EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolva por eliminação de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1. \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$$

Solução: A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somando -2 vezes a primeira linha à segunda, dá

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somando -3 vezes a primeira linha à terceira, resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando -3 vezes a segunda linha e depois somando à 2 vezes a terceira linha, dá

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando -1 a terceira linha, tem-se

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Somando 7 vezes a terceira linha à segunda linha, resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando a segunda linha por $\frac{1}{2}$, tem-se

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Somando -2 vezes a terceira linha à primeira linha e depois somando -1 vezes a segunda linha à primeira linha, dá

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

O sistema de equações correspondente é

$$\begin{cases} x & & & =1 \\ & y & & =2 \\ & & z & =3 \end{cases}.$$

Portanto, x = 1, y = 2 e z = 3 é solução do sistema.

2. A matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ é invertível? Se sim, use o método da adjunta para encontrar a inversa.

<u>Solução</u>: O determinante da matriz ao longo da segunda linha, pelo método de Laplace, é

$$(-1).C_{21} + (-1).C_{22} + 0.C_{23}.$$

Como C_{21}, C_{22} e C_{23} são os cofatores ao longo da segunda linha da matriz, tem-se

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(15 - 20) = 5$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (1).(6 - 10) = -4$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1).(8 - 10) = 2$$

Logo, o determinante é

$$(-1).5 + (-1).(-4) + 0.2.$$

Como determinante é igual a -1, diferente de zero, portanto a matriz é invertível.

Os demais cofatores da matriz são

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (1).(-3 - 0) = -3$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(-3 - 0) = 3$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (1).(-4 + 2) = -2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (1).(0 + 5) = 5$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1).(0 + 5) = -5$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (1).(-2 + 5) = 3$$

A matriz dos cofatores é

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

A adjunta da matriz é

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 5 \\ 3 & -4 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A inversa da matriz usando sua adjunta é dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$