Definição: Seja $A \neq \emptyset$ subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que A é <u>limitado superiormente</u> se existe $M \in \mathbb{R}$ de modo que $a \leq M$ para todo $a \in A$; qualquer elemento de $\mathbb{R}$ com tal propriedade é uma <u>cota superior</u>.
De modo análogo, A é <u>limitado inferiormente</u> se existe $m \in \mathbb{R}$ de modo que $m \leq a$ para todo $a \in A$; tais elementos são <u>cotas inferiores</u> de A.

Teorema:
Seja $A \neq \emptyset$ limitado superiormente. Então existe uma cota superior de A (denominada <u>supremo</u> de A) que é a menor dentre todas as cotas superiores.
Analogamente, seja $A \neq \emptyset$ limitado inferiormente. Então existe uma cota inferior de A (denominada <u>ínfimo</u> de A) que é a maior dentre todas as cotas inferiores.

A demonstração desse teorema será omitida por necessitar um conhecimento mais profundo na construção axiomática do conjunto dos números reais, o que vocês verão em um curso de Análise Real.

Observações:
1) Pode ocorrer tanto $\sup A \in A$ quanto $\sup A \notin A$, como se vê nos exemplos $[a, b]$ ou $[a, b)$. Em ambos os casos, $\sup A = b$. Com respeito ao $\inf A$, a observação é análoga.

2) Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Temos que (sup A) - ε < sup A, logo (sup A) - ε não é cota superior de A. Logo existe algum $a_0 \in A$ tal que (sup A) - ε < a_0 . Como $a_0 \leq$ sup A, temos $a_0 \in$ ((sup A) - ε , sup A)

3) Considere a sequência crescente de números reais $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$, tal que $a_n < b$, para todo n. Pelo axioma do supremo existe s = supA onde A = $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$. Mostre que dado $\varepsilon > 0$, existe **m** natural tal que $s-\varepsilon < a_n < s$, para todo n>**m**.

Solução: Por definição, s = sup A é a menor cota superior do conjunto A. Isso significa que, para todo x real com x < s (equivalentemente, x = s - ε , sendo $\varepsilon > 0$), x não é cota superior do conjunto A, ou seja, existe pelo menos um elemento a_m de A tal que x = s - $\varepsilon < a_m$. No entanto, a sequência dada na questão é crescente e converge para sup A. Logo, para todo $a_n \in A, n \geq m$, temos s - $\varepsilon < a_m < a_n <$ s. Segue, portanto, que dado $\varepsilon > 0$, existe m natural tal que s - $\varepsilon < a_n <$ s, para todo n > m, como queríamos demonstrar.

4) Sejam **a** e **b** reais com **a<b.**

a) Mostre que existe $\mathbf{p} \in N$, $p \neq 0$ tal que **p(b-a)** >$\sqrt{2}$ ou $\mathbf{0} < \frac{\sqrt{2}}{p}$ **<b -a.**

b) Seja A = {n inteiro: $n\frac{\sqrt{2}}{p} \geq b$}. Então A$\neq \emptyset$ portanto existe n_o = mínimo A. Mostre que $(n_o\text{-}1)\,\frac{\sqrt{2}}{p}$ pertence ao intervalo (a,b).

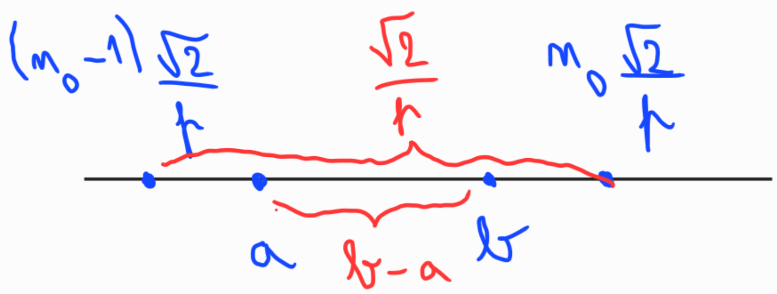
Solução:

a) Suponha, por absurdo, que p * (b - a) $\leq \sqrt{2}$ para todo

$p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$. Temos, então, que $p \leq \frac{\sqrt{2}}{b - a}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, o que significa que $\frac{\sqrt{2}}{b - a}$ é cota superior de $\mathbb{N}$, absurdo, pois $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. Portanto, existe $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$ tal que $p * (b - a) > \sqrt{2}$, c.q.d.

b) Sabemos que m_0 é o menor elemento de A. Então, $m_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{p} \geq b$ e $(m_0 - 1)\frac{\sqrt{2}}{p} < b$. Do item anterior, temos que $b - a > \frac{\sqrt{2}}{p}$. Note, no entanto, que $m_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{p} - (m_0 - 1)\frac{\sqrt{2}}{p} = \frac{\sqrt{2}}{p}$.

Suponha, por absurdo, que $(m_0 - 1)\frac{\sqrt{2}}{p} < a$, ou seja, não pertence ao intervalo (a, b), conforme a figura a seguir.



Nesse caso, temos $b - a < \frac{\sqrt{2}}{p}$, absurdo.

Portanto, $(m_0 - 1)\frac{2}{p} > a$, ou seja, $(m_0 - 1)\frac{\sqrt{2}}{p}$ pertence ao intervalo (a, b), c.q.d.

c) Sejam a, b racionais positivos. Então $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional se e somente se $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ forem ambos racionais.

Sugestão: Multiplique por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Solução: $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$; $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \in \mathbb{Q} \wedge (\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{a} \in \mathbb{Q} \wedge 2\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

1) Em cada item abaixo, determine o conjunto dos números reais que satisfaz a equação ou inequação:

e) $(2x-1)^2(3x+2) = 0$

Solução: $(2x-1)^2(3x+2) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \vee (3x+2) = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \vee 3x+2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \vee x = -\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow$

$x \in \left\{\dfrac{1}{2}, -\dfrac{2}{3}\right\}$.

1) Em cada item abaixo, determine o conjunto dos números reais que satisfaz a equação ou inequação:

a) $-3/2 < 2x/5 - 8 \leq 10$

b) $2-4x < 8 + 5x/3$

c) $x^3 > x^2$

d) $\dfrac{x+3}{2x-3} \leq 3$

f) $\dfrac{(x+2)^7(2x-8)^5(3x-10)^{100}}{x^2-4x+4} = 0.$

Solução: a) $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{2x}{5} - 8 \leq 10 \iff -\dfrac{3}{2} + 8 < \dfrac{2x}{5} \leq 10 + 8$

$\iff \dfrac{13}{2} < \dfrac{2x}{5} \leq 18 \iff \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{13}{2} < x \leq \dfrac{5}{2} \cdot 18 \iff$

$\iff \dfrac{65}{4} < x \leq 45 \iff x \in \left(\dfrac{65}{4}, 45 \right]$.

b) $2 - 4x < 8 + \dfrac{5x}{3} \iff 2 - 8 < \dfrac{5x}{3} + 4x \iff -6 < \dfrac{17x}{3} \iff$

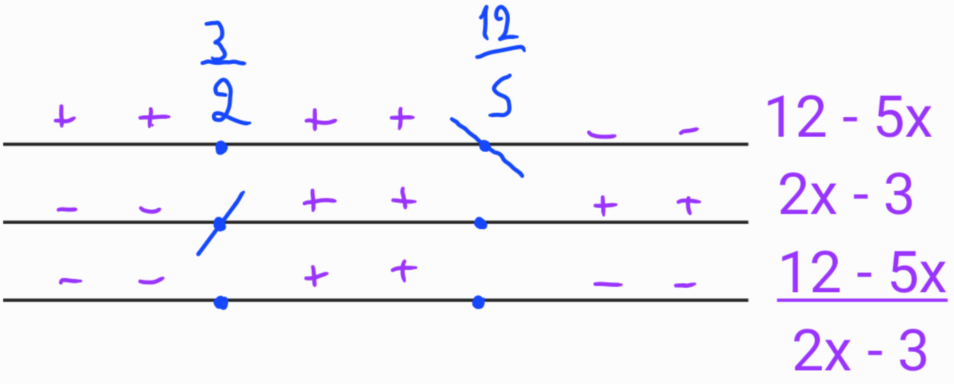
$x > -\dfrac{18}{17} \iff x \in \left(-\dfrac{18}{17}, +\infty \right)$.

c) $x^3 > x^2 \iff x^3 - x^2 > 0 \iff \overbrace{x^2}^{\geq 0}(x - 1) > 0 \iff x - 1 > 0 \quad \wedge$

$x \neq 0 \iff x > 1 \iff x \in (1, +\infty)$.

d) $\dfrac{x+3}{2x-3} \leq 3 \iff \dfrac{x+3}{2x-3} - 3 \leq 0 \iff \dfrac{x+3}{2x-3} - \dfrac{3(2x-3)}{2x-3} \leq 0$

$\iff \dfrac{12 - 5x}{2x - 3} \leq 0$



$\iff x < \dfrac{3}{2} \vee x \geq \dfrac{12}{5} \iff x \in \left(-\infty, \dfrac{3}{2} \right] \cup \left[\dfrac{12}{5}, +\infty \right)$.

f) $\dfrac{(x+2)^7 (2x-8)^5 (3x-10)^{100}}{\underbrace{x - 4x + 4}_{(x-2)^2}} = 0 \iff [(x+2)^7 = 0 \quad \vee$

$(2x-8)^5 = 0 \vee (3x-10)^{100} = 0] \wedge (x-2)^2 \neq 0 \iff [x+2 = 0 \vee 2x-8 = 0 \vee 3x-10 = 0] \wedge x \neq 0 \iff \left[x = -2 \vee x = 4 \vee x = \frac{10}{3}\right] \wedge x \neq 0 \iff x \in \left\{-2, 4, \frac{10}{3}\right\}.$

2) Mostre as afirmativas abaixo, onde a e b são números reais.

a) Se $a \neq 0$ então $a^2 > 0$;
b) $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$

Solução: a) $\sqrt{a^2} = |a| \Rightarrow (\sqrt{a^2})^2 = |a|^2 \Rightarrow a^2 = |a|^2 = |a^2| > 0$ para todo a real não nulo.

b) ($\Leftarrow$) trivial.

($\Rightarrow$) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > b \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0$ não ocorre. Analogamente, $b \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0$ não ocorre. Logo, $a = 0$ e $b = 0 \Rightarrow a = b = 0$.