11.1 Sequências

Pode-se pensar numa **sequência** como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4, \ \ldots, \ a_n, \ldots$$

O número a_1 é chamado *primeiro termo*, a_2 é o *segundo termo* e, em geral, a_n é o *n-ésimo termo*. Trataremos exclusivamente de sequências infinitas, de modo que cada termo a_n terá um sucessor a_{n+1}.

Observe que, para cada inteiro positivo n existe um número correspondente a_n e, dessa forma, uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Mas, geralmente, escrevemos a_n em vez da notação de função $f(n)$ para o valor da função no número n.

NOTAÇÃO A sequência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é também indicada por

$$\{a_n\} \qquad \text{ou} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

EXEMPLO 1 Algumas sequências podem ser definidas dando uma fórmula para o n-ésimo termo. Nos exemplos seguintes, damos três descrições da sequência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência. Observe que não é necessário começar em 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad a_n = \dfrac{n}{n+1} \qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\} \qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n} \qquad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\,\right\}_{n=3}^{\infty} \qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3 \quad \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\}$

(d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty} \qquad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0 \quad \left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$

EXEMPLO 2 Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3.125}, \ldots\right\}$$

supondo que o padrão dos primeiros termos continue.

SOLUÇÃO Foi-nos dado que

$$a_1 = \frac{3}{5} \qquad a_2 = -\frac{4}{25} \qquad a_3 = \frac{5}{125} \qquad a_4 = -\frac{6}{625} \qquad a_5 = \frac{7}{3.125}$$

Observe que os numeradores dessas frações começam com 3 e são incrementados por 1 à medida que avançamos para o próximo termo. O segundo termo tem numerador 4; o terceiro, numerador 5; generalizando, o n-ésimo termo terá numerador $n+2$. Os denominadores são a potência de 5, logo a_n tem denominador 5^n. Os sinais dos termos alternam entre positivo e negativo, assim, precisamos multiplicar por uma potência de -1. No Exemplo 1(b) o fator $(-1)^n$ significava que começamos com um termo negativo. Neste exemplo, queremos começar com um termo positivo e assim usamos $(-1)^{n-1}$ ou $(-1)^{n+1}$. Portanto

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$$

EXEMPLO 3 Aqui estão algumas sequências que não têm uma equação de definição simples.
(a) A sequência $\{p_n\}$, onde p_n é a população do mundo no dia 1º de janeiro do ano n.
(b) Se fizermos a_n ser o algarismo na n-ésima casa decimal do número e, então $\{a_n\}$ é uma sequência bem definida cujos primeiros termos são

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$$

(c) A **sequência de Fibonacci** $\{f_n\}$ é definida recursivamente pelas condições

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Cada termo é a soma dos dois termos precedentes. Os primeiros termos são

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Essa sequência surgiu quando o matemático italiano conhecido como Fibonacci resolveu, no século XIII, um problema envolvendo a reprodução de coelhos (veja o Exercício 83).

Uma sequência como aquela no Exemplo 1(a), $a_n = n/(n+1)$, pode ser visualizada marcando seus termos na reta real, como na Figura 1, ou traçando seu gráfico, como na Figura 2. Observe que, como uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos, seu gráfico consiste em pontos isolados com coordenadas

$$(1, a_1) \qquad (2, a_2) \qquad (3, a_3) \qquad \ldots \qquad (n, a_n) \qquad \ldots$$

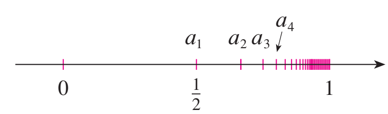


FIGURA 1

A partir da Figura 1 ou 2 parece que os termos da sequência $a_n = n/(n+1)$ estão se aproximando de 1 quando n se torna grande. De fato, a diferença

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

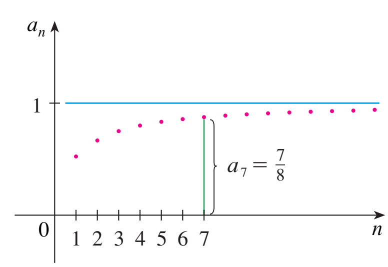


FIGURA 2

pode ficar tão pequena quanto se desejar, tornando n suficientemente grande. Indicamos isso escrevendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Em geral, a notação

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

significa que os termos da sequência $\{a_n\}$ aproximam-se de L quando n torna-se grande. Observe que a seguinte definição do limite de uma sequência é muito parecida com a definição do limite de uma função no infinito, dada na Seção 2.6, no Volume I.

1 Definição Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se pudermos tornar os termos a_n tão próximos de L quanto quisermos ao fazer n suficientemente grande. Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ existir, dizemos que a sequência **converge** (ou é **convergente**). Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge** (ou é **divergente**).

A Figura 3 ilustra a Definição 1 mostrando os gráficos de duas sequências que têm limite L.

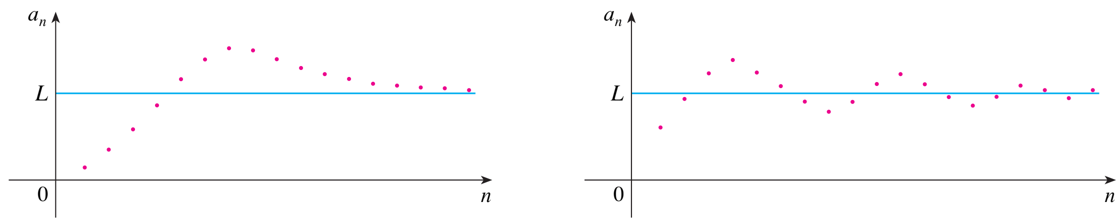


FIGURA 3
Gráficos de duas sequências com $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Uma versão mais precisa da Definição 1 é a seguinte.

Compare esta definição com a Definição 2.6.7

2 Definição Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se, para cada $\varepsilon > 0$ existir um inteiro correspondente N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

A Definição 2 é ilustrada pela Figura 4, na qual os termos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são marcados na reta real. Não importa quão pequeno seja escolhido o intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe um N tal que todos os termos da sequência de a_{N+1} em diante devem estar naquele intervalo.

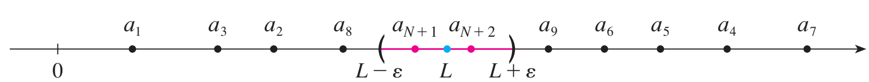


FIGURA 4

Outra ilustração de Definição 2 é dada na Figura 5. Os pontos no gráfico de $\{a_n\}$ devem estar entre as linhas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ se $n > N$. Esse quadro deve ser válido independentemente do quão pequeno ε é escolhido, mas geralmente um ε menor exige um N maior.

$\frac{1}{m} \neq 0$ $\quad x_m = 1 \quad x_m = \frac{1}{m} \quad x_{m+1} < x_m$

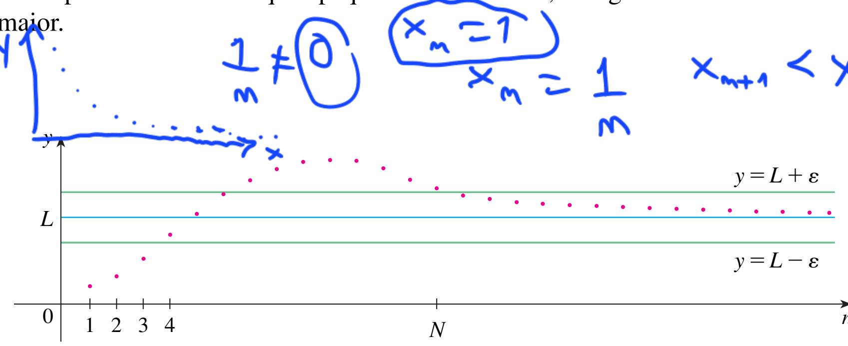


FIGURA 5

A comparação da Definição 2 com a Definição 2.6.7, no Volume 1, mostra que a única diferença entre $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ é que n precisa ser inteiro. Então, temos o seguinte teorema, que é ilustrado pela Figura 6.

3 Teorema Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

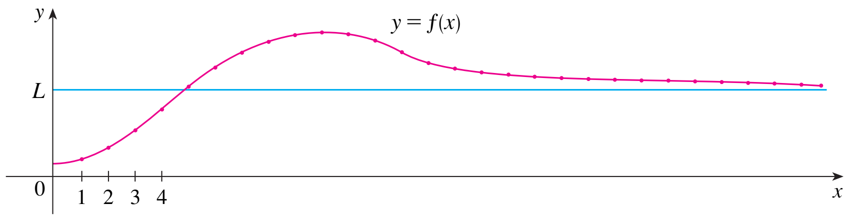


FIGURA 6

Em particular, como sabemos que $\lim_{x\to\infty}(1/x^r) = 0$ quando $r > 0$ (Teorema 2.6.5, no Volume I), temos

4
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{se } r > 0$$

Se a_n aumentar quando n aumentar, usaremos a notação $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. A seguinte definição precisa é similar à Definição 2.6.9, no Volume I.

a_n tq $a_n > 10^{15} = M$

5 Definição $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que

$$\text{se} \qquad n > N \qquad \text{então} \qquad a_n > M$$

M

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, então a sequência $\{a_n\}$ é divergente, mas de maneira especial. Dizemos que $\{a_n\}$ diverge para ∞.

As Propriedades do Limite dadas na Seção 2. 3, no Volume I, também valem para os limites de sequências, e suas demonstrações são similares.

Propriedades do Limite para Sequências

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

c é cte.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{se } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$

O Teorema do Confronto também pode ser adaptado para sequências como a seguir (veja a Figura 7).

Se $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para $n \geqslant n_0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

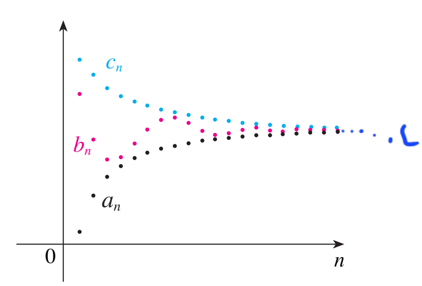


FIGURA 7
A sequência $\{b_n\}$ fica presa entre as sequências $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$

Outro fato útil sobre limites de sequências é dado pelo seguinte teorema, cuja demonstração é pedida no Exercício 87.

6 Teorema Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXEMPLO 4 Encontre $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

SOLUÇÃO O método é semelhante ao que foi utilizado na Seção 2.6, no Volume I: dividir o numerador e denominador pela maior potência de n que ocorre no denominador e depois usar as Leis de limite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

Aqui usamos a Equação 4 com $r = 1$.

EXEMPLO 5 A sequência $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{10+n}}$ é convergente ou divergente?

SOLUÇÃO Como no Exemplo 4, dividimos o numerador e o denominador por n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{10+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{10}{n^2} + \dfrac{1}{n}}} = \infty$$

porque o numerador é constante e o denominador se aproxima de 0. Então $\{a_n\}$ é divergente.

EXEMPLO 6 Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

SOLUÇÃO Observe que numerador e denominador se aproximam do infinito quando $n \to \infty$. Não podemos empregar a Regra de l'Hôspital diretamente, porque ela não se aplica a sequências, mas, sim, a funções de uma variável real. Contudo, podemos usar a Regra de l'Hôspital para a função relacionada $f(x) = (\ln x)/x$ e obter

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Temos, portanto, pelo Teorema 3,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

EXEMPLO 7 Determine se a sequência $a_n = (-1)^n$ é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO Se escrevermos os termos da sequência, obteremos

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

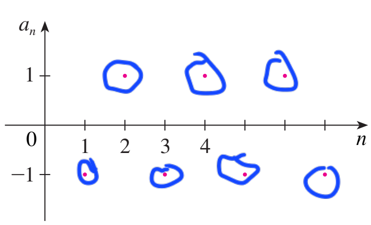


FIGURA 8

O gráfico desta sequência é mostrado na Figura 8. Uma vez que os termos oscilam entre 1 e -1 com frequência indefinida, a_n não se aproxima de nenhum número. Logo $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ não existe; ou seja, a sequência $\{(-1)^n\}$ é divergente.

$(a_2, a_4, a_6, \ldots)$

EXEMPLO 8 Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ se ele existir.

O gráfico da sequência no Exemplo 8 é mostrado na Figura 9 e confirma a nossa resposta.

SOLUÇÃO Primeiro calculamos o limite do valor absoluto:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Portanto, pelo Teorema 6,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

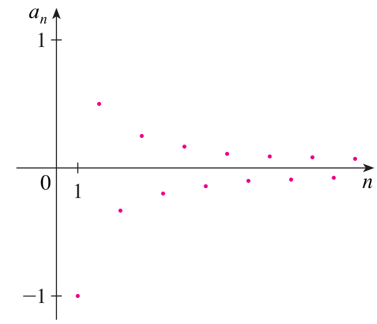


FIGURA 9

O seguinte teorema diz que se aplicarmos uma função contínua aos termos de uma sequência convergente, o resultado também será convergente. A demonstração é pedida no Exercício 88.

7 Teorema Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e se a função f for contínua em L, então

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n)$.

SOLUÇÃO Como a função seno é contínua em 0, o Teorema 7 nos permite escrever

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty} (\pi/n)\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

Criando Gráficos de Sequências

Alguns sistemas de computação algébrica têm comandos especiais que nos permitem criar sequências e traçá-las diretamente. Com a maioria das calculadoras gráficas, contudo, as sequências podem ser traçadas usando equações paramétricas. Por exemplo, a sequência no Exemplo 10 pode ser traçada inserindo-se as equações paramétricas

$$x = t \qquad y = t!/t^t$$

e fazendo o gráfico no modo pontual começando com $t = 1$ e tomando o passo t igual a 1. O resultado é exposto na Figura 10.

EXEMPLO 10 Discuta a convergência da sequência $a_n = n!/n^n$, onde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

SOLUÇÃO Numerador e denominador se aproximam do infinito quando $n \to \infty$, mas aqui não temos uma função correspondente para usar com a Regra de l'Hôspital ($x!$ não está definido quando x não é um inteiro). Vamos escrever alguns termos para pensar sobre o que acontece com a_n quando n cresce:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} \qquad a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

$$\boxed{8} \qquad a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}$$

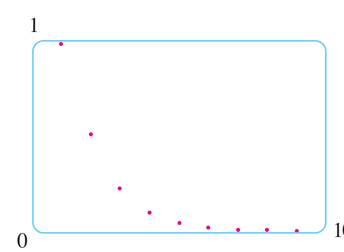


FIGURA 10

Parece, a partir dessas expressões e do gráfico na Figura 10, que os termos estão decrescendo e talvez se aproximem de 0. Para confirmar isso, observe na Equação 8 que

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}\right)$$

Observe que a expressão em parênteses é no máximo 1, porque o numerador é menor (ou igual) ao denominador. Logo,

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Sabemos que $1/n \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$ pelo Teorema do Confronto.

EXEMPLO 11 Para que valores de r a sequência $\{r^n\}$ é convergente?

SOLUÇÃO Sabemos da Seção 2.6 e dos gráficos das funções exponenciais na Seção 1.5, ambos do Volume I, que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ e $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Logo, colocando $a = r$ e usando o Teorema 3, temos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{se } r > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

É óbvio que

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} 0^n = 0$$

Se $-1 < r < 0$ então $0 < |r| < 1$ então

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$$

e, portanto, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ pelo Teorema 6. Se $r \leqslant -1$, então $\{r^n\}$ diverge como no Exemplo 7. A Figura 11 mostra os gráficos para vários valores de r. (O caso $r = -1$ é mostrado na Figura 8.)

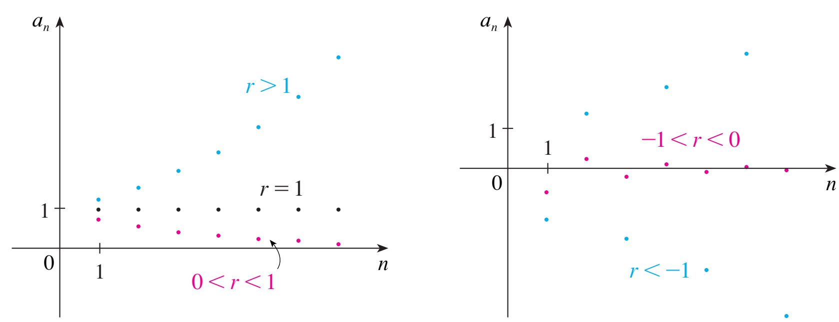


FIGURA 11
A sequência $a_n = r^n$

Os resultados do Exemplo 11 estão resumidos a seguir para uso futuro.

9 A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leqslant 1$ e divergente para todos os outros valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

10 Definição Uma sequência $\{a_n\}$ é chamada **crescente** se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamado **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$. Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

EXEMPLO 12 A sequência $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ é decrescente porque

(cresc., estr. cresc.) =

= ~~(não decresc., cresc.)~~

$a_n \geq a_{n+1}$

$$\frac{3}{n+5} \geq \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

O lado direito é menor porque tem um denominador maior.

e, portanto, $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$.

$x_n = 1$

EXEMPLO 13 Mostre que a sequência $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ é decrescente.

SOLUÇÃO 1 Devemos mostrar que $a_{n+1} \leq a_n$, isto é,

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

Essa desigualdade é equivalente àquela que obteríamos pela multiplicação cruzada:

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} \iff (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1]$$

$$\iff n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n$$

$$\iff 1 < n^2 + n$$

Como $n \geqslant 1$, sabemos que a desigualdade $n^2 + n > 1$ é verdadeira. Portanto $a_{n+1} < a_n$ e $\{a_n\}$ é decrescente.

SOLUÇÃO 2 Considere a função $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} < 0 \qquad \text{sempre que } x^2 > 1$$

Assim, f é decrescente em $(1, \infty)$ e em $f(n) > f(n + 1)$. Portanto, $\{a_n\}$ é decrescente.

11 Definição Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que

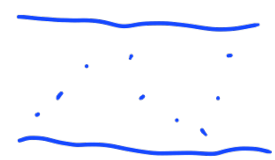
cota super.

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Se ela for limitada superior e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada**.



Por exemplo, a sequência $a_n = n$ é limitada inferiormente ($a_n > 0$) mas não superiormente. A sequência $a_n = n/(n + 1)$ é limitada porque $0 < a_n < 1$ para todo n.

Sabemos que nem toda sequência limitada é convergente [por exemplo, a sequência $a_n = (-1)^n$ satisfaz $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$, mas é divergente, como mostrado no Exemplo 7], e que nem toda sequência monótona é convergente ($a_n = n \to \infty$). Mas se uma sequência for limitada *e* monótona, então ela deve ser convergente. Este fato é provado no Teorema 12, mas intuitivamente você pode entender porque é verdadeiro, olhando para a Figura 12. Se $\{a_n\}$ está aumentando e $a_n \leqslant M$ para todo n, então os termos são forçados se aglomerar e se aproximar de algum número L.

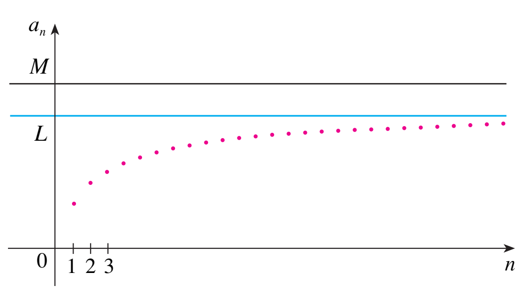


FIGURA 12

A demonstração do Teorema 12 é baseada no **Axioma de Completude** para o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, que diz que, se S é um conjunto não vazio de números reais, que tem um limitante superior M ($x \leqslant M$ para todo x em S), então S tem um **limitante superior mínimo** b. (Isto significa que b é um limite superior para S, mas se M é qualquer outro limitante superior, então $b \leqslant M$.) O Axioma de Completude é uma expressão do fato de que não há salto ou furo na reta do número real.

12 Teorema da Sequência Monótona Toda sequência monótona limitada é convergente.

DEMONSTRAÇÃO Suponha que $\{a_n\}$ seja uma sequência crescente. Como $\{a_n\}$ é limitada, o conjunto $S = \{a_n \mid n \geqslant 1\}$ tem um limitante superior. Pelo Axioma de Completude, existe um menor limitante superior L. Dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ não é um limitante superior para S (pois L é o limite superior mínimo). Portanto,

$$a_N > L - \varepsilon \qquad \text{para algum inteiro } N$$

Mas a sequência é crescente, logo $a_n \geqslant a_N$ para cada $n > N$. Assim, se $n > N$, temos

$$a_n > L - \varepsilon$$

então $$0 \leqslant L - a_n < \varepsilon$$

desde que $a_n \leqslant L$. Assim,

$$|L - a_n| < \varepsilon \qquad \text{sempre que } \; n > N$$

então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Uma demonstração similar (usando o maior limitante inferior) funciona se $\{a_n\}$ for decrescente.

Na demonstração do Teorema 12 vemos que uma sequência que é crescente e limitada superiormente é convergente. (Da mesma forma, uma sequência decrescente que é limitada inferiormente é convergente.) Este fato é usado muitas vezes quando lidamos com séries infinitas.

EXEMPLO 14 Investigue a sequência $\{a_n\}$ definida pela *relação de recorrência*

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 6) \qquad \text{para } \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

SOLUÇÃO Começamos calculando os primeiros termos:

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = \tfrac{1}{2}(2 + 6) = 4 \qquad a_3 = \tfrac{1}{2}(4 + 6) = 5$$

$$a_4 = \tfrac{1}{2}(5 + 6) = 5{,}5 \qquad a_5 = 5{,}75 \qquad a_6 = 5{,}875$$

$$a_7 = 5{,}9375 \qquad a_8 = 5{,}96875 \qquad a_9 = 5{,}984375$$

A indução matemática é frequentemente usada para trabalhar com sequências recursivas. Veja o fim do Caítulo 1 (Volumel) para consultar o Princípio da Indução Matemática.

Esses termos iniciais sugerem que a sequência é crescente e que os termos estão se aproximando de 6. Para confirmar que a sequência é crescente, usamos a indução matemática para mostrar que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geqslant 1$. Isto é verdade para $n = 1$ porque $a_2 = 4 > a_1$. Se assumirmos que isso é verdadeiro para $n = k$, então temos

$$a_{k+1} > a_k$$

então $$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

e $$\tfrac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \tfrac{1}{2}(a_k + 6)$$

Logo, $$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Deduzirmos que $a_{n+1} > a_n$ é verdadeiro para $n = k + 1$. Portanto, a desigualdade é verdadeira para todo n por indução matemática.

Em seguida, verificamos que $\{a_n\}$ é limitada mostrando que $a_n < 6$ para todo n. (Uma vez que a sequência é crescente, já sabemos que ela tem um limitante inferior: $a_n \geqslant a_1 = 2$ para todo n). Sabemos que $a_1 < 6$, assim a afirmação é verdadeira para $n = 1$. Suponha que isso seja verdadeiro para $n = k$. Então,

$$a_k < 6$$

então $$a_k + 6 < 12$$

e $$\tfrac{1}{2}(a_k + 6) < \tfrac{1}{2}(12) = 6$$

Logo, $$a_{k+1} < 6$$

Isso mostra, por indução matemática, que $a_n < 6$ para todo n.

Como a sequência $\{a_n\}$ é crescente e limitada, o Teorema 12 garante que ela tem um limite. O teorema não nos conta qual é o valor do limite. Mas agora que sabemos que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, podemos usar a relação de recorrência dada para escrever

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(a_n + 6) = \tfrac{1}{2}\Big(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\Big) = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Como $a_n \to L$, segue também que $a_{n+1} \to L$ (quando $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$, igualmente). Logo, temos

Uma demonstração desse fato é pedida no Exercício 70.

$$L = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Resolvendo essa equação para L, temos $L = 6$, como previsto.

11.1 Exercícios

1. (a) O que é uma sequência?
(b) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
(c) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) O que é uma sequência convergente? Dê dois exemplos.
(b) O que é uma sequência divergente? Dê dois exemplos.

3–12 Liste os cinco primeiros termos da sequência.

3. $a_n = \dfrac{2n}{n^2 + 1}$

4. $a_n = \dfrac{3^n}{1 + 2^n}$

5. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n}$

6. $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{2}$

7. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

8. $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$

9. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 5a_n - 3$

10. $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$

11. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$

12. $a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$

13–18 Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência, assumindo que o padrão dos primeiros termos continue.

13. $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots\right\}$

14. $\left\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right\}$

15. $\left\{-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \ldots\right\}$

16. $\{5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}$

17. $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{9}{4}, -\frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \ldots\right\}$

18. $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$

19–22 Calcule, com quatro casas decimais, os primeiros 10 termos da sequência e use-os para traçar o gráfico da sequência com a mão. Esta sequência parece ter um limite? Se assim for, calcule-o. Se não, explique por quê.

19. $a_n = \dfrac{3n}{1 + 6n}$

20. $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

21. $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

22. $a_n = 1 + \dfrac{10^n}{9^n}$

23–56 Determine se a sequência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

23. $a_n = 1 - (0{,}2)^n$

24. $a_n = \dfrac{n^3}{n^3 + 1}$

25. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

26. $a_n = \dfrac{n^3}{n + 1}$

27. $a_n = e^{1/n}$

28. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

29. $a_n = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2n\pi}{1 + 8n}\right)$

30. $a_n = \sqrt{\dfrac{n + 1}{9n + 1}}$

31. $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3 + 4n}}$

32. $a_n = e^{2n/(n+2)}$

33. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$

34. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}$

35. $a_n = \cos(n/2)$

36. $a_n = \cos(2/n)$

37. $\left\{\dfrac{(2n - 1)!}{(2n + 1)!}\right\}$

38. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 2n}\right\}$

39. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right\}$

40. $a_n = \dfrac{\operatorname{tg}^{-1} n}{n}$

41. $\{n^2 e^{-n}\}$

42. $a_n = \ln(n + 1) - \ln n$

43. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

44. $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

45. $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$

46. $a_n = 2^{-n} \cos n\pi$

47. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

48. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1 + \sqrt{n}}$

49. $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$

50. $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$

51. $a_n = \operatorname{arctg}(\ln n)$

52. $a_n = n - \sqrt{n + 1}\,\sqrt{n + 3}$

53. $\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$

54. $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$

55. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

56. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

57–63 Use um gráfico da sequência para decidir se ela é convergente ou divergente. Se a sequência for convergente, conjecture o valor do limite a partir do gráfico e então demonstre sua conjectura.

57. $a_n = 1 + (-2/e)^n$

58. $a_n = \sqrt{n}\, \operatorname{sen}(\pi/\sqrt{n})$

59. $a_n = \sqrt{\dfrac{3 + 2n^2}{8n^2 + n}}$

60. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

61. $a_n = \dfrac{n^2 \cos n}{1 + n^2}$

62. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{n!}$

63. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{(2n)^n}$

64. (a) Determine se a sequência definida a seguir é convergente ou divergente:

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = 4 - a_n \quad \text{para } n \geqslant 1$$

(b) O que acontece se o primeiro termo para $a_1 = 2$?

65. Se \$ 1.000 forem investidos a uma taxa de juros de 6%, contabilizados anualmente, depois de n anos o investimento valerá $a_n = 1.000(1{,}06)^n$ dólares.

(a) Encontre os cinco primeiros termos da sequência $\{a_n\}$.

(b) A sequência é convergente ou divergente? Explique.

66. Se você depositar \$ 100 no final de cada mês em uma conta que paga juros de 3% ao ano com capitalização mensal, o montante de juros acumulados após n meses é dado pela sequência

$$I_n = 100\left(\frac{1{,}0025^n - 1}{0{,}0025} - n\right)$$

(a) Encontre os seis primeiros termos da sequência.

(b) O quanto de juros você vai ter ganho depois de dois anos?

67. Um piscicultor possui 5.000 bagres em sua lagoa. O número de bagres aumenta 8% ao mês e o agricultor retira 300 bagres por mês.

(a) Mostre que a população de bagres P_n depois n meses é dada recursivamente por

$$P_n = 1{,}08P_{n-1} - 300 \qquad P_0 = 5.000$$

(b) Quantos bagres estão na lagoa depois de seis meses?

68. Calcule os primeiros 40 termos da sequência definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{se } a_n \text{ é um número par} \\ 3a_n + 1 & \text{se } a_n \text{ é um número impar} \end{cases}$$

e $a_1 = 11$. Faça o mesmo se $a_1 = 25$. Faça uma conjectura sobre este tipo de sequência.

69. Para quais valores de r a sequência $\{nr^n\}$ é convergente?

70. (a) Se $\{a_n\}$ for convergente, mostre que

$$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} a_n$$

(b) Uma sequência $\{a_n\}$ é definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$ para $n \geqslant 1$. Supondo que $\{a_n\}$ seja convergente, encontre seu limite.

71. Suponha que você saiba que $\{a_n\}$ é uma sequência decrescente e que todos os termos estão entre os números 5 e 8. Explique por que a sequência tem um limite. O que você pode dizer sobre o valor do limite?

72–78 Determine se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monótona. A sequência é limitada?

72. $a_n = (-2)^{n+1}$

73. $a_n = \dfrac{1}{2n + 3}$

74. $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n + 4}$

75. $a_n = n(-1)^n$

76. $a_n = ne^{-n}$

77. $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$

78. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

79. Calcule o limite da sequência

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

80. Uma sequência $\{a_n\}$ é dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

(a) Por indução, ou de outra maneira, mostre que $\{a_n\}$ é crescente e limitada superiormente por 3. Aplique o Teorema da Sequência Monótona para mostrar que $\lim_{n \to \infty} a_n$ existe.

(b) Encontre $\lim_{n \to \infty} a_n$.

81. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

é crescente e $a_n < 3$ para todo n. Deduza que $\{a_n\}$ é convergente e encontre seu limite.

82. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

satisfaz $0 < a_n \leqslant 2$ e é decrescente. Deduza que a sequência é convergente e encontre seu limite.

83. (a) Fibonacci colocou o seguinte problema: suponha que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês? Mostre que a resposta é f_n, onde $\{f_n\}$ é a sequência de Fibonacci definida no Exemplo 3(c).

(b) Seja $a_n = f_{n+1}/f_n$ e mostre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Supondo que $\{a_n\}$ seja convergente, encontre seu limite.

84. (a) Sejam $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a)), \ldots$, $a_{n+1} = f(a_n)$, onde f é uma função contínua. Se $\lim_{n \to \infty} a_n = L$, mostre que $f(L) = L$.

(b) Ilustre a parte (a) tomando $f(x) = \cos x$, $a = 1$, e estimando o valor de L com precisão de cinco casas decimais.

85. (a) Use um gráfico para conjecturar o valor do limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^5}{n!}$$

(b) Use um gráfico da sequência na parte (a) para encontrar os menores valores de N que correspondam a $\varepsilon = 0{,}1$ e $\varepsilon = 0{,}001$ na Definição 2.

86. Use a Definição 2 diretamente para demonstrar que $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$ quando $|r| < 1$.

87. Demonstre o Teorema 6.
[*Dica*: Use a Definição 2 ou o Teorema do Confronto.]

88. Demonstre o Teorema 7.

89. Demonstre que, se $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ e $\{b_n\}$ for limitada, então $\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = 0$.

90. Seja $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

(a) Mostre que, se $0 \leqslant a < b$, então

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n$$

(b) Deduza que $b^n[(n + 1)a - nb] < a^{n+1}$.

(c) Use $a = 1 + 1/(n + 1)$ e $b = 1 + 1/n$ na parte (b) para mostrar que $\{a_n\}$ é crescente.

(d) Use $a = 1$ e $b = 1 + 1/(2n)$ na parte (b) para mostrar que $a_{2n} < 4$.

(e) Use as partes (c) e (d) para mostrar que $a_n < 4$ para todo n.

(f) Use o Teorema 12 para mostrar que $\lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n$ existe. (O limite é e. Ver Equação 3.6.6, no Volume I).

91. Sejam a e b números positivos com $a > b$. Seja a_1 sua média aritmética e b_1, sua média geométrica:

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita esse procedimento de modo que, em geral,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Use a indução matemática para mostrar que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

(b) Deduza que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são ambas convergentes.

(c) Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gauss chamou o valor comum desses limites de **média aritmética-geométrica** dos números a e b.

92. (a) Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ e $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, então $\{a_n\}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

(b) Se $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

encontre os oito primeiros membros da sequência $\{a_n\}$. Então use a parte (a) para mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Isso dá a **expansão em frações contínuas**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

93. O tamanho de uma população de peixes pode ser modelado pela fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

onde p_n é o tamanho da população de peixes depois de n anos e a e b são constantes positivas que dependem da espécie e de seu habitat. Suponha que a população no ano 0 seja $p_0 > 0$.

(a) Mostre que se $\{p_n\}$ é convergente, então os únicos valores possíveis para seu limite são 0 e $b - a$.

(b) Mostre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.

(c) Use o item (b) para mostrar que, se $a > b$, então $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$; em outras palavras, a população se extingue.

(d) Agora suponha que $a < b$. Mostre que, se $p_0 < b - a$, então $\{p_n\}$ é crescente e $0 < p_n < b - a$. Mostre também que, se $p_0 > b - a$, então $\{p_n\}$ é decrescente e $p_n > b - a$. Deduza que se $a < b$, então $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.

PROJETO DE LABORATÓRIO SCA SEQUÊNCIAS LOGÍSTICAS

Uma sequência que aparece em ecologia como um modelo para o crescimento populacional é definida pela **equação de diferença logística**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

onde p_n mede o tamanho da população da n-ésima geração de uma única espécie. Para manter os números manejáveis, p_n é uma fração do tamanho máximo da população, e assim $0 \leqslant p_n \leqslant 1$. Observe que a forma dessa equação é similar à da equação diferencial logística na Seção 9.4. O modelo discreto – com sequências em vez de funções contínuas – é preferível para modelar populações de insetos, nas quais acasalamento e morte ocorrem de maneira periódica.

Um ecologista está interessado em prever o tamanho da população com o passar do tempo e faz as perguntas: ela vai estabilizar em um valor limite? Ela mudará de uma maneira cíclica? Ou ela exibirá comportamento aleatório?

Escreva um programa para calcular os n primeiros termos dessa sequência, começando com uma população inicial p_0, onde $0 < p_0 < 1$. Utilize este programa para fazer o seguinte.

1. Calcule 20 ou 30 termos da sequência para $p_0 = \frac{1}{2}$ e para dois valores de k tal que $1 < k < 3$. Faça um gráfico de casa sequência. As sequências parecem convergir? Repita para um valor diferente de p_0 entre 0 e 1. O limite depende da escolha de p_0? Depende da escolha de k?
2. Calcule termos da sequência para um valor de k entre 3 e 3,4 e faça seu gráfico. O que você nota sobre o comportamento dos termos?
3. Experimente com valores de k entre 3,4 e 3,5. O que acontece com os termos?
4. Para valores de k entre 3,6 e 4, calcule e trace pelo menos 100 termos e comente sobre o comportamento da sequência. O que acontecerá se você mudar p_0 por 0,001? Esse tipo de comportamento é chamado *caótico* e é exibido por populações de insetos sob certas condições.

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

11-b $\lim (2a_n) = 0 \Rightarrow a_n \to 0$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n > N$ tq $n > N \Rightarrow$

$|a_n - L| < \varepsilon$

$n > N \Rightarrow |2a_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow |2a_n| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow 2|a_n| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

1g $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$

3 $x_n = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow x_n y_n = 1 \Rightarrow \lim (x_n y_n) = 1$

$y_n = n$

9D $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-67)(2n+18)(n-9)(n+10)(7n+1)}{n^5} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-65}{n}\right)\left(\frac{2n+18}{n}\right)\left(\frac{n-9}{n}\right)\left(\frac{n+10}{n}\right)\left(\frac{7n+1}{n}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \cancelto{0}{\frac{65}{n}}\right)\left(2 + \cancelto{0}{\frac{18}{n}}\right)\left(1 - \cancelto{0}{\frac{9}{n}}\right)\left(1 + \cancelto{0}{\frac{10}{n}}\right)\left(7 + \cancelto{0}{\frac{1}{n}}\right) =$

$= 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7 = 14$

$\frac{c}{n} \to 0$ qd $n \to \infty$

12 A $y_n = (-1)^n$ $\quad -1 \leq y_n \leq 1$ $\quad y_n$ é limitada

$\nexists \lim y_n$

$x_n = 1 + (-1)^n$ $\quad 0 \leq x_n \leq 2$ $\quad x_n$ é limitada

$\nexists \lim x_n$

10 a) $a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$ (V)

(V)

$\lim a_n = \sqrt{n}$, $\quad M \in \mathbb{R}$ tq $M \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \ldots$ abs!

b) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n} = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ é conv.

c) $c_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}} = \underset{\substack{\| \\ x_n}}{\cos n} \cdot \underset{\substack{\| \\ y_n}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$ $\quad -1 \leq \cos n \leq 1$ $\quad \overset{\text{TEO}}{\Longrightarrow}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$c_n \to 0$

13 B $a_n = -n \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$ (F)

17) $x_n = (-1)^n$

$y_n = -(-1)^n \Rightarrow x_n + y_n = 0$ convergente

12) a) $K < m$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_K n^K + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_m n^m + \dots + b_2 n^2 + b_1 n + b_0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_K \frac{n^K}{n^m} + \dots + a_2 \frac{n^2}{n^m} + a_1 \frac{n}{n^m} + \frac{a_0}{n^m}}{b_m \frac{n^m}{n^m} + \dots + b_2 \frac{n^2}{n^m} + b_1 \frac{n}{n^m} + \frac{b_0}{n^m}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\nearrow 0}{\frac{a_K}{n^{m-K}}} + \overset{\nearrow 0}{\dots} + \overset{\nearrow 0}{\frac{a_2}{n^{m-2}}} + \overset{\nearrow 0}{\frac{a_1}{n^{m-1}}} + \overset{\nearrow 0}{\frac{a_0}{n^m}}}{b_m + \underset{\searrow 0}{\dots} + \underset{\searrow 0}{\frac{b_2}{n^{m-2}}} + \underset{\searrow 0}{\frac{b_1}{n^{m-1}}} + \underset{\searrow 0}{\frac{b_0}{n^m}}} = \frac{0}{b_m} = 0$$

Para os itens b e c, sigam dividindo numerador e denominador por n^x sendo $x = \max\{K, m\}$.