Teste 1 - Soluções

Fernanda Luísa Silva Gomes
João Lucas Duim

26 de Agosto de 2021

Questão 1

Calcule os limites se existirem

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos xy - 1}{x^2y^2}$

Solução: Definimos $t = xy$. Assim:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t^2}.$$

Como agora estamos com o limite de uma variável, aplicaremos L'Hospital. Desse modo, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t^2} &\overset{H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{2t} \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

A rigor deveríamos provar por ε e δ que o limite de uma variável existe e é $\frac{-1}{2}$, o que será omitido aqui e deixado a cargo do leitor ☺[1]

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

Solução: Analisaremos o limite em questão na direção $x = 0$ e $x = y$. Na direção $x = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{(-y)^2}{y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{y^2}{y^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Na direção $x = y$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x,x)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(x,x)} \frac{(x-x)^2}{x^2+x^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(x,x)} \frac{0}{2x^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

[1]Bebel não cobrou isso no teste.

Como obtemos valores diferentes ao analisar o limite em duas direções, concluímos que o limite não existe.

Questão 2

Considere as seguintes funções:

$$f(x, y, z) = (3y + 2, x^2 + y^2, x + z^2), C(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

(a) Encontre $h = f \circ C$ e $\frac{dh}{dt}(\pi)$.

Solução: Compondo as funções, obtemos:

$$\begin{aligned} h(t) &= f(C(t)) \\ &= f(\cos t, \sin t, t) \\ &= (3\sin t + 2, \sin^2 t + \cos^2 t, \cos t + t^2) \\ &= (3\sin t + 2, 1, \cos t + t^2) \end{aligned}$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dt}(3\sin t + 2, 1, \cos t + t^2) \\ &= \left(\frac{d}{dt}(3\sin t + 2), \frac{d}{dt}(1), \frac{d}{dt}(\cos t + t^2)\right) \\ &= (3\cos t, 0, 2t - \sin t) \end{aligned}$$

Então, $\frac{dh}{dt}(\pi) = (3\cos\pi, 0, 2\pi - \sin\pi) = (-3, 0, 2\pi)$

(b) Encontre $C(\pi)$, $C'(\pi)$ e $D_f(-1, 0, \pi)$.

Solução: Temos:

$$C(\pi) = (\cos\pi, \sin\pi, \pi) = (-1, 0, \pi)$$

$$\begin{aligned} C'(t) &= \frac{d}{dt}C(t) \\ &= \frac{d}{dt}(\cos t, \sin t, t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}(\cos t), \frac{d}{dt}(\sin t), \frac{d}{dt}(t)\right) \\ &= (-\sin t, \cos t, 1) \Rightarrow C'(\pi) = (-\sin\pi, \cos\pi, 1) \\ &= (0, -1, 1). \end{aligned}$$

$$D_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(3y+2) & \frac{\partial}{\partial y}(3y+2) & \frac{\partial}{\partial z}(3y+2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) & \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x+z^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x+z^2) & \frac{\partial}{\partial z}(x+z^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 2z \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$D_f(-1,0,\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2\pi \end{bmatrix}$$

(c) A produção de trigo W em um determinado ano depende da temperatura média T e do volume anual das chuvas R. Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de $0,15$°C/ano e a quantidade anual de chuva está decrescendo à taxa de $0,1$cm/ano. Eles também estimam que, no atual nível de produção $\frac{\partial W}{\partial T} = -2$ e $\frac{\partial W}{\partial R} = 8$. Qual o significado do sinal dessas derivadas parciais? Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo $\frac{dW}{dt}$.

Solução: A derivada parcial $\frac{\partial W}{\partial T} = -2$ ser negativa significa que, mantendo as condições de R constantes, ou seja, fixado o volume anual das chuvas, a produção de trigo diminui com o aumento da temperatura média. A derivada parcial $\frac{\partial W}{\partial R} = 8$ ser positiva significa que, mantendo as condições de T constantes, ou seja, fixada a temperatura média, a produção de trigo aumenta com o aumento do volume anual das chuvas. Pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial T} \cdot \frac{dT}{dt} + \frac{\partial W}{\partial R} \cdot \frac{dR}{dt} \\ &= -2 \cdot 0,15 + 8 \cdot (-0,1) \\ &= -0,3 - 0,8 \\ &= -1,1 \end{aligned}$$

Portanto, a taxa de variação corrente da produção de trigo é estimada em $\frac{dW}{dt} = -1,1$.

Questão 3

(a) Em qual direção a derivada direcional de $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no ponto $(1,1)$ é igual a 0?

Solução: Encontremos as derivadas parciais de f em relação a x e em relação a y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(x^2+y^2) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2) - (x^2-y^2) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{(x^2+y^2) \cdot 2x - (x^2-y^2) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2) - (x^2-y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{(x^2+y^2)\cdot(-2y) - (x^2-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Logo, o gradiente de f em um ponto (x, y) é dado por:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Em particular, no ponto $(1, 1)$, o gradiente de f vale:

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{4}{4}, \frac{-4}{4}\right) = (1, -1)$$

Seja $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ vetor unitário com $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $D_u f(1, 1) = 0$. Temos, então:

$$\langle(1,-1), (\cos\theta, \sin\theta)\rangle = \cos\theta - \sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta.$$

Portanto, a derivada direcional de f no ponto $(1, 1)$ vale 0 na direção do vetor unitário

$$u = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(b) E em um ponto arbitrário (x_0, y_0) no primeiro quadrante?

Solução: Do item anterior, temos:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{4x_0y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}, \frac{-4x_0^2y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}\right).$$

Devemos ter $\langle\nabla f(x_0, y_0), u\rangle = 0$, ou seja, u pode ser qualquer vetor perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$.

Portanto, como

$$\langle\left(\frac{4x_0y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}, \frac{-4x_0^2y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}\right), (x_0, y_0)\rangle = 0,$$

concluímos que f tem derivada 0 na direção de $u = (x_0, y_0)$ em um ponto arbitrário (x_0, y_0) no primeiro quadrante.

Questão 4

Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função:

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2,$$

no disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solução: Temos:

$$f_{xx} = 2, f_{xy} = f_{yx} = 1 \text{ e } f_{yy} = 2.$$

Desse modo,

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \det(H) > 0.$$

Buscaremos os pontos críticos no interior do disco, ou seja, $x^2 + y^2 < 1$. Para que um ponto seja crítico, devemos ter

$$f_x = 2x + y = 0 \to y = -2x$$
$$f_y = 2y + x = 0 \to y = \frac{-x}{2}.$$

Logo, o único ponto crítico é $(0, 0)$. Vale observar que o ponto encontrado está no interior do disco, satisfazendo a restrição desejada. Como $\det(H) > 0$ e $f_{xx} > 0$, $f(0, 0) = 0$ é um valor de mínimo.

Agora, buscaremos possíveis máximos e mínimos na borda do disco. Definimos $g(x, y) = x^2 + y^2$. Por multiplicadores de Lagrange, temos:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) &= 1 \end{aligned}$$

Assim, temos $(2x+y, 2y+x) = \lambda(2x, 2y)$ e $x^2+y^2 = 1$, pela primeira e segunda equação, respectivamente. Resolvendo o sistema, obtemos $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ e $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Note que

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{2}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Logo, o valor de mínimo é 0 e o valor de máximo é $\frac{3}{2}$.