logaritmo neperiano de x, calcule $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{6}}$.

b) **(0,75 pto)** Em qual ponto da curva $y = \sqrt{1+3x}$ a reta tangente é paralela à reta $3x - 10y + 7 = 0$?

5) a) **(1,0 pto)** Considere a curva de equação $y + x\cos y = x^2 y$. Calcule a inclinação da reta tangente a essa curva no ponto $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) **(1,0 pto)** Considere a função $y = \dfrac{\sqrt{x+1}\cdot(2-x)^5}{(2x+3)^7}$.

Calcule $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

6) Às 10h da manhã, uma pessoa A está a 2,4km a oeste de uma pessoa B. A pessoa A está caminhando para o sul a uma velocidade de 2,4km/h e a pessoa B está caminhando para oeste a uma velocidade de 4,8km/h.

a) **(1,0 pto)** Às 10h20min, quão rápido a distância entre as duas pessoas está variando? Nesse instante, a distância entre elas está aumentando ou diminuindo?

b) **(0,5 pto)** Às 10h40min, quão rápido a distância entre as duas pessoas está variando? Nesse instante, a distância entre elas está aumentando ou diminuindo?

1) a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+x}\right) =$

$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+x}}\right) =$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-3x+1-(\cancel{x^2}+x)}{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4x+1}{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+x}} =$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{-4+\overbrace{\frac{1}{x}}^{0}}{\sqrt{1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}+\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}}} = \frac{-4+0}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{-4}{2} = -2.$

b) $\lim_{x\to 3}\frac{3x-9}{\operatorname{sen}(6-2x)} = \lim_{x\to 3}\frac{\frac{3x-9}{6-2x}}{\frac{\operatorname{sen}(6-2x)}{6-2x}} =$

$= \frac{\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)}{2(3-x)}}{\lim_{6-2x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(6-2x)}{6-2x}} = \frac{\lim_{x\to 3}\frac{-3}{2}}{1} = -\frac{3}{2}.$

$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

c) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2-5x+6} \right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-3)(x-2)} \right)$

$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{(x-3)+1}{(x-3)(x-2)} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-3} =$

$= \frac{1}{2-3} = \frac{1}{-1} = -1.$

2 a) $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{se } x < k \\ x^2-3, & \text{se } x \geq k \end{cases}$

$\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^-} (3x+1) = 3k+1$

$\lim_{x \to k^+} f(x) = \lim_{x \to k^+} (x^2-3) = k^2-3$

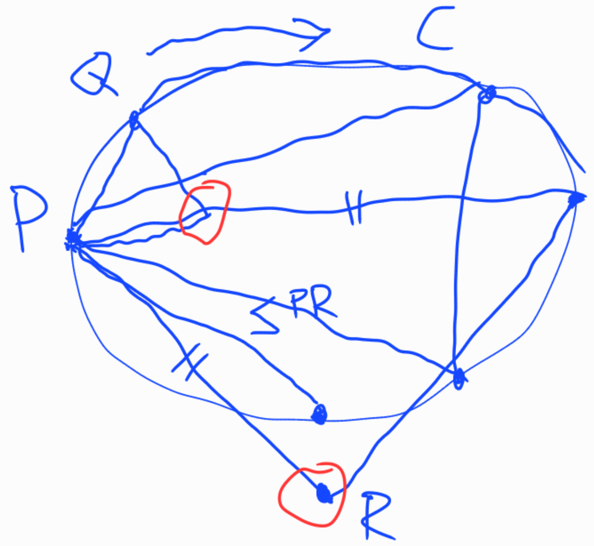
$f(k) = k^2-3$

f é contínua $\Leftrightarrow \lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^+} f(x) = f(k)$

$\Leftrightarrow 3k+1 = k^2-3 \Leftrightarrow k^2-3k-4=0 \Leftrightarrow k=4$

ou $k=-1$.

b)



Pegue um ponto Q próximo a P sobre C e construa o triângulo equilátero no interior da curva. Em seguida, pegue o ponto mais distante de P sobre C e construa o triângulo equilátero. O ponto R (3° ponto do triângulo equilátero) está no exterior de C. Assim, pelo TVI, haverá um momento em que deslocando Q sobre C, R também estará sobre C, e teremos um triângulo equilátero inscrito em C, para cada ponto P sobre C.

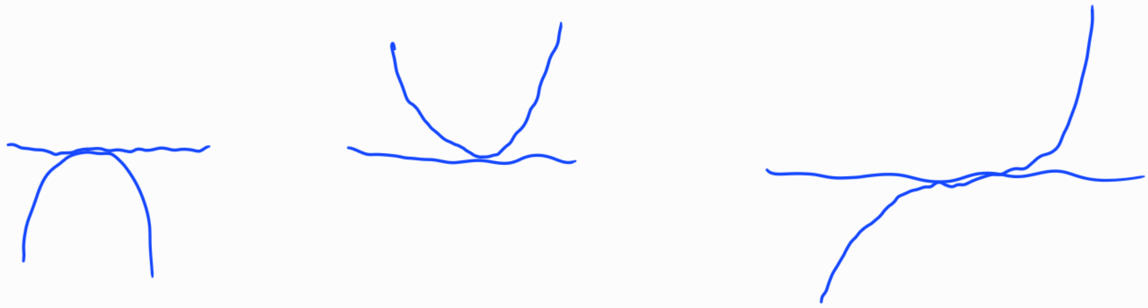
3) a) $f(x) = xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (e^{-x} \cdot (-1))$

$= e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$e^{b} > 0, \forall b \in \mathbb{R}$

$\therefore$ f tem tg horiz. apenas em $(1, e^{-1})$

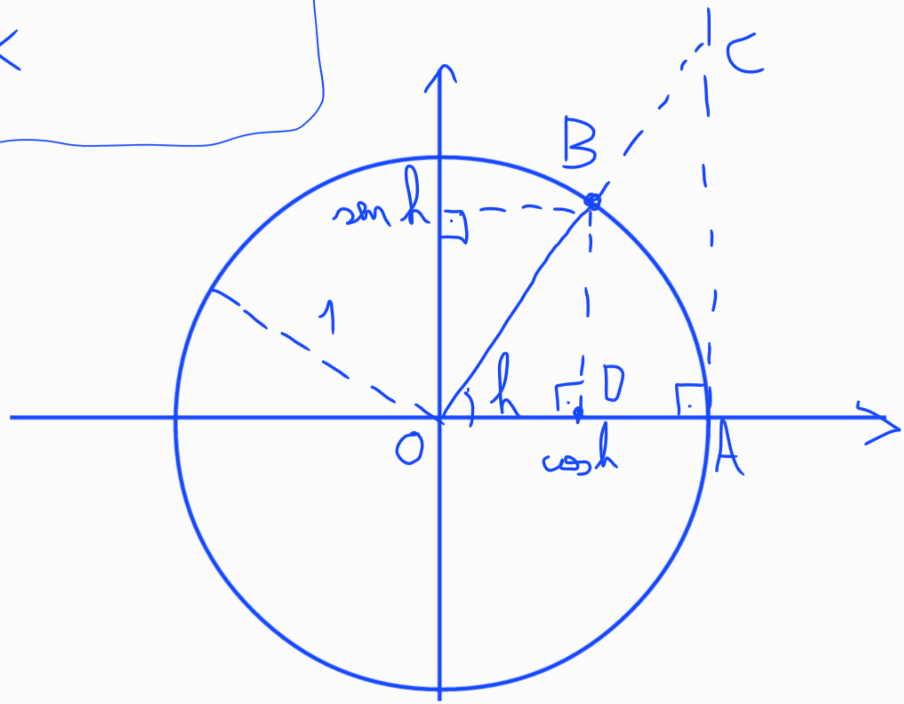


b) $f'(2) = e^{-2}(1-2) = -e^{-2} = -\dfrac{1}{e^2} \Rightarrow \boxed{y = -\dfrac{1}{e^2}\cdot x + b}$

$y(2) = f(2) \Rightarrow -\dfrac{2}{e^2} + b = 2e^{-2} = \dfrac{2}{e^2}$

$b = \dfrac{4}{e^2} = 4e^{-2} \Rightarrow \boxed{y = -\dfrac{1}{e^2}\cdot x + \dfrac{4}{e^2}}$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$



$h \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 . \quad \text{Prova:}$$

$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|OA|}{|OD|} \Rightarrow \frac{|AC|}{\operatorname{sen} h} = \frac{1}{\cos h} \Rightarrow |AC| = \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}$$

$$\frac{\operatorname{sen} h \cdot \cos h}{2} < \frac{h}{2} < \frac{\operatorname{sen} h}{2 \cos h} \Rightarrow$$

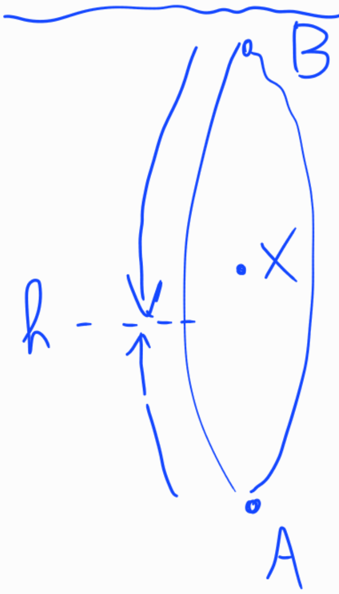
$$\Rightarrow \cos h < \frac{\operatorname{sen} h}{h} < \frac{1}{\cos h}$$

$$\lim_{h \to 0} \cos h = 1 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \quad (\checkmark)$$

O caso $h \to 0^-$ é análogo.

Problema do Monge.

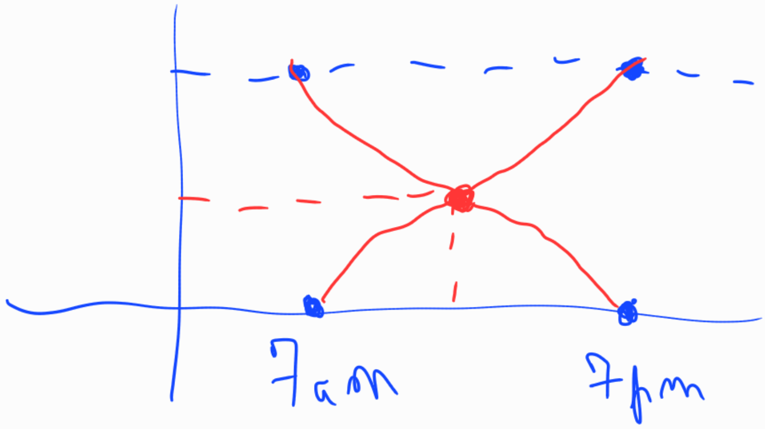


$f(\text{hor.})$ = alt. durante a subida

$g(\text{hor.}) = H -$ alt. " " descida

$f(7\text{am}) = 0$; $f(7\text{pm}) = H$

$g(7\text{am}) = H$; $g(7\text{pm}) = 0$



7am
7pm