MATEMÁTICA PARA INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

UNIDADE II

ÁLGEBRA LINEAR

Elaboração

Erika L P Borges

Juciara do Nascimento César

Produção

Equipe Técnica de Avaliação, Revisão Linguística e Editoração

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

ESPAÇOS VETORIAIS

1.1. Introdução à Álgebra Linear

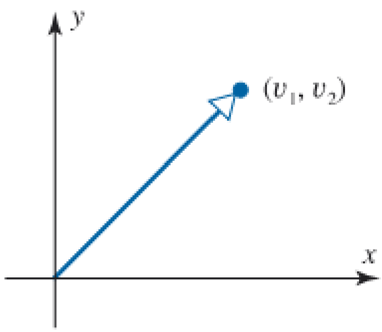
Os engenheiros e os físicos fazem uma distinção entre dois tipos de grandezas físicas: os escalares, que são quantidades que podem ser descritas simplesmente por um valor numérico; e os vetores, que são quantidades que requerem não só um valor numérico, mas também uma direção e um sentido para sua descrição.

A Álgebra Linear se ocupa de estudar os vetores.

Os engenheiros e os físicos representam os vetores em duas dimensões (bidimensional) ou em três dimensões (tridimensional). A direção e o sentido da flecha especificam a direção e o sentido do vetor.

As coordenadas de um vetor v qualquer do espaço bi ou tridimensional são as componentes desse vetor em relação ao sistema de coordenadas.

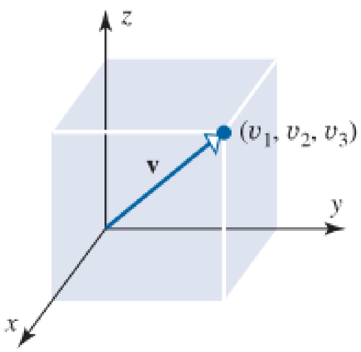
Figura 3. Componentes do vetor bidimensional.



Fonte: Rorres; Howard, 2012.

$v = (v_1, v_2)$ denota um vetor v do espaço bidimensional de componentes (v_1, v_2).

Figura 4. Componentes do vetor tridimensional.

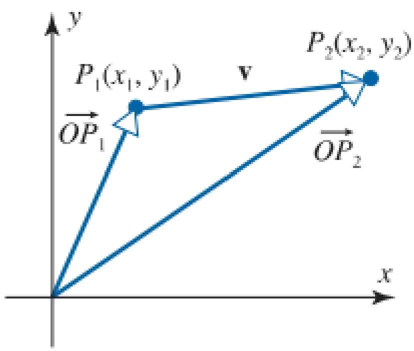


Fonte: Rorres; Howard, 2012.

v = (v_1, v_2, v_3) denota um vetor v do espaço tridimensional de componentes (v_1, v_2, v_3).

$\overrightarrow{P_1P_2}$ denota o vetor de ponto inicial $P_1(x_1, y_1)$ e o ponto final $P_2(x_2, y_2)$

Figura 5. Componentes de um vetor qualquer.



Fonte: Rorres; Howard, 2012.

As componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ são $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$, ou seja, se obtêm as componentes desse vetor subtraindo as coordenadas do ponto inicial das coordenadas do ponto final.

Exemplo: Sejam $P_1(- 6, 2)$ e $P_2(-4, -1)$, encontre as componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Solução:

As componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ são dadas por (-6 – (-4), 2 – (-1)) = (-6 + 4, 2 + 1) = (-2, 3).

Exemplo: Sejam $P_1(0, 0, 0)$ e $P_2(-1, 6, 1)$, encontre as componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Solução:

As componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ são dadas por (0 – (-1), – 6, 0 - 1) = (1, -6, - 1).

Seja n um número inteiro positivo, a ênupla ordenada é uma sequência de números reais $(v_1, v_2,..., v_n)$. O conjunto de todas as ênuplas ordenadas é dito o espaço de dimensão n e é denotado por IR^n.

A soma de dois vetores $v = (v_1, v_2,..., v_n)$ e $w = (w_1, w_2,..., w_n)$ de IR^n é definida por $v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, ..., v_n + w_n)$.

A multiplicação de um vetor $v = (v_1, v_2,..., v_n)$ por um escalar λ é definida por $\lambda(v_1, v_2,..., v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2,..., \lambda v_n)$.

Em outras palavras, soma-se (ou se subtrai) vetores através da soma (ou subtração) de seus correspondentes componentes.

E um vetor é multiplicado por um escalar por meio da multiplicação desse escalar de cada componente do vetor.

Exemplo: Sejam u = (-3, 1, 2), v = (4, 0, -8) e w = (6, -1, -4) vetores de IR^3. Encontre os seguintes vetores:

a) 5v   b) 6u + 2v   c) v – w

Solução:

a. 5v = 5(4, 0, -8) = (5.4, 5.0, 5(-8)) = (20, 0, -40)

b. 6u + 2v = 6(-3, 1, 2) + 2(4, 0, -8)
= (6(-3), 6.1, 6.2) + (2.4, 2.0, 2(-8))
= (-18, 6, 12) + (8, 0, -16)
= (-18 +8, 6 + 0, 12 + (-16)) = (-10, 6, -4)

c. v – w = (4, 0, -8) - (6, -1, -4)
= (4 – 6, 0 – (-1), -8 – (-4) = (-2, 1, -4)

A norma ou o comprimento de um vetor $v = (v_1, v_2,..., v_n)$ é definida e denotada por:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} \ .$$

Exemplo: Encontre a norma de v = (1, -1, 2).

Solução:

A norma do vetor v = (1, -1, 2) é dada por:

$$\|v\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6}.$$

Um vetor de norma igual a 1 é dito vetor unitário. O vetor unitário de mesma direção e sentido de um vetor v é definido e denotado por:

$$u = \frac{1}{\|v\|} v.$$

Exemplo: Encontre um vetor unitário de mesma direção e sentido do vetor v = (1, -1, 2).

Solução:

A norma do vetor v = (1, -1, 2) é igual a $\sqrt{6}$, logo, o vetor unitário de mesma direção e sentido é dado por:

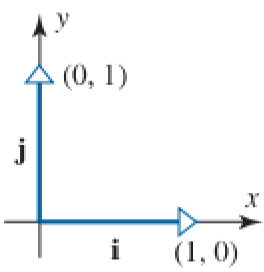
$$u = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}.1, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

O processo de multiplicar um vetor v não nulo pelo seu comprimento a fim de obter um vetor unitário é chamado de normalização de v.

Os vetores unitários nas direções positivas dos eixos coordenados são ditos vetores canônicos. Esses vetores em IR^2 são denotados por:

i = (1, 0) e j = (0, 1)

Figura 6. Vetores unitários do IR^2.

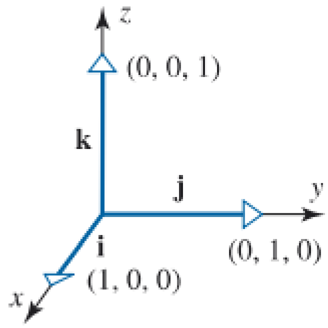


Fonte: Rorres; Howard, 2012.

e, em IR^3 são denotados por:

i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0) e k = (0, 0, 1).

Figura 7. Vetores unitários do IR^3



Fonte: Rorres; Howard, 2012.

Cada vetor v = (x, y) em IR^2 pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores canônicos, escrevendo como:

$$v = (x, y) = \mathbf{x}(1, 0) + \mathbf{y}(0, 1).$$

E um vetor v = (x, y, z) em IR^3 pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores canônicos, escrevendo como:

$$v = (x, y, z) = \mathbf{x}(1, 0, 0) + \mathbf{y}(0, 1, 0) + \mathbf{z}(0, 0, 1).$$

<u>Exemplo</u>: O vetor v = (2, -2, 3) pode ser expresso como:

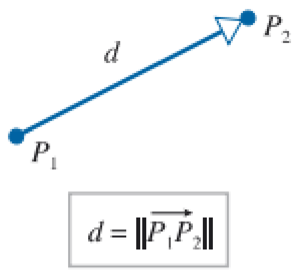
$$(2, -2, 3) = \mathbf{2}(1, 0, 0) + \mathbf{-2}(0, 1, 0) + \mathbf{3}(0, 0, 1).$$

O comprimento do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é igual à distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, e é definido e denotado por:

$$d = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

O comprimento do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é igual à distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, e é definido e denotado por:

$$d = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$



Fonte: Rorres; Howard, 2012.

Exemplo: Encontre a distância euclidiana entre os vetores $P_1 = (3, 3, 3)$ e $P_2 = (1, 0, 4)$.

Solução:

A distância entre os vetores P_1 e P_2 é dada por:

$$d = \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \right\| = \sqrt{(1-3)^2 + (0-3)^2 + (4-3)^2}$$

$$= \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}.$$

1.2. Espaço vetorial

O espaço vetorial é uma coleção de vetores que podem ser somados um ao outro e multiplicados por números escalares, ditos escalares. As operações de adição de vetores e multiplicação por escalar precisam satisfazer certas propriedades, denominados axiomas.

1º) Associativa da adição: $u + (v + w) = (u + v) + w$.

2º) Comutatividade da adição: $u + v = v + u$.

3º) Elemento neutro da adição: $\exists\ \vec{0} \in V$, tal que $u + \vec{0} = u$, $\forall\ u \in V$.

4º) Elemento inverso da adição: $\exists\ -\vec{u} \in V$, tal que $u + \left(-\vec{u}\right) = \vec{0}$, $\forall\ u \in V$.

5º) Associativa da multiplicação por escalar: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.

6º) Elemento neutro da multiplicação: $\exists\ \vec{1} \in V$, tal que $u\vec{1} = u$, $\forall\ u \in V$.

7º) Distributividade de um escalar em relação à adição de vetores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

8º) Distributividade da soma de escalares em relação a um vetor: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.

Exemplo: Polinômios de grau menor ou igual a n ($n \in IR$) formam um espaço vetorial.

Exemplo: Matrizes de m linhas e n colunas com coeficientes reais formam um espaço vetorial.

CAPÍTULO 2

BASES

2.1. Introdução à Combinação Linear

A Álgebra Linear é o alicerce para várias aplicações computacionais, em um leque grande de diversidade. Por exemplo, as cores nas telas dos monitores de computadores costumam ter por base o sistema chamado modelo de cores RGB.

As cores nesse sistema são criadas juntando porcentagem das três cores primárias, a saber, o vermelho (com a inicial R do inglês *red*), o verde (com a inicial G do inglês *green*) e o azul (com a inicial B do inglês *blue*).

Uma maneira de fazer isso é identificar cores primárias com os vetores

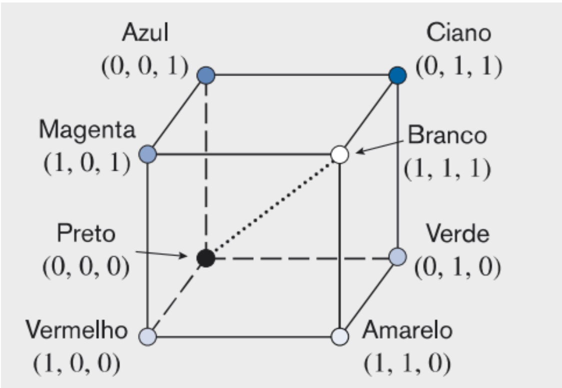
$$r = (1, 0, 0) \text{ (vermelho puro)}$$

$$g = (0, 1, 0) \text{ (verde puro)}$$

$$b = (0, 0, 1) \text{ (azul puro)}$$

de IR^3 e criar todas as outras cores, formando combinações lineares de r, g e b usando coeficientes entre 0 e 1. Inclusive, esses coeficientes representam a porcentagem de cada cor pura no sistema. O conjunto de todas essas cores é o espaço RGB, ou então, o cubo de cores RGB.

Figura 8. Modelo de cores RGB.



Fonte: Rorres; Howard, 2012.

Os vértices do cubo representam as cores primárias puras junto com as cores preto, branco, magenta, ciano e amarelo. Os vetores ao longo da diagonal entre preto e branco representam tonalidades de cinza.

2.2. Combinação linear

u é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2,..., v_n \in V$ (espaço vetorial) se existirem os escalares $a_1, a_2,..., a_n \in IR$ tais que

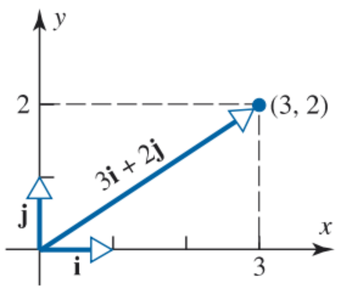
$$u = a_1v_1 + a_2v_2 +...+ a_nv_n.$$

Exemplo: (3, 2) = **3**(1, 0) + **2**(0, 1)

Solução:

Veja que (3, 2) = **3**i + **2**j

Figura 9. Combinação linear de vetores.



Fonte: Rorres; Howard, 2012.

Exemplo: (1, 2, 3) é combinação linear de (1, 0, 1), (0, 1, 1) e (-1, 0, 0)?

Solução:

(1, 2, 3) é combinação linear de (1, 0, 1), (0, 1, 1) e (-1, 0, 0), se existir a, b, c números reais tais que:

$$(1, 2, 3) = \mathbf{a}(1, 0, 1) + \mathbf{b}(0, 1, 1) + \mathbf{c}(-1, 0, 0)$$

Ou seja:

$$(1, 2, 3) = (a, 0, a) + (0, b, b) + (-c, 0, 0)$$

Daí:

$$(1, 2, 3) = (a - c, b, a)$$

Isso fornece o sistema linear:

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b=2. \\ a=3 \end{cases}$$

Como a = 3 e b = 2, substituindo na primeira equação $a - c = 1 \Rightarrow 3 - c = 2 \Rightarrow c = 1$.

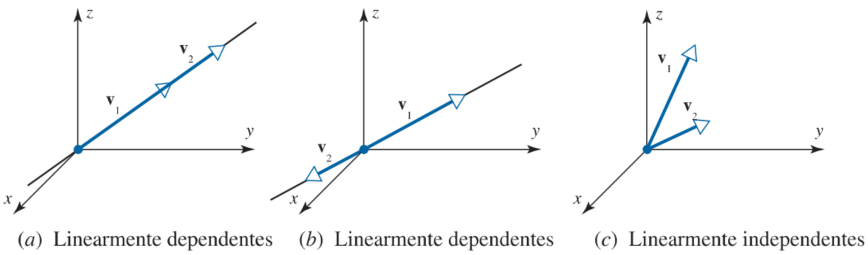
Logo, (1, 2, 3) = **3**(1, 0, 1) + **2**(0, 1, 1) + **1**(-1, 0, 0).

$\{v_1, v_2,..., v_n\}$ é um conjunto linearmente independente de V quando nenhum de seus vetores é combinação linear dos demais. Caso contrário, $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ é um conjunto linearmente dependente de V.

É possível mostrar que $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ é um conjunto linearmente dependente se, e só se, existir uma combinação linear nula de $v_1, v_2,..., v_n$ além da trivial.

Dois vetores em IR^2 são linearmente independentes se, e só se, os vetores não ficam numa mesma reta quando colocados com seus pontos iniciais na origem. Caso contrário, um deles é um múltiplo escalar do outro.

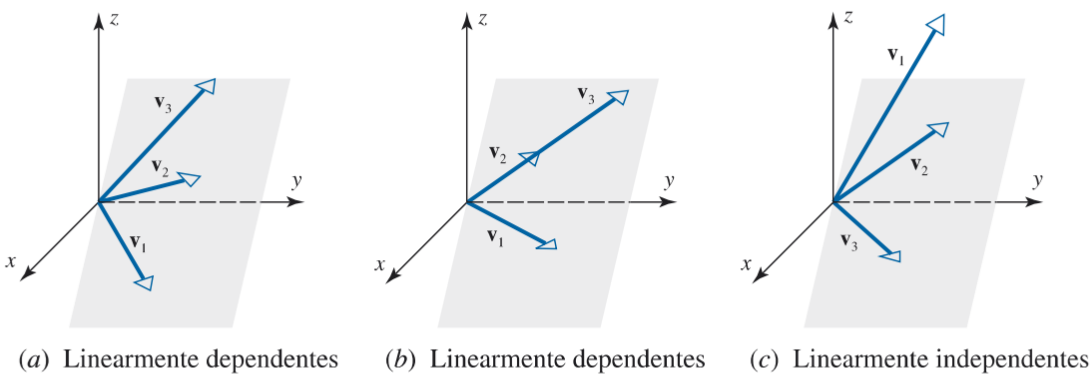
Figura 10. Vetores linearmente dependentes e independentes no IR^2.



Fonte: Rorres; Howard, 2012.

Três vetores em IR^3 são linearmente independentes se, e só se, os vetores não ficam num mesmo plano quando colocados com seus pontos iniciais na origem. Caso contrário, um deles é uma combinação linear dos outros dois.

Figura 11. Vetores linearmente dependentes e independentes no IR^3.



Fonte: Rorres; Howard, 2012.

O conjunto linearmente independente mais básico de IR^2 é o conjunto dos vetores canônicos (1, 0) e (0, 1). Analogamente, (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1) são os vetores canônicos de IR^3.

Exemplo: {(1, -2, 1), (1, 2, 3), (-1, 2, 5)} é um conjunto linearmente dependente ou linearmente independente?

Solução:

Seja **a**(1, -2, 1) + **b**(1, 2, 3) + **c**(-1, 2, 5) = (0, 0, 0), o que equivale a (a + b – c, 2a + 2b + 2c, a + 3b + 5c) = (0, 0, 0). Logo:

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a + 2b + 2c = 0 \\ a + 3b + 5c = 0 \end{cases}.$$

Substitua a segunda equação do sistema pelo resultado de sua soma com -2 vezes sua primeira equação, obtendo:

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ \quad 4c = 0 \\ a + 3b + 5c = 0 \end{cases}.$$

Portanto, 4c = 0 ⇒ c = 0.

Troque a terceira equação do sistema pelo resultado de sua soma com -1 vez sua primeira equação, resultando:

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ \quad 4c = 0 \\ \quad 2b + 6c = 0 \end{cases}.$$

Como c = 0, substituindo na terceira equação, tem-se 2b + 6c = 0 ⇒ 2b + 6(0) = 0 ⇒ 2b = 0 ⇒ b = 0.

Substituindo b = 0 e c = 0 na primeira equação do sistema original, a + b – c = 0 ⇒ a + 0 – 0 = 0 ⇒ a = 0.

Veja que a única combinação linear possível dos vetores (1, -2, 1), (1, 2, 3) e (-1, 2, 5) é a trivial, isto é, a = b = c = 0.

Portanto, {(1, -2, 1), (1, 2, 3), (-1, 2, 5)} é um conjunto linearmente independente.

Exemplo: {(1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 1, 1)} é um conjunto linearmente dependente ou linearmente independente?

Solução:

Seja **a**(1, 2, 3) + **b**(1, 0, 1) + **c**(0, 1, 1) = (0, 0, 0), então (a + b, 2a + c, 3a + b + c) = (0, 0, 0).

O que equivale ao sistema:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+c=0 \\ 3a+b+c=0 \end{cases}.$$

Da primeira equação do sistema a + b = 0, então a = -b.

Já da segunda equação do sistema 2a + c = 0, logo c = -2a e, consequentemente, c = 2b.

Portanto, (-b, b, b) é solução do sistema linear, com b $\in$ IR, o que permite concluir que o {(1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 1, 1)} é um conjunto linearmente dependente.

Observe que (1, 2, 3) = **1**(1, 0, 1) + **2**(0, 1, 1), isto é, o vetor (1, 2, 3) pode ser expresso como combinação linear dos demais vetores.

Exemplo: O conjunto de vetores {(1, 2, 1), (2, 9, 0), (3, 3, 4)} de IR^3 é linearmente dependente ou independente?

Solução:

Seja **a**(1, 2, 1) + **b**(2, 9, 0) + **c**(3, 3, 4) = (0, 0, 0), então (a + 2b + 3c, 2a + 9b + 3c, a + 4c) = (0, 0, 0).

O que equivale ao sistema:

$$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 2a+9b+3c=0 \\ a+\quad 4c=0 \end{cases}.$$

Da terceira equação do sistema a + 4c = 0, então a = -4c.

Substituindo na primeira equação do sistema, tem-se que:

$$a + 2b + 3c = 0 \Rightarrow -4c + 2b + 3c = 0$$

$$\Rightarrow 2b = c \Rightarrow b = \frac{c}{2}.$$

Como a = -4c e b = $\frac{c}{2}$, substituindo na segunda equação do sistema:

$$2a + 9b + 3c = 0 \Rightarrow 2(-4c) + 2\left(\frac{c}{2}\right) + 3c = 0$$

$$\Rightarrow -8c + c + 3c = 0$$

$$\Rightarrow -4c = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Note que a = 0, b = 0 e c = 0, portanto, a única solução para o sistema é a solução trivial.

Logo, os vetores (1, 2, 1), (2, 9, 0) e (3, 3, 4) são linearmente independentes.

2.3. Base

Uma base de um espaço vetorial é um conjunto de vetores linearmente independentes que geram o espaço.

<u>Exemplo</u>: {(1, 0), (0, 1)} é uma base de IR^2, chamada de base canônica.

<u>Solução</u>:

De fato, o conjunto {(1, 0), (0, 1)} é linearmente independente, uma vez que a equação

$$\mathbf{a}(1, 0) + \mathbf{b}(0, 1) = (0, 0)$$

só é possível para a = b = 0.

Além disso, o conjunto gera todo o IR^2, uma vez que qualquer $(x, y) \in IR^2$ pode ser escrito como $(x, y) = \mathbf{x}(1, 0) + \mathbf{y}(0, 1)$.

Assim, {(1, 0), (0, 1)} é uma base de IR^2.

<u>Exemplo</u>: {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} é uma base de IR^3 chamada de base canônica.

<u>Solução</u>:

De fato, o conjunto {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} é linearmente independente, uma vez que a equação

$$\mathbf{a}(1, 0, 0) + \mathbf{b}(0, 1, 0) + \mathbf{c}(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

só é possível para a = b = c = 0.

Além disso, o conjunto gera todo o IR^3, uma vez que qualquer $(x, y, z) \in IR^3$ pode ser escrito como $(x, y, z) = \mathbf{x}(1, 0, 0) + \mathbf{y}(0, 1, 0) + \mathbf{z}(0, 0, 1)$.

Assim, {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} é uma base de IR^3.

Exemplo: O conjunto de vetores {(1, 2, 1), (2, 9, 0), (3, 3, 4)} também é uma base de IR^3.

Solução:

Já foi visto que {(1, 2, 1), (2, 9, 0), (3, 3, 4)} é um conjunto linearmente independente de IR^3.

Agora, mostra-se que qualquer vetor $(x, y, z) \in IR^3$ pode ser expresso como combinação linear dos vetores (1, 2, 1), (2, 9, 0) e (3, 3, 4).

Seja **a**(1, 2, 1) + **b**(2, 9, 0) + **c**(3, 3, 4) = (x, y, z), então (a + 2b + 3c, 2a + 9b + 3c, a + 4c) = (x, y, z).

O que equivale ao sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = x \\ 2a + 9b + 3c = y. \\ a + \quad 4c = z \end{cases}$$

Somando -2 vezes a primeira equação do sistema com a segunda equação, dá:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = x \\ \quad 5b - 3c = -2x + y. \\ a + \quad 4c = z \end{cases}$$

Da terceira equação, tem-se que a = z – 4c. Substituindo na primeira equação resulta em:

$$z - 4c + 2b + 3c = x \Rightarrow z - c + 2b = x$$

$$\Rightarrow c = -x + z + 2b.$$

Fazendo c = -x + z + 2b na segunda equação do sistema, dá:

$$5b - 3c = -2x + y \Rightarrow 5b - 3(-x + z + 2b) = -2x + y$$

$$\Rightarrow 5b + 3x - 3z - 6b = -2x + y$$

$$\Rightarrow -b = -2x - 3x + y + 3z$$

$$\Rightarrow -b = -5x + y + 3z$$

$$\Rightarrow \quad b = 5x - y - 3z.$$

Substituindo o valor de b, na equação c = -x + z + 2b, resulta em:

$$c = -x + z + 2b \Rightarrow c = -x + z + 2(5x - y - 3z)$$

$$\Rightarrow c = -x + z + 10x - 2y - 6z$$

$$\Rightarrow c = 9x - 2y - 5z.$$

Por fim, como a = z – 4c e c = 9x – 2y – 5z, segue que:

$$a = z - 4c \Rightarrow a = z - 4(9x - 2y - 5z)$$

$$\Rightarrow a = z - 36x + 8y + 20z$$

$$\Rightarrow a = -36x + 8y + 21z.$$

Assim, qualquer vetor $(x, y, z) \in IR^3$ pode ser expresso como:

(– 36x + 8y + 21z)(1, 2, 1) + **(5x – y – 3z)**(2, 9, 0) + **(9x – 2y – 5z)**(3, 3, 4).

Portanto, {(1, 2, 1), (2, 9, 0), (3, 3, 4)} também é uma base de IR^3.

Por fim, o vetor (1, 2, 3) na base canônica do IR^3 pode ser expresso como:

$$(1, 2, 3) = \mathbf{1}(1, 0, 0) + \mathbf{2}(0, 1, 0) + \mathbf{3}(0, 0, 1).$$

Os escalares 1, 2 e 3 são chamados de coordenadas do vetor em relação à base canônica.

Assim, o vetor de coordenadas em relação à base canônica de IR3 é $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Já o vetor (1, 2, 3) na base {(1, 2, 1), (2, 9, 0), (3, 3, 4)} é escrito como:

$$(1, 2, 3) = \mathbf{43}(1, 2, 1) + \mathbf{(-6)}(2, 9, 0) + \mathbf{(-10)}(3, 3, 4).$$

E na base {(1, 2, 1), (2, 9, 0), (3, 3, 4)}, o vetor de coordenadas é $\begin{bmatrix} 43 \\ -6 \\ -10 \end{bmatrix}$.

CAPÍTULO 3

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

3.1. Introdução à Transformação Linear

Os pesquisadores da área de reconhecimento facial trabalham com a ideia de que toda face humana é uma combinação de uma dúzia de formatos primários.

Por exemplo, analisando as imagens tridimensionais escaneadas de muitas faces, pesquisadores da Universidade de Rochefeller produziram tanto um formato facial médio do grupo caucásico denominado face média quanto um conjunto de variações padronizadas daquele formato, denominadas autofaces.

Essas formas são assim denominadas por serem autovalores de uma certa matriz que armazena a informação facial digitalizada. Os formatos faciais são representados matematicamente como combinações lineares das autofaces.

3.2. Transformação linear

Diz-se que uma função $T: V \to W$ é uma transformação linear se, para quaisquer $u, v \in V$ e $\alpha \in IR$, valem as relações:

I. $T(u + v) = T(u) + T(v)$.

II. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Exemplo: Seja $T: IR \to IR$ definida por $T(x) = 3x$ é uma transformação linear de IR em IR.

Solução:

De fato, por satisfazer

$$T(x + y) = 3(x + y) = 3x + 3y = T(x) + T(y)$$

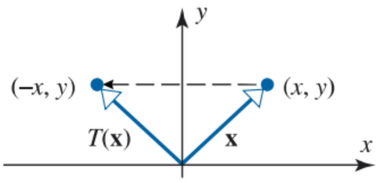
e

$$T(\alpha x) = 3(\alpha x) = \alpha(3x) = \alpha T(x), \text{ com } \alpha \in IR.$$

As mais importantes de IR^2 estão as que aplicam cada ponto na sua imagem simétrica em relação a alguma reta ou plano fixados, que são denominadas de transformações de reflexão.

Exemplo: T(x, y) = (-x, y) é uma transformação que realiza uma reflexão em torno do eixo y.

Figura 12. Reflexão em torno do eixo y.



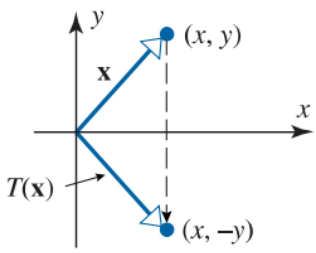
Fonte: Rorres; Howard, 2012.

Matricialmente, a transformação pode ser reescrita como:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exemplo: T(x, y) = (x, - y) é uma transformação que realiza uma reflexão em torno do eixo x.

Figura 13. Reflexão em torno do eixo x.



Fonte: Rorres; Howard, 2012.

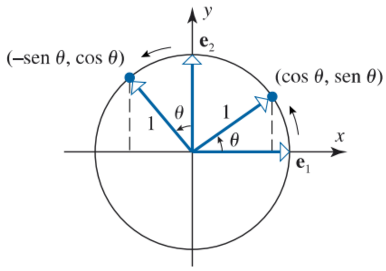
Matricialmente, a transformação pode ser reescrita como:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

As transformações lineares de IR^2 que movem pontos no sentido anti-horário em torno da origem por um ângulo θ são denominadas de transformações de rotação.

Exemplo: T(x, y) = (xcosθ - ysenθ, xsenθ + ycosθ) é uma transformação que realiza uma rotação de ângulo θ, no sentido anti-horário.

Figura 14. Rotação de ângulo θ.



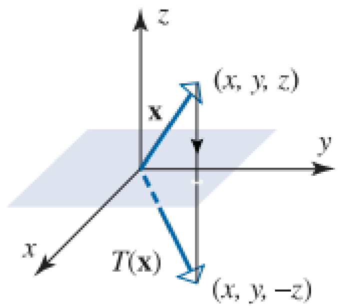
Fonte: Rorres; Howard, 2012.

Matricialmente, a transformação pode ser expressa como:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

<u>Exemplo</u>: T(x, y) = (x, y, -z) é uma transformação que realiza uma reflexão no plano xy.

Figura 15. Reflexão no plano xy.



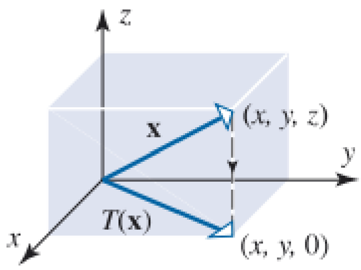
Fonte: Rorres; Howard, 2012.

Matricialmente, a transformação pode ser expressa como:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

<u>Exemplo</u>: T(x, y) = (x, y, 0) é uma transformação que realiza uma projeção ortogonal sobre o plano xy.

Figura 16. Projeção ortogonal no plano xy.



Fonte: Rorres; Howard, 2012.

Matricialmente, a transformação pode ser expressa como:

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

CAPÍTULO 4

AUTOVALORES E AUTOVETORES

4.1. Introdução a Autovalor e Autovetor

O estudo de autovalores e autovetores surgiu do estudo do movimento rotacional e, mais tarde, foi aplicado a matrizes e transformações lineares.

Google Busca é um serviço da empresa Google onde é possível fazer pesquisas na Internet sobre qualquer assunto. É o serviço de busca mais utilizado no mundo.

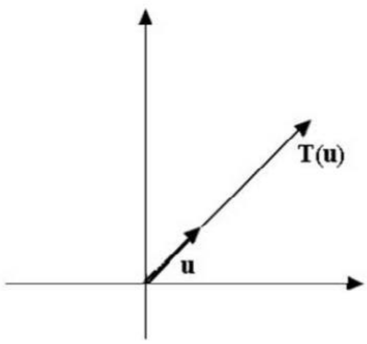
Grande parte do sucesso do Google se deu à qualidade de seu mecanismo para estabelecer o *ranking* de importância de sites sugeridos para o usuário, fundamentado no algoritmo PageRank.

Esse algoritmo se fundamenta em noções associadas a cadeias de Markov, sendo a solução obtida através de autovalores e autovetores.

4.2. Autovalor e autovetor

$u \in V$ é um autovetor do operador $T: V \to V$ se existir um número real $\lambda \in IR$ tal que $T(u) = \lambda u$. Nesse caso, λ é dito de autovalor.

Figura 17. Autovalor e autovetor.



Fonte: Rorres; Howard, 2012.

<u>Exemplo</u>: Considere o operador linear $T: IR^3 \to IR^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + z, - y, y - 2z)$.

Solução:

Substituindo x = 1, y = -2 e z = -2, na expressão de T(x, y, z), tem-se que T(1, -2, -2) = (1 + (-2), -(-2), -2 – 2(-2)) = (1 – 2, 2, -2 + 4) = (-1, 2, 2) = **-1**(1, -2, -2).

O vetor (1, -2, -2) é um autovetor de T associado ao autovalor -1, pois T(1, -2, -2) = **-1**(1, -2, -2).

Exemplo: Considere as matrizes A = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e x = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fazendo o produto dessas matrizes, dá:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1+0.2+1.1 \\ 2.1+3.2+2.1 \\ 1.1+0.2+4.1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ é um autovetor da matriz $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exemplo: Seja T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ o operador linear T(x, y) = (4x + 3y, x + 2y).

Solução:

Note que

$$T(1, 0) = (4(1) + 3(0), 1 + 2(0)) = (4, 1)$$

e

$$T(0, 1) = (4(0) + 3(1), 0 + 2(1)) = (3, 2).$$

Assim, a matriz $[T]_{can}$ tem a primeira coluna igual a T(1, 0) e a segunda coluna igual a T(0, 1). Isto é:

$$[T]can = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar os autovalores de T, é preciso encontrar o polinômio característico $p(\lambda) = \det(T - \lambda I_2)$.

Veja que:

$$\text{T - λI2} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

Em seguida, calcule o determinante dessa matriz, ou seja:

$$\det(\text{T - λI2}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5.$$

As raízes do polinômio característico, $\det(T - \lambda I_2) = 0$, são:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-(-)6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 3 \pm 2,$$

Assim, $\lambda_1 = 3 - 2 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3 + 2 \Rightarrow \lambda_2 = 5$ são os autovalores reais de T.

Para encontrar os autovetores de T, é necessário resolver o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} (4-\lambda)x + 3y = 0 \\ x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}.$$

Para $\lambda_1 = 1$, basta resolver o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} (4-1)x + 3y = 0 \\ x + (2-1)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Da segunda equação do sistema, tem-se $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$, x é um número real qualquer.

Portanto, (x, -x) é o autovetor associado a 1.

Agora, para obter os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = 5$, basta resolver o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} (4-5)x + 3y = 0 \\ x + (2-5)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}.$$

Da segunda equação do sistema, tem-se $x - 3y = 0 \Rightarrow x = 3y$, y é um número real qualquer. Logo, (3y, y) é o autovetor associado a 5.

Como

$$T(1, -1) = 1(1, -1) = \mathbf{1}(1, -1) + \mathbf{0}(3, 1)$$

e

$$T(3, 1) = 5(3, 1) = \mathbf{0}(1, -1) + \mathbf{5}(3, 1),$$

a matriz de T na base $\alpha = \{(1, -1), (3, 1)\}$ é dada por:

$$[T]\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4.2.1. Cálculo de Autovalor e Autovetor

O método para encontrar os autovalores e autovetores associados a uma transformação linear pode ser resumido nos seguintes passos:

I. Encontrar a matriz $[T - \lambda I]$.

II. Determinar o polinômio característico $p(\lambda) = \det(T - \lambda I)$.

III. Calcular os autovalores de T, isto é, obter as raízes do polinômio característico.

IV. Achar os autovetores de T, ou seja, encontrar a solução do sistema homogêneo decorrente $[T - \lambda I]v = 0$.

Exemplo: Seja $T: IR^3 \to IR^3$ o operador linear $T(x, y, z) = (-2z, x + 2y + z, x + 3z)$.

Solução:

Note que:

$$T(1, 0, 0) = (-2(0), 1 + 2(0) + 0, 1 + 3(0)) = (0, 1, 1),$$

$$T(0, 1, 0) = (-2(0), 0 + 2(1) + 0, 0 + 3(0)) = (0, 2, 0),$$

$$T(0, 0, 1) = (-2(1), 0 + 2(0) + 1, 0 + 3(1)) = (-2, 1, 3).$$

Assim, a matriz $[T]_{can}$ tem a primeira coluna igual a $T(1, 0, 0)$, a segunda coluna igual a $T(0, 1, 0)$ e a terceira coluna igual a $T(0, 0, 1)$. Isto é:

$$[T]can = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar os autovalores de T, é preciso encontrar o polinômio característico $p(\lambda) = \det(T - \lambda I_3)$, dado por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + 2(2-\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4.$$

O polinômio característico é

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4,$$

ou a forma fatorada

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Logo, os autovalores de T são $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$.

Por definição (x, y, z) é um autovetor de T associado a $\lambda = 1$, somente se for solução não trivial do sistema de equação:

$$\begin{cases} -x \quad -2z = 0 \\ x + y + z = 0. \\ x \quad +2z = 0 \end{cases}$$

Da terceira equação do sistema, tem-se que x = -2z. Substituindo na segunda equação do sistema, dá que:

$$x + y + z = 0 \Rightarrow -2z + y + z = 0$$

$$\Rightarrow y = z.$$

Assim, os autovetores associados a $\lambda = 1$ são vetores da forma (-2z, z, z).

Observe que os autovetores associados a $\lambda = 1$ podem ser reescritos como **z**(-2, 1, 1), onde z é um número real qualquer.

Neste caso, (-2, 1, 1) é dita uma base do autoespaço associado a $\lambda = 1$.

Para encontrar os autovetores de T associado a $\lambda = 2$, basta resolver o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} -2x \quad -2z = 0 \\ x \quad +z = 0\,. \\ x \quad + \quad z = 0 \end{cases}$$

Da terceira equação do sistema, tem-se $x + z = 0 \Rightarrow x = -z$. Logo, os autovetores associados a $\lambda = 2$ são vetores da forma (-z, y, z).

Observe que os autovetores associados a $\lambda = 2$ podem ser reescritos como **z**(-1, 0, 1) + **y**(0, 1, 0), onde y e z são números reais quaisquer.

Neste caso, {(-1, 0, 1), (0, 1, 0)} é dita uma base do autoespaço associado a λ = 2.

Exemplo: Encontre os autovalores da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solução:

O polinômio característico de A é:

$$\det(A - \lambda I3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 7-\lambda & 0 \\ 4 & 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(7-\lambda)(1-\lambda).$$

Como os autovalores de A satisfazem:

$$\det(A - \lambda I3) = (3-\lambda)(7-\lambda)(1-\lambda) = 0.$$

Assim, os autovalores de A são λ = 3, λ = 7 e λ = 1.

Exemplo: Encontre os autovetores da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Por definição, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ é um autovetor de A associado a λ = 3 se, e só se:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Isto é:

$$\begin{pmatrix} 3x \\ -2x+7y \\ 4x+8y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}.$$

Da igualdade de matrizes, tem-se que:

$$-2x + 7y = 3y \Rightarrow -2x = -4y \Rightarrow x = 2y.$$

Da igualdade de matrizes e do fato de x ser igual a 2y, resulta que:

$$4x + 8y + z = 3z \Rightarrow 2z = 4(2y) + 8y \Rightarrow z = 8y.$$

Portanto, o autovetor de A associado a λ = 3 é da forma:

$$\begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 8y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix},$$

onde y é um número real qualquer. Logo, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ é uma base do autoespaço associado a λ = 3.

Para λ = 7, o autovetor associado é tal que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ou seja:

$$\begin{pmatrix} 3x \\ -2x+7y \\ 4x+8y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x \\ 7y \\ 7z \end{pmatrix}.$$

Da igualdade de matrizes, tem-se que:

$$-2x + 7y = 7y \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Da igualdade de matrizes e do fato de x ser igual a 0, resulta que:

$$4x + 8y + z = 7z \Rightarrow 6z = 4(0) + 8y \Rightarrow z = \frac{4}{3}y.$$

Portanto, o autovetor de A associado a λ = 7 é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ \frac{4}{3}y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

onde y é um número real qualquer. Logo, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, é uma base do autoespaço associado a λ = 7.

Por fim, o autovetor de A associado a $\lambda = 1$ é da forma:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ou seja:

$$\begin{pmatrix} 3x \\ -2x+7y \\ 4x+8y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Da igualdade de matrizes, tem-se que:

$$-2x + 7y = y \Rightarrow -2x = -6y \Rightarrow x = 3y.$$

Da igualdade de matrizes e do fato de x ser igual a 3y, resulta que:

$$4(3y) + 8y + z = z \Rightarrow 20y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Assim, $x = y = 0$, então o autovetor de A associado a $\lambda = 1$ é da forma:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Onde z é um número real qualquer. Logo, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, é uma base do autoespaço associado a $\lambda = 1$.

Desafio: Considere a transformação linear $T: IR^3 \to IR^3$ cuja matriz na base canônica é dada por $[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$,. Encontre:

a. o polinômio característico $p(\lambda)$;

b. os autovalores de T;

c. os autovetores de T.

Gabarito:

a. $p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda$;

b. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$;

c. $v_1 = (x, x, x)$ é autovetor associado a 0;

$v_2 = (x, x, 0)$ é autovetor associado a 1;

$v_3 = (-x, 0, 2x)$ é autovetor associado a 3.

Uma matriz quadrada A é dita diagonalizável se for semelhante a alguma matriz diagonal, ou seja, se existir alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

Nesse caso, diz-se que a matriz P diagonaliza a matriz A.

A é uma matriz quadrada de ordem n, A é uma matriz diagonálizavel se, e só se, A possui n autovetores distintos.

Se o conjunto dos autovetores associados a uma matriz A quadrada de ordem n tiver menos do que n vetores, a matriz não é diagonalizável.

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. A matriz A é diagonalizável?

Solução:

A equação do polinômio característico de A é:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4.$$

E (-2, 1, 1), (-1, 0, 1) e (0, 1, 0) são bases para os autoespaços. Note que há um total de três vetores de base, portanto, a matriz

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonaliza a matriz A.

De fato, como $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, então

$$P\text{-}1AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. A matriz A é diagonalizável?

Solução:

Como A é uma matriz quadrada de ordem 3, e há três vetores de base $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

então A é uma matriz diagonalizável.

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. A matriz A é diagonalizável?

Solução:

A equação do polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4,$$

ou a forma fatorada $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$, portanto $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ são os autovalores de A.

Por definição, (x, y, z) é um autovetor de T associado a $\lambda = 1$, somente se for solução não trivial do sistema de equação:

$$\begin{cases} x + y \qquad = 0 \\ -3x + 5y + z = 0 \end{cases}.$$

Da primeira equação do sistema, tem-se que x = -y. Substituindo na segunda equação do sistema, dá que:

$$-3x + 5y + z = 0 \Rightarrow -3(-y) + 5y + z = 0$$

$$\Rightarrow 8y = z$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8} z.$$

Assim, x = $-\frac{1}{8}$z. Portanto, os autovetores associados a λ = 1 são vetores da forma $\left(-\frac{1}{8}z, \frac{1}{8}z, z\right)$.

Neste caso, $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 1\right)$ é uma base do autoespaço associado a λ = 1.

Para o autovalor λ = 2, um autovetor associado é tal que:

$$\begin{cases} -x \quad = 0 \\ -3x + 5y = 0 \end{cases}.$$

Da primeira equação do sistema, tem-se que x = 0. Substituindo na segunda equação do sistema, dá que:

$$\begin{aligned} -3x + 5y = 0 &\Rightarrow -3(0) + 5y = 0 \\ &\Rightarrow 5y = 0 \\ &\Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Assim, x = y = 0. Portanto, os autovetores associados a λ = 1 são vetores da forma (0, 0, z).

Neste caso, (0, 0, 1) é uma base do autoespaço associado a λ = 2.

Como A é uma matriz quadrada de ordem 3, e há apenas dois vetores de base $\left\{\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 1\right), (0,0,1)\right\}$, então A não é uma matriz diagonalizável.

Exemplo: Considere a matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule A^4.

Solução:

A é diagonalizada pela matriz:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo:

$$C = P\text{-}1AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

E, consequentemente:

$$A^4 = PC^4 P^{-1}.$$

Daí:

$$A^4 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^4 & 0 & 0 \\ 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo:

$$A^4 = \begin{pmatrix} -2 & -16 & 0 \\ 1 & 0 & 16 \\ 1 & 16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente:

$$A^4 = \begin{pmatrix} -15 & 0 & -30 \\ 15 & 16 & 15 \\ 15 & 0 & 31 \end{pmatrix}.$$

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, W. **Aprendendo Cálculo de Várias Variáveis.** UFRJ, 2016.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. 3. ed. Harbra, 1986.

BRYAN J. F.; MANLY, **Métodos Estatísticos Multivariados uma Introdução**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

BRYAN F. J.; MANLY, ALBERTO J. A. N. **Métodos Estatísticos Multivariados**: Uma Introdução. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2019.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2004.

CRESPO, A. A**. Estatística Fácil,** São Paulo: Saraiva, 2004

FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A., **Curso de Estatística**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 1 e 2. LTC, 2014.

JOHONSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied multivariate statistical analysis**. 3. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1992.

MINGOTI, S. A. **Análise de Dados Métodos de Estatística Multivariada**. Minas Gerais: Editora da UFMG, 2005. 300 p.

RORRES, C.; HOWARD, A. Álgebra Linear com Aplicações. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol 2, McGraw-Hill, 1988.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Álgebra Linear. 2. ed. Pearson, 2010.

TIZZIOTTI, G. C.; SANTOS, J. V. Álgebra Linear. UFU, 2012.

https://github.com/allanbreyes/udacity-data-science/blob/master/p3/data/wineQualityReds.csv