Unyleya
EDUCACIONAL

MATEMÁTICA PARA INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

PARTE I

SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

FORMA MATRICIAL

Um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$

pode ser escrito da seguinte forma,

matriz dos coeficientes

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \ldots a_{2n} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\ \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matriz dos termos independentes

matriz das incógnitas

REGRA DE CRAMER

Seja um sistema de n equações lineares em n incógnitas tal que det(A) ≠ 0, então o sistema linear tem uma única solução. Essa solução é

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

em que A_j é a matriz obtida substituindo a j-ésima coluna da matriz dos coeficientes pela matriz dos termos independentes.

CASO 1

Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x - y + 2z = -9 \\ x + y + \ z = 0 \\ 3x + y + 2z = -7 \end{cases},$$

usando a regra de Cramer.

Primeiro, o sistema linear pode ser expresso como

matriz dos coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

matriz dos termos independentes

matriz das incógnitas

$$\text{Segundo o } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$6 \quad 1 \quad -2 \qquad\qquad\qquad 2 \quad -3 \quad 2$$

Logo, $\det(A) = (2+(-3)+2) - (6+1+(-2)) = -4 \neq 0$, então o sistema tem uma única solução.

Pela regra de Cramer

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

onde $A_1 = \begin{pmatrix} -9 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\det(A_1) = 12$.

Logo,

$$x = \frac{12}{-4} = -3$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

onde $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ e $\det(A_2) = -16$.

Logo,

$$y = \frac{-16}{-4} = 4$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

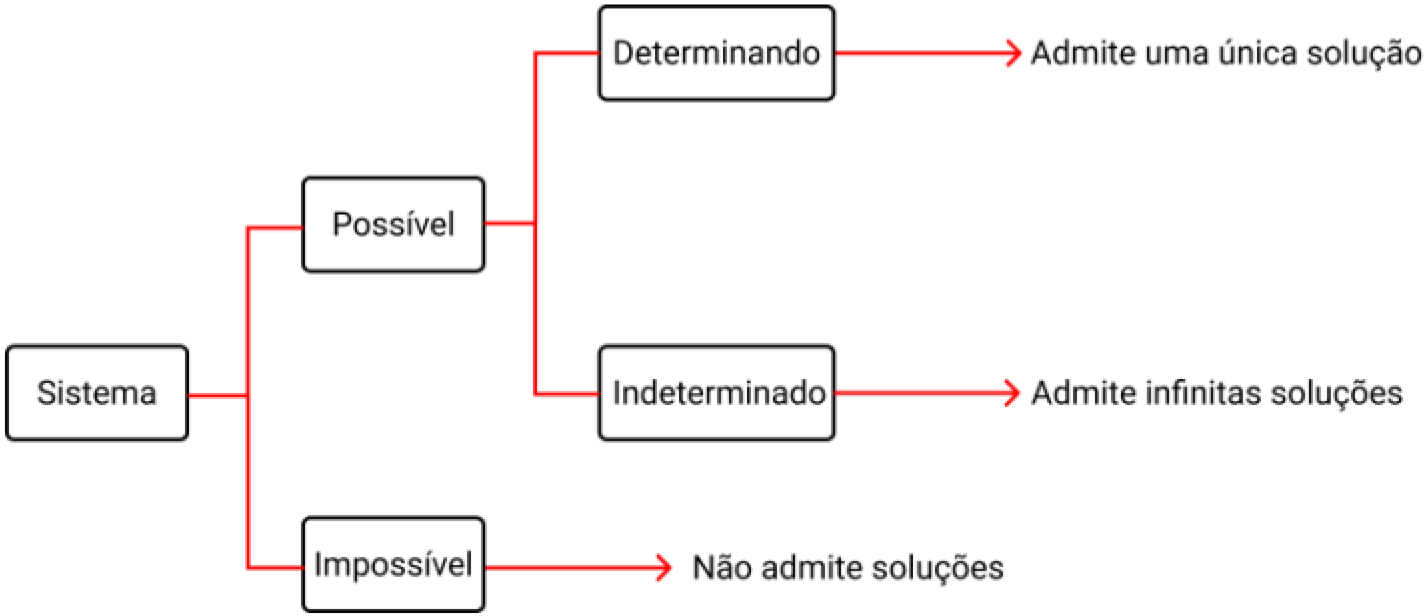
onde $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -9 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ e $\det(A_3) = 4$.

Logo,

$$z = \frac{4}{-4} = -1$$

Portanto, (-3, 4, -1) é solução do sistema.

CLASSIFICAÇÃO



CASO 2

O sistema linear

$$\begin{cases} x - y + 2z = -9 \\ x + y + \ \ z = 0 \\ 3x + y + 2z = -7 \end{cases},$$

é um sistema determinado.

CASO 3

O sistema linear

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 2x - 2y + 4z = 10, \\ 3x - 3y + 6z = 15 \end{cases}$$

pode ser escrito como $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Note que det(A) = 0. Pela regra de Cramer, é possível afirmar que o sistema **não é determinado**.

$$\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 2x-2y+4z=10 \\ 3x-3y+6z=15 \end{cases} \quad \times(-2) \quad \times(-3) \qquad \begin{cases} x-y+2z=5 \Rightarrow x = 5 + y - 2z \\ 0 \quad = 0 \\ 0 \quad = 0 \end{cases}$$

Seja y = 1 e z = -1, então x = 5 + (1) – 2(-1) = 8. Portanto, (8, 1, -1) é solução do sistema.

Seja y = 0 e z = 2, então x = 5 + 0 – 2(2) = 1. Portanto, (1, 0, 2) também é solução do sistema.

O sistema linear

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 2x - 2y + 4z = 10, \\ 3x - 3y + 6z = 15 \end{cases}$$

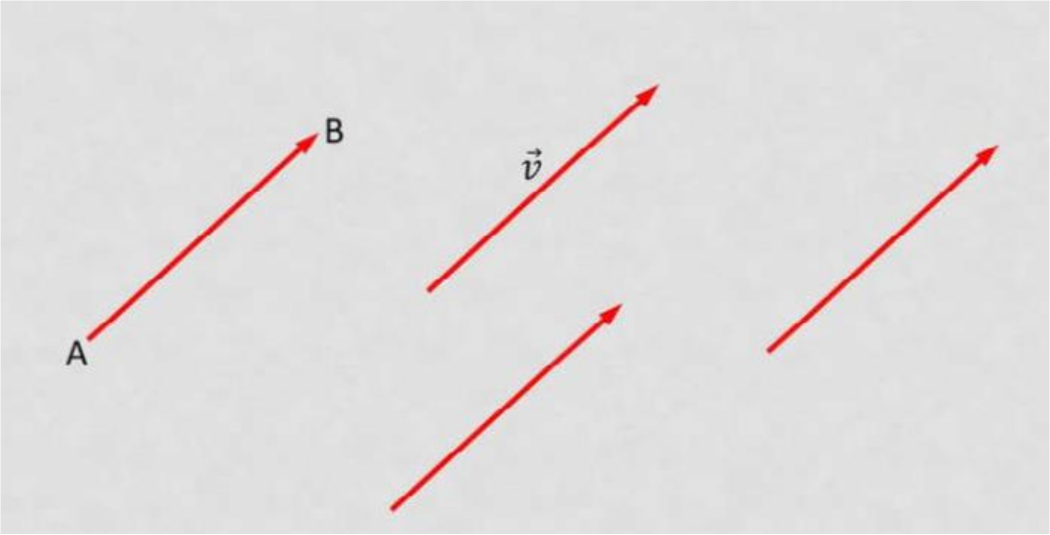
é indeterminado.

PARTE II

ÁLGEBRA LINEAR

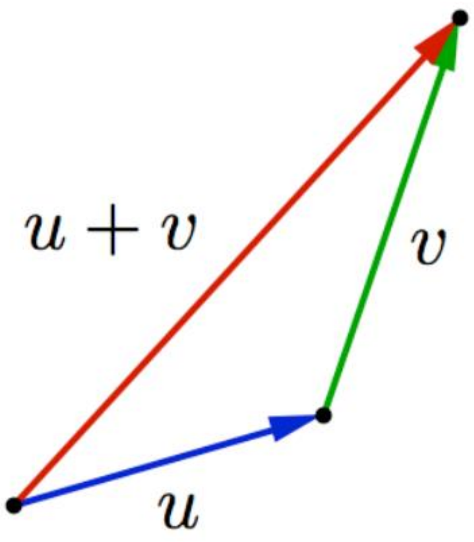
DEFINIÇÃO

Vetor é uma classe de equipolência de segmentos de reta orientados, que possuem todos o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.



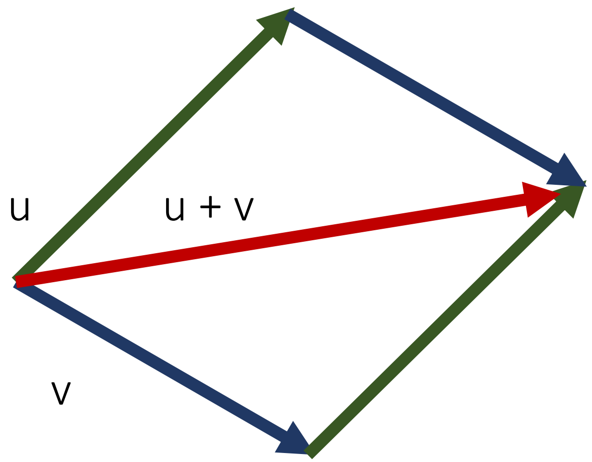
SOMA DE VETORES

Sejam u e v dois vetores quaisquer.



SOMA DE VETORES

Sejam u e v dois vetores quaisquer.



PROPRIEDADE DA SOMA DE VETORES

I) Associativa;

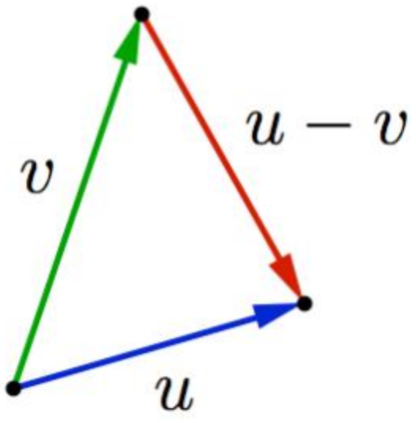
II) Comutativa;

III) Existência de elemento neutro, denotado por 0;

IV) Existência do elemento oposto (ou simétrico), representado por –v.

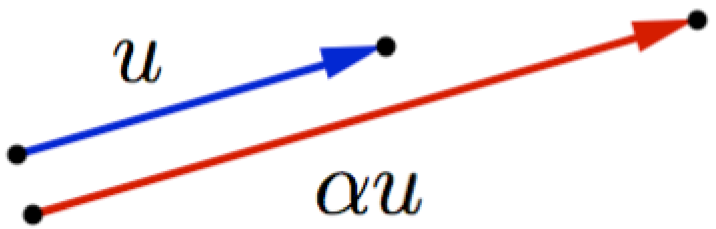
SUBTRAÇÃO DE VETORES

Sejam u e v dois vetores quaisquer.



MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Sejam u um vetor qualquer e α um escalar qualquer.



PROPRIEDADE DA MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

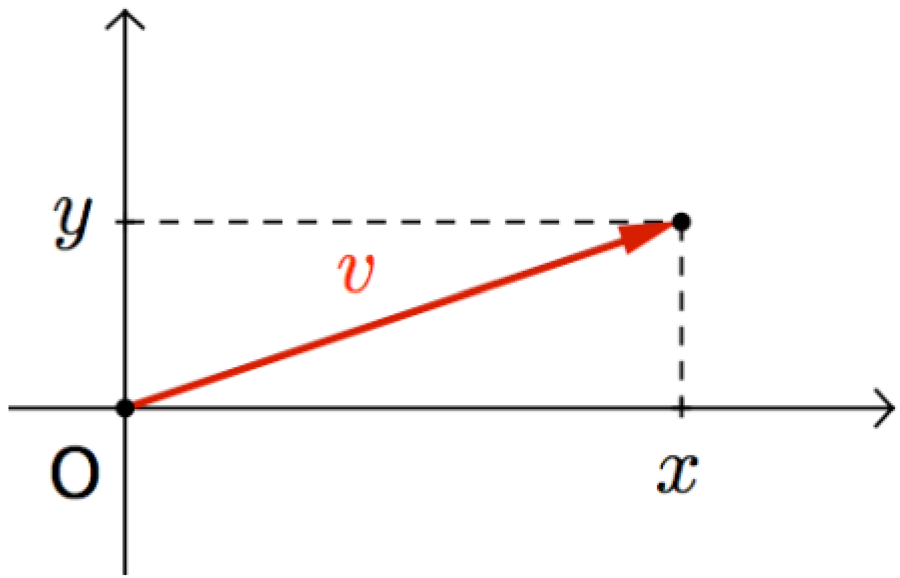
I) Associativa;

II) Existência de elemento neutro, denotado por 1;

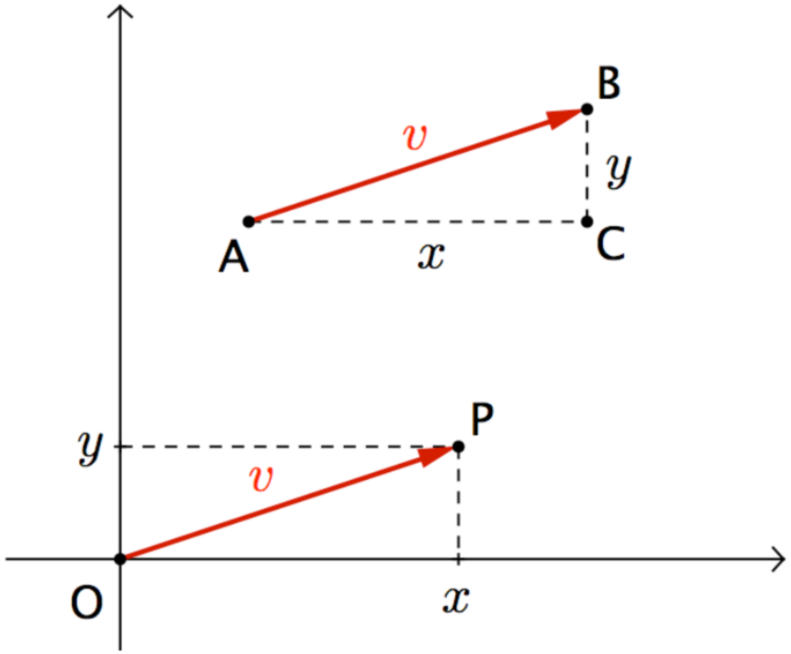
III) Distributiva em relação a soma de vetores;

IV) Distributiva em relação a soma de escalares.

PAR ORDENADO VERSUS VETOR



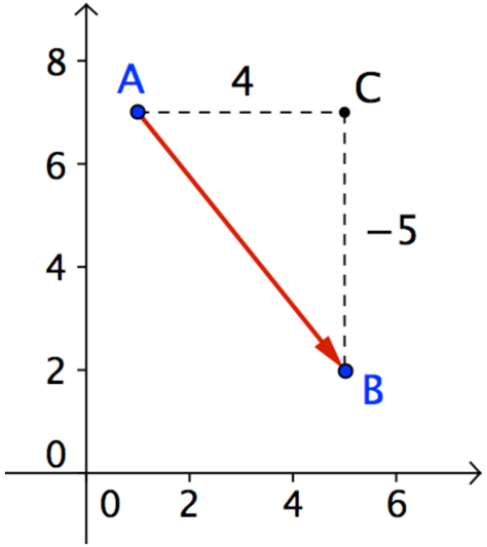
COORDENADAS DE UM VETOR



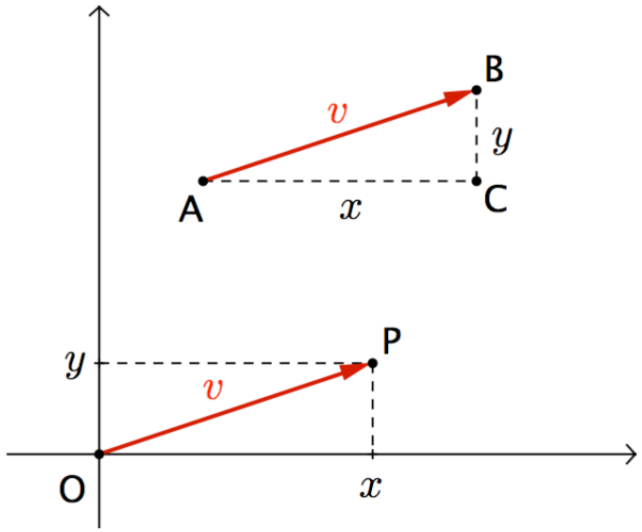
$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

CASO 1

Sejam A = (1, 7) e B = (5, 2), então as coordenadas do vetor AB são (4, -5).



NORMA DE UM VETOR



$$\|v\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

CASO 2

Sejam A = (1, 7) e B = (5, 2), então a norma do vetor AB é igual a

$$\|AB\| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

DEFINIÇÃO

Sejam V e W espaços vetoriais. Diz-se que uma função T: V $\rightarrow$ W é uma **transformação linear** se a função T preserva as operações de adição e multiplicação por escalar, isto é, se satisfaz os seguintes axiomas:

I) Para quaisquer u, v $\in$ V,

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

II) Para todo u $\in$ V e para todo $\alpha \in$ IR,

$$T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

CASO 1

A função T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ definida por T(x, y) = (-x, -y) é um exemplo de transformação linear.

Sejam u = (1, 2), v = (-1, 3) e u + v = (0, 5).

Veja que T(u) = T(1, 2) = (-1, -2),

T(v) = T(-1, 3) = (1, -3),

$T(u) + T(v) = (0, -5)$,

$T(u + v) = T(0, 5) = (0, -5)$.

Logo, $T(u + v) = T(u) + T(v)$.

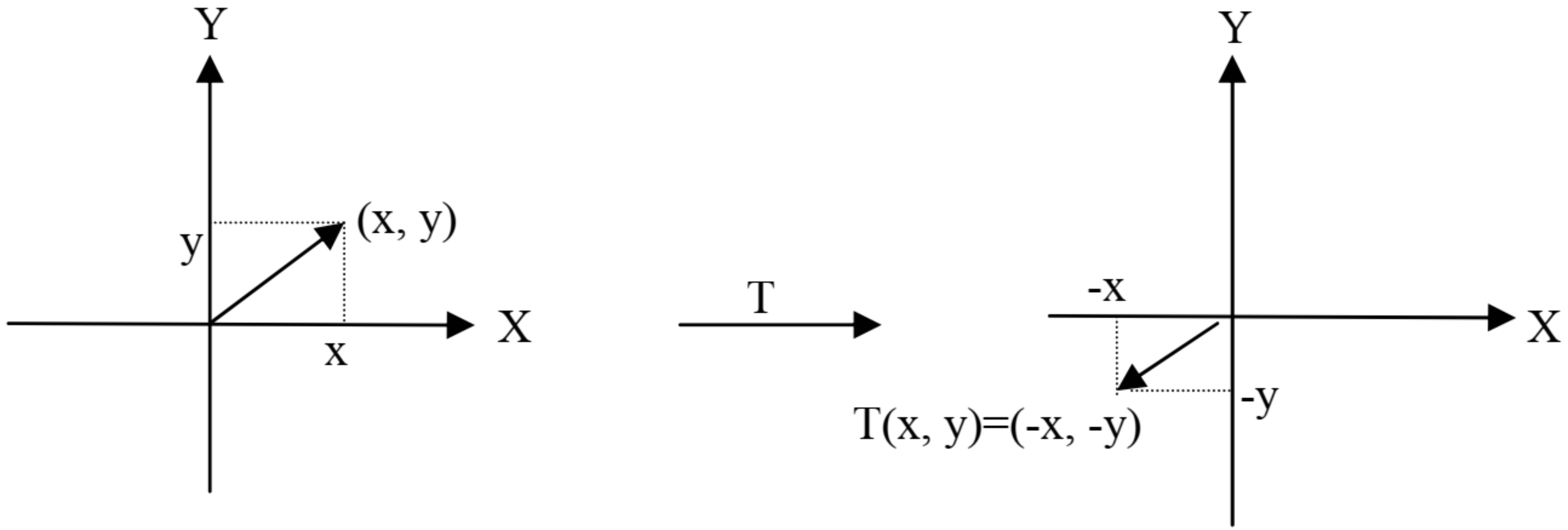
Sejam u = (1, 2), $\alpha = 3$ e $\alpha u = (3, 6)$.

Note que $T(\alpha u) = T(3, 6) = (-3, -6) = 3(-1, -2)$.

Assim, $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Portanto, T é uma transformação linear (ou melhor é um operador linear).

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA



DEFINIÇÃO

Seja T: V $\rightarrow$ W uma transformação linear. O conjunto dos vetores em V que T transforma em $\vec{0}$ é denominado núcleo de T e é denotado por N(T). O conjunto de todos os vetores em W que são imagens por T de pelo menos um vetor em V é denominado imagem de T e é denotado por Im(T).

CASO 2

Seja $T: IR^2 \rightarrow IR^2$ definida por $T(x, y) = (-x, -y)$.

a) Qual é o núcleo de T?

Como (0, 0) é o único vetor que T transforma em (0, 0), segue que $N(T) = \{(0, 0)\}$. E ainda, T é **injetora**.

b) Qual é a imagem de T?

Im(T) é o conjunto de vetores da forma (-x, -y), segue que Im(T) = $\{(-x, -y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. E ainda, T é sobrejetora.

Logo, T é bijetora, ou ainda, é um isomorfismo.

OBSERVAÇÃO

Dada a transformação linear

$$T: IR^2 \rightarrow IR^2$$

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$

Passando da forma vetorial para a forma matricial,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

matriz associada à transformação linear

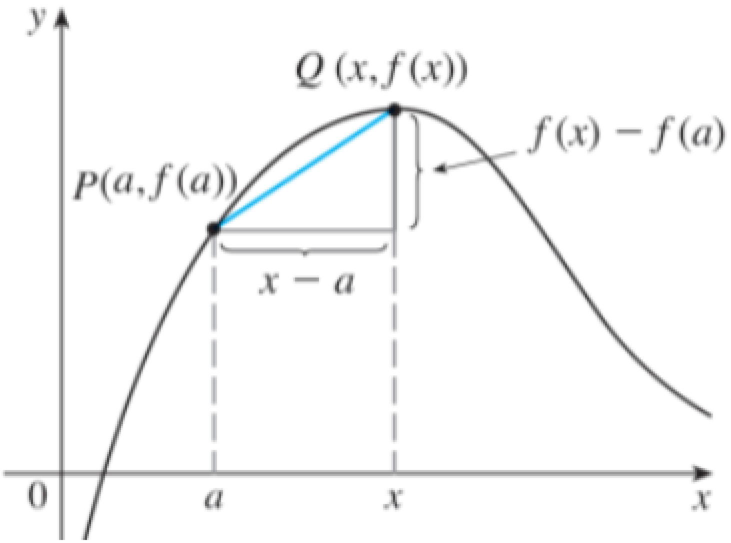
PARTE III

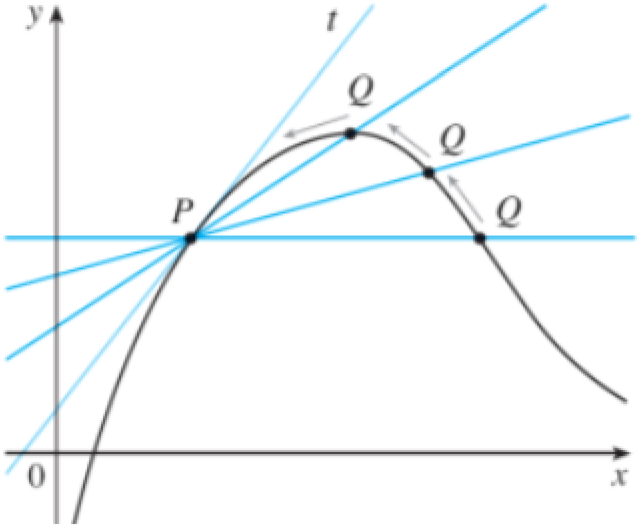
CÁLCULO DIFERENCIAL

DEFINIÇÃO

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

é a derivada de f no ponto a.


y
Q (x, f (x))
f (x) − f (a)
P(a, f (a))
x − a
0
a
x
x


y
t
Q
Q
Q
P
0
x

OBSERVAÇÃO

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

é a derivada de f (x).

CASO 1

Sendo $f(x) = \frac{1}{x}$, calcule $f'(x)$.

Por definição,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Como

$$f(x+\Delta x)=\frac{1}{x+\Delta x}$$

e

$$f(x)=\frac{1}{x},$$

segue que

$$\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

Logo,

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}\frac{1}{\Delta x}=\frac{-1}{x(x+\Delta x)}$$

Fazendo $\Delta x \to 0$, tem-se

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

1ª) $f(x) = x^n$, n inteiro positivo $\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Exemplo:

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

2ª) $f(x)$ é uma função e c é uma constante $\Rightarrow (cf(x))' = cf'(x)$

Exemplo:

$f(x) = 2x^3 \Rightarrow f'(x) = 2(x^3)' = 6x^2$

$f(x) = -3x^5 \Rightarrow f'(x) = -3(x^5)' = -15x^4$

3^{a}) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Exemplo:

$f(x) = 2x^3 + 3x^5 \Rightarrow f'(x) = (2x^3)' + (3x^5)' = 6x^2 + 15x^4$

$f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = (x^3)' + (2x)' = 3x^2 + 2$

$4^{\underline{a}}$) $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

Exemplo:

$f(x) = x^3 - x^2 \Rightarrow f'(x) = (x^3)' - (x^2)' = 3x^2 - 2x$

$5^{\underline{a}}$) $f(x) = c$, c é uma constante $\Rightarrow f'(x) = 0$

Exemplo:

$f(x) = -98 \Rightarrow f'(x) = 0$

Unyleya EDUCACIONAL

6ª) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Exemplo:

$f(x) = (x^2 + x + 2)(3x - 1) \Rightarrow f'(x) = (x^2 + x + 2)'(3x - 1) +$

$(x^2 + x + 2)(3x - 1)' = (2x + 1)(3x - 1) + (x^2 + x + 2)3 = 9x^2 +$

$4x + 5$

7ª) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Exemplo:

$$f(x) = \frac{8 - x + 3x^2}{2 - 9x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(8 - x + 3x^2\right)'(2 - 9x) - (8 - x + 3x^2)(2 - 9x)'}{(2 - 9x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-1 + 6x)(2 - 9x) - (8 - x + 3x^2)(-9)}{(2 - 9x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{27x^2 - 24x + 70}{(2 - 9x)^2}$$

CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO

$f'(x) > 0$ nos pontos do intervalo $(a, b) \Rightarrow f(x)$ é crescente no intervalo $[a, b]$;

$f'(x) < 0$ nos pontos do intervalo $(a, b) \Rightarrow f(x)$ é decrescente no intervalo $[a, b]$.

CASO 2

Considere a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1$ e $x = 3$.

Assim, $f(x)$ é crescente no intervalo $(-\infty, 1)$ e $(3, +\infty)$, sendo decrescente no intervalo $(1, 3)$.

CONCAVIDADE

$f''(x) > 0$ nos pontos do intervalo $(a, b) \Rightarrow f(x)$ é côncava para cima no intervalo $[a, b]$;

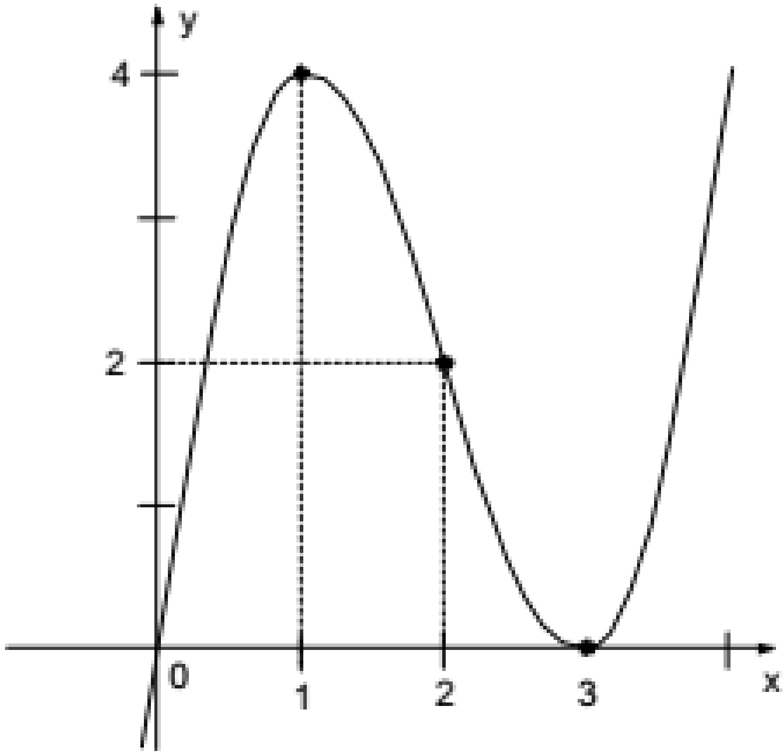
$f''(x) < 0$ nos pontos do intervalo $(a, b) \Rightarrow f(x)$ é côncava para baixo no intervalo $[a, b]$.

CASO 3

Considere a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Assim, $f(x)$ é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 2)$ e côncava para cima $(2, +\infty)$.


y
4
2
0
1
2
3
x

MÁXIMOS E MÍNIMOS

x_0 é um ponto no intervalo (a, b) e é um ponto de mínimo local de $f(x) \Rightarrow f'(x_0) = 0$;

x_0 é um ponto no intervalo (a, b) e é um ponto de máximo local de $f(x) \Rightarrow f'(x_0) = 0$;

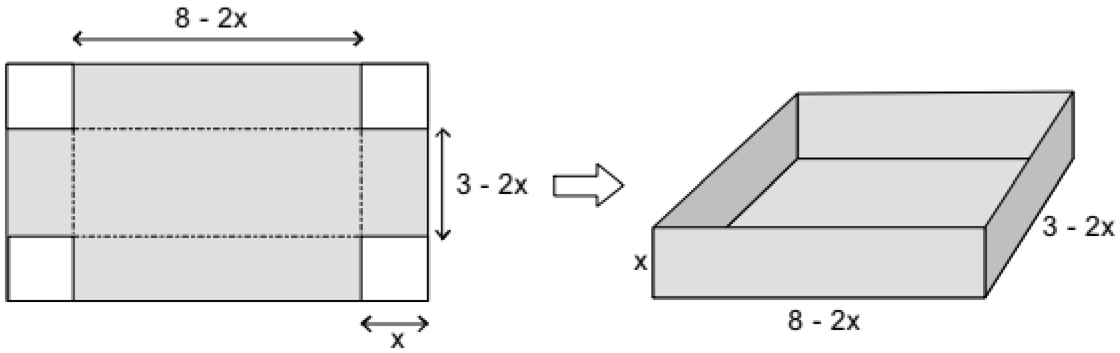
$f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe, x_0 é dito ponto crítico de f.

$f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ é um ponto de mínimo local de $f'(x_0)$;

$f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ é um ponto de máximo local de $f'(x_0)$.

CASO 4

Uma grande caixa deve ser construída cortando-se quadrados iguais dos quatro cantos de uma folha retangular de zinco, de 3 m por 8 m, dobrando-se os quatro lados (abas laterais) para cima e soldando-se as arestas verticais que ficaram justapostas. Encontre o maior volume possível para esta caixa.



O volume da caixa é dado por

$$V(x) = x(8 - 2x)(3 - 2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

com $0 \leq x \leq 3/2$.

$V(x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 0 \Rightarrow x = 2/3$ e $x = 3$ (pontos críticos de $f(x)$).

$V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 \Rightarrow V''(x) = 24x - 44$

$V''(2/3) = 24(2/3) - 44 = 16 - 44 = -28 < 0 \Rightarrow x = 2/3$ é ponto de máximo de $V(x)$.

Portanto, as dimensões da caixa de volume máximo são 20/3, 5/3 e 2/3.

Obrigado!