Teste de Cálculo de Várias Variáveis-EMAp-26/8/2020

Questão 1) a) Seja $f: R^2 \to R$ e suponhamos que $\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y) = 5.$

O que você pode dizer sobre $f(1,3)$?

b) Calcule o limite se existir : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2 + 3y^2)\ln(x^2 + y^2)$

c) Calcule o limite se existir : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

Questão 2) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^4}{x^4+6y^8} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existem
b) Mostre que $f(x,y)$ não é diferenciável em (0,0)

Questão 3) Você está caminhando em um morro cujo formato é dado por

$f(x,y) = y\cos(\pi x) - x cos(\pi y) + 10.$

No ponto $(2,1,13)$ você parou e quer saber que direção deve tomar

para ficar no mesmo nível.

Questão 4) Seja $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + kyz$

a) Verifique que $(0,0,0)$ é um ponto crítico de $f(x,y,z)$

b) Encontre todos os valores de k para que $f(x,y,z)$tenha um mínimo local em $(0,0,0)$.

Questão 5) Encontrar todos os pontos da superfície $z^2 - xy = 1$, mais próximos da origem.

1) a) Nada se pode dizer. Apenas se f for contínua, poderia ser dito que $f(1,3) = 5$.

b) Seja $r^2 = x^2 + y^2$. Quando $(x,y) \to (0,0)$, $r \to 0$.

Logo: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2 + 3y^2) \cdot \ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0} 3r^2 \cdot \ln(r^2) =$

$$= \lim_{r\to 0} 6r^2 \ln r = \lim_{r\to 0} \frac{6 \ln r}{\frac{1}{r^2}} \overset{\text{L'hospital}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{\frac{6}{r}}{\frac{-2}{r^3}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} (-3r^2) = 0.$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Aproximando por $x = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} =$

$= \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$; aproximando por $x = y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, tal limite não existe.

② a) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem na origem.

b) Analisando $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+6y^8}$: aproximando por

$x=0 \Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y^4}{6y^8} = 0$; aproximando por

$x=y^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot x^2}{x^4+6x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{7x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$.

Logo, tal lim não existe $\Rightarrow$ a função não é contínua em $(0,0)$ $\Rightarrow$ a função não é diferenciável em $(0,0)$.

③ $f(x,y) = y\cos(\pi x) - x\cos(\pi y) + 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) =$

$= \left(-\pi y \operatorname{sen}(\pi x) - \cos(\pi y), \cos(\pi x) + \pi x \operatorname{sen}(\pi y)\right)$

$\Rightarrow \nabla f(2,1) = \left(-\pi \operatorname{sen}(2\pi) - \cos(\pi), \cos(2\pi) + 2\pi \operatorname{sen}(\pi)\right) =$

$= (1,1)$. Portanto, como o vetor gradiente é sempre perpendicular à curva de nível, basta tomar a direção perpendicular a ele, ou seja, caminhando na direção do vetor $(-1,1)$ você ficará no mesmo nível.

④ a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + Kyz \Rightarrow$

$\Rightarrow \nabla f(x,y,z) = (2x, 2y + Kz, 2z + Ky)$.

$x = y = z = 0 \Rightarrow \nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$. Logo, $(0,0,0)$ é ponto crítico.

b) $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & K \\ 0 & K & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow D = \det H = 8 - 2K^2$

$f_{xx} > 0$

Devemos ter então $8 - 2K^2 > 0 \Leftrightarrow 2K^2 < 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow K^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < K < 2$ para que f tenha um mínimo local em $(0,0,0)$

5 $z^2 = 1 + xy$

$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + xy + 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ (queremos minimizar f)

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (2x + y, 2y + x) = (0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2y + x = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (0,0)$ é ponto crítico.

$f_{xx} = 2 > 0$; $f_{yy} = 2$; $f_{xy} = f_{yx} = 1$

$\Rightarrow D(0,0) = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0 \Rightarrow (0,0)$ é mínimo local $\Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$

$\Rightarrow$ tais pontos são $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$.