A1 - Soluções

Fernanda Luísa Silva Gomes
João Lucas Duim

16 de Setembro de 2021

Questão 1

Sejam $g(x,y) = x^2 + xy^3$, $f(u,v,w) = (uv^2 + w^3, u + ve^w) = (x,y)$. Calcular $D_f(u_0,v_0,w_0)$, $D_g(x_0,y_0)$, $D_{g\circ f}(u_0,v_0,w_0)$, onde $(u_0,v_0,w_0) = (2,1,0)$.

Solução:

$$D_f(u,v,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(uv^2+w^3) & \frac{\partial}{\partial v}(uv^2+w^3) & \frac{\partial}{\partial w}(uv^2+w^3) \\ \frac{\partial}{\partial u}(u+ve^w) & \frac{\partial}{\partial v}(u+ve^w) & \frac{\partial}{\partial w}(u+ve^w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^2 & 2uv & 3w^2 \\ 1 & e^w & ve^w \end{bmatrix},$$

$$D_f(u_0,v_0,w_0) = D_f(2,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_g(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy^3) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y^3 & 3xy^2 \end{bmatrix},$$

$$D_g(x_0,y_0) = D_g(u_0v_0^2 + w_0^3, u_0 + v_0e^{w_0}) = D_g(2,3) = \begin{bmatrix} 31 & 54 \end{bmatrix},$$

$$D_{g\circ f}(u_0,v_0,w_0) = D_{g\circ f}(2,1,0) = D_g(2,3)D_f(2,1,0) = \begin{bmatrix} 31 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 & 178 & 54 \end{bmatrix}.$$

Questão 2

Determinar o ponto da superfície $x^2 + 3y^2 + \frac{3}{2}z^2 = 18$, situado no primeiro octante, na qual a reta normal é perpendicular ao plano $x + y + z = 10$.

Solução: Como estamos olhando pro primeiro octante, temos:

$$z = \sqrt{12 - 2y^2 - \frac{2x^3}{3}}.$$

Vamos obter a equação do plano tangente à superfície no ponto $P_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2z}\frac{-4x}{3} = -\frac{2x}{3z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2z}(-4y) = -\frac{2y}{z}$$

$$T: z - z_0 = -\frac{2x_0}{3z_0}(x - x_0) - \frac{2y_0}{z_0}(y - y_0).$$

Reorganizando:

$$T: \frac{2x_0}{3z_0}x + \frac{2y_0}{z_0}y + z = \frac{2x_0^2}{3z_0} + \frac{2y_0^2}{z_0} + z_0.$$

Como desejamos que a reta normal à superfície em P_0 seja perpendicular ao plano $x + y + z = 10$, desejamos que esse plano seja paralelo a T. Logo, devemos ter:

$$\begin{cases} \frac{2x_0}{3z_0} = 1 \\ \frac{2y_0}{z_0} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{3z_0}{2} \\ y_0 = \frac{z_0}{2} \end{cases}$$

Substituindo na equação da superfície:

$$\frac{9z_0^2}{4} + \frac{3z_0^2}{4} + \frac{3z_0^2}{2} = \frac{9z_0^2}{2} = 18 \Rightarrow z_0 = 2.$$

Com isso, obtemos $x_0 = 3$ e $y_0 = 1$. Portanto, o ponto do primeiro octante pedido é $(3, 1, 2)$.

Questão 3

Encontre a derivada direcional de $f(x, y, z) = xe^{y^2 - z^2}$ em $P_0 = (1, 2, -2)$ na direção do vetor tangente $\sigma'(t)$ à curva $\sigma(t) = (t, 2\cos(t-1), -2e^{t-1})$.

Solução: O vetor tangente à curva é:

$$\sigma'(t) = (1, -2\sin(t-1), -2e^{t-1}).$$

Note que $P_0 = \sigma(1)$. Então, o vetor tangente à curva em P_0 é:

$$\sigma'(1) = (1, 0, -2)$$

Normalizando esse vetor:

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Agora, vamos obter o gradiente de f:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(e^{y^2 - z^2}, 2xye^{y^2 - z^2}, -2xze^{y^2 - z^2}\right)$$

$$\nabla f(1, 2, -2) = (1, 4, 4)$$

Finalmente, a derivada direcional pedida é:

$$D_u f(x,y,z) = \langle (1,4,4)\,, \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \rangle = -\frac{7}{\sqrt{5}}$$

Questão 4

Encontre os pontos de máximo, mínimo ou sela se existirem, da função $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
Solução: Temos:

$$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$f_y = 6xy - 12$$

$$f_{xx} = 6x$$

$$f_{yy} = 6x$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 6y.$$

Logo:

$$H = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix}, \det(H) = D(x,y) = 36(x^2 - y^2).$$

Vamos encontrar os pontos críticos de f:

$$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$$

$$f_y = 6xy - 12 = 0 \Rightarrow xy = 2$$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ f_y = 6xy - 12 = 0 \Rightarrow xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Assim, os pontos críticos de f são $(-2,-1)$, $(-1,-2)$, $(1,2)$ e $(2,1)$.

$$D(-2,-1) = 108 > 0 \,\text{e}\, f_{xx}(-2,-1) = -12 < 0$$

$$D(-1,-2) = -108 < 0 \,\text{e}\, f_{xx}(-1,-2) = -6 < 0$$

$$D(1,2) = -108 < 0 \,\text{e}\, f_{xx}(1,2) = 6 > 0$$

$$D(2,1) = 108 > 0 \,\text{e}\, f_{xx}(2,1) = 12 > 0$$

Portanto, f tem ponto de máximo em $(-2,-1)$, ponto de mínimo em $(2,1)$ e ponto de sela em $(-1,-2)$ e $(1,2)$.

Questão 5

Considere a curva C interseção do cilindro de equação $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ com o plano $2x+y+z = 12$. Determine as distâncias máxima e mínima dos pontos de C ao plano xy.

Solução: A distância de um ponto ao plano xy é dada por $|z|$. Desejamos, então, encontrar os extremos da função $|z|$ sujeita às restrições $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$ e $2x + y + z - 12 = 0$. Note que $|z| = z$, pois $z > 0$ para todos os pontos de C. Utilizando Lagrange:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = z - \lambda\left(\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} - 1\right) - \mu(2x + y + z - 12)$$

$$L_x = -\frac{\lambda x}{6} - 2\mu = 0$$

$$L_y = -\frac{\lambda y}{8} - \mu = 0$$

$$L_z = 1 - \mu = 0$$

$$L_\lambda = -\left(\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} - 1\right) = 0$$

$$L_\mu = -(2x + y + z - 12) = 0$$

Então:

$$\mu = 1$$

$$x = -\frac{12}{\lambda}$$

$$y = -\frac{8}{\lambda}$$

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{144}{\lambda^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{64}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = 16$$

Assim, $\lambda = \pm 4$, fornecendo $x = \pm 3$ e $y = \pm 2$. Avaliando z nos possíveis pontos:

$$z(-3, -2) = 12 - 2 \cdot (-3) - (-2) = 20$$

$$z(-3, 2) = 12 - 2 \cdot (-3) - 2 = 16$$

$$z(3, -2) = 12 - 2 \cdot 3 - (-2) = 8$$

$$z(3, 2) = 12 - 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

Portanto, as distâncias máxima e mínima dos pontos de C ao plano xy são, respectivamente, 20 e 4.

Questão 6

Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.
Solução: A região $D \in \mathbb{R}^2$ sobre a qual vamos integrar é:

$$D = \{(x, y); -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$$

Assim, o volume do sólido pedido é obtido calculando a seguinte integral:

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)dydx = \int_{-1}^{1}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1}dx = \int_{-1}^{1}\left(x^2-x^4+\frac{1}{3}-\frac{x^6}{3}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x}{3}-\frac{x^7}{21}\right]_{-1}^{1} = \frac{88}{105}$$

Questão 7

Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2y$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Solução: Usaremos coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

As equações das superfícies dadas passam a ser:

$$z = 0,\ r = 2\sin\theta,\ z = r$$

A região $D \in \mathbb{R}^2$ sobre a qual vamos integrar é:

$$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta); 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2\sin\theta\}$$

Assim, o volume do sólido pedido é obtido calculando a seguinte integral:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}(r-0)\cdot rdrd\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r^2 drd\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\sin\theta} d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta = \frac{8}{3}\frac{4}{3} = \frac{32}{9}$$