MATEMÁTICA PARA INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

UNIDADE I

SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

Elaboração

Erika L P Borges

Juciara do Nascimento César

Produção

Equipe Técnica de Avaliação, Revisão Linguística e Editoração

SUMÁRIO

SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

UNIDADE I

CAPÍTULO 1

SISTEMAS LINEARES

1.1. Introdução aos Sistemas Lineares

Na Ciência da Computação, a informação é organizada em linhas e colunas, formando agrupamentos denominados matrizes.

Por exemplo, o sistema de equações

$$\begin{cases} x - y + 2z = -9 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = -7 \end{cases}.$$

Está associado à matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

E a solução do sistema pode ser obtida efetuando operações apropriadas nessa matriz. Contudo, as matrizes não são instrumentos apenas para obtenção de soluções de sistemas lineares, há uma teoria rica e vasta associada a matrizes.

1.2. Sistemas Lineares

Uma equação linear é qualquer equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as incógnitas, $a_1, a_2, \dots, a_nx_n$ são os coeficientes e b é o termo independente.

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mn}x_1 + a_{mn}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Uma solução de um sistema linear é uma n-upla (x_1, x_2, ..., x_n), que satisfaz todas as equações do sistema linear.

<u>Exemplo</u>: Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -9 \\ x + y + \ z = 0 \\ 3x + y + 2z = -7 \end{cases} .$$

<u>Solução</u>:

Substituindo x = -3, y = 4 e z =-1 nas equações do sistema linear, obtém-se:

$$x - y + 2z = -3 - 4 + 2(-1) = -3 -4 - 2 = -9$$

$$x + y + z = -3 + 4 + (-1) = -3 + 4 - 1 = 0$$

$$3x + y + 2z = 3(-3) + 4 + 2(-1) = -9 + 4 - 2 = -7$$

Portanto, (-3, 4, -1) é solução do sistema.

<u>Exemplo</u>: Determine uma solução para o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases} .$$

<u>Solução</u>:

1º) Substitua a segunda equação do sistema pelo resultado de sua soma com -2 vezes a primeira equação, isto é:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ \quad\quad y - z = -2 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases} .$$

2º) Troque a terceira equação do sistema pelo resultado de sua soma com -3 vezes a primeira equação, ou seja:

$$\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ \quad\; y-z=-2 \\ -8y+15z=23 \end{cases}.$$

3º) Substitua a terceira equação do sistema acima pelo resultado de sua soma com 8 vezes sua segunda equação, obtendo:

$$\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ \quad\; y-z=-2 \\ \quad\;\; 7z=7 \end{cases}.$$

Da terceira equação, é possível afirmar que z = 1. Substituindo na segunda equação, tem-se que y = -1.

Por fim, fazendo y = -1 e z = 1, na primeira equação desse sistema, conclui-se que x = 2.

Portanto, (2, -1, 1) é solução do sistema.

$$\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ 2x+5y-9z=-10 \\ 3x-2y+3z=11 \end{cases}.$$

1.2.1. Eliminação Gaussiana

O processo utilizado para resolver o sistema acima é conhecido como Eliminação de Gauss.

O método de Eliminação de Gauss, ou método de escalonamento, consiste em aplicar sucessivas operações elementares num sistema linear para transformá-lo num sistema de fácil resolução que apresenta as mesmas soluções do sistema original.

As operações elementares são:

I. Permutar duas equações.

II. Multiplicar uma equação por uma constante diferente de zero.

III. Substituir uma equação por sua soma com o múltiplo de outra equação.

Desafio: Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x+2y+3z=-3 \\ 4x+5y+6z=3 \\ 7x+8y+10z=0 \end{cases},$$

usando o método de Eliminação de Gauss.

Gabarito: x = -2, y = 13 e z = -9.

O sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mn}x_1+a_{mn}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

é a matriz das incógnitas e

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

é a matriz dos termos independentes. E, por fim,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} & b_2 \\ & . & & \\ & . & & \\ & . & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} & b_{mn} \end{pmatrix}$$

é a matriz aumentada do sistema.

O método de Eliminação de Gauss são operações que consistem na aplicação das operações elementares nas linhas da matriz aumentada.

<u>Exemplo</u>:

Na esquerda, a resolução de um sistema linear através de operações nas equações do sistema e, na direita, é a resolução do mesmo sistema, porém com operações nas linhas da matriz aumentada.

Quadro 1. Método de Eliminação de Gauss.

$\begin{cases} x+y+2z=8 \\ -x-2y+3z=1 \\ 3x-7y+4z=10 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$
Substitua a segunda equação do sistema pelo resultado de sua soma com a primeira equação.	Substitua a segunda linha da matriz pelo resultado de sua soma com a primeira linha.
$\begin{cases} x+y+2z=8 \\ -y+5z=9 \\ 3x-7y+4z=10 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$
Substitua a terceira equação do sistema pelo resultado de sua soma com -3 vezes a primeira equação.	Substitua a terceira linha da matriz pelo resultado de sua soma com -3 vezes a primeira linha.

$\begin{cases} x+y+2z=8 \\ -y+5z=9 \\ -10y-2z=-14 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{pmatrix}$
Substitua a terceira equação do sistema pelo resultado de sua soma com -10 vezes a segunda equação.	Substitua a terceira linha da matriz pelo resultado de sua soma com -10 vezes a segunda linha.
$\begin{cases} x+y+2z=8 \\ -y+5z=9 \\ -52z=-104 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{pmatrix}$
Multiplique a terceira equação do sistema acima por $-\frac{1}{52}$.	Multiplique a terceira linha da matriz acima por $-\frac{1}{52}$.
$\begin{cases} x+y+2z=8 \\ -y+5z=9 \\ z=2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Substitua a segunda equação do sistema pelo resultado de sua soma com -5 vezes a terceira equação.	Substitua a segunda linha da matriz acima pelo resultado de sua soma com -5 vezes a terceira linha.
$\begin{cases} x+y+2z=8 \\ -y=-1 \\ z=2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Substitua a primeira equação do sistema acima pelo resultado de sua soma com a segunda equação, obtendo:	Substitua a primeira linha da matriz acima pelo resultado de sua soma com a segunda linha, obtendo:
$\begin{cases} x+2z=7 \\ -y=-1 \\ z=2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Substitua a primeira equação do sistema acima pelo resultado de sua soma com -2 vezes a terceira equação, resultando em:	Substitua a primeira linha da matriz acima pelo resultado de sua soma com -2 vezes a terceira linha, resultando em:
$\begin{cases} x=3 \\ -y=-1 \\ z=2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$
Multiplique a segunda equação do sistema acima por -1.	Multiplique a segunda linha da matriz acima por -1.
$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Fonte: Rorres; Howard, 2012.

Pelo método da Eliminação de Gauss na matriz aumentada, a solução do sistema é x = 3, y = 1 e z = 2.

Exemplo

Na esquerda, a resolução de um sistema linear através de operações nas equações do sistema e, na direita, é a resolução do mesmo sistema, porém com operações nas linhas da matriz aumentada.

Quadro 2. Método de Eliminação de Gauss.

$\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ 2x+5y-9z=-10 \\ 3x-2y+3z=11 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & -9 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{pmatrix}$
Substitua a segunda equação do sistema pelo resultado de sua soma com -2 vezes a primeira equação.	Substitua a segunda linha da matriz pelo resultado de sua soma com -2 vezes a primeira linha.
$\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ y-z=-2 \\ 3x-2y+3z=11 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{pmatrix}$
Substitua a terceira equação do sistema pelo resultado de sua soma com -3 vezes a primeira equação.	Substitua a terceira linha da matriz pelo resultado de sua soma com -3 vezes a primeira linha.
$\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ y-z=-2 \\ -8y+15z=23 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & 15 & 23 \end{pmatrix}$
Substitua a terceira equação do sistema acima pelo resultado de sua soma com 8 vezes sua segunda equação, obtendo:	Substitua a terceira linha da matriz acima pelo resultado de sua soma com 8 vezes sua segunda linha, obtendo:
$\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ y-z=-2 \\ 7z=7 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$
Multiplique a terceira equação do sistema acima por $\frac{1}{7}$.	Multiplique a terceira linha da matriz acima por $\frac{1}{7}$
$\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ y-z=-2 \\ z=1 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Substitua a segunda equação do sistema acima pelo resultado de sua soma com terceira equação, obtendo:	Substitua a segunda linha da matriz acima pelo resultado de sua soma com terceira linha, obtendo:

$\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Substitua a primeira equação do sistema acima pelo resultado de sua soma com -2 vezes a segunda equação, obtendo:	Substitua a primeira linha da matriz acima pelo resultado de sua soma com -2 vezes a segunda linha, obtendo:
$\begin{cases} x-4z=-2 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Substitua a primeira equação do sistema acima pelo resultado de sua soma com -4 vezes a terceira equação, resultando em:	Substitua a primeira linha da matriz acima pelo resultado de sua soma com -4 vezes a terceira linha, resultando em:
$\begin{cases} x=2 \\ y=-1. \\ z=1 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Fonte: Rorres; Howard, 2012.

Pelo método da Eliminação de Gauss na matriz aumentada, a solução do sistema é x = 2, y = -1 e z = 1.

O sistema linear é dito homogêneo quando todos os termos independentes são nulos.

Um sistema linear homogêneo sempre tem como solução todas as incógnitas iguais a zero. Tal solução é denominada solução trivial do sistema.

O sistema linear homogêneo também pode possuir uma infinidade de soluções além da solução trivial. No caso em que um sistema homogêneo tenha mais incógnitas que equações, é possível garantir que o sistema linear homogêneo possui soluções não triviais.

Exemplo: Resolva o seguinte sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 2x+2y+4z=0 \\ w-y-3z=0 \\ 2w+3x+y\ z=0 \\ -2w+x+3y-2z=0 \end{cases}.$$

Solução:

A matriz aumentada do sistema homogêneo é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Permutando a primeira linha e a segunda linha da matriz aumentada, resulta em:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando a segunda linha por $\frac{1}{2}$, dá:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando a primeira linha por -2 e somando com a terceira linha, resulta em:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando a primeira linha por 2 e somando com a quarta linha, dá:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somando -3 vezes a segunda linha com a terceira linha, segue que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Adicionando -1 vezes a segunda linha com a quarta linha, sucede:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somando-se 6 vezes a terceira linha com quarta linha, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O sistema de equações correspondente é:

$$\begin{cases} w - y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ \qquad\qquad z = 0 \end{cases}.$$

Como z = 0, tem-se y = -x. Substituindo-se na primeira equação w = -x.

Finalmente, a solução geral do sistema é:

w = - x, y = - x e z = 0,

Sendo x um número real arbitrário.

Para x = 1, a solução do sistema é:

w = - 1, y = - 1 e z = 0.

Se x = 2, a solução do sistema é:

w = - 2, y = - 2 e z = 0.

E assim por diante, logo o sistema linear possui uma infinidade de soluções além da solução trivial.

CAPÍTULO 2

MATRIZES

2.1. Introdução a Matrizes

No exemplo anterior, a resolução foi obtida reduzindo a matriz aumentada à forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a partir da qual ficou evidente a solução x = 2, y = -1 e z = 1.

Esse é um exemplo de uma matriz que está em forma escalonada reduzida por linha.

Uma matriz na forma escalonada reduzida por linha se satisfaz as seguintes propriedades:

1ª) Se uma linha não consistir inteiramente em zeros, o primeiro número não nulo da linha é igual a 1 (dito pivô).

2ª) Se existir linhas constituídas inteiramente de zeros, as linhas estarão agrupadas nas linhas inferiores da matriz.

3ª) Quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só em zeros, o pivô da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivô da linha superior.

4ª) Cada coluna que contém um pivô tem zeros nas demais entradas.

Toda matriz tem uma única forma escalonada reduzida por linhas, ou seja, independentemente da sequência de operações elementares utilizada.

O conceito de matriz e determinante, básicos na Matemática, surgiu da necessidade de resolver sistemas de equações lineares com coeficientes constantes.

Contudo, as matrizes não são simplesmente uma ferramenta de notação para resolver sistema de equações, elas também podem ser vistas como objeto matemático de vida própria, existindo uma teoria rica e importante associada a elas, que tem uma grande variedade de aplicações práticas.

2.2. Matrizes

Matriz m x n é a tabela formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} é elemento da matriz que se encontra na i-ésima linha e na j-ésima coluna.

A matriz A também pode ser denotada por $A = [a_{ij}]_{mn}$.

Uma matriz com somente uma coluna é denominada matriz coluna e uma matriz com somente uma linha é dita matriz linha.

Uma matriz é dita quadrada se tem o mesmo número de linhas e colunas.

A é uma matriz quadrada de ordem n, a diagonal principal é composta pelos elementos a_{ij} onde i = j e a diagonal secundária é constituída pelos elementos a_{ij} com i + j = n + 1.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solução:

A é uma matriz quadrada de ordem 3, os elementos da diagonal principal são:

$$a_{11} = 3,\ a_{22} = 2 \text{ e } a_{33} = -1.$$

E os da diagonal secundária são:

$$a_{13} = 5,\ a_{22} = 2 \text{ e } a_{31} = 2.$$

2.2.1. Operações com Matrizes

$A = [a_{ij}]_{mn}$ e $B = [b_{ij}]_{mn}$ são matrizes de mesma ordem, isto é, mesmo número de linha e de coluna, a soma é definida e denotada por:

$$C = [a_{ij} + b_{ij}]_{mn}.$$

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Solução:

Assim,

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3+1 & -1+2 & 5+(-4) \\ 0+2 & 2+5 & 0+(-9) \\ 2+3 & 0+(-2) & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -9 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$A = [a_{ij}]_{mn}$ e $B = [b_{ij}]_{mn}$ são matrizes de mesma ordem, isto é, mesmo número de linha e de coluna, a diferença é definida e denotada por:

$$C = [a_{ij} - b_{ij}]_{mn}.$$

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Solução:

Assim,

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3-1 & -1-2 & 5-(-4) \\ 0-2 & 2-5 & 0-(-9) \\ 2-3 & 0-(-2) & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 \\ -2 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$A = [a_{ij}]_{mn}$ uma matriz de m linhas e n colunas e λ é um número real não nulo, a multiplicação de A pelo escalar λ é definida e denotada por:

$$C = \lambda[a_{ij}] = [\lambda a_{ij}]_{mn}.$$

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solução:

$$\text{Tem-se que } 2A = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 & 2(-1) & 2.5 \\ 2.0 & 2.2 & 2.0 \\ 2.2 & 2.0 & 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 10 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

O produto das matrizes $A = [a_{ij}]_{mp}$ e $B = [b_{ij}]_{pn}$ é a matriz $C = [c_{ij}]_{mn}$, em que cada elemento c_{ij} é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna de B.

Exemplo: Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Solução:

A é uma matriz de 2 linhas e 3 colunas e B é uma matriz de 3 linhas e 4 colunas, logo a matriz produto AB é uma matriz de 2 linhas e 4 colunas.

O elemento de AB da segunda linha e terceira coluna é obtido pela soma dos produtos dos elementos da segunda linha de A com os elementos da terceira coluna de B, isto é:

Figura 1. Multiplicação de matrizes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{26} & \boxed{} \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

Fonte: Rorres; Howard, 2012.

O elemento de AB da primeira linha e quarta coluna é resultado da soma dos produtos dos elementos da primeira linha A com os elementos da quarta coluna de B, ou seja:

Figura 2. Multiplicação de matrizes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{13} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$$

$$(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$$

Fonte: Rorres; Howard, 2012.

E assim sucessivamente, logo, $AB = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{pmatrix}$.

A definição de multiplicação de matrizes exige que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linha da segunda matriz para que seja possível o produto dessas matrizes.

Caso essa condição não seja satisfeita, não há que se falar em produto de matrizes.

Exemplo: Considere as matrizes A = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Solução:

A é uma matriz de 2 linhas e 3 colunas e B é uma matriz coluna, isto é, com 3 linhas e 1 coluna, portanto, é possível obter o produto dessas matrizes.

O elemento de AB da primeira linha e primeira coluna é obtido pela soma dos produtos dos elementos da primeira linha de A com os elementos da primeira coluna de B, isto é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = 1.1 + 4(-1) + 2(7) = 9.$$

O elemento de AB da segunda linha e primeira coluna é obtido pela soma dos produtos dos elementos da segunda linha de A com os elementos da primeira coluna de B, isto é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = 3.1 + 1(-1) + 5(7) = 37.$$

Logo, o produto AB é $\begin{pmatrix} 9 \\ 37 \end{pmatrix}$.

A transposta de uma matriz A_{mn}, denotada por A^T, é obtida trocando a i-ésima linha pela i-ésima coluna.

Exemplo: Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Solução:

A primeira linha da matriz A é a primeira coluna da matriz A^T, a segunda linha da matriz A é a segunda coluna da matriz A^T e, por fim, a terceira linha da matriz A é a terceira coluna da matriz A^T, ou seja:

$$AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

A matriz identidade de ordem n, denotada por I_n, é a matriz quadrada de ordem n em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais elementos são nulos.

Exemplo: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.

A matriz diagonal é a matriz quadrada em que todos elementos não pertencentes à diagonal principal são nulos.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é exemplo de uma matriz diagonal.

Desafio: Considere:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcule as matrizes dadas (se possível).

a) $-7C$ b) AB

c) $2A^T$ d) $B + C$

Gabarito:

a) $-7C \begin{pmatrix} -7 & -28 & -14 \\ -21 & -7 & -35 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $2A^T = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

d) $B + C$ não é possível.

CAPÍTULO 3
DETERMINANTES

3.1. Introdução a Determinantes

Embora a definição de determinante seja atribuída ao estudo de sistemas de equações lineares, atualmente não são mais utilizados com esse propósito.

Ainda que possam ser úteis na resolução de sistemas de equações lineares, o estudo de determinantes fornece uma ferramenta útil para a existência da inversa de uma matriz.

O estudo da codificação de mensagens é denominado de criptografia. Atualmente, a necessidade de manutenção da privacidade da informação mantida ao longo dos meios públicos de comunicação tem despertado o interesse no assunto.

O processo de converter um texto comum num cifrado é chamado de criptografia. Um sistema poligráfico é um sistema de criptografia no qual o texto comum é dividido em conjuntos de n letras, cada um dos quais é substituído por um conjunto de n letras cifradas.

Um sistema poligráfico conhecido é a cifra de Hill, que consiste na conversão de letras em números, depois agrupa-se os números n a n e multiplica-se cada grupo por uma matriz quadrada invertível. Os números obtidos são transformados em letras, resultando na mensagem codificada.

Uma matriz é invertível só se seu determinante for um número real não nulo.

3.2. Determinantes

Determinante é uma função matricial que associa a cada matriz quadrada um número real, isto é:

$$\det: M_{nxn}(IR) \rightarrow IR.$$

Para n = 2, o determinante da matriz é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para n = 3, o determinante da matriz é

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\,a_{33} + a_{12}a_{23}\,a_{31} + a_{13}a_{21}\,a_{32} - a_{13}a_{22}\,a_{31} - a_{11}a_{23}\,a_{32} - a_{12}a_{21}\,a_{33}$$

Exemplo: Dadas as matrizes A = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Solução:

det(A) = 3(-1) – (-2)5 = -3 – (-10) = 7

det(B) = 2(1)(5) + 1(4)(-3) + 0(1)(2) – 0(1)(-3) – 2(4)(2) – 1(1)(5) = 10 -12 + 0 – 0 -16 – 5 = -23

D_{ij} é o determinante da matriz obtida de A_{nxn} retirando a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Esse determinante é dito menor complementar.

Exemplo: Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Encontre os menores complementares ao longo

da primeira linha da matriz A.

Solução:

Veja que:

$$D11 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3$$

$$D12 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - (-12) = 17$$

$$D13 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 5$$

O número real $C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ é dito o cofator da matriz A_{nxn}.

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Encontre os cofatores ao longo da primeira linha da matriz A.

Solução:

Como $D_{11} = -3$, $D_{12} = 17$, e $D_{13} = 5$, os cofatores são:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}(-3) = -3,$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}(17) = -17,$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}(5) = 5.$$

Exemplo: Considere a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Encontre os cofatores ao longo da segunda linha da matriz B.

Solução:

Observe que

$$D21 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 4 = 16$$

$$D22 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$D23 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13$$

são os menores complementares ao longo da segunda linha da matriz B.

Logo, os cofatores são:

$$C_{21} = (-1)^{2+1}(16) = -16,$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}(-2) = -2,$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}(-13) = 13.$$

3.2.1. Método de Laplace

Para o cálculo do determinante de uma matriz A_{nxn}:

1º) Escolher uma linha da matriz A_{nxn}.

2º) Multiplicar cada elemento dessa linha pelo cofator correspondente.

3º) Somar os resultados obtidos acima.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Solução:

Com o intuito de facilitar o cálculo do determinante, escolha a primeira linha da matriz.

Pelo exemplo anterior, tem-se que $C_{11} = -3$, $C_{12} = -17$ e $C_{13} = 5$ são os cofatores associados.

Logo,

$$\det(A) = 2(-3) + 1(-17) + 0(5) = -23.$$

Exemplo: Calcule o determinante da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Solução:

Com o intuito de facilitar o cálculo do determinante, escolha a segunda linha da matriz.

Como os cofatores ao longo da segunda linha são $C_{21} = -16$, $C_{22} = -2$ e $C_{23} = 13$.

Logo,

$$\det(B) = (-1)(-16) + 0(-2) + 1(13) = 29.$$

Desafio: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, encontre:

a. os cofatores C_{31}, C_{32} e C_{33}.

b. det(A), usando o método de Laplace.

Gabarito:

a) $C_{31} = -5$, $C_{32} = -1$ e $C_{33} = -3$

b) det(A) = 12

A transposta da matriz dos cofatores é dita matriz adjunta de A e denotada por adj(A).

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Encontre adj(A).

Solução: Os cofatores de A são:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(3-1) = 2$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(-1-0) = 1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1-0) = -1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(0-1) = 1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(1-0) = 1$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(1-0) = -1$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(0-3) = -3$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}(1-(-1)) = -2$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(3-0) = 3$$

Portanto, a matriz dos cofatores, isto é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A matriz adjunta de A é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo: Dada a matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Encontre adj(B).

Solução: Os cofatores de B são:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(16 - 5) = 11$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(0-(-10)) = -10$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(0-(-8)) = 8$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(-4-3) = 7$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(8-(-6)) = 14$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(2-2) = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(-5-12) = -17$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}(10-0) = -10$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(8-0) = 8$$

Portanto, a matriz dos cofatores, isto é:

$$\begin{pmatrix} 11 & -10 & 8 \\ 7 & 14 & 0 \\ -17 & -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

A matriz adjunta de B é:

$$\begin{pmatrix} 11 & 7 & -17 \\ -10 & 14 & -10 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

3.2.2. Propriedades dos Determinantes

1ª) Se A é uma matriz com pelo menos uma linha ou uma coluna nula, então det(A) = 0.

2ª) det(A) = det(A^T).

3ª) Se B é uma matriz obtida de A por meio de troca (ou permuta) de duas linhas (ou duas colunas) entre si, então det(B) = - det(A).

4ª) Se B é a matriz obtida de A multiplicando-se uma linha (ou uma coluna) por um número real não nulo ($\alpha \in$ IR), então det(B) = αdet(A).

5ª) A é uma matriz com duas linhas (ou duas colunas) iguais, então det(A) = 0.

6ª) det(AB) = det(A)det(B).

CAPÍTULO 4

MATRIZ INVERSA

4.1. Introdução à Matriz Inversa

O objetivo da criptografia é assegurar que apenas o destinatário da mensagem tenha acesso ao seu conteúdo.

A cifra de Hill consiste no agrupamento do texto comum em conjuntos de n letras e codificado com uma matriz codificadora de ordem n.

A decodificação da mensagem só se dará com a utilização da matriz decodificadora, ou seja, a inversa da matriz codificadora.

4.2. Matriz Inversa

A_{nxn} é dita inversível, se existir uma matriz B_{nxn} tal que $AB = I_n$. B é denominada a inversa de A e representada por A^{-1}.

Uma matriz A_{nxn} é inversível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Exemplo: Calcule a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>Solução</u>:

Como $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2 \neq 0$, A é inversível, ou seja, existe uma matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $AB = I_2$.

Assim, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então $\begin{pmatrix} 1a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E, consequentemente,

$$\begin{cases} 1a+2c=1 \\ 3a+4c=0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} b+2d=0 \\ 3b+4d=1 \end{cases}.$$

No primeiro sistema, $3a + 4c = 0 \Rightarrow a = -\frac{4c}{3}$, substituindo na primeira equação $a + 2c = 1 \Rightarrow -\frac{4c}{3} + 2c = 1 \Rightarrow \frac{-4c+6c}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow 2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$.

E daí, a = $-\frac{4c}{3}=-\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{12}{6}=-2.$

No segundo sistema, b + 2d = 0 ⇒ b = -2d, substituindo na segunda equação 3b + 4d = 1⇒ 3(-2d) + 4d = 1 ⇒ -6d + 4d = 1 ⇒ -2d = 1 ⇒ d = - $\frac{1}{2}$.

Portanto, b = -2d = -2$\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{2}=-1.$

Portanto, A-1 = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4.3. Outra forma

A inversa de uma matriz invertível também pode ser dada por:

$$\frac{1}{\det(A)}adj(A).$$

Exemplo: Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solução:

Sendo adj(A) = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e det(A) = 1. Assim, a inversa da matriz A é:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo: Dada a matriz B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Solução:

Sendo adj(B) = $\begin{pmatrix} 11 & 7 & -17 \\ -10 & 14 & -10 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ e det(B) = 56. Assim, a inversa da matriz B é:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{56} & \frac{7}{56} & -\frac{17}{56} \\ -\frac{10}{56} & \frac{14}{56} & -\frac{10}{56} \\ \frac{8}{56} & 0 & \frac{8}{56} \end{pmatrix}.$$

Desafio: A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, encontre A^{-1}, se existir.

Gabarito: A-1= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.4. Propriedade da Matriz Inversa

1ª) A^{-1} é única;

2ª) $(A^{-1})^{-1} = A$;

3ª) det(A-1) = $\dfrac{1}{\det(A)}$.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, W. **Aprendendo Cálculo de Várias Variáveis.** UFRJ, 2016.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. 3. ed. Harbra, 1986.

BRYAN J. F.; MANLY, **Métodos Estatísticos Multivariados uma Introdução**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

BRYAN F. J.; MANLY, ALBERTO J. A. N. **Métodos Estatísticos Multivariados**: Uma Introdução. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2019.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2004.

CRESPO, A. A**. Estatística Fácil,** São Paulo: Saraiva, 2004

FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A., **Curso de Estatística**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 1 e 2. LTC, 2014.

JOHONSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied multivariate statistical analysis**. 3. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1992.

MINGOTI, S. A. **Análise de Dados Métodos de Estatística Multivariada**. Minas Gerais: Editora da UFMG, 2005. 300 p.

RORRES, C.; HOWARD, A. Álgebra Linear com Aplicações. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol 2, McGraw-Hill, 1988.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Álgebra Linear. 2. ed. Pearson, 2010.

TIZZIOTTI, G. C.; SANTOS, J. V. Álgebra Linear. UFU, 2012.

https://github.com/allanbreyes/udacity-data-science/blob/master/p3/data/wineQualityReds.csv