A2 - Soluções

Fernanda Luísa Silva Gomes
João Lucas Duim

22 de Novembro de 2021

Questão 1

Calcule a integral $\iiint\limits_W zdxdydz$, onde W é limitado pelas superfícies:

$$y = 0,\ z = 0,\ x + y = 2,\ 2y + x = 6,\ y^2 + z^2 = 4$$

Solução: W corresponde a região que $2 - y \leq x \leq 6 - 2y$, $0 \leq y \leq 2$ e $0 \leq z \leq \sqrt{4 - y^2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_W zdzdxdy &= \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} zdzdxdy = \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{\sqrt{4-y^2}} dxdy \\
&= \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \frac{4-y^2}{2} dxdy = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} (4 - y^2) dxdy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 (4 - y^2) x \Big|_{2-y}^{6-2y} dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (4 - y^2)(4 - y) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 (y^3 - 4y^2 - 4y + 16) dy \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} - \frac{4y^3}{3} - \frac{4y^2}{2} + 16y \right]_0^2 \\
&= \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

Questão 2

Um arame tem a forma da curva obtida como interseção da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$ com o plano $x + z = 2$. Sabendo-se que a densidade em cada ponto do arame é dada por $f(x, y, z) = xy$, calcule a massa total do arame.

Solução: Parametrizando a curva σ em questão, obtemos:

$$\sigma(x) = (x, \sqrt{4x - 2x^2}, 2 - x)\ ,\ x \in [0, 2],$$

$$\sigma'(x) = \left(1, \frac{2 - 2x}{\sqrt{4x - 2x^2}}, -1\right)\ ,\ x \in [0, 2],$$

$$||\sigma'(x)|| = \sqrt{\frac{4x^2 - 8x + 4}{4x - 2x^2} + 2} = \frac{2}{\sqrt{4x - 2x^2}},$$

$$f(\sigma(x)) = f(x, \sqrt{4x - 2x^2}, 2 - x) = x\sqrt{4x - 2x^2}.$$

Finalmente, a massa total do arame é dada por:

$$\int_\sigma f ds = \int_0^2 f(\sigma(x)) \cdot ||\sigma'(x)|| dx = \int_0^2 2x dx = 4.$$

Questão 3

Seja $F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} + 3x\right)$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$. Calcule a integral de linha de F ao longo da curva $x^2 + y^2 = 4$.

Solução: Parametrizando a curva σ: $x^2 + y^2 = 4$, obtemos:

$$\sigma(t) = (2\cos t, 2\sin t),\ t \in [0, 2\pi],$$

$$\sigma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t),\ t \in [0, 2\pi],$$

$$F(\sigma(t)) = F(2\cos t, 2\sin t) = \left(-\frac{\sin t}{2}, \frac{\cos t}{2} + 6\cos t\right),$$

$$\begin{aligned} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) &= \left(-\frac{\sin t}{2}, \frac{\cos t}{2} + 6\cos t\right) \cdot (-2\sin t, 2\cos t) \\ &= \sin^2 t + \cos^2 t + 12\cos^2 t = 1 + 12\cos^2 t \\ &= 1 + 6(1 + \cos 2t) \\ &= 7 + 6\cos 2t. \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\int_\sigma F ds = \int_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (7 + 6\cos 2t) dt = [7t + 3\sin 2t]_{t=0}^{t=2\pi} = 14\pi$$

Questão 4

Calcule $\int_C \frac{yx^2 dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)^2}$, onde C é a curva dada pela equação $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{2}{3}y = \frac{8}{9}$.

Solução: O campo vetorial em questão é:

$$F(x, y) = \left(\frac{yx^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}\right).$$

Note que F é conservativo:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{yx^2}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2} & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0).$$

Logo, como F não está definido na origem e é conservativo, podemos, sem alterar o resultado, trocar uma curva que engloba a origem (é o caso de C) por outra que também engloba:

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi],$$

$$\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t)\ ,\ t \in [0, 2\pi],$$

$$F(\sigma(t)) = F(\cos t, \sin t) = (\sin t \cdot \cos^2 t, -\cos^3 t),$$

$$\begin{aligned} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) &= (\sin t \cdot \cos^2 t, -\cos^3 t) \cdot (-\sin t, \cos t) \\ &= -\sin^2 t \cdot \cos^2 t - \cos^4 t \\ &= -\cos^2 t \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t) \\ &= -\cos^2 t \\ &= -\frac{1 + \cos 2t}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\int\limits_C \frac{yx^2 dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)^2} = \int\limits_\sigma F ds = \int\limits_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int\limits_0^{2\pi} -\frac{1 + \cos 2t}{2} dt = -\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = -\pi.$$

Questão 5

Considere o arco de parábola $z = 3 - x^2$, no plano xz compreendido entre as semirretas $z = 2x$ e $z = \frac{11}{2}x$. Seja S a superfície obtida pela rotação desta curva ao redor do eixo z. Pede-se:

(a) Parametrização de S.

(b) Área de S.

Solução:

(a) A parametrização do arco de parábola compreendido entre as semirretas é $(t, 3 - t^2)$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Utilizando coordenadas cilíndricas, encontramos que a parametrização de S é $(t \cos\theta, t \sin\theta, 3 - t^2)$, sendo $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(b) Temos

$$|S_t \times S_\theta| \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & -2t \\ -t\sin\theta & t\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (2t^2 \cos\theta, 2t^2 \sin\theta, t),$$

$$\|S_t \times S_\theta\| = t\sqrt{4t^2 + 1}.$$

Assim,

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 t\sqrt{4t^2 + 1} dt d\theta = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 t\sqrt{4t^2 + 1} dt.$$

Realizando a substituição $u = 4t^2 + 1$ e mudando os limites de integração, obtemos

$$\frac{\pi}{4} \int_2^5 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}}\right]_2^5 = \frac{\pi}{6} \left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right).$$

Questão 6

Calcule $\iint\limits_S \nabla \times F dS$ onde S é a superfície $x^2+y^2+z^2=1$, $z \leq 0$ e $F=(y,-x,zx^3y^2)$.

Solução: Pelo Teorema de Stokes,

$$\iint\limits_S \nabla \times F dS = \int\limits_\sigma F ds,$$

sendo

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 0),\ t \in [2\pi, 0],$$

$$\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)\ ,\ t \in [2\pi, 0],$$

$$F(\sigma(t)) = F(\cos t, \sin t, 0) = (\sin t, -\cos t, 0),$$

$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = (\sin t, -\cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) = -1.$$

Finalmente:

$$\iint\limits_S \nabla \times F dS = \int\limits_\sigma F ds = \int\limits_{2\pi}^{0} -dt = -(-2\pi) = 2\pi.$$

Questão 7

Calcule $\iint\limits_S F$ onde $S: x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$ e $F = \left(\frac{x^3}{3}+y, \frac{y^3}{3}, \frac{z^3}{3}+2\right)$.

Solução: Sendo R a superfície $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, temos:

$$\phi_\theta(r,\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0),$$

$$\phi_r(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0),$$

$$N = \phi_\theta \times \phi_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-r),$$

$$\iint\limits_R F = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 F(\phi(r,\theta)) \cdot N dr d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 -2r dr d\theta = -2\pi.$$

Pelo Teorema de Gauss,

$$\iint\limits_S F + \iint\limits_R F = \iiint\limits_E \nabla \cdot F dV,$$

sendo o sólido E: $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$.

Como $\nabla \cdot F = x^2+y^2+z^2 = \rho^2$, temos, usando coordenadas esféricas:

$$\iint\limits_S F = \iiint\limits_E \nabla \cdot F dV - \iint\limits_R F = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^1 \rho^4 \sin\phi d\rho d\phi d\theta + 2\pi = \frac{2\pi}{5} + 2\pi = \frac{12\pi}{5}$$