2º TESTE DE CÁLCULO1-EMAp- 28/05/2021

ALUNO____s=___

INSTRUÇÕES BÁSICAS:

- Início do teste: 9 horas

- Tempo de duração da prova: 2 horas.

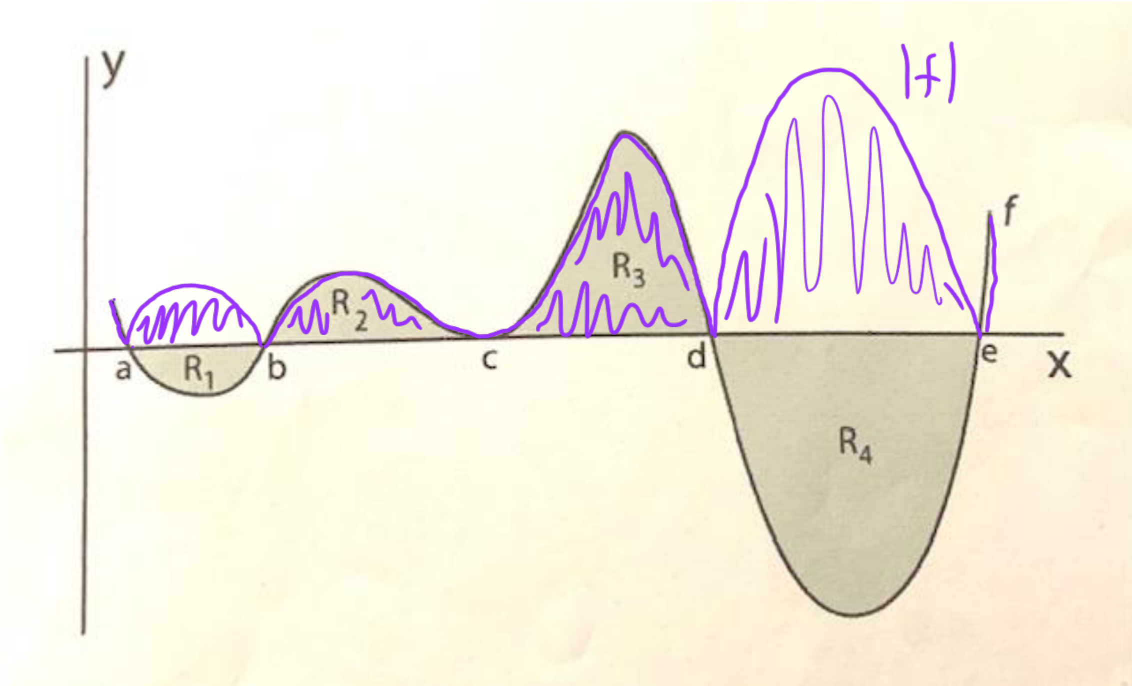
-Todas as respostas deverão ser justificadas.

- Consulta permitida ao livro e às anotações pessoais.

-Você tem até as 11:20 para pra fazer o upload para o Eclass.

ATENÇÃO-Use a constante **s** que aparece em algumas questões abaixo, como **a soma dos dois últimos algarismos da sua matrícula.**

1ª QUESTÃO Considere a função definida pelo gráfico, abaixo.



Sabendo que Área R_1= 4s, área R_2 = 2s, área R_3 = 4s e área R_4 = 50, determine:

a) $\int_a^e f(x)dx$
b) $\int_a^e |f(x)|dx$
c) $\int_a^b f(x)dx + \int_c^e sf(x)dx$
d) $\int_a^c |f(x)|dx + |\int_c^e f(x)dx|$

2ª QUESTÃO Seja f(x) = $\frac{s(1-x)}{x^2+3}$. Determine o valor máximo e o valor mínimo absolutos de f(x) no intervalo [-3,0].

3ª QUESTÃO Calcule :

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1- e^{-2x}}{2x}$ - e^{-sx}
b) F'(x) onde F(x) = $\int_0^x \left(\frac{1- e^{-2t}}{2t} - \ e^{-st} \right) dt$
c) F(0) e F'(0).
d) $\lim_{x \to \infty} \frac{sx}{\ln (1+2e^{x})}$

4ª QUESTÃO Um retângulo possui lados que variam com o tempo e está inscrito num triângulo retângulo ABC de catetos AB e AC medindo respectivamente 4s cm e 6s cm. O retângulo mantém A como vértice e lados paralelos aos catetos. Determine a taxa de variação da área do retângulo no instante em que sua altura mede 3,6s cm e está aumentando à taxa de 0,5 cm/segundo. Neste instante a área está aumentando ou diminuindo?

5ª QUESTÃO Considere f(x) = scos2x ,0 $\leq x \leq 2\pi$.

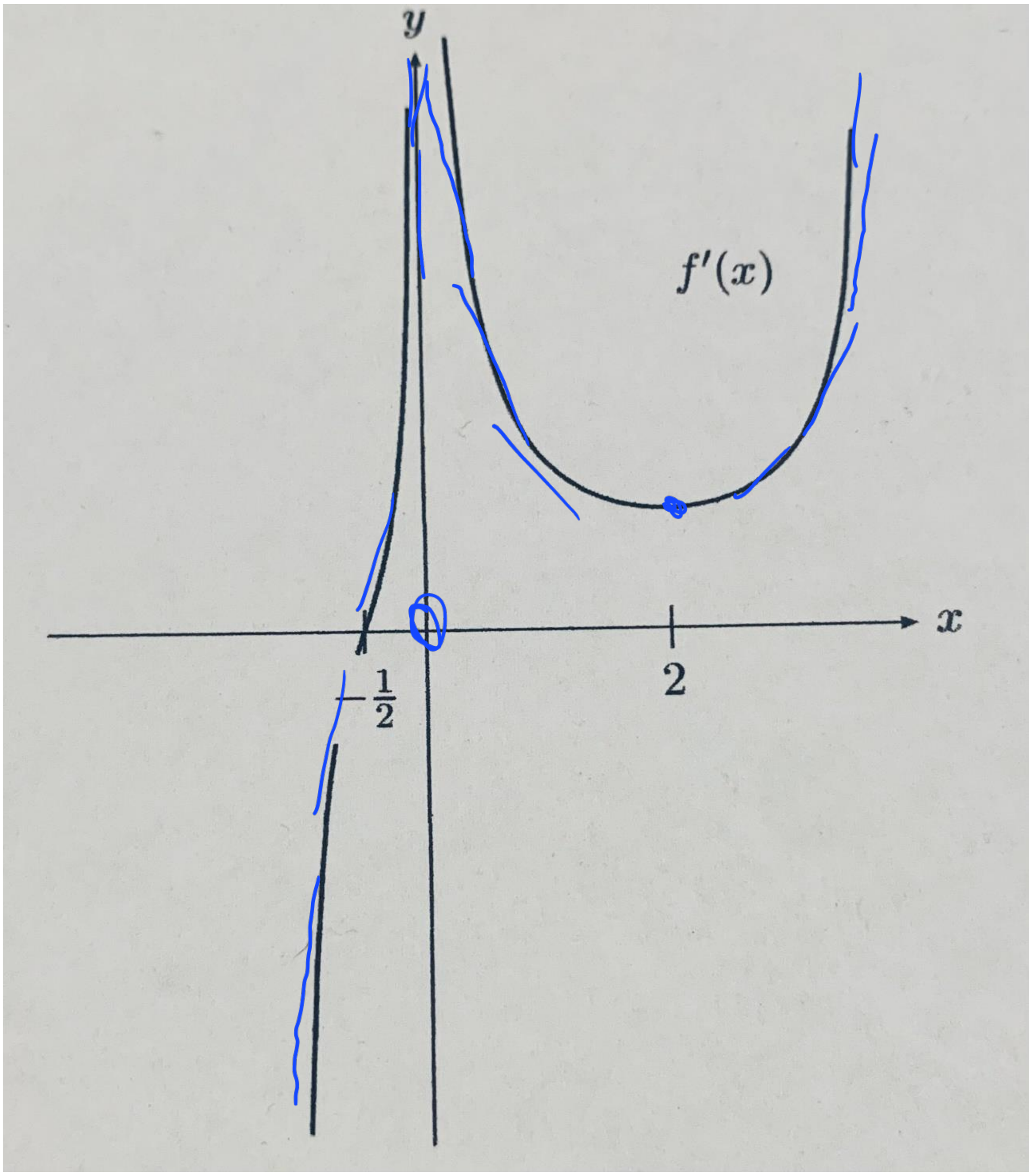
a) Encontre uma primitiva G(x) para a função f(x).
b) Faça um esboço do gráfico de f(x).
c) Encontre área da região compreendida entre o gráfico de f e o eixo dos x.

6ª QUESTÃO Seja y = f(x) uma função contínua em R tal que:
f(0)= 0, f(2) = s/s+1 e f(-1/2) = - s/s+1.

Suponha que o gráfico de f' seja dado pela figura da página seguinte.

Responda, justificando, o que se pede:

a) os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente;
b) os pontos onde a reta tangente ao gráfico de f é horizontal;
c) os pontos de máximos e mínimos locais, caso existam;
d) os intervalos onde o gráfico de f possui concavidade para cima e onde possui concavidade para baixo;
e) os pontos de inflexão, caso existam;
f) esboce o gráfico de uma função f que satisfaça todas as condições acima.



BOM TESTE!

1 a) $$\int_a^e f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx +$$

$$+ \int_d^e f(x)\,dx = -R_1 + R_2 + R_3 - R_4 = 2\alpha - 50.$$

b) $$\int_a^e |f(x)|\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_b^c |f(x)|\,dx + \int_c^d |f(x)|\,dx +$$

$$+ \int_d^e |f(x)|\,dx = \int_a^b -f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx +$$

$$+ \int_d^e -f(x)\,dx = -(-R_1) + R_2 + R_3 - (-R_4) =$$

$$= R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 10\alpha + 50.$$

c) $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_c^e \alpha f(x)\,dx = -R_1 + \alpha \cdot \int_c^e f(x)\,dx =$$

$$= -4\alpha + \alpha \cdot \left[\int_c^d f(x)\,dx + \int_d^e f(x)\,dx\right] = -4\alpha +$$

$$+ \alpha \cdot (R_3 - R_4) = -4\alpha + \alpha \cdot (4\alpha - 50) = 4\alpha^2 - 54\alpha.$$

d) $$\int_a^c |f(x)|\,dx + \left|\int_c^e f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx +$$

$$+ \int_b^c |f(x)|\,dx + \left|\int_c^d f(x)\,dx + \int_d^e f(x)\,dx\right| =$$

$$= \int_a^b -f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + |R_3 - R_4| =$$

$$= -(-R_1) + R_2 + |R_3 - R_4| = 6n + |4n - 50|.$$

2. $$f(x) = \frac{n(1-x)}{x^2+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2+3)\cdot(-n) - n(1-x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{nx^2 - 2n\cdot x - 3n}{(x^2+3)^2} = \frac{n(x^2 - 2x - 3)}{(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{n(x-3)(x+1)}{(x^2+3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } \underbrace{x = 3}_{\notin [-3,0]}$$

$$f(-3) = \frac{n\cdot(1-(-3))}{(-3)^2+3} = \frac{4n}{12} = \frac{n}{3}$$

$$f(-1) = \frac{n\cdot(1-(-1))}{(-1)^2+3} = \frac{2n}{4} = \frac{n}{2}$$

$$f(0) = \frac{n\cdot(1-0)}{0^2+3} = \frac{n}{3}$$

Como $n > 0 \Rightarrow \frac{n}{2} > \frac{n}{3} \Rightarrow f(-1) > f(-3) = f(0).$

$\therefore$ O mínimo absoluto de f em $[-3, 0]$ é

$f(-3) = f(0) = \frac{\pi}{3}$ e o máximo absoluto de f em $[-3,0]$ é $f(-1) = \frac{\pi}{2}$.

③ a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{-2x}}{2x} - e^{-\pi x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{-2x}}{2x}\right) -$

$- \lim\limits_{x\to 0} e^{-\pi x} \underset{\text{L'hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^{-2x}}{2} - 1 =$

$= \lim\limits_{x\to 0} e^{-2x} - 1 = e^{-2\cdot 0} - 1 = 1 - 1 = 0.$

b) $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \Big(\overbrace{\frac{1-e^{-2t}}{2t} - e^{-\pi t}}^{f(t)}\Big)\,dt \overset{\text{T.F.C.}}{=} \frac{1-e^{-2x}}{2x} - e^{-\pi x}$,

$x \neq 0$ (Para o T.F.C. ser aplicável, f deve ser contínua, então devemos considerar $f(0) = 0$).

c) $F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$

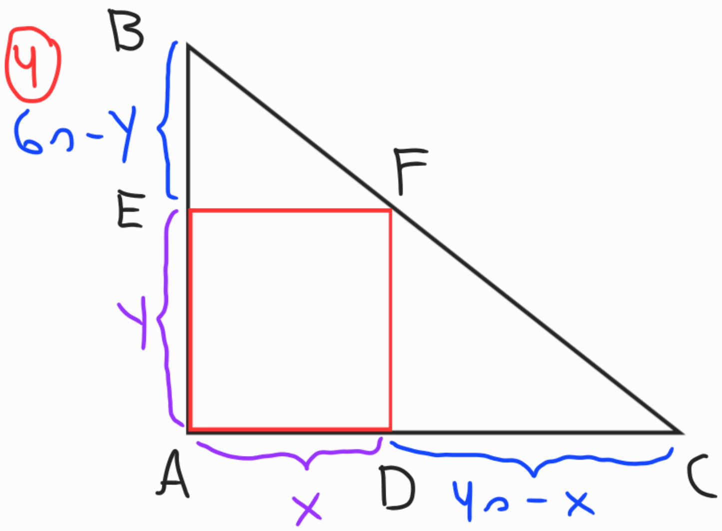
$F'(0) = \left[\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt\right]_{x=0} = \left[f(x)\right]_{x=0} = f(0) = 0.$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi x}{\ln(1+2e^x)} \underset{\text{L'hospital}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi}{\frac{2e^x}{1+2e^x}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(1+2e^x)}{2e^x} \overset{\text{L'hospital}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\pi e^x}{2e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \pi =$

$= n.$

4



$\Delta EBF \sim \Delta FDC$

$$\frac{6n-y}{x} = \frac{y}{4n-x}$$

$$xy = 24n^2 - 4ny - 6nx + xy$$

$$6x + 4y = 24n$$

$$x = 4n - \frac{2y}{3}$$

$$[AEFD] = A(y) = xy = 4ny - \frac{2y^2}{3}$$

$$\frac{d}{dt}A(y) = \frac{d}{dy}A(y) \cdot \frac{dy}{dt} = \left(4n - \frac{4y}{3}\right) \cdot \frac{dy}{dt}$$

A taxa de variação da área pedida é

$$\left(4n - \frac{4}{3} \cdot 3{,}6n\right) \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{4n - 4{,}8n}{2} = -0{,}4n \ \frac{cm^2}{s},$$

da matrícula

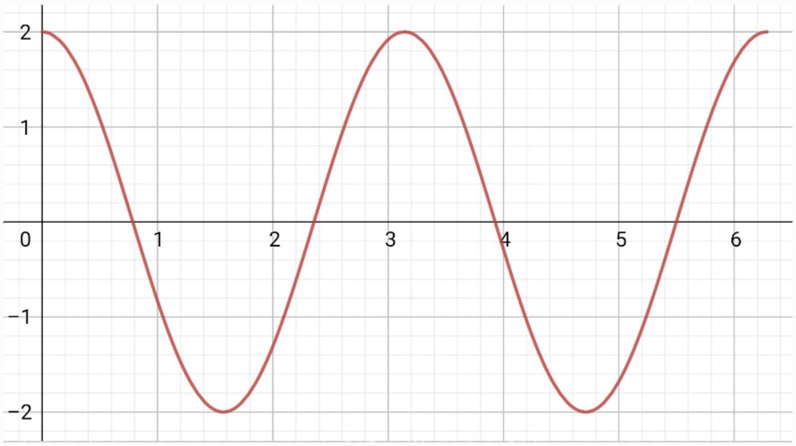
de segundos

ou seja, está diminuindo.

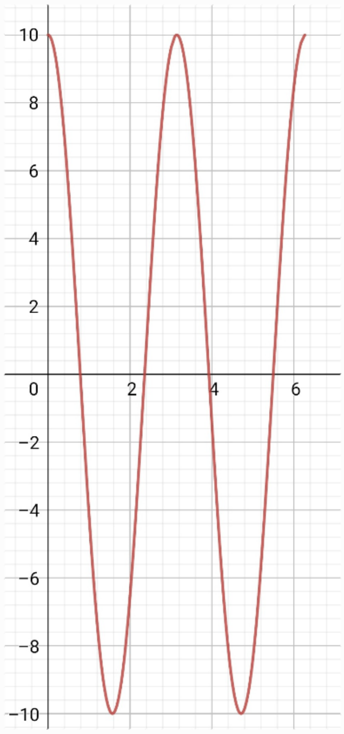
5 a) $G(x) = \int f(x)\,dx = \int n \cos 2x\,dx =$

$$= n \int \cos 2x\,dx = n \cdot \left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right] = \frac{n}{2} \cdot \operatorname{sen} 2x.$$

b) $n = 2$:



$n = 10$:



c) $$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{2\pi} |n\cos 2x|\,dx = n\cdot\int_0^{2\pi} |\cos 2x|\,dx =$$

$$= n\left[\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} -\cos 2x\,dx + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \cos 2x\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{5\pi/4}^{7\pi/4} -\cos 2x\,dx + \int_{7\pi/4}^{2\pi} \cos 2x\,dx\right] = G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0) +$$

$$+ G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G\left(\frac{3\pi}{4}\right) + G\left(\frac{5\pi}{4}\right) - G\left(\frac{3\pi}{4}\right) + G\left(\frac{5\pi}{4}\right) -$$

$$- G\left(\frac{7\pi}{4}\right) + G(2\pi) - G\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left[G\left(\frac{\pi}{4}\right) + G\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] -$$

$$- 2\left[G\left(\frac{3\pi}{4}\right) + G\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right] + \left[G(2\pi) - G(0)\right] =$$

$$= a\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right] - a\left[\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{7\pi}{2}\right] +$$

$$+\frac{a}{2}\left[\operatorname{sen} 4\pi - \operatorname{sen} 0\right] = a\cdot 2 - a\cdot(-2) + \frac{a}{2}\cdot 0 = 4a$$

6 a) f é decrescente em $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ $(f'(x) < 0)$ e f é crescente em $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ $(f'(x) > 0)$.

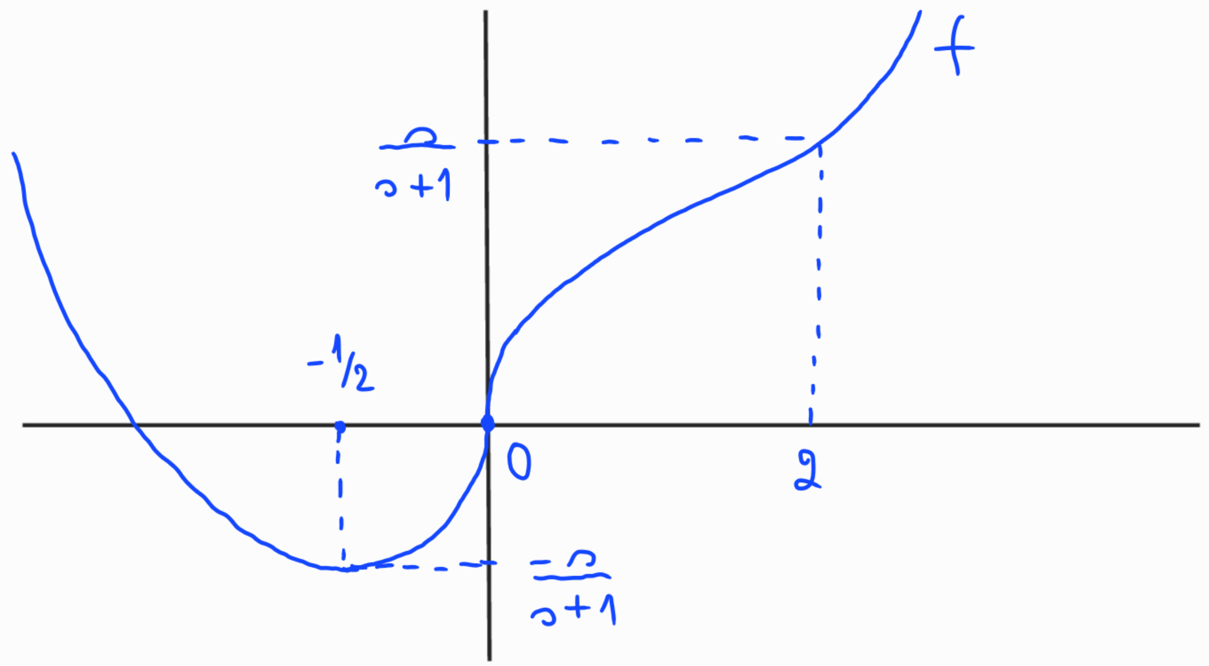
b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{-a}{a+1}\right)$ $(f'(x) = 0)$.

c) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{-a}{a+1}\right)$ é um mínimo local.

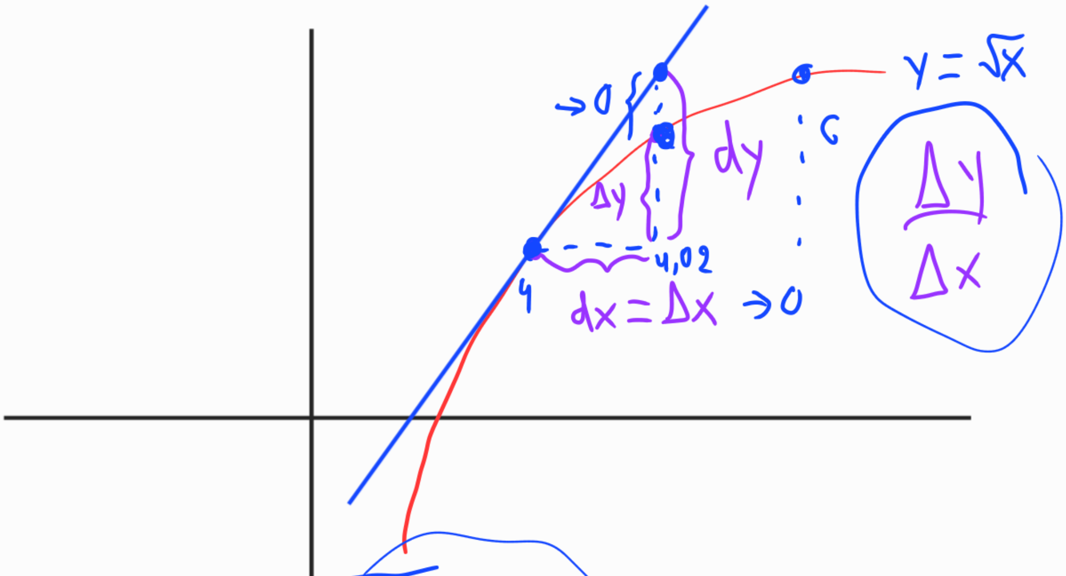
d) f é côncava para cima em $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$ $(f''(x) > 0)$ e f é côncava para baixo em $(0, 2)$ $(f''(x) < 0)$.

e) $x = 0$ e $x = 2$ (f muda a concavidade).

f)



Diferenciais:



$\sqrt{4{,}02}$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \underbrace{dy}_{\text{dif.}} = f'(x)\,\underbrace{dx}_{\text{dif.}}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dy = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=4} \cdot 0{,}02 = \frac{0{,}01}{\sqrt{4}} = \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005$$

$$\sqrt{4{,}02} \cong \sqrt{4} + dy = 2{,}005$$

$$\int \cos 2x\,dx = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\,du =$$

$$2x = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow du = 2\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\text{sen}\,u + c') = \frac{\text{sen}\,u}{2} + \frac{c'}{2} = \frac{\text{sen}\,u}{2} + C =$$

$$= \frac{\text{sen}\,2x}{2} + \boxed{C}$$

$$u = 1 + 0^2 = 1$$
$$u = 1 + 1^2 = 2$$

$$\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}\sqrt{u^3} + \cancel{C}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C\right]_0^1$$

$$u = 1 + x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2x\,dx$$