A1- Cálculo de Várias Variáveis- EMAp-22/9/2020

Do Regulamento do Curso de Matemática Aplicada:
"Art 47. As penas previstas no artigo 44 serão aplicadas conforme a gravidade ou reincidência das seguintes faltas: . . . . . .

a) Improbidade na execução dos atos escolares, ressaltando-se como ato gravíssimo o uso da cola durante a realização de avaliações escolares" ...

Indicações:
- O único material de consulta é uma folha tamanho A4, escrita à mão, de ambos lados.
- Pode fazer a prova em papel e logo escanear,
- Pode fazer a prova no tablet com lápis digital,
- Pode fazer a prova no computador em LateX.

Em qualquer caso deverá enviar um único arquivo pdf.

Questão 1) Seja T o plano tangente ao gráfico de $g(x,y) = 8 - 2x^2 - 3y^2$, no ponto $(1,2,-6)$. Encontre o ponto no gráfico de $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, que tem plano tangente paralelo a T.

Questão 2) Seja $r = xi + yj + zk$ e $\rho = ||r||$. Prove que $\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{r}{\rho^3}$

Questão 3) Suponha que f é uma função de uma variável e que $u = g(x,y)$ é definida por

$$u = g(x,y) = xy \cdot f(\tfrac{x+y}{xy})$$

u satisfaz a equação diferencial parcial da forma

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = G(x,y) \cdot u$$

Encontre $G(x,y)$.

Questão 4) Encontre e classifique todos os pontos críticos de

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + 6y + 10$$

Questão 5) A função $f(x,y,z) = lnx + lny + 3\,lnz$, tem um máximo na superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 5a^2$, onde $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ e a é uma constante positiva. Encontre esse máximo

Questão ~~6~~) Calcule o volume da região limitada pelas superficies: integrais Triplas

$$z = 3(x^2 + y^2)\ ,\quad z = (x^2 + y^2)\ ,\quad z = 9 - (x^2 + y^2)$$

Questão 7) a) Calcule a área da região determinada por

$$(x-1)^2 + y^2 \le 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 \ge 1$$

b) Calcule a integral $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dxdy$

① $g(x,y) = 8 - 2x^2 - 3y^2$

$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

$$g_x(x,y) = -4x \quad \Rightarrow \quad g_x(1,2) = -4 \quad \Rightarrow$$
$$g_y(x,y) = -6y \qquad\qquad g_y(1,2) = -12$$

$T: z = -4(x-1) - 12(y-2) - 6 \Rightarrow 4x + 12y + z = 22$

$$f_x(x,y) = -2x \quad \Rightarrow \quad f_x(x_0,y_0) = -2x_0 \quad \Rightarrow$$
$$f_y(x,y) = -2y \qquad\qquad f_y(x_0,y_0) = -2y_0$$

$\Rightarrow z = -2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0) + 4 - x_0^2 - y_0^2$

$\Rightarrow (2x_0)x + (2y_0)\cdot y + z = x_0^2 + y_0^2 + 4$

Devemos ter: $2x_0 = 4$, $2y_0 = 12$ $\Rightarrow$ $x_0 = 2$, $y_0 = 6$ $\Rightarrow z_0 = 4 - 4 - 36 =$
$= -36$

$\therefore$ tal ponto é $(2, 6, -36)$.

② $r = xi + yj + zk = (x,y,z) \Rightarrow \rho = \|r\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) i +$

$$+\left(\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\cdot j+\left(\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\cdot k=$$

$$=\frac{1}{\rho^3}\left(-xi-yj-zk\right)=-\frac{1}{\rho^3}\cdot r=-\frac{r}{\rho^3}.\ \blacksquare$$

3) $$u=xy\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=y\left[1\cdot f\left(\frac{x+y}{xy}\right)+x\cdot f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$=y\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)$$

Pela simetria entre x e y: $\frac{\partial u}{\partial y}=x\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)$

$$x^2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-y^2\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=x^2y\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)-xy\,f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)-$$

$$-xy^2f\left(\frac{x+y}{xy}\right)+xy\,f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)=xy\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)\cdot(x-y)=$$

$$=u\,(x-y)=u\cdot G(x,y)\quad\therefore\quad G(x,y)=x-y.$$

4) $$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}y^2+6y+10$$

$f_x(x,y)=x^2-x=0\iff x(x-1)=0\iff x=0$ ou $x=1$

$f_y(x,y)=y^2-5y+6=0\iff(y-2)(y-3)=0\iff y=2$ ou $y=3$

Pontos críticos: $(0,2)$, $(0,3)$, $(1,2)$, $(1,3)$.

$$f_{xx}(x,y) = 2x-1$$

$$f_{yy}(x,y) = 2y-5 \Rightarrow D(x,y) = (2x-1)(2y-5) \Rightarrow$$

$$f_{xy}(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D(0,2) = -(-1) = 1 > 0, \quad f_{xx}(0,2) = -1 < 0 \\ D(0,3) = -(1) = -1 < 0 \\ D(1,2) = 1\cdot(-1) = -1 < 0 \\ D(1,3) = 1\cdot 1 = 1 > 0, \quad f_{xx}(1,3) = 1 > 0 \end{cases}$$

Portanto, $(0,2)$ é máx. local, $(1,3)$ é mín. local e $(0,3)$ e $(1,2)$ são pontos de sela.

5) $$g(x,y) = \ln x + \ln y + 3\ln\left((5a^2-x^2-y^2)^{1/2}\right) =$$

$$= \ln x + \ln y + \frac{3}{2}\ln(5a^2-x^2-y^2)$$

$$g_x(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5a^2-x^2-y^2}\cdot(-2x) =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{3x}{5a^2-x^2-y^2} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 5a^2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 = 5a^2$$

$$g_y(x,y) = \frac{1}{y} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5a^2 - x^2 - y^2} \cdot (-2y) = \frac{1}{y} - \frac{3y}{5a^2 - x^2 - y^2}$$

$$= 0 \iff 3y^2 = 5a^2 - x^2 - y^2 \iff x^2 + 4y^2 = 5a^2$$

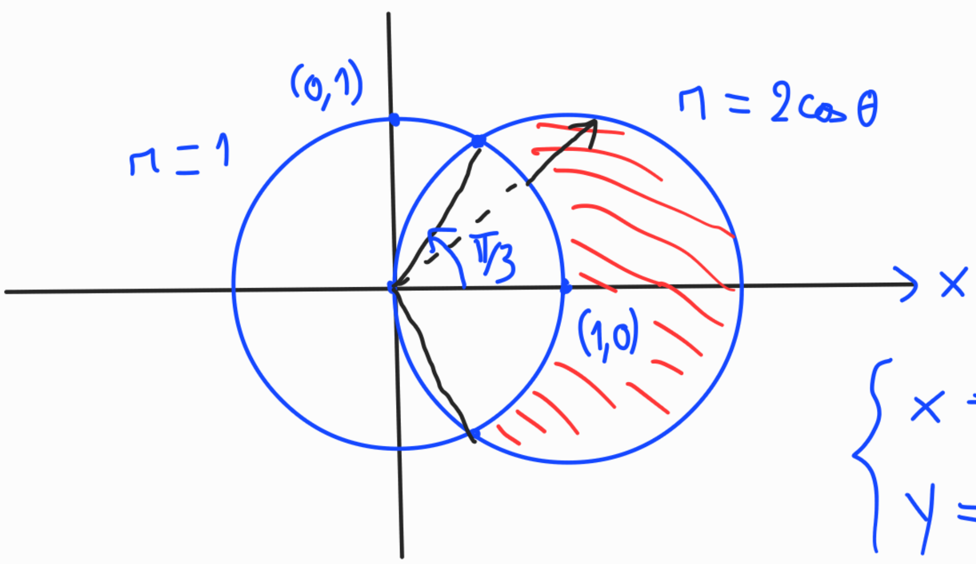
$$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 = 10a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2a^2 \Rightarrow 3x^2 = 3y^2 = 3a^2$$

$\Rightarrow x = y = a \Rightarrow$ Ponto crítico : (a,a).

$$\Rightarrow g(a,a) = 2\ln a + \frac{3}{2}\ln(\sqrt{3}a) = 5\ln a + 3\ln\sqrt{3}$$

$\therefore$ O máximo de f é $f(a, a, 5\ln a + 3\ln\sqrt{3})$.

7 a)



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta$$

$$\Rightarrow r = 2\cos\theta$$

$$2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}$$

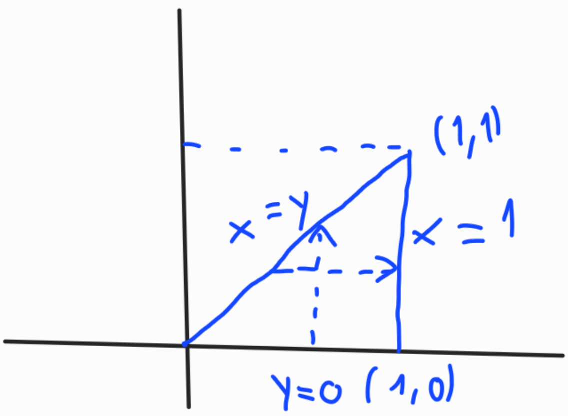
$$A = 2\int_0^{\pi/3}\int_1^{2\cos\theta} 1 \cdot r \cdot dr\, d\theta = 2\int_0^{\pi/3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{2\cos\theta} d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi/3}\left(2\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) d\theta = \int_0^{\pi/3}\left(4\cos^2\theta - 1\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/3}\left[4\cdot\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) - 1\right] d\theta = \int_0^{\pi/3}\left(1 + 2\cos 2\theta\right) d\theta =$$

$$= \left[\theta + \sin 2\theta\right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b)



$$\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1\int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1\left[e^{x^2} y\right]_0^x dx = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{e^1}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e-1}{2}.$$