A2- Cálculo de Várias Variáveis- EMAp-22/9/2020

Do Regulamento dos Cursos da EMAp
:
"Art 47. As penas previstas no artigo 44 serão aplicadas conforme a gravidade ou reincidência das seguintes faltas: . . . . . .

a) *Improbidade na execução dos atos escolares, ressaltando-se como ato gravíssimo o uso da cola durante a realização de avaliações escolares"* ...

Indicações:

- O único material de consulta é uma folha tamanho A4, escrita à mão, de ambos lados.
- Pode fazer a prova em papel e logo escanear,
- Pode fazer a prova no tablet com lápis digital,
- Pode fazer a prova no computador em LateX.

Em qualquer caso deverá enviar um único arquivo pdf.

Questão 1) Calcule $\int_C F\, ds$, onde $F(x,y,z) = (xy\,, x^2 + z\,, y^2 - x)$ e C é a interseção do cone $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$, com o cilindro $x = y^2$, do ponto $A = (0,0,0)$ até $B = (1,1,\sqrt{2}\,)$.

Questão 2) Calcule a área da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$, que se encontra no interior da parabolóide $z = x^2 + y^2$

Questão 3) Considere a superfície de revolução obtida girando o segmento de reta que liga os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,0,3)$ em torno do eixo z.
Calcule $\iint_S F\, dS$ onde $F(x,y,z) = (yz, xz, x^2 + y^2\,)$

Questão 4) Calcule $\iint_S z\, dS$, onde S é o hemisfério superior da esfera de raio a centrada na origem.

Questão 5) Calcule $\int_C F\, ds$ onde $F(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\,,\ \frac{x}{x^2+y^2}\,,\ z\right)$ e C é a curva $4(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 9$.

Questão 6) Seja S a superfície união de S_1 e S_2 onde

$S_1 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 1\,, 0 \leq z \leq 1\}$

$S_2 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\,, z \geq 1\}$

Se $F(x,y,z) = (zx + z^2y + x^2, z^3yx + y\,, z^4x^2)$.

Calcule $\iint_S \nabla \times F\, dS$.

Questão 7) Seja W o sólido em $\mathbb{R}^3$ limitado pelas superficies
$x = y^2$, $x = 9$, $x = z$, $z = 0$

Calcule o fluxo de $F(x, y, z) = (3x - 5y, 4z - 2y, 8yz)$, no bordo de W.

Questão extra (valor 1,0)
Seja $F(x, y, z) = \frac{r}{||r||^2}$, onde $r = xi + yj + zk$.
Mostre que $\iiint_W \frac{1}{||r||^2} dV = \iint_{\partial W} F\, dS$, qualquer que seja o sólido W em $\mathbb{R}^3$.

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C:\left\{\left(y^2, y, y\sqrt{y^2+1}\right),\ y\in[0,1]\right\}$$

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^1 \left(y^3, y^4+y\sqrt{y^2+1}, 0\right)\cdot\left(2y, 1, \frac{2y^3+y}{\sqrt{y^4+y^2}}\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(2y^4+y^4+y\sqrt{y^2+1}\right)dy = \int_0^1 \left(3y^4+y\sqrt{y^2+1}\right)dy =$$

$$= \left[\frac{3y^5}{5}+\frac{(y^2+1)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{5}+\frac{2^{3/2}}{3}-\frac{1}{3} = \frac{4+10\sqrt{2}}{15}$$

(2) interior do paraboloide : $z\geq x^2+y^2\geq 0$

$$12 = x^2+y^2+z^2 \leq z^2+z \Rightarrow z^2+z-12\geq 0 \overset{z\geq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow z\geq 3 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \geq x^2+y^2+9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2\leq 3$$

$$(x,y,z) = \left(a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta, \sqrt{12-a^2}\right),\quad \begin{matrix} a\in[0,\sqrt{3}] \\ \theta\in[0,2\pi]\end{matrix}$$

$$A(S) = \iint_S 1\, dS \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} 1\cdot\sqrt{\frac{a^4+12a^2-a^4}{12-a^2}}\,da\,d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{a\sqrt{12}}{\sqrt{12-a^2}}\, da = 2\pi\sqrt{12}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{a}{\sqrt{12-a^2}}\, da =$$

$$= 2\pi\sqrt{12}\left[-\sqrt{12-a^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi\sqrt{12}\left[-3+\sqrt{12}\right] = 24\pi - 6\pi\sqrt{12}.$$

(*) $r = (a\cos\theta,\ a\,\text{sen}\,\theta,\ \sqrt{12-a^2})$,

$$r_a = \left(\cos\theta,\ \text{sen}\,\theta,\ \frac{-a}{\sqrt{12-a^2}}\right),\quad r_\theta = (-a\,\text{sen}\,\theta,\ a\cos\theta,\ 0)$$

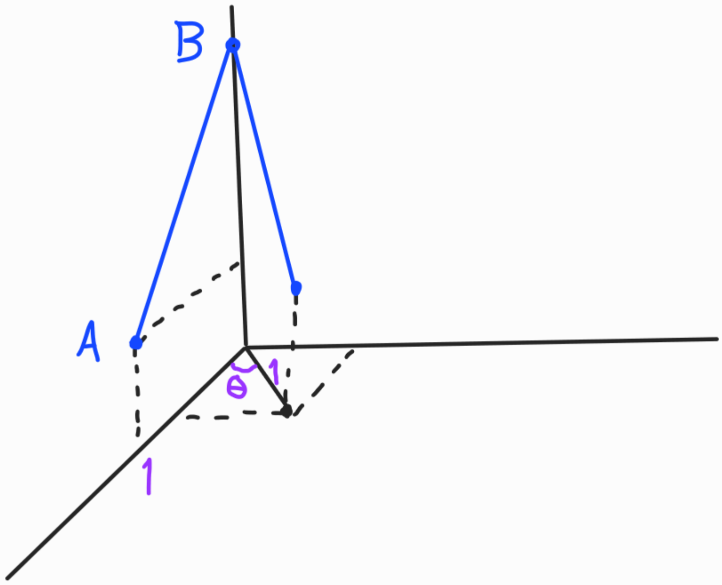
$$\Rightarrow N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & \frac{-a}{\sqrt{12-a^2}} \\ -a\,\text{sen}\,\theta & a\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{a^2\cos\theta}{\sqrt{12-a^2}},\ \frac{a^2\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{12-a^2}},\ a\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|N\| = \sqrt{\frac{a^4}{12-a^2}+a^2} = \sqrt{\frac{a^4+12a^2-a^4}{12-a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{12a^2}{12-a^2}} = \frac{a\sqrt{12}}{\sqrt{12-a^2}}.$$

③



$$\overrightarrow{BA} = (1,0,-2)$$

$$\overline{AB} = (0,0,3) + t(1,0,-2), \quad t \in [0,1]$$

$$S: \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\,\theta,\ 3-2r), \quad r \in [0,1], \quad \theta \in [0,2\pi]$$

$$\varphi_r = (\cos\theta,\ \text{sen}\,\theta,\ -2)$$
$$\varphi_\theta = (-r\,\text{sen}\,\theta,\ r\cos\theta,\ 0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & -2 \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (2r\cos\theta,\ 2r\,\text{sen}\,\theta,\ r)$$

$$\Rightarrow \iint_S F \cdot dS =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3r\,\text{sen}\,\theta - 2r^2\,\text{sen}\,\theta,\ 3r\cos\theta - 2r^2\cos\theta,\ r^2) \cdot$$

$\cdot\, (2r\cos\theta,\ 2r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r)\, dr\, d\theta =$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^3 + 12r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - 8r^3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right) dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\frac{r^4}{4} - 4r^3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - 2r^4\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4} - 6\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right) d\theta = \left[\frac{\theta}{4} - 3\,\mathrm{sen}^2\theta\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

(4) $S : (a\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ a\cos\varphi),\quad \theta \in [0, 2\pi],\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\iint_S z \cdot dS = \iint_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z \geq 0}} z \cdot dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} a\cos\varphi \cdot a^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\, d\varphi = 2\pi a^3 \left[\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi a^3.$$

(5) $\text{rot}\, F = \begin{vmatrix} i & j & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & z \end{vmatrix} =$

$= (0,0,0) \Rightarrow$ F é conservativo não definido no eixo z $(x=y=0)$. C é uma elipse que engloba a origem, então podemos trocar C por $C_1 : x^2+y^2=1$, também orientada positivamente:

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 0) \cdot (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta, 0) \cdot (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\theta = 2\pi.$$

(6) $\iint_S \text{rot}\, F \cdot dS = \int_C F \cdot dr$, onde C é o bordo de

$$S_1 \cup S_2 : x^2 + y^2 = 1 \ , \ z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C : (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \ , \ \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta, \operatorname{sen}^2\theta, 0)\cdot(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

7) $\operatorname{div} F = 3 - 2 + 8y = 8y + 1$

$$\iint_{\partial W} F \cdot dS = \iiint_W \operatorname{div} F \cdot dV = \int_0^9 \int_0^x \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (8y+1)\, dy\, dz\, dx =$$

$$= \int_0^9 \int_0^x \left[4y^2 + y\right]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dz\, dx = \int_0^9 \int_0^x 2\sqrt{x}\, dz\, dx =$$

$$= \int_0^9 2\sqrt{x}\cdot x\, dx = 2\int_0^9 x^{3/2}\, dx = 2\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^9 = \frac{972}{5}.$$

Extra $F(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \operatorname{div} F = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{1}{\|r\|^2}.$

Seja $B: \{(x,y,z),\ x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$ bola de raio a centrada na origem.

$$\iiint_B \operatorname{div} F \, dV = \iiint_B \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \, dV =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{1}{\rho^2}\cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \cdot a \cdot \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} =$$

$$= 4\pi \cdot a \implies \lim_{a\to 0} \iiint_B \operatorname{div} F \, dV = \lim_{a \to 0} 4\pi \cdot a = 0$$

$\therefore$

$\rightarrow$ Se $(0,0,0) \notin W$, vale o Teo. de Gauss:

$$\iiint_W \frac{1}{\|r\|^2} \, dV = \iint_{\partial W} F \cdot dS \quad ;$$

→ Se $(0,0,0) \in W$, vale o Teo. de Gauss em $W \setminus B$:

$$\iiint_{W \setminus B} \frac{1}{\|r\|^2}\, dV = \iiint_{W} \frac{1}{\|r\|^2}\, dV - \iiint_{B} \frac{1}{\|r\|^2}\, dV =$$

$$= \iint_{\partial W} F\, dS .$$

Fazendo $a \to 0$:

$$\iiint_{W} \frac{1}{\|r\|^2}\, dV = \iint_{\partial W} F \cdot dS .$$

$\blacksquare$

Avaliação Substitutiva – Cálculo de Várias Variáveis
EMAp – 16/12/2020

Do Regulamento dos Cursos da EMAp
:
"Art 47. As penas previstas no artigo 44 serão aplicadas conforme a gravidade ou reincidência das seguintes faltas: . . . . . .

a) Improbidade na execução dos atos escolares, ressaltando-se como ato gravíssimo o uso da cola durante a realização de avaliações escolares" ...

Indicações:
- O único material de consulta é uma folha tamanho A4, escrita à mão, de ambos lados.
- Pode fazer a prova em papel e logo escanear,
- Pode fazer a prova no tablet com lápis digital,
- Pode fazer a prova no computador em LateX.

Em qualquer caso deverá enviar um único arquivo pdf.

Questão 1) a) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

onde a função é continua? Justifique a sua resposta

b) Seja $f(x,y,z) = \frac{e^{x+y}}{1+z^2}$

Calcule $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1,2+h,3) - f(1,2,3)}{h}$

Questão 2) a) Encontre a taxa de variação de $f(x,y,z) = xyz$, na direção da normal à superfície $yx^2 + xy^2 + yz^2 = 3$, no ponto $P = (1,1,1)$.

b) Sejam $f(x,y,z) = xz + yz + xy$ e $g(t) = (e^t, \cos t, sen\ t)$
Calcule ∇f , g' . Use ∇f e g' para calcular $(f \circ g)'(1)$.

Questão 3) O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm respectivamente, com erro de medida de no máximo 0,1 cm. Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.

Questão 4) a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, está definida em $D\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Use o método de Lagrange para localizar os pontos de máximo e mínimo de $f(x,y)$ no círculo unitário.

b) Determine a natureza dos pontos críticos de
$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$$

Questão 5) a) Calcule $\iint_D \cos y \; dxdy$, onde D é a região limitada por
$$y = 2x\,, \qquad y = x\,, \qquad x = \pi\,, \qquad x = 2\pi$$
b) Encontrar o volume da região limitada por
$$z = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad z = 10 - x^2 - 2y^2$$

Questão 6) Calcular $\int_C 2xyz\,dx + x^2 z\,dy \;+\; x^2 y\,dz$, onde C é uma curva simples orientada ligando os pontos $(1,1,1)$ e $(1,2,4)$.

Questão 7) Seja S a superfície de revolução obtida pela rotação da curva $(t^2, 3t)$, $0 \leq t \leq 1$ ao redor do eixo z.
a) Parametrize a superfície
b) Calcule $\iint_S F\,dS$ onde $F = (yz\,, xz, x^2 + y^2)$

Questão 8) Seja $F(x,y,z) = (2xyz + senx)i + x^2 z\,j + \; x^2 y\,k$
a) Verifique se o campo é conservativo
b) Se for conservativo calcule a função potencial

Questão 9) Sejam $F(x,y,z) = \; x^2 i + (2xy + x)j + zk$
C : o círculo $x^2 + y^2 = 1$
S : o disco $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$
a) Determine o fluxo de F através de S
b) Determine a circulação de F ao redor de C
c) Encontre o fluxo de $\nabla \times F$ através de S

Questão 10) Seja S a superfície fechada consistindo de
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$
Seja E o campo elétrico definido por $E(x,y,z) = 2xi + 2yj + 2zk$.
Encontre o fluxo elétrico através de S

1 a) A função é contínua em $(x,y) \neq (0,0)$. Vamos verificar se é contínua na origem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{0}{y^6} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(y^3,y)} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{(x,y)\to(y^3,y)} \frac{y^6}{2y^6} = \frac{1}{2}$$

Logo, f é descontínua apenas em $(0,0)$.

b) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(1,2+h,3)-f(1,2,3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{3+h}}{10} - \frac{e^3}{10}}{h}$$

L'hospital

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{3+h}-e^3}{10h} = \lim_{h\to 0} \frac{1.e^{3+h}}{10} = \frac{e^3}{10}.$$

2 a) $g(x,y,z) = yx^2 + xy^2 + yz^2 = 3 \Rightarrow g_x = 2xy + y^2$; $g_y = x^2 + 2xy + z^2$; $g_z = 2yz$. Eq. do plano tg. em $(1,1,1)$: $g_x(1,1,1).(x-1) + g_y(1,1,1).(y-1) + g_z(1,1,1).(z-1) = 0 \Rightarrow 3(x-1) + 4(y-1) + 2(z-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 4y + 2z = 9 \Rightarrow (3,4,2)$ é um vetor normal a $g(x,y,z) = 3$ $\Rightarrow$ A taxa de variação de $f(x,y,z) = xyz$ na direção de $v = \dfrac{(3,4,2)}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}} =$

$= \dfrac{(3,4,2)}{\sqrt{29}}$ no ponto $(1,1,1)$ é dada por

$$\nabla f(1,1,1) \cdot v = (yz, xz, xy) \cdot v = (1,1,1) \cdot \frac{(3,4,2)}{\sqrt{29}} = \frac{9}{\sqrt{29}}.$$

b) $f(x,y,z) = xz + yz + xy \Rightarrow \nabla f = (y+z, x+z, x+y)$

$g(t) = (e^t, \cos t, \operatorname{sen} t) \Rightarrow g'(t) = (e^t, -\operatorname{sen} t, \cos t)$

Pela regra da cadeia, $(f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t) =$

$= (\operatorname{sen} t + \cos t, e^t + \operatorname{sen} t, e^t + \cos t) \cdot (e^t, -\operatorname{sen} t, \cos t)$

$= e^t \cos t + e^t \operatorname{sen} t + \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t + e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t =$

$= 2e^t \cos t + \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow$

$\Rightarrow (f \circ g)'(1) = 2e\cos 1 + \cos^2 1 - \operatorname{sen}^2 1.$

3 Seja x a medida do comprimento e y a da largura. A área é dada por $f(x,y) = xy \Rightarrow f_x(x,y) = y$, $f_y(x,y) = x \Rightarrow dz = f_x(a,b) \cdot (x-a) + f_y(a,b) \cdot (y-b) =$

$= 24 \cdot 0{,}1 + 30 \cdot 0{,}1 = 2{,}4 + 3 = 5{,}4$. Portanto, tal erro máximo é de $5{,}4 \text{ cm}^2$.

④ a) $f_x = 2x + y$
$f_y = x + 2y$ $\Rightarrow \nabla f = (2x+y, x+2y)$;

$g(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \nabla g = (2x, 2y)$

$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g \Rightarrow (2x+y, x+2y) = \lambda \cdot (2x, 2y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2x\lambda \\ x + 2y = 2y\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{2x+y}{2x} \\ \lambda = \dfrac{x+2y}{2y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x+y}{2x} = \frac{x+2y}{2y} \Rightarrow 2y(2x+y) = 2x(x+2y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4xy + 2y^2 = 4xy + 2x^2 \Rightarrow x^2 = y^2$$

Utilizando a restrição, concluímos:

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ são pontos de máximo e

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ são pontos de mínimo.

b) $$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 6y + 6 = 0 \\ f_y = 2y - 6x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = x^2 + 2 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = 5 \\ y = \dfrac{3}{2} \text{ ou } y = \dfrac{27}{2} \end{cases}$$

$f_{xx} = 6x$; $f_{xy} = f_{yx} = -6$; $f_{yy} = 2$

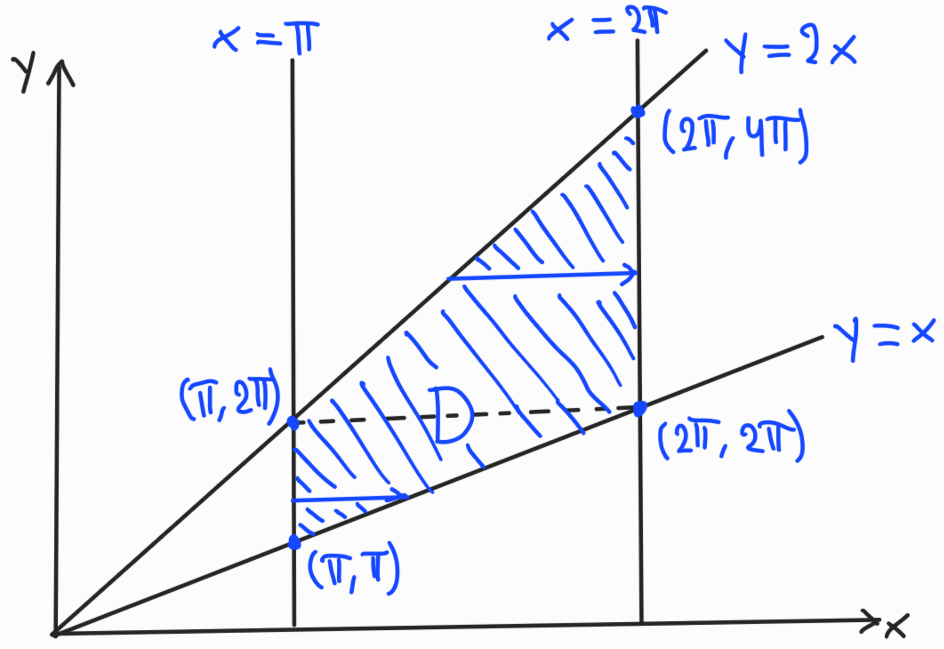
matriz hessiana $= \begin{bmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 12x - 36$, $f_{xx} > 0$.

Logo, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ é ponto de sela e $\left(5, \frac{27}{2}\right)$ é

ponto de mínimo.

(5) a)



$$\iint_D \cos y \, dx\, dy = \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi}^{y} \cos y \, dx\, dy + \int_{2\pi}^{4\pi} \int_{\frac{y}{2}}^{2\pi} \cos y \, dx\, dy =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} (y - \pi) \cos y \, dy + \int_{2\pi}^{4\pi} \left(2\pi - \frac{y}{2}\right) \cos y \, dy =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} (y\cos y - \pi \cos y)\, dy + \int_{2\pi}^{4\pi} \left(2\pi \cos y - \frac{y\cos y}{2}\right) dy =$$

$$= \Big[y \,\text{sen}\, y + \cos y - \pi \,\text{sen}\, y \Big]_{\pi}^{2\pi} + \Big[2\pi \,\text{sen}\, y - \frac{1}{2} y \,\text{sen}\, y - \frac{1}{2}\cos y \Big]_{2\pi}^{4\pi}$$

$$= (0 + 1 - 0 - 0 - (-1) + 0) + \left(0 - 0 - \frac{1}{2}\cdot 1 - 0 + 0 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2.$$

b) Interseção : $x^2 + y^2 = 10 - x^2 - 2y^2 \Rightarrow 2x^2 + 3y^2 = 10$

$$V = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{\frac{10-2x^2}{3}}}^{\sqrt{\frac{10-2x^2}{3}}} (10 - 2x^2 - 3y^2)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \Big[10y - 2x^2 y - y^3 \Big]_{-\sqrt{\frac{10-2x^2}{3}}}^{\sqrt{\frac{10-2x^2}{3}}} dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left[2\cdot(10 - 2x^2)\sqrt{\frac{10-2x^2}{3}} - 2\cdot\left(\frac{10-2x^2}{3}\right)\sqrt{\frac{10-2x^2}{3}} \right] dx$$

$$= 4\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{10-2x^2}{3} \cdot \sqrt{\frac{10-2x^2}{3}} \cdot dx =$$

$$= 4\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(\frac{10-2x^2}{3}\right)^{3/2} dx \overset{(*)}{=} 4 \cdot \frac{40\sqrt{30}}{27} = \frac{160\sqrt{30}}{27}$$

$(*)$ $x = \sqrt{5}\,\text{sen}\,\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \displaystyle\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(\frac{10-2x^2}{3}\right)^{3/2} dx =$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{10\cos^2\theta}{3}\right)^{3/2} d\theta = \frac{10\sqrt{10}}{3\sqrt{3}} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta = \frac{40\sqrt{10}}{9\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{30}}{27}$$

6) $\displaystyle\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz \Rightarrow F(x,y,z) =$

$$= (2xyz, x^2z, x^2y)$$

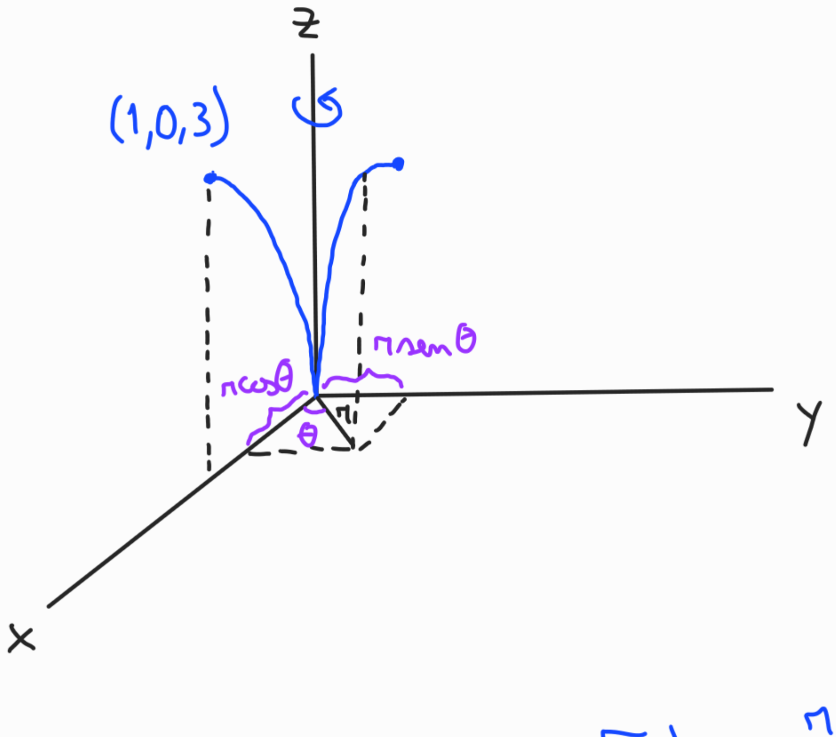
$$\text{rot}\,F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{vmatrix} =$$

$= (x^2 - x^2, 2xy - 2xy, 2xz - 2xz) = (0,0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ é conservativo; $f(x,y,z) = x^2 y z$ é tal que $\nabla f = (2xyz, x^2 z, x^2 y) = F$

$$\Rightarrow \int_C F = \int_C 2xyz\,dx + x^2 z\,dy + x^2 y\,dz = f(1,2,4) - f(1,1,1) = 8 - 1 = 7.$$

7 a) $(x,z) = (t^2, 3t)$, $t \in [0,1]$



$S: r(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, 3\sqrt{r})$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

b) $r_r = \left(\cos\theta, \text{sen}\,\theta, \frac{3}{2\sqrt{r}}\right)$, $r_\theta = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0)$

$$\Rightarrow N = \begin{vmatrix} i & j & K \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & \frac{3}{2\sqrt{r}} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\sqrt{r}\cos\theta, \frac{3}{2}\sqrt{r}\,\text{sen}\,\theta, -r\right) \Rightarrow \iint_S F \cdot dS =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(3r\sqrt{r}\,\text{sen}\,\theta, 3r\sqrt{r}\cos\theta, r^2\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\sqrt{r}\cos\theta, \frac{3}{2}\sqrt{r}\,\text{sen}\,\theta, -r\right) dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(9r^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - r^3\right) dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left[3r^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - \frac{1}{4}\right) d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{3\,\text{sen}\,2\theta}{2} - \frac{1}{4}\right) d\theta =$$

$$= \left[-\frac{3\cos 2\theta}{4} - \frac{\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{2}.$$

8 a) $F(x,y,z) = (2xyz + \text{sen}\,x, x^2 z, x^2 y)$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz + \text{sen } x & x^2 z & x^2 y \end{vmatrix} = (0,0,0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow F$ é conservativo;

b) $\nabla f(x,y,z) = F(x,y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz + \text{sen } x \Rightarrow$

$\Rightarrow f = x^2yz - \cos x + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z + g_y(y,z) =$

$= x^2 z \Rightarrow g_y(y,z) = 0 \Rightarrow g(y,z) = h(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow f = x^2 yz - \cos x + h(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 y + h'(z) =$

$= x^2 y \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h = C$ (constante) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y,z) = x^2yz - \cos x + C$ representa a família de funções potenciais de F.

9) $F(x,y,z) = (x^2, 2xy + x, z)$

$C: (\cos\theta, \text{sen }\theta), \ \theta \in [0, 2\pi]$

$$S: (a\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta, 0), \quad \begin{matrix}\theta \in [0,2\pi] \\ a \in [0,1]\end{matrix}$$

a) $r(a,\theta) = (a\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta, 0) \Rightarrow r_a = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 0)$,

$r_\theta = (-a\,\text{sen}\,\theta, a\cos\theta, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow N = \begin{vmatrix} i & j & K \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -a\,\text{sen}\,\theta & a\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_S F \cdot dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (a^2\cos^2\theta, 2a^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + a\cos\theta, 0)\cdot(0,0,a)\,da\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 0 \cdot da\,d\theta = 0.$$

b) $$\text{rot}\,F = \begin{vmatrix} i & j & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 2xy + x & z \end{vmatrix} = (0,0,2y+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_C \text{rot}\,F = \int_0^{2\pi} (0,0,2\cos\theta + 1)\cdot(-\text{sen}\,\theta, \cos\theta, 0)\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} 0 \, d\theta = 0 \Rightarrow$$ a circulação de F ao redor de C é 0.

c) $N = (0,0,a)$; $(\nabla \times F)(\pi(a,\theta)) = (0,0,2a \operatorname{sen}\theta + 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_S (\nabla \times F) \cdot dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (0,0,2a \operatorname{sen}\theta + 1)\cdot(0,0,a) \, da \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2a^2 \operatorname{sen}\theta + a) \, da \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{2a^3 \operatorname{sen}\theta}{3} + \frac{a^2}{2}\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \operatorname{sen}\theta}{3} + \frac{1}{2}\right) d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{2\cos\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

10) Pelo Teorema de Gauss: $\iint_S E \cdot dS = \iiint_W \operatorname{div} F \cdot dV =$

$$= \iiint_W (2+2+2) \, dV = 6 \iiint_W dV = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot 1^3}{3} = 4\pi.$$