

2

Limites e Derivadas

Uma bola cai com cada vez mais velocidade com o passar do tempo. Galileu descobriu que a distância da queda é proporcional ao quadrado do tempo em que ela está em queda. O Cálculo então nos permite conhecer a velocidade da bola em um dado momento.



1986 Petcolas/Megna, Fundamental Photographs, NYC

Em *Uma Apresentação do Cálculo*, vimos como a ideia de limite é a base dos vários ramos do cálculo. Por isso, é apropriado começar nosso estudo de cálculo examinando os limites e suas propriedades. O tipo especial de limite usado para encontrar as tangentes e as velocidades dá origem à ideia central do cálculo diferencial – a derivada.

2.1 Os Problemas da Tangente e da Velocidade

Nesta seção vamos ver como surgem os limites quando tentamos encontrar a tangente de uma curva ou a velocidade de um objeto.

O Problema da Tangente

A palavra *tangente* vem do latim *tangens*, que significa “tocando”. Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Em outros termos, uma reta tangente deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato. Como tornar precisa essa ideia?

Para um círculo, poderíamos simplesmente, como Euclides, dizer que a tangente é uma reta que intercepta o círculo uma única vez, conforme a Figura 1(a). Para as curvas mais complicadas essa definição é inadequada. A Figura 1(b) mostra duas retas, l e t , passando através de um ponto P em uma curva C . A reta l intersecta C somente uma vez, mas certamente não se parece com o que pensamos ser uma tangente. A reta t , por outro lado, parece ser uma tangente, mas intercepta C duas vezes.

Para sermos objetivos, vamos examinar no exemplo a seguir o problema de encontrar uma reta t tangente à parábola $y = x^2$.

EXEMPLO 1 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

SOLUÇÃO Podemos encontrar uma equação da reta tangente t assim que soubermos sua inclinação m . A dificuldade está no fato de conhecermos somente o ponto P , em t , quando precisamos de dois pontos para calcular a inclinação. Observe, porém, que podemos calcular uma aproximação de m escolhendo um ponto próximo $Q(x, x^2)$ sobre a parábola (como na Figura 2) e calculando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ . [Uma **reta secante**, do latim *secans*, significando corte, é uma linha que corta (intersecta) uma curva mais de uma vez.]

Escolhemos $x \neq 1$ de forma que $Q \neq P$. Então

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por exemplo, para o ponto $Q(1,5, 2,25)$, temos

$$m_{PQ} = \frac{2,25 - 1}{1,5 - 1} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5$$

As tabelas mostram os valores de m_{PQ} para vários valores de x próximos a 1. Quanto mais próximo Q estiver de P , mais próximo x estará de 1, e a tabela indica que m_{PQ} estará mais próximo de 2. Isso sugere que a inclinação da reta tangente t deve ser $m = 2$.

Dizemos que a inclinação da reta tangente é o *limite* das inclinações das retas secantes e expressamos isso simbolicamente escrevendo que

$$\lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = m \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Supondo que a inclinação da reta tangente seja realmente 2, podemos usar a forma ponto-inclinação da equação de uma reta (veja o Apêndice B) para escrever a equação da tangente no ponto $(1, 1)$ como

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{ou} \quad y = 2x - 1$$

A Figura 3 ilustra o processo de limite que ocorre neste exemplo. À medida que Q tende a P ao longo da parábola, as retas secantes correspondentes giram em torno de P e tendem à reta tangente t .

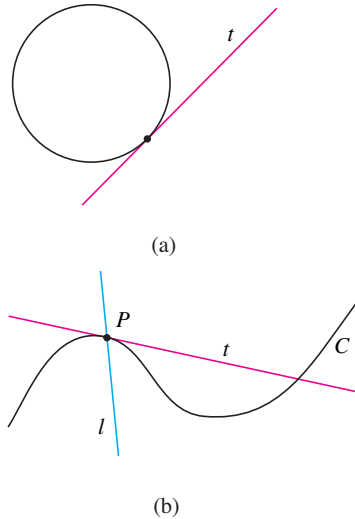


FIGURA 1

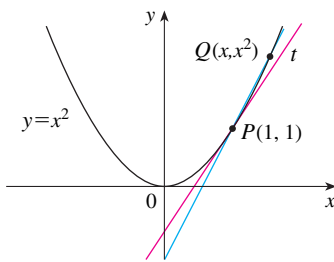


FIGURA 2

x	m_{PQ}
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001

x	m_{PQ}
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

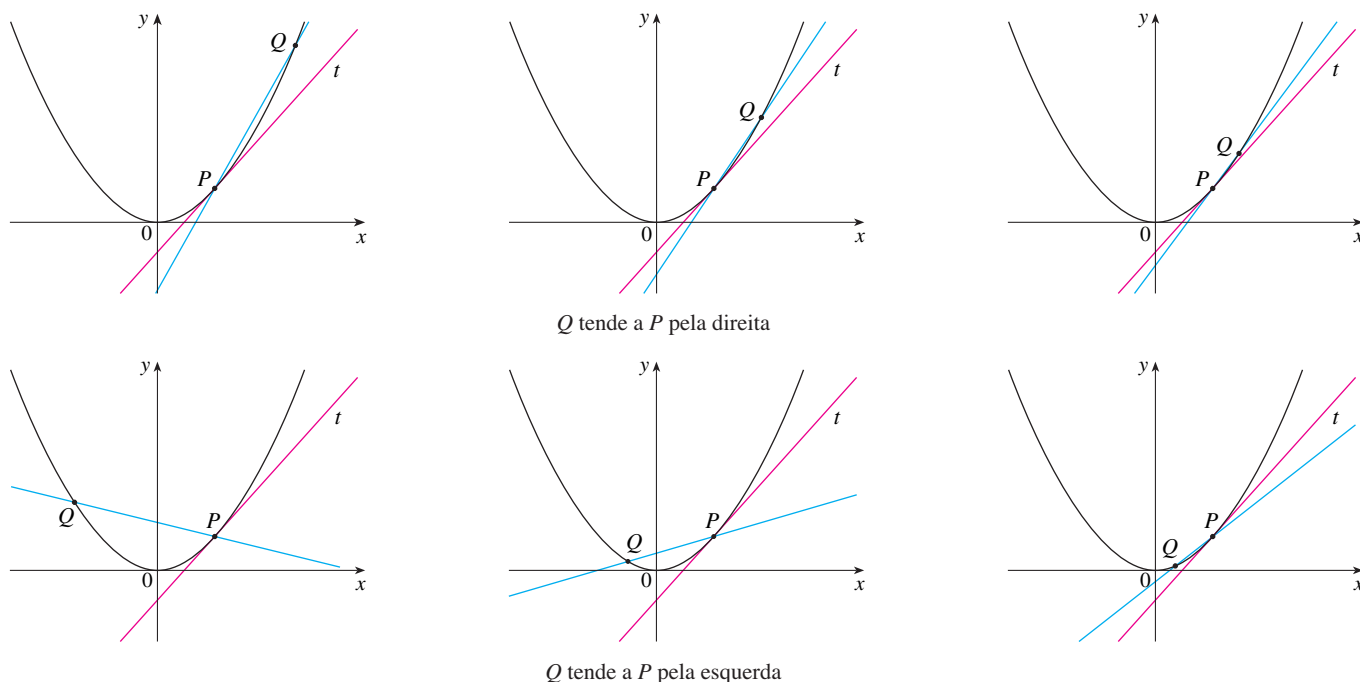


FIGURA 3

Em ciências, muitas funções não são descritas por equações explícitas; elas são definidas por dados experimentais. O exemplo a seguir mostra como estimar a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma dessas funções.

EXEMPLO 2 O flash de uma câmera opera armazenando carga em um capacitor e liberando-a instantaneamente ao ser disparado. Os dados na tabela à esquerda descrevem a carga Q armazenada no capacitor (medida em microcoulombs) no instante t (medido em segundos após o flash ter sido disparado). Use os dados para esboçar o gráfico desta função e estimar a inclinação da reta tangente no ponto onde $t = 0,04$. [*Observação:* A inclinação da reta tangente representa a corrente elétrica fluindo do capacitor à lâmpada do flash (medida em microamperes).]

SOLUÇÃO Na Figura 4 marcamos os pontos dados e os usamos para esboçar uma curva que aproxima o gráfico da função.

TEC Em *Visual 2.1*, você pode ver como o processo na Figura 3 funciona para funções adicionais.

t	Q
0,00	100,00
0,02	81,87
0,04	67,03
0,06	54,88
0,08	44,93
0,10	36,76

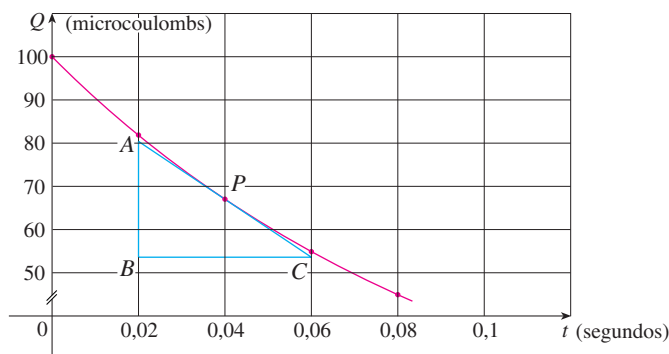


FIGURA 4

Dados os pontos $P(0,04; 67,03)$ e $R(0,00; 100,00)$ no gráfico, descobrimos que a inclinação da reta secante PR é

$$m_{PR} = \frac{100,00 - 67,03}{0,00 - 0,04} = -824,25.$$

R	m_{PR}
(0,00; 100,00)	-824,25
(0,02; 81,87)	-742,00
(0,06; 54,88)	-607,50
(0,08; 44,93)	-552,50
(0,10; 36,76)	-504,50

O significado físico da resposta do Exemplo 2 é que a corrente que flui do capacitor para o flash após 0,04 s é de cerca de -670 microamperes.

A tabela à esquerda mostra os resultados de cálculos semelhantes para as inclinações de outras retas secantes. A partir dela podemos esperar que a inclinação da reta tangente em $t = 0,04$ esteja em algum ponto entre -742 e -607,5. De fato, a média das inclinações das duas retas secantes mais próximas é

$$\frac{1}{2}(-742 - 607,5) = -674,75$$

Assim, por esse método, estimamos que a inclinação da reta tangente é -675.

Outro método é traçar uma aproximação da reta tangente em P e medir os lados do triângulo ABC , como na Figura 4. Isso dá uma estimativa da inclinação da reta tangente como

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80,4 - 53,6}{0,06 - 0,02} = -670$$

O Problema da Velocidade

Se você observar o velocímetro de um carro no tráfego urbano, verá que o ponteiro não fica parado por muito tempo; isto é, a velocidade do carro não é constante. Podemos conjecturar, pela observação do velocímetro, que o carro tem uma velocidade definida em cada momento. Mas como definir essa velocidade “instantânea”? Vamos investigar o exemplo da bola caindo.

EXEMPLO 3 Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.

SOLUÇÃO Por meio de experimentos feitos séculos atrás, Galileu descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda. (Esse modelo para a queda livre despreza a resistência do ar.) Se a distância percorrida após t segundos for chamada $s(t)$ e medida em metros, então a Lei de Galileu pode ser expressa pela equação

$$s(t) = 4,9t^2$$

A dificuldade em encontrar a velocidade após 5 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo ($t = 5$), ou seja, não temos um intervalo de tempo. Porém, podemos aproximar a quantidade desejada calculando a velocidade média sobre o breve intervalo de tempo de um décimo de segundo, de $t = 5$ até $t = 5,1$:

$$\begin{aligned} \text{velocidade média} &= \frac{\text{mudança de posição}}{\text{tempo decorrido}} \\ &= \frac{s(5,1) - s(5)}{0,1} \\ &= \frac{4,9(5,1)^2 - 4,9(5)^2}{0,1} = 49,49 \text{ m/s} \end{aligned}$$

A tabela a seguir mostra os resultados de cálculos similares da velocidade média em períodos de tempo cada vez menores.

Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53,9
$5 \leq t \leq 5,1$	49,49
$5 \leq t \leq 5,05$	49,245
$5 \leq t \leq 5,01$	49,049
$5 \leq t \leq 5,001$	49,0049

Parece que, à medida que encurtamos o período do tempo, a velocidade média fica cada vez mais próxima de 49 m/s. A **velocidade instantânea** quando $t = 5$ é definida como o valor limite dessas velocidades médias em períodos de tempo cada vez menores, começando em $t = 5$. Assim, a velocidade (instantânea) após 5 segundos é

$$v = 49 \text{ m/s}$$



A Torre CN em Toronto foi o maior edifício do mundo por 32 anos.

Você deve ter percebido que os cálculos usados na solução desse problema são muito semelhantes àqueles usados anteriormente nesta seção para encontrar as tangentes. Na realidade, há uma estreita relação entre o problema da tangente e o cálculo de velocidades. Se traçarmos o gráfico da função distância percorrida pela bola (como na Figura 5) e considerarmos os pontos $P(a; 4,9a^2)$ e $Q(a+h; 4,9(a+h)^2)$ sobre o gráfico, então a inclinação da reta secante PQ será

$$m_{PQ} = \frac{4,9(a+h)^2 - 4,9a^2}{(a+h) - a}$$

que é igual à velocidade média no intervalo de tempo $[a, a+h]$. Logo, a velocidade no instante $t = a$ (o limite dessas velocidades médias quando h tende a 0) deve ser igual à inclinação da reta tangente em P (o limite das inclinações das retas secantes).

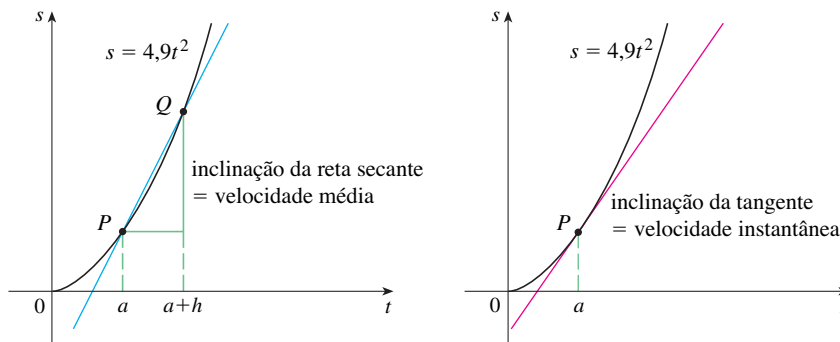


FIGURA 5

Os Exemplos 1 e 3 mostram que para resolver problemas de velocidade e de tangente precisamos encontrar limites. Após estudarmos métodos para o cálculo de limites nas próximas quatro seções, retornaremos aos problemas de encontrar tangentes e velocidades na Seção 2.7.

2.1 Exercícios

1. Um tanque com capacidade para 1.000 litros de água é drenado pela base em meia hora. Os valores na tabela mostram o volume V de água remanescente no tanque (em litros) após t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (L)	694	444	250	111	28	0

- (a) Se P é o ponto $(15, 250)$ sobre o gráfico de V , encontre as inclinações das retas secantes PQ , onde Q é o ponto sobre o gráfico com $t = 5, 10, 20, 25$ e 30 .
- (b) Estime a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas retas secantes.
- (c) Use um gráfico da função para estimar a inclinação da tangente em P . (Essa inclinação representa a razão na qual a água flui do tanque após 15 minutos.)
2. Um monitor é usado para medir os batimentos cardíacos de um paciente após uma cirurgia. Ele fornece um número de batimentos cardíacos após t minutos. Quando os dados na tabela são colocados em um gráfico, a inclinação da reta tangente representa a taxa de batimentos cardíacos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Batimentos cardíacos	2.530	2.661	2.806	2.948	3.080

O monitor estima esse valor calculando a inclinação de uma reta secante. Use os dados para estimar a taxa de batimentos cardíacos após 42 minutos, utilizando a reta secante entre os pontos para os valores de t dados.

- (a) $t = 36$ e $t = 42$ (b) $t = 38$ e $t = 42$
 (c) $t = 40$ e $t = 42$ (d) $t = 42$ e $t = 44$

Quais são suas conclusões?

3. O ponto $P(2, -1)$ está sobre a curva $y = 1/(1-x)$.
- (a) Se Q é o ponto $(x, 1/(1-x))$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ , com precisão de seis casas decimais, para os seguintes valores de x :
- (i) 1,5 (ii) 1,9 (iii) 1,99 (iv) 1,999
 (v) 2,5 (vi) 2,1 (vii) 2,01 (viii) 2,001
- (b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(2, -1)$.
- (c) Usando a inclinação da parte (b), encontre uma equação da reta tangente à curva em $P(2, -1)$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} &= \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{4,9t^2 - 4,9 \cdot 5^2}{t - 5} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{4,9(t^2 - 5^2)}{t - 5} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{4,9(t-5)(t+5)}{t-5} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} 4,9(t+5) = 4,9 \cdot 10 = 49 \end{aligned}$$

$$\frac{N(42) - N(36)}{42 - 36} =$$

4. O ponto $P(0,5; 0)$ está sobre a curva $y = \cos \pi x$.
- (a) Se Q é o ponto $(x, \cos \pi x)$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ (com precisão de seis casas decimais) para os seguintes valores de x :
- (i) 0 (ii) 0,4 (iii) 0,49 (iv) 0,499
(v) 1 (vi) 0,6 (vii) 0,51 (viii) 0,501
- (b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(0,5; 0)$.
- (c) Use a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P(0,5; 0)$.
- (d) Esboce a curva, duas das retas secantes e a reta tangente.
5. Uma bola é atirada no ar com velocidade de 10 m/s. Sua altura em metros após t segundos é dada por $y = 10t - 4,9t^2$.
- (a) Encontre a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 1,5$ s e dura
- (i) 0,5 s (ii) 0,1 s
(iii) 0,05 s (iv) 0,01 s
- (b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1,5$ s.
6. Se uma pedra for jogada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) t segundos mais tarde é dada por $y = 10t - 1,86t^2$.
- (a) Encontre a velocidade média entre os intervalos de tempo dados:
- (i) [1, 2] (ii) [1; 1,5] (iii) [1; 1,1]
(iv) [1; 1,01] (v) [1; 1,001]
- (b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1$.

7. A tabela mostra a posição de um ciclista.

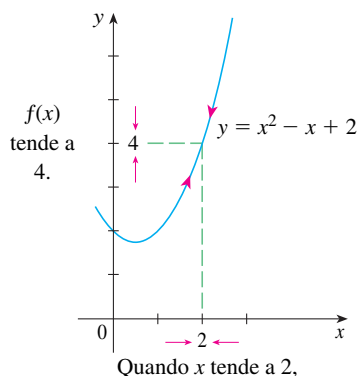
t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1,4	5,1	10,7	17,7	25,8

- (a) Encontre a velocidade média nos períodos de tempo a seguir:
- (i) [1, 3] (ii) [2, 3] (iii) [3, 5] (iv) [3, 4]
- (b) Use o gráfico de s como uma função de t para estimar a velocidade instantânea quando $t = 3$.
8. O deslocamento (em centímetros) de uma partícula se movendo para frente e para trás ao longo de uma reta é dado pela equação de movimento $s = 2 \sin \pi t + 3 \cos \pi t$, em que t é medido em segundos.
- (a) Encontre a velocidade média em cada período de tempo:
- (i) [1, 2] (ii) [1; 1,1]
(iii) [1; 1,01] (iv) [1; 1,001]
- (b) Estime a velocidade instantânea da partícula quando $t = 1$.
9. O ponto $P(1, 0)$ está sobre a curva $y = \sin(10\pi/x)$.
- (a) Se Q for o ponto $(x, \sin(10\pi/x))$, encontre a inclinação da reta secante PQ (com precisão de quatro casas decimais) para $x = 2, 1,5, 1,4, 1,3, 1,2, 1,1, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8$ e $0,9$. As inclinações parecem tender a um limite?
- (b) Use um gráfico da curva para explicar por que as inclinações das retas secantes da parte (a) não estão próximas da inclinação da reta tangente em P .
- (c) Escolhendo as retas secantes apropriadas, estime a inclinação da reta tangente em P .

2.2 O Limite de uma Função

Tendo visto na seção anterior como surgem os limites quando queremos encontrar as tangentes a uma curva ou a velocidade de um objeto, vamos voltar nossa atenção para os limites em geral e para os métodos de calculá-los.

Vamos analisar o comportamento da função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2. A tabela a seguir fornece os valores de $f(x)$ para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2.



x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

FIGURA 1

Da tabela e do gráfico de f (uma parábola) mostrado na Figura 1, vemos que quando x estiver próximo de 2 (de qualquer lado de 2), $f(x)$ tenderá a 4. De fato, parece que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4 quanto quisermos, ao tornar x suficientemente próximo de 2. Expressamos isso dizendo que “o limite da função $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x tende a 2 é igual a 4”. A notação para isso é

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

$$2^2 - 2 + 2$$

Em geral, usamos a seguinte notação.

1 Definição Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a . (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a , exceto possivelmente no próprio a .) Então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

e dizemos “o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é igual a L ”

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a .

Grosso modo, isso significa que os valores de $f(x)$ tendem a L quando x tende a a . Em outras palavras, os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas $x \neq a$. (Uma definição mais precisa será dada na Seção 2.4.)

Uma notação alternativa para

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

é $f(x) \rightarrow L$ quando $x \rightarrow a$

que geralmente é lida como “ $f(x)$ tende a L quando x tende a a ”.

Observe a frase “mas $x \neq a$ ” na definição de limite. Isso significa que, ao procurar o limite de $f(x)$ quando x tende a a , nunca consideramos $x = a$. Na verdade, $f(x)$ não precisa sequer estar definida quando $x = a$. A única coisa que importa é como f está definida próximo de a .

A Figura 2 mostra os gráficos de três funções. Note que, na parte (c), $f(a)$ não está definida e, na parte (b), $f(a) \neq L$. Mas, em cada caso, não importando o que acontece em a , é verdade que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

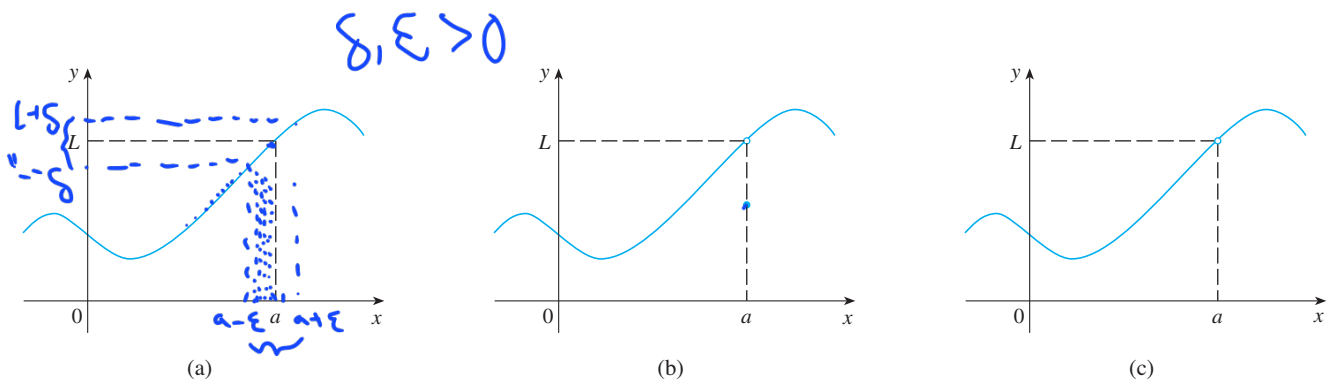


FIGURA 2 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ nos três casos

EXEMPLO 1 Estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$.

SOLUÇÃO Observe que a função $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ não está definida quando $x = 1$, mas isso não importa, pois a definição de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que estão próximos de a , mas não são iguais a a .

As tabelas à esquerda na próxima página dão os valores de $f(x)$ (com precisão de seis casas decimais) para os valores de x que tendem a 1 (mas não são iguais a 1). Com base nesses valores, podemos conjecturar que

$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

O Exemplo 1 está ilustrado pelo gráfico de f na Figura 3. Agora, vamos mudar ligeiramente f definindo seu valor como 2 quando $x = 1$ e chamando a função resultante de g :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Essa nova função g tem o mesmo limite quando x tende a 1 (veja a Figura 4).

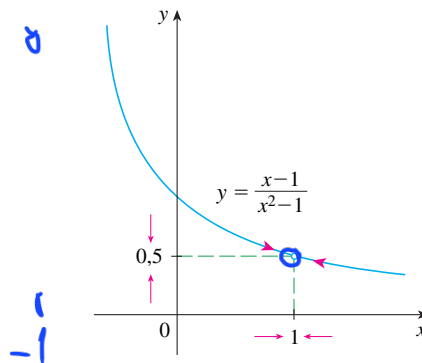


FIGURA 3

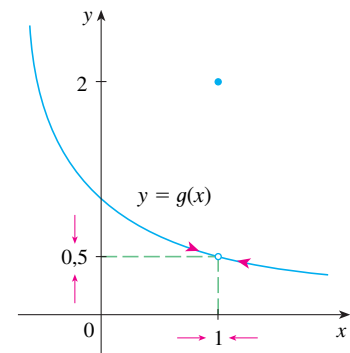


FIGURA 4

EXEMPLO 2 Estime o valor de $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2}$.

SOLUÇÃO A tabela fornece uma lista de valores da função para vários valores de t próximos de 0.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{t^2+9} - 3)(\sqrt{t^2+9} + 3)}{t^2(\sqrt{t^2+9} + 3)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + 9 - 9}{t^2(\sqrt{t^2+9} + 3)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9} + 3} = \frac{1}{6}$$

t	$\frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2}$
$\pm 1,0$	0,16228
$\pm 0,5$	0,16553
$\pm 0,1$	0,16662
$\pm 0,05$	0,16666
$\pm 0,01$	0,16667

t	$\frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2}$
$\pm 0,0005$	0,16800
$\pm 0,0001$	0,20000
$\pm 0,00005$	0,00000
$\pm 0,00001$	0,00000

À medida que t tende a 0, os valores da função parecem tender a 0,1666666... e, assim, podemos conjecturar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

O que aconteceria no Exemplo 2 se tivéssemos dado valores ainda menores para t ? A tabela ao lado mostra os resultados obtidos em uma calculadora; você pode observar que algo estranho acontece.

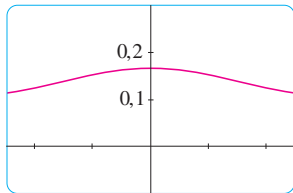
Se você tentar fazer esses cálculos em sua calculadora, poderá obter valores diferentes, mas finalmente vai obter o valor 0 para um t suficientemente pequeno. Isso significa que a resposta é realmente 0, e não $\frac{1}{6}$? Não, o valor do limite é $\frac{1}{6}$, como veremos na próxima seção. O problema é que a **calculadora dá valores falsos**, pois $\sqrt{t^2+9}$ fica muito próximo de 3 quando t é pequeno. (Na realidade, quando t é suficientemente pequeno, o valor obtido na calculadora para $\sqrt{t^2+9}$ é 3,000... com tantas casas decimais quanto a calculadora for capaz de fornecer).

Para maiores explicações do motivo de calculadoras às vezes fornecerem valores falsos, acesse na Trilha "Mentiras que a minha calculadora e computador me contaram". Leia com atenção o item "Os perigos da subtração".

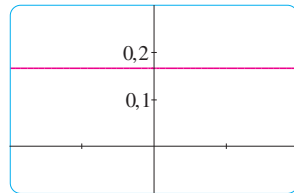
Algo muito parecido acontece ao tentarmos fazer o gráfico da função

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$$

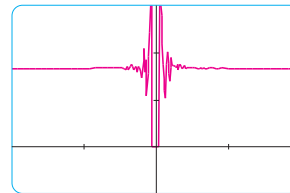
do Exemplo 2 em uma calculadora gráfica ou computador. As partes (a) e (b) da Figura 5 mostram gráficos bem precisos de f , quando usamos o *trace mode* (se disponível), podemos facilmente estimar que o limite é de cerca de $\frac{1}{6}$. Porém, se dermos um *zoom*, como em (c) e (d), obteremos gráficos imprecisos, novamente em virtude de problemas com a subtração.



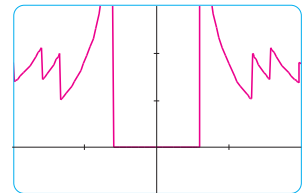
(a) $[-5, 5]$ por $[-0,1; 0,3]$



(b) $[-0,1; 0,1]$ por $[-0,1; 0,3]$



(c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0,1; 0,3]$



(d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0,1; 0,3]$

FIGURA 5

EXEMPLO 3 Faça uma estimativa de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

SOLUÇÃO A função $f(x) = (\sin x)/x$ não está definida quando $x = 0$. Usando uma calculadora (e lembrando-se de que, se $x \in \mathbb{R}$, $\sin x$ indica o seno de um ângulo cuja medida em *radianos* é x), construímos a tabela ao lado usando valores com precisão de oito casas decimais. Da tabela e do gráfico da Figura 6, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Essa suposição está de fato correta, como será demonstrado no Capítulo 3 usando argumentos geométricos.

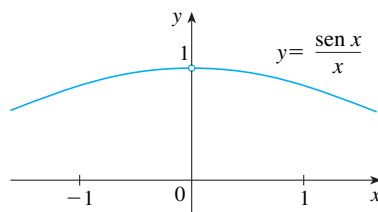


FIGURA 6

EXEMPLO 4 Analise $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$.

SOLUÇÃO Mais uma vez a função $f(x) = \sin(\pi/x)$ não está definida em 0. Calculando a função para alguns valores pequenos de x , temos

$$f(1) = \sin \pi = 0 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \sin 2\pi = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \sin 3\pi = 0 \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \sin 4\pi = 0$$

$$f(0,1) = \sin 10\pi = 0 \quad f(0,01) = \sin 100\pi = 0$$

Da mesma maneira, $f(0,001) = f(0,0001) = 0$. Com base nessa informação, ficaríamos tentados a conjecturar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} = 0.$$

x	$\frac{\sin x}{x}$
$\pm 1,0$	0,84147098
$\pm 0,5$	0,95885108
$\pm 0,4$	0,97354586
$\pm 0,3$	0,98506736
$\pm 0,2$	0,99334665
$\pm 0,1$	0,99833417
$\pm 0,05$	0,99958339
$\pm 0,01$	0,99998333
$\pm 0,005$	0,99999583
$\pm 0,001$	0,99999983

Sistemas de Computação Algébrica

Os sistemas de computação algébrica (SCA) têm comandos para calcular limites. A fim de evitar falhas como as ilustradas nos Exemplos 2, 4 e 5, eles não encontram os limites por experimentação numérica. Em vez disso, usam técnicas mais sofisticadas, como o cálculo de séries infinitas. Se você tiver acesso a um SCA, use o comando de limite para calcular os limites nos exemplos desta seção e verificar suas respostas para os exercícios deste capítulo.

❏ Dessa vez, no entanto, **nossa conjectura está errada**. Observe que, embora $f(1/n) = \sin n\pi = 0$ para todo número inteiro n , é também verdadeiro que $f(x) = 1$ para infinitos valores de x que tendem a 0. Você poderá ver isto a partir do gráfico de f mostrado na Figura 7.

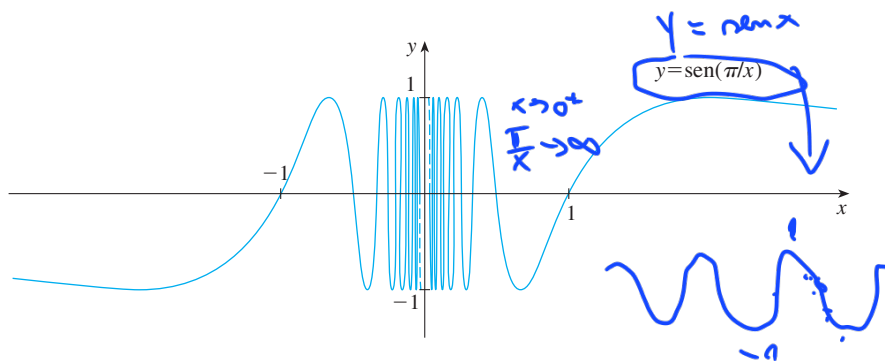


FIGURA 7

As linhas tracejadas perto do eixo de y indicam que os valores de $\sin(\pi/x)$ oscilam entre 1 e -1 infinitas vezes quando x tende a 0 (veja o Exercício 45).

Uma vez que os valores de $f(x)$ não tendem a um número fixo quando x tende a 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} \text{ não existe}$$

EXEMPLO 5 Encontre $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right)$.

SOLUÇÃO Como antes, construímos uma tabela de valores. Pela primeira tabela à esquerda, parece que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0$$

Mas, se continuarmos com os valores ainda menores de x , a segunda tabela sugere que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0,000100 = \frac{1}{10\,000}$$

Mais tarde, veremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos 5x = 1$, e então segue que o limite é 0,0001.

x	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10.000}$
1	1,000028
0,5	0,124920
0,1	0,001088
0,05	0,000222
0,01	0,000101

x	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10.000}$
0,005	0,00010009
0,001	0,00010000

❏ Os Exemplos 4 e 5 ilustram algumas das **armadilhas na conjectura sobre o valor de um limite**. É fácil conjecturar um valor falso se usarmos os valores não apropriados de x , mas é difícil saber quando parar de calcular valores. E, como mostra a discussão após o Exemplo 2, algumas vezes as calculadoras e os computadores dão valores falsos. Nas duas próximas seções, porém, vamos desenvolver métodos infalíveis no cálculo de limites.

EXEMPLO 6 A função de Heaviside, H , é definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

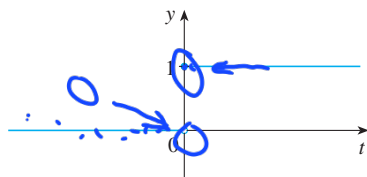


FIGURA 8

A função Heaviside

[Essa função, cujo nome homenageia o engenheiro elétrico Oliver Heaviside (1850-1925), pode ser usada para descrever uma corrente elétrica que é ligada em $t = 0$.] Seu gráfico está na Figura 8.

Quando t tende a 0 pela esquerda, $H(t)$ tende a 0. Quando t tende a 0 pela direita, $H(t)$ tende a 1. Não há um número único para o qual $H(t)$ tende quando t tende a 0. Portanto, $\lim_{t \rightarrow 0} H(t)$ não existe.

Limites Laterais

Vimos no Exemplo 6 que $H(t)$ tende a 0 quando t tende a 0 pela esquerda, e $H(t)$ tende a 1 quando t tende a 0 pela direita. Indicamos essa situação simbolicamente escrevendo

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = 1$$

O símbolo “ $t \rightarrow 0^-$ ” indica que estamos considerando somente valores de t menores que 0. Da mesma forma, “ $t \rightarrow 0^+$ ” indica que estamos considerando somente valores de t maiores que 0.

2 Definição Escrevemos

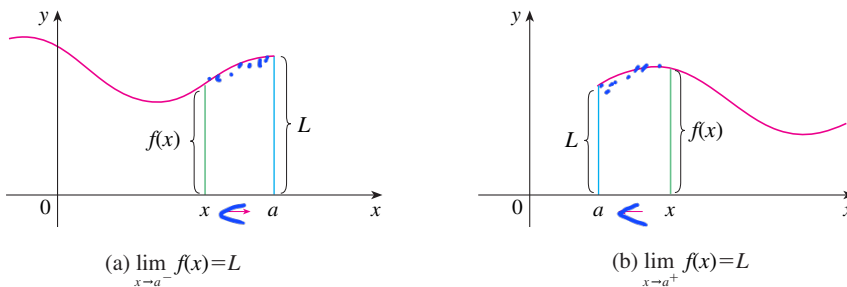
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o **limite à esquerda** de $f(x)$ quando x tende a a [ou o **limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L , para x suficientemente próximo de a e x menor que a .

Perceba que a Definição 2 difere da Definição 1 somente por necessitarmos que x seja menor que a . De maneira semelhante, se exigirmos que x seja maior que a , obtemos “o **limite à direita** de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L ” e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Dessa forma, o símbolo “ $x \rightarrow a^+$ ” indica que estamos considerando somente $x > a$. Essas definições estão ilustradas na Figura 9.



$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 2$$

FIGURA 9

Comparando a Definição 1 com as definições de limites laterais, vemos ser verdadeiro o que segue.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{se e somente se} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

EXEMPLO 7 O gráfico de uma função g é apresentado na Figura 10. Use-o para estabelecer os valores (caso existam) dos seguintes limites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$

SOLUÇÃO A partir do gráfico, vemos que os valores de $g(x)$ tendem a 3 à medida que os de x tendem a 2 pela esquerda, mas tendem a 1 quando x tende a 2 pela direita. Logo

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3 \quad \text{e} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1$$

(c) Uma vez que são diferentes os limites à esquerda e à direita, concluímos de [3] que $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ não existe.

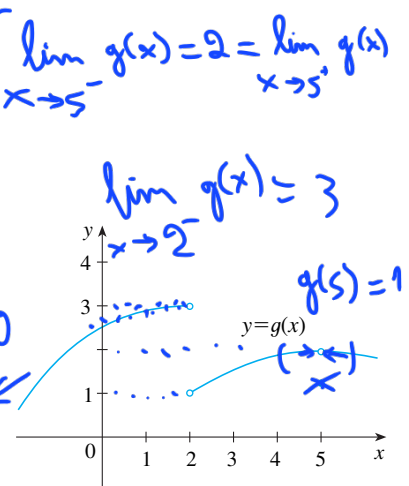


FIGURA 10

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1$$

O gráfico mostra também que

$$(d) \lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) = 2 \quad \text{e} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) = 2$$

(f) Agora, os limites à esquerda e à direita são iguais; assim, de [3], temos

$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 2$$

Apesar desse fato, observe que $g(5) \neq 2$.

Limites Infinitos

EXEMPLO 8 Encontre $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$, se existir.

SOLUÇÃO À medida que x tende a 0, x^2 também tende a 0, e $1/x^2$ fica muito grande. (Veja a tabela na margem.) De fato, a partir do gráfico da função $f(x) = 1/x^2$ da Figura 11, parece que a função $f(x)$ pode se tornar arbitrariamente grande ao tornarmos os valores de x suficientemente próximos de 0. Assim, os valores de $f(x)$ não tendem a um número, e não existe $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2)$.

Para indicar o tipo de comportamento exibido no Exemplo 8 usamos a notação

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Isso não significa que consideramos ∞ como um número. Tampouco significa que o limite existe. Expressa simplesmente uma maneira particular de não existência de limite: $1/x^2$ pode ser tão grande quanto quisermos, tornando x suficientemente perto de 0.

Em geral, simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

para indicar que os valores de $f(x)$ tendem a se tornar cada vez maiores (ou “a crescer ilimitadamente”) à medida que x se tornar cada vez mais próximo de a .

4 Definição Seja f uma função definida em ambos os lados de a , exceto possivelmente no próprio a . Então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tornando x suficientemente próximo de a , mas não igual a a .

Outra notação para $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ é

$$f(x) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad x \rightarrow a$$

Novamente, o símbolo ∞ não é um número; todavia, a expressão $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ é usualmente lida como

“o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é infinito”

ou “ $f(x)$ se torna infinito quando x tende a a ”

ou “ $f(x)$ cresce ilimitadamente quando x tende a a ”

Essa definição está ilustrada na Figura 12.

Um tipo análogo de limite, para funções que se tornam grandes em valor absoluto, porém negativas, quando x tende a a , cujo significado está na Definição 5, é ilustrado na Figura 13.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
$\pm 0,5$	4
$\pm 0,2$	25
$\pm 0,1$	100
$\pm 0,05$	400
$\pm 0,01$	10.000
$\pm 0,001$	1.000.000

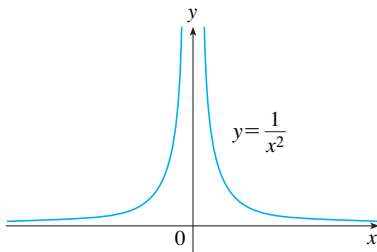


FIGURA 11

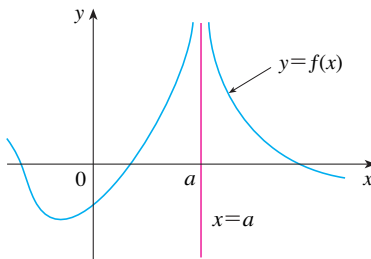


FIGURA 12
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

5 Definição Seja f definida em ambos os lados de a , exceto possivelmente no próprio a . Então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, ao tornarmos x suficientemente próximo de a , mas não igual a a .

O símbolo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ pode ser lido das seguintes formas: “o limite de $f(x)$ quando tende a a é menos infinito”, ou “ $f(x)$ decresce ilimitadamente quando x tende a a ”. Como exemplo, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Definições similares podem ser dadas no caso de limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

lembrando que “ $x \rightarrow a^-$ ” significa considerar somente os valores de x menores que a , ao passo que “ $x \rightarrow a^+$ ” significa considerar somente $x > a$. Ilustrações desses quatro casos são dados na Figura 14.

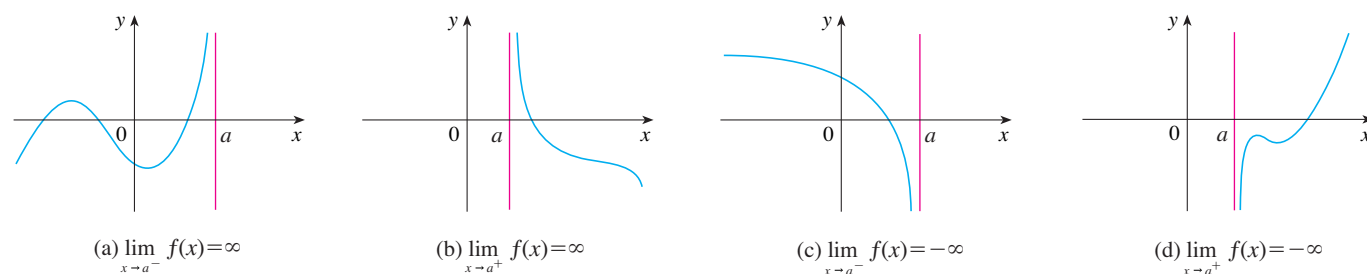


FIGURA 14

6 Definição A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

Por exemplo, o eixo y é uma assíntota vertical da curva $y = 1/x^2$, pois $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2) = \infty$. Na Figura 14, a reta $x = a$ é uma assíntota vertical em cada um dos quatro casos considerados. Em geral, o conhecimento de assíntotas verticais é muito útil no esboço de gráficos.

EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3}$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3}$.

SOLUÇÃO Se x está próximo a 3 mas é maior que 3, então o denominador $x - 3$ é um número positivo pequeno e $2x$ está próximo a 6. Portanto, o quociente $2x/(x - 3)$ é um número *positivo* grande. Então, intuitivamente, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

Quando dizemos que um número é um “negativo grande”, queremos dizer que ele é negativo, mas que seu valor absoluto é grande.

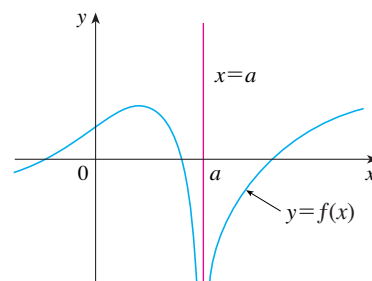


FIGURA 13

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

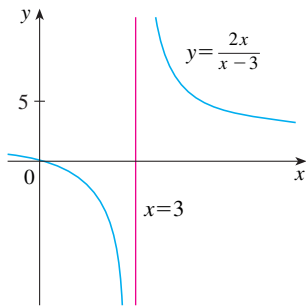


FIGURA 15

Analogamente, se x está próximo a 3 mas é menor que 3, então $x - 3$ é um número negativo pequeno, mas $2x$ ainda é um número positivo (próximo a 6). Portanto, $2x/(x - 3)$ é um número *negativo* grande. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

O gráfico da curva $y = 2x/(x - 3)$ está dado na Figura 15. A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$.

SOLUÇÃO Como

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

existem assíntotas verticais em potencial nos pontos nos quais $\cos x = 0$. De fato, como $\cos x \rightarrow 0^+$ quando $x \rightarrow (\pi/2)^-$ e $\cos x \rightarrow 0^-$ quando $x \rightarrow (\pi/2)^+$, enquanto $\operatorname{sen} x$ é positivo quando x está próximo de $\pi/2$, temos

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

Isso mostra que a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical. Um raciocínio similar mostra que as retas $x = (2n + 1)\pi/2$, onde n é um número inteiro, são todas assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$. O gráfico da Figura 16 confirma isso.

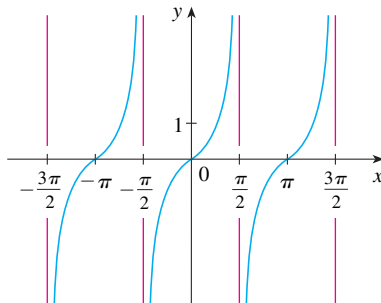


FIGURA 16

$y = \operatorname{tg} x$

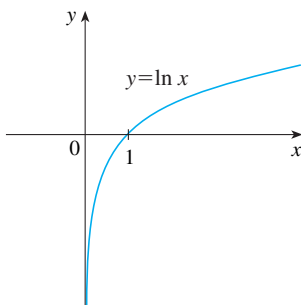


FIGURA 17

O eixo y é uma assíntota vertical da função logaritmo natural.

Outro exemplo de uma função cujo gráfico tem uma assíntota vertical é a função logaritmo natural $y = \ln x$. Da Figura 17, vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

e, assim, a reta $x = 0$ (o eixo y) é uma assíntota vertical. Na realidade, isso é válido para $y = \log_a x$ desde que $a > 1$. (Veja as Figuras 11 e 12 na Seção 1.6.)

2.2 Exercícios

1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 7$$

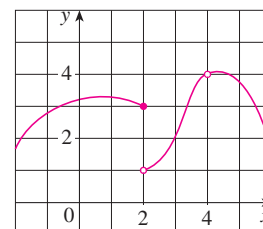
Nesta situação, é possível que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ exista? Explique.

3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.

$$(a) \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty \quad (b) \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$$

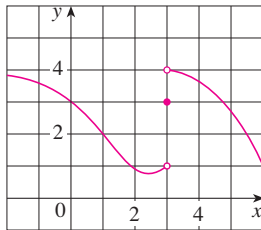
4. Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad (c) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ (d) f(2) \quad (e) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \quad (f) f(4)$$



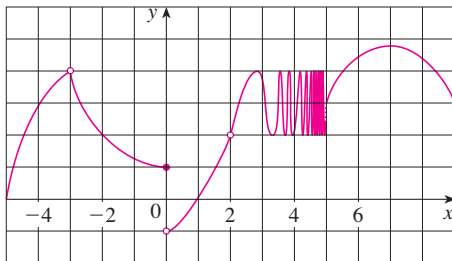
5. Para a função f , cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (e) $f(3)$



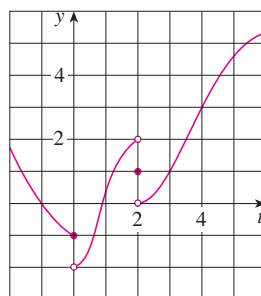
6. Para a função h cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow -3} h(x)$
 (d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$
 (j) $h(2)$ (k) $\lim_{x \rightarrow 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x \rightarrow 5^-} h(x)$



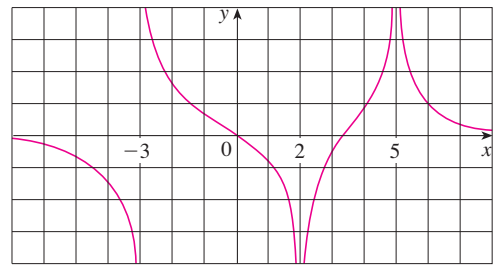
7. Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$
 (d) $\lim_{t \rightarrow 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t \rightarrow 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t \rightarrow 2} g(t)$
 (g) $g(2)$ (h) $\lim_{t \rightarrow 4} g(t)$



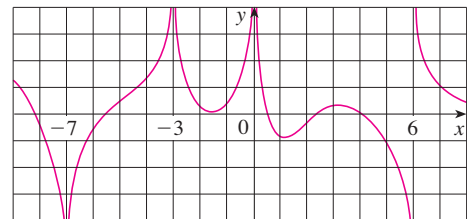
8. Para a função R , cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} R(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 5} R(x)$
 (c) $\lim_{x \rightarrow -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x \rightarrow -3^+} R(x)$
 (e) As equações das assíntotas verticais.



9. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, determine o seguinte:

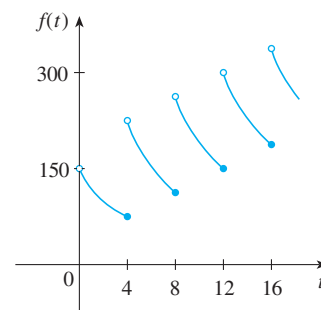
(a) $\lim_{x \rightarrow -7} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$
 (f) As equações das assíntotas verticais.



10. Um paciente recebe uma injeção de 150 mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade $f(t)$ da droga na corrente sanguínea após t horas. Encontre

$$\lim_{t \rightarrow 12^-} f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 12^+} f(t)$$

e explique o significado desses limites laterais.



- 11–12 Esboce o gráfico da função e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe:

11. $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x & \text{se } x > \pi \end{cases}$

- 13–14 Use o gráfico da função f para dizer o valor de cada limite, se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$13. f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$$

$$14. f(x) = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$$

15–18 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

$$15. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2, \quad f(1) = 2$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(0) \text{ não está definido}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2, \\ f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3, \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(4) = 1$$

19–22 Faça uma conjectura sobre o valor do limite (se ele existir) por meio dos valores da função nos números dados (com precisão de seis casas decimais).

$$19. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}, \\ x = 2,5, 2,1, 2,05, 2,01, 2,005, 2,001, \\ 1,9, 1,95, 1,99, 1,995, 1,999$$

$$20. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}, \\ x = 0, -0,5, -0,9, -0,95, -0,99, -0,999, \\ -2, -1,5, -1,1, -1,01, -1,001$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \quad x = \pm 1, \pm 0,5, \pm 0,1, \pm 0,05, \pm 0,01$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x + x^2), \quad x = 1, 0,5, 0,1, 0,05, 0,01, 0,005, 0,001$$


23–26 Use uma tabela de valores para estimar o valor do limite. Se você tiver alguma ferramenta gráfica, use-a para confirmar seu resultado.

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$


$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 5^x}{x}$$

 **27.** (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y , estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(b) Verifique sua resposta da parte (a), calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

 **28.** (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = (\operatorname{sen} x)/(\operatorname{sen} \pi x)$. Forneça sua resposta com precisão de duas casas decimais.

(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

29–37 Determine o limite infinito.

$$29. \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+2}{x+3}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x+2}{x+3}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{e^x}{(x-5)^3}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9)$$

$$34. \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cot x$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} x \csc x$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$$

38. (a) Encontre as assíntotas verticais da função

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$



(b) Confirme sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico da função.

$$39. \text{Determine } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^3 - 1} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^3 - 1}$$

(a) calculando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que se aproximam de 1 pela esquerda e pela direita,

(b) raciocinando como no Exemplo 9, e



(c) a partir do gráfico de f .



40. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\operatorname{tg} 4x)/x$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y , estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximam de 0.

41. (a) Estime o valor do limite $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$ com cinco casas decimais. Esse número lhe parece familiar?



(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$.



42. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$ para $0 \leq x \leq 5$. Você acha que o gráfico é uma representação precisa de f ?

(b) Como você faria para que o gráfico represente melhor f ?

43. (a) Avalie a função $f(x) = x^2 - (2^x/1.000)$ para $x = 1, 0,8, 0,6, 0,4, 0,2, 0,1$ e $0,05$, e conjecture qual o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1.000} \right)$$

(b) Avalie $f(x)$ para $x = 0,04, 0,02, 0,01, 0,005, 0,003$ e $0,001$. Faça uma nova conjectura.

44. (a) Avalie $h(x) = (\operatorname{tg} x - x)/x^3$ para $x = 1, 0,5, 0,1, 0,05, 0,01$ e $0,005$.

(b) Estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$

(c) Calcule $h(x)$ para valores sucessivamente menores de x até finalmente atingir um valor de 0 para $h(x)$. Você ainda está confiante que a conjectura em (b) está correta? Explique como finalmente obteve valores 0. (Na Seção 4.4 veremos um método para calcular esse limite.)



(d) Faça o gráfico da função h na janela retangular $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Dê *zoom* até o ponto onde o gráfico corta o eixo y para estimar o limite de $h(x)$ quando x tende a 0. Continue

2.2 (17) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$

