Teste 2 - Soluções

Fernanda Luísa Silva Gomes
João Lucas Duim

03 de Novembro de 2021

Questão 1

(0,8) Calcule o volume da região limitada pelos parabolóides:

$$z = 8 - x^2 - y^2 \ , \ z = 8 - 3(x^2 + y^2) \ , \ z = x^2 + y^2$$

Solução: Veja na Figura 1 a região referida plotada no Geogebra. Na figura, há um cilindro auxiliar separando em duas regiões para realizar a integração.

A interseção entre $z = 8 - 3(x^2 + y^2)$ e $z = x^2 + y^2$ é a circunferência $(\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, 2)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

A interseção entre $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$ é a circunferência $(2\cos\theta, 2\sin\theta, 4)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

A região dentro do cilindro auxiliar da figura 1 tem volume dado por:

$$V_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{8-3r^2}^{8-r^2} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} 2r^3 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} 2 d\theta = 4\pi$$

A região fora do cilindro auxiliar da figura 1 tem volume dado por:

$$V_2 = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{r^2}^{8-r^2} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{2} (8r - 2r^3) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[4r^2 - \frac{r^4}{2} \right]_{r=\sqrt{2}}^{r=2} d\theta = \int_0^{2\pi} 2 d\theta = 4\pi$$

Portanto, o volume pedido vale:

$$V = V_1 + V_2 = 8\pi$$

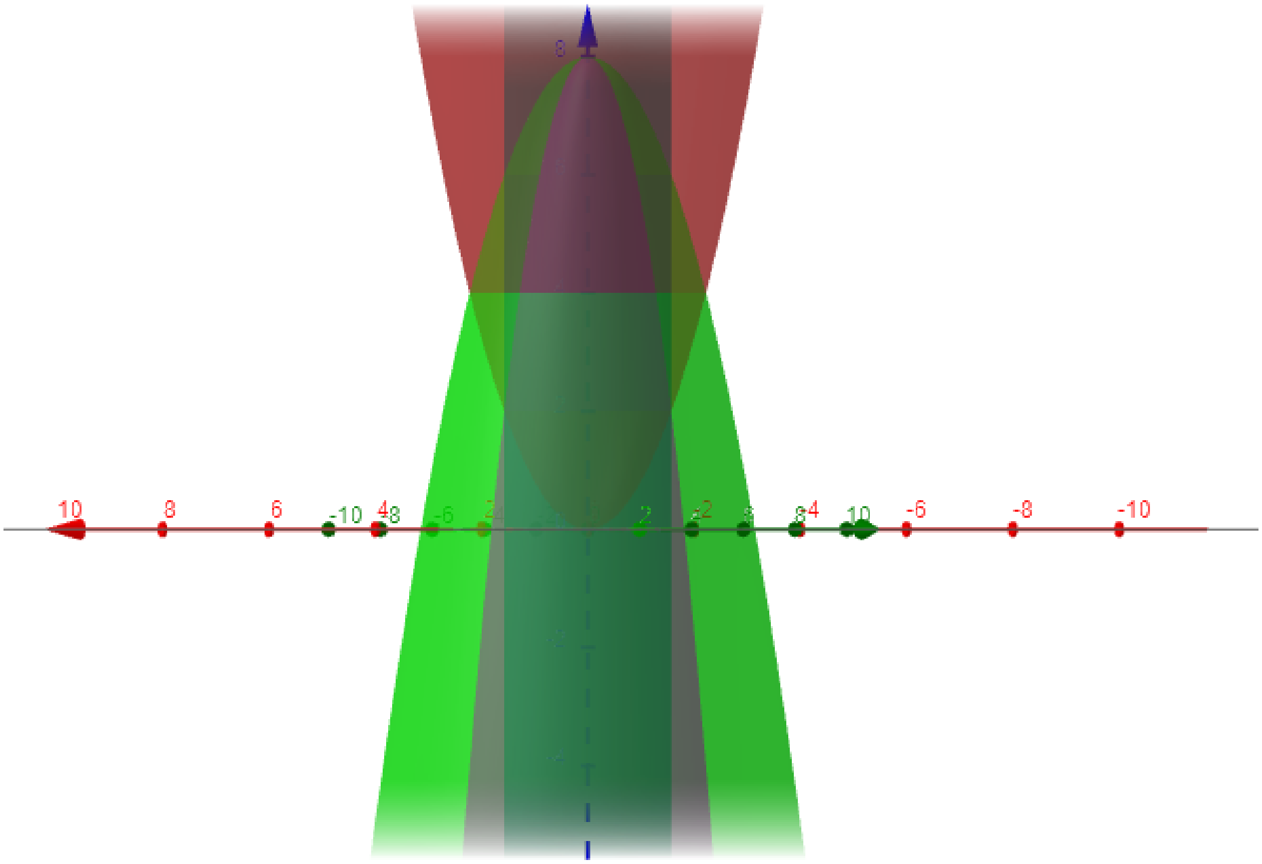

Figura 1: Região entre parabolóides analisada

Questão 2

(0,7) Calcule $\int\limits_{\sigma} f ds$ onde $f(x, y, z) = x + y$ e σ é a curva obtida como a interseção do semiplano $x = y$, $y \geq 0$ com o parabolóide $z = x^2 + y^2$, $z \leq 2$.

Solução: Parametrizando σ, obtemos:

$$\sigma(t) = (t, t, 2t^2) \ , \ t \in [0, 1]$$

$$\sigma'(t) = (1, 1, 4t)$$

$$||\sigma'(t)|| = \sqrt{16t^2 + 2}$$

$$f(\sigma(t)) = f(t, t, 2t^2) = 2t$$

Finalmente:

$$\int_\sigma f ds = \int_0^1 f(\sigma(t)) \cdot ||\sigma'(t)|| dt = \int_0^1 2t \cdot \sqrt{16t^2+2} dt = \left[\frac{(16t^2+2)^{\frac{3}{2}}}{24} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{18^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}}{24} = \frac{13\sqrt{2}}{6}$$

Questão 3

(0,8) Calcule $\iint_S \sqrt{x^2+y^2} dS$ onde S é a superfície do sólido limitado pela parte superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e o cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Solução: S compreende uma superfície esférica (S_1) que pode ser parametrizada por $r_1(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, e uma superfície cônica (S_2) que pode ser parametrizada por $r_2(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho)$ com $\rho \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Temos, então, sendo $f(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2}$:

$$f(r_1(\theta, \phi)) = f((\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)) = \sin\phi$$

$$f(r_2(\rho, \theta)) = f((\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho)) = \rho$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & 0 \end{vmatrix} = (-\cos\theta\sin^2\phi, \sin^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi)$$

$$||N_1|| = \sin\phi$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, -\rho)$$

$$||N_2|| = \rho\sqrt{2}$$

Então:

$$\iint_{S_1} f dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(r_1(\theta,\phi)) \cdot ||N_1|| d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\phi \, d\phi d\theta = 2\pi \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{4}\right]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{S_2} f dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(r_2(\rho,\theta)) \cdot ||N_2|| d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rho^2\sqrt{2} d\rho d\theta = \frac{\pi}{3}$$

Portanto:

$$\iint_S f dS = \iint_{S_1} f dS + \iint_{S_2} f dS = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{6}$$

Questão 4

(0,7) Calcule $\iint\limits_S F dS$ onde $F(x, y, z) = (y, z, xz)$ e S é a superfície do sólido W onde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

Solução: S compreende uma superfície plana (S_1) que pode ser parametrizada por $\phi_1(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1)$ e uma superfície parabólica (S_2) que pode ser parametrizada por $\phi_2(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2)$. Em ambos os casos, $r \in [0, 1]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Temos, então:

$$F(\phi_1(r, \theta)) = F((r\cos\theta, r\sin\theta, 1)) = (r\sin\theta, 1, r\cos\theta)$$

$$F(\phi_2(r, \theta)) = F((r\cos\theta, r\sin\theta, r^2)) = (r\sin\theta, r^2, r^3\cos\theta)$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r)$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 2r \end{vmatrix} = (2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, -r)$$

Então:

$$\iint\limits_{S_1} F dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 F(\phi_1(r, \theta)) \cdot N_1 dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \cos\theta dr d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \int_0^1 r^2 dr = [\sin\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} = 0$$

$$\iint\limits_{S_2} F dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 F(\phi_2(r, \theta)) \cdot N_2 dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r^3\sin\theta\cos\theta + 2r^4\sin\theta - r^4\cos\theta) dr d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{4}\sin\theta\cos\theta - \frac{2}{5}\sin\theta + \frac{1}{5}\cos\theta\right) d\theta = \left[\frac{\cos^2\theta}{4} + \frac{2}{5}\cos\theta + \frac{1}{5}\sin\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

Portanto:

$$\iint\limits_S F dS = \iint\limits_{S_1} F dS + \iint\limits_{S_2} F dS = 0$$