2ª PROVA DE CÁLCULO 1- EMAp- 21/06/2021

ALUNO____s=___

INSTRUÇÕES BÁSICAS:

- Início da prova: 9 horas

- Tempo de duração da prova: 3 horas.

-Todas as respostas deverão ser justificadas.

- Consulta permitida ao livro e às anotações pessoais.

- Você tem até as 12 horas e 20 minutos para fazer o upload para o Eclass

ATENÇÃO-Use a constante **s** que aparece em algumas questões abaixo, como **a soma dos dois últimos algarismos da sua matrícula.**

1ª QUESTÃO (1,5) Dada a função f(x) = $\frac{1}{1-e^{sx}}$,determine :

a) O domínio da função f;
b) As assíntotas horizontais e verticais, caso existam;
c) Os intervalos de crescimento e decrescimento da função;
d) Os intervalos onde o gráfico da f é côncavo para baixo e onde é côncavo para cima;
e) Um esboço do gráfico da f.

2ª QUESTÃO (1,5) Determine os lados do retângulo, no primeiro quadrante, de vértices no eixo x, na origem, no eixo y e na curva y = $\frac{2s}{x^2+s^2}$ respectivamente, cuja área seja máxima.

3ª QUESTÃO (1,0) Determine o valor da constante não nula k para que $\lim_{x\to 0}(cosx)^{\frac{k}{x^2}} = e^s$.

4ª QUESTÃO (1,5) Considere a curva de equação y = f(x) cuja derivada segunda em cada ponto é dada por f''(x) = x + s$(cosx)^2$.Determine uma expressão para a curva C, sabendo que o coeficiente angular da reta tangente à curva C no ponto (0,$\frac{7s}{8}$) é igual a -1.

5ª QUESTÃO (2,0) Resolva as integrais:

a) $\int_0^{2s} |s^2 - x^2|dx$ b) $\int \frac{x^2+s}{\sqrt{1-x^2}}dx$ c) $\int_1^{\infty} \frac{x^2+8x-3s}{x^3+3x^2}dx$

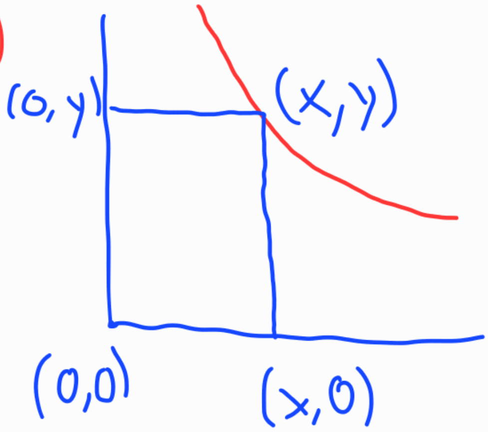
6ª QUESTÃO (1,5) Determine a área da região limitada pelos gráficos de f(x) = $\frac{lnx}{x^2}$, g(x) = $\frac{1}{x^2}$ e a reta x = 1.

7ª QUESTÃO (1,0) Considere f(x) = e^{2x}+ 2e^x + s.

a) Mostre que f possui inversa definida em toda reta real.

b) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da f^{-1} no ponto (3+s,0).

BOA PROVA!

② 

$$y = \frac{2s}{x^2+s^2}$$

$$A(x) = x \cdot y = \frac{2xs}{x^2+s^2}$$

$$\frac{d}{dx}A(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2xs}{x^2+s^2}\right) = \frac{(x^2+s^2)\cdot 2s - 2xs \cdot 2x}{(x^2+s^2)^2}$$

$$= \frac{2sx^2 + 2s^3 - 4sx^2}{(x^2+s^2)^2} = \frac{2s^3 - 2sx^2}{(x^2+s^2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2s(s^2-x^2)}{(x^2+s^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2s(s^2-x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = s^2 \Leftrightarrow x = \overset{+}{\cancel{-}}\, s \Rightarrow x = s$$

$$\Rightarrow y = \frac{2s}{s^2+s^2} = \frac{2s}{2s^2} = \frac{1}{s}$$

Os lados do ret. de A máx. são $x = s$ e $y = \frac{1}{s}$.

③ $y = (\cos x)^{\frac{K}{x^2}} \Rightarrow \ln y = \frac{K}{x^2} \cdot \ln(\cos x) =$

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{K \ln(\cos x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{K \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x)}{2x} = -\frac{K}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} =$$

$$= -\frac{K}{2} \cdot 1 = -\frac{K}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{K}{2}} = e^{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{K}{2} = n \Leftrightarrow \boxed{K = -2n}$$

④ $\begin{cases} f(0) = \frac{7n}{8} \\ f'(0) = -1 \end{cases}$; $f''(x) = x + n \cdot (\cos x)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (x + n \cdot (\cos x)^2)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + n \cdot \int \cos^2 x\,dx = \frac{x^2}{2} + n \cdot \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx =$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$$= \frac{x^2}{2} + \pi \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{\text{sen}\, 2x}{4} \right) + K_1 =$$

$$f'(0) = K_1 = -1 \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi \cdot \text{sen}\, 2x}{4} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x)\, dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi \cdot \text{sen}\, 2x}{4} - 1 \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{\pi x^2}{4} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\cos 2x}{2} - x + K_2 \Rightarrow$$

$$f(0) = -\frac{\pi}{8} + K_2 = \frac{7\pi}{8} \Rightarrow K_2 = \pi$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{\pi x^2}{4} - \frac{\pi \cdot \cos 2x}{8} - x + \pi .$$

5a) $$\int_0^{2\pi} |\pi^2 - x^2|\, dx = \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (x^2 - \pi^2)\, dx =$$

$$= \left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{x^3}{3} - \pi^2 x \right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \pi^3 - \frac{\pi^3}{3} + \left(\frac{8\pi^3}{3} - 2\pi^3 \right) - \left(\frac{\pi^3}{3} - \pi^3 \right) =$$

$$= 2\pi^3$$

b) $$\int \frac{x^2+n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\cos^2\theta + n}{\operatorname{sen}\theta}\cdot(-\operatorname{sen}\theta\, d\theta) =$$

$$1-x^2>0 \iff x^2<1 \iff -1<x<1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\cos\theta,\quad \theta\in(0,\pi) \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2\theta} =$$

$$= |\operatorname{sen}\theta| = \operatorname{sen}\theta \;;\quad dx = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= -\int(\cos^2\theta + n)\,d\theta = -\int\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} + n\right)d\theta =$$

$$= -\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4} + n\cdot\theta + C\right] =$$

$$= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\theta + \frac{1}{4}\cdot\operatorname{sen}2\theta + C =$$

$$x=\cos\theta \Rightarrow \theta = \arccos x \qquad \operatorname{sen}(2\arccos x)$$

$$x^2 = \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \Rightarrow \cos 2\theta = 2x^2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}2\theta = \pm\sqrt{1-(4x^4-4x^2+1)} = \pm\sqrt{4x^2-4x^4} = \pm 2\sqrt{x^2-x^4}$$

$$= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\arccos x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\cdot\arccos x) + C$$

c) $$\int_1^\infty \frac{x^2+8x-3n}{x^3+3x^2}\,dx = \int_1^\infty \frac{x^2+8x-3n}{x^2(x+3)}\,dx =$$

$$\frac{x^2+8x-3\alpha}{x^2(x+3)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+3} =$$

$$=\frac{Ax(x+3)+B(x+3)+Cx^2}{x^2(x+3)} =$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(3A+B)x+3B}{x^2(x+3)}$$

$$\begin{cases} A+C=1 \\ 3A+B=8 \\ 3B=-3\alpha \end{cases} \Rightarrow B=-\alpha \Rightarrow A=\frac{8+\alpha}{3} \Rightarrow C=$$

$$=1-\frac{8+\alpha}{3}=\frac{-5-\alpha}{3}$$

$$=\int_1^{\infty}\left(\frac{8+\alpha}{3x}-\frac{\alpha}{x^2}-\frac{\alpha+5}{3x+9}\right)dx =$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\left(\frac{8+\alpha}{3x}-\frac{\alpha}{x^2}-\frac{\alpha+5}{3x+9}\right)dx =$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left[\frac{\alpha+8}{3}\cdot\ln x+\frac{\alpha}{x}-\frac{\alpha+5}{3}\ln(x+3)\right]_1^{A} =$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left[\frac{a+8}{3} \cdot \ln A + \frac{a}{A} - \frac{a+5}{3} \ln (A+3) - a + \frac{a+5}{3} \ln 4 \right] = \frac{a+5}{3} \cdot \ln 4 - a +$$

$$+ \lim_{A \to \infty} \left(\frac{a+8}{3} \cdot \ln A - \frac{a+5}{3} \ln (A+3) \right) =$$

$$= \frac{a+5}{3} \cdot \ln 4 - a + \lim_{A \to \infty} \left(\ln A^{\left(\frac{a+8}{3}\right)} - \ln (A+3)^{\frac{a+5}{3}} \right)$$

$$\ln \left(\frac{A^{\left(\frac{a+8}{3}\right)}}{(A+3)^{\left(\frac{a+5}{3}\right)}} \right)$$

$$\ln \left(\lim_{A \to \infty} \frac{\left(\frac{a+8}{3}\right) \cdot A^{\left(\frac{a+8}{3} - 1\right)}}{\left(\frac{a+5}{3}\right) \cdot (A+3)^{\left(\frac{a+5}{3} - 1\right)}} \right)$$

6 $\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} \\ g(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right\}$ $\dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} \iff \ln x = 1 \iff x = e$

$y = \dfrac{1}{e^2} \implies P = \left(e, \dfrac{1}{e^2}\right)$

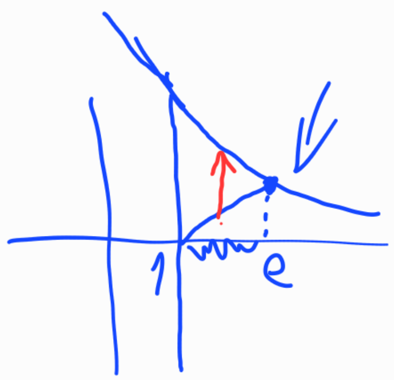
$$A = \int_1^e \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right]_1^e =$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$u = \ln x$ $\qquad du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = \dfrac{dx}{x^2}$ $\qquad v = -\dfrac{1}{x}$

$$= \left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^e = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \;\therefore\; A = \frac{1}{e}$$



7 a) $f(x) = e^{2x} + 2e^{x} + a$

$f'(x) = 2e^{2x} + 2e^{x} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

f é bijetiva $\Rightarrow \exists f^{-1}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $$(f^{-1})'(a+3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a+3))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}.$$

$y = f^{-1}(a+3) \Rightarrow a+3 = f(y) = e^{2y} + 2e^{y} + a \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{2y} + 2e^{y} = 3 \Rightarrow z = e^{y} \Rightarrow z^2 + 2z - 3 = 0$

$\Rightarrow z = \dfrac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2 \ \begin{cases} 1 \\ \cancel{-3} \end{cases} \Rightarrow e^{y} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 0$

1 a) $D(f) = \mathbb{R}^*$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{ax}}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - e^{ax}} = 0 \Rightarrow y = 0$ é assínt. hor.

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - e^{ax}} = 1 \Rightarrow y = 1$ é assínt. hor.

$\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 - e^{ax}} = +\infty \ \Bigg\} \ x = 0$ é assínt. vert.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1-e^{ax}} = -\infty \quad \Big)$$

c) $$f'(x) = -\frac{1}{(1-e^{ax})^2} \cdot (-a e^{ax}) = \frac{a e^{ax}}{(1-e^{ax})^2}$$

$f'(x) > 0, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

d) $$f''(x) = \frac{(1-e^{ax})^2 \cdot a^2 e^{ax} - a e^{ax} \cdot 2(1-e^{ax}) \cdot (-a e^{ax})}{(1-e^{ax})^4}$$

$$= a^2 e^{ax}(1-e^{ax})^2 + 2a^2 e^{2ax}(1-e^{ax}) =$$

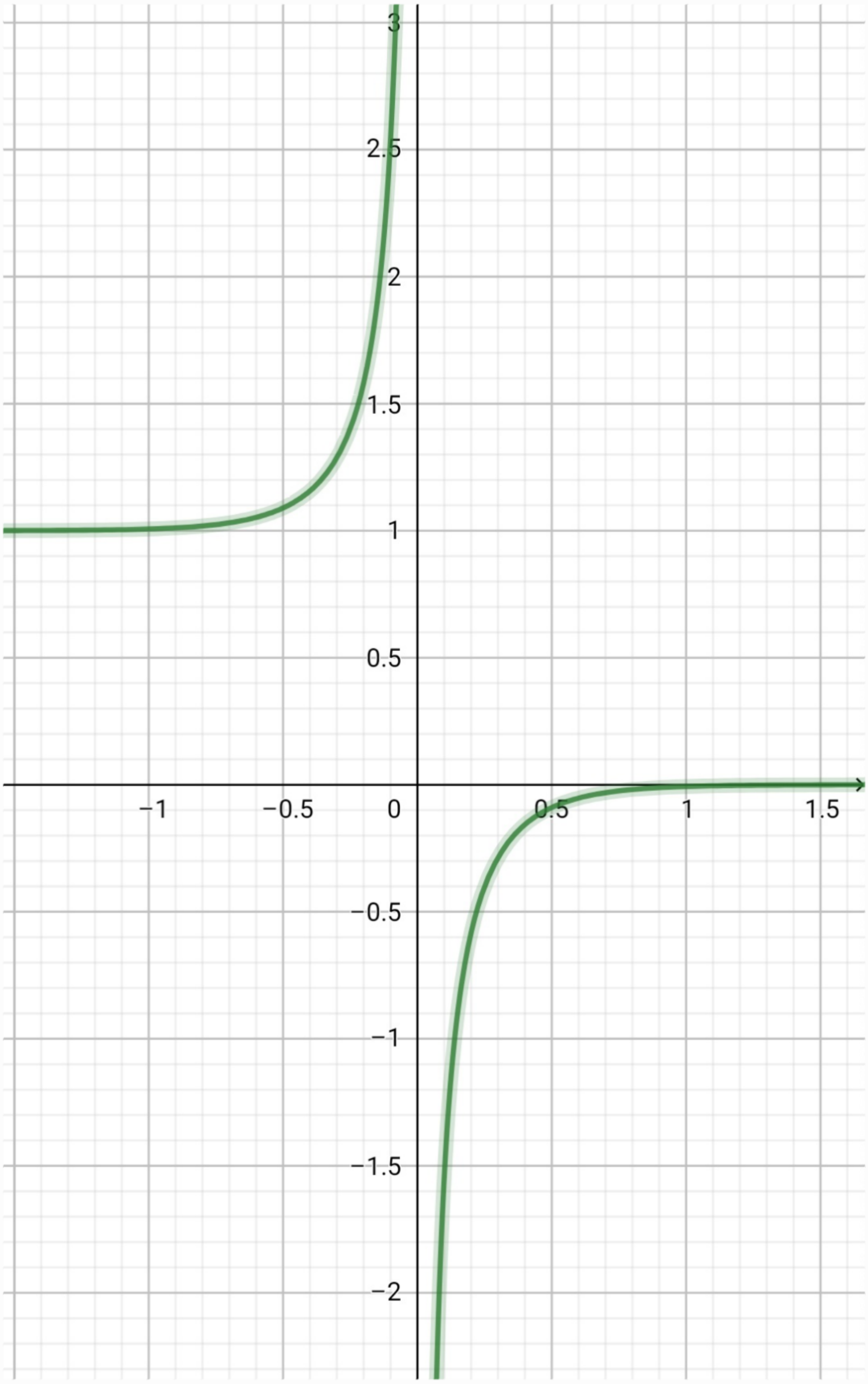
$$= a^2 e^{ax}(e^{2ax} - 2e^{ax} + 1) + 2a^2 e^{2ax} - 2a^2 e^{3ax}$$

$$= -a^2 e^{3ax} + a^2 e^{ax} = \underbrace{a^2 e^{ax}}_{+}(1-e^{2ax})$$

$x < 0$: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ côncava p/ cima

$x > 0$: $f''(x) < 0 \Rightarrow$ côncava p/ baixo

e)



3
2.5
2
1.5
1
0.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
−0.5
−1
−1.5
−2