MATEMÁTICA PARA INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

UNIDADE III

CÁLCULO DIFERENCIAL

Elaboração

Erika L P Borges

Juciara do Nascimento César

Produção

Equipe Técnica de Avaliação, Revisão Linguística e Editoração

SUMÁRIO

CÁLCULO DIFERENCIAL

UNIDADE III

CAPÍTULO 1

FUNÇÕES DE MULTIVARIÁVEIS

1.1. Introdução a Funções de Multivariáveis

A derivada da função *f* em x_o é definida e indicada por:

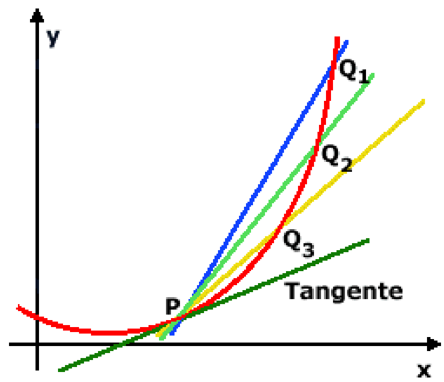
$$f'(x0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

O coeficiente angular da reta secante ao gráfico da função *f* no ponto x_o e $x_o + h$ é igual a:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Fazendo $h \to 0$, a reta secante torna-se a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto $(x_o, f(x_o))$.

Figura 18. Tangente ao gráfico de *f* no ponto P.



Fonte: Bianchini, Waldecir, 2016

Assim, o coeficiente angular da reta tangente é:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Ou seja, o coeficiente angular é exatamente a derivada da função f em x_o.

Como a derivada é o coeficiente angular da reta tangente, pode-se afirmar que se $f'(x_o) > 0$, então existe uma vizinhança de x_o em que a função f é crescente; e se $f'(x_o) < 0$, então existe uma vizinhança de x_o em que a função f é decrescente.

As propriedades a seguir são fundamentais para o cálculo de derivadas.

1ª) A função constante é a função que associa todo ponto de seu domínio a um único número real. A derivada da função constante é igual a zero.

Exemplo: $f(x) = 2$

Solução:

$$f'(x) = 0$$

2ª) A função identidade é a função que associa todo ponto de seu domínio a ele mesmo. A derivada da função identidade é um.

Exemplo: $f(x) = x$

Solução:

$$f'(x) = 1$$

3ª) A função potência é função do tipo x^n, onde n é um número real qualquer. A derivada da função potência é multiplicar x pelo expoente e tirar um do expoente.

Exemplo: $f(x) = x^5$

Solução:

$$f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$

4ª) A derivada da função que é uma constante vezes uma função é uma função do tipo $cf(x)$. A derivada da função é a constante multiplicada pela derivada da função, ou seja, $(cf(x))' = cf'(x)$.

Exemplo: $f(x) = 10x^4$

Solução:

$$f'(x) = 10(4x^{4-1})= 10(4x^3) = 40x^3$$

5ª) A derivada da função que é a soma de funções é a soma das derivadas de cada função, isto é, $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

<u>Exemplo</u>: f(x) = x^2 + senx

<u>Solução</u>:

$$f'(x) = (2x^{2-1}) - (senx)' = 2x - cosx$$

6ª) A derivada da função que é a diferença de funções é a diferença das derivadas de cada função, isto é, $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$.

<u>Exemplo</u>: f(x) = x - e^x

<u>Solução</u>:

$$f'(x) = 1 - e^x$$

7ª) A derivada da função que é o quociente de funções é $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Exemplo: f(x) = $\frac{senx}{x^3}$

<u>Solução</u>:

$$f'(x) = \frac{(senx)'x^3 - senx(x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{(\cos x)x^3 - senx(3x^2)}{x^6}$$

<u>Desafio</u>: Calcule a derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 3x^4 + 6x - 10$

b) $f(x) = x^2 \cos x$

c) $f(x) = \frac{senx}{x^2}$

<u>Gabarito</u>: a) $f'(x) = 12x^3 + 6$

b) $f'(x) = 2x\cos x + 12x^3 - 6senx$

c) $f'(x) = \frac{x^2 \cos x - 2xsenx}{x^4}$

Observe que:

Quadro 3. Derivadas de Funções Especiais.

Função	f(x)	f´(x)
Exponencial	e^x	e^x
Logaritmo	lnx	$\frac{1}{x}$
Seno	senx	cosx
Cosseno	cosx	-senx

Fonte: Próprio autor.

A derivada de segunda ordem de uma função ou segunda derivada representa a derivada da derivada desta função, representada por f'' (x) ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Exemplo: A função $f(x) = 3x^4 - 12x^2$. Determine a derivada de segunda ordem de $f(x)$.

Solução:

A primeira derivada da função é $f'(x) = 12x^3 - 24x$. Já a segunda derivada da função é a derivada da derivada $(12x^3 - 24x)$, ou seja, $f''(x) = 36x^2 - 24$.

As derivadas são ferramentas úteis para esboçar o gráfico de uma função $f(x)$. As derivadas também são utilizadas para minimizar ou maximizar uma função $f(x)$.

A função assume um extremo local (máximo ou mínimo) em pontos onde a primeira derivada da função $f(x)$ é nula ou não está definida.

Exemplo: A função $f(x) = 3x^4 - 12x^2$. Encontre os pontos críticos de $f(x)$.

Solução:

A primeira derivada da função é $f'(x) = 12x^3 - 24x$. Note que $f'(x) = 12x^3 - 24x = 0 \Rightarrow$ $f'(x) = x(12x^2 - 24) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $12x^2 - 24 = 0$.

Como $12x^2 - 24 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Logo, (0, 0), $(-\sqrt{2}, -12)$ e $(\sqrt{2}, -12)$ são os pontos críticos de $f(x)$.

Pode-se afirmar que se $f''(x_0) > 0$, então $(x_0, f(x_0))$ é um ponto de mínimo da função f ; e se $f''(x_0) < 0$, então $(x_0, f(x_0))$ é um ponto de máximo da função f.

Exemplo: A função $f(x) = 3x^4 - 12x^2$. Encontre os extremos locais de $f(x)$.

Solução:

A segunda derivada da função é $f''(x) = 36x^2 - 24$. E (0, 0), $(-\sqrt{2}, -12)$ e $(\sqrt{2}, -12)$ são os pontos críticos de $f(x)$.

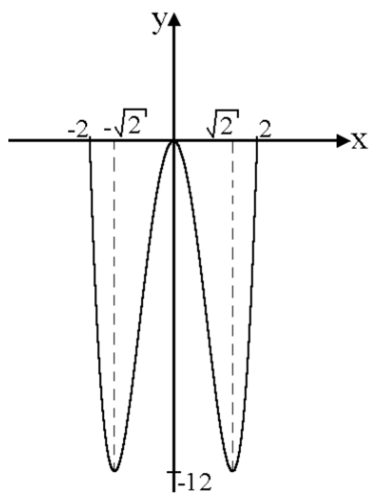
Para $x = 0 \Rightarrow f''(0) = 36(0)^2 - 24 \Rightarrow f''(0) = -24 \Rightarrow (0, 0)$ é um ponto de máximo de $f(x)$.

Para $x = -\sqrt{2} \Rightarrow f''(-\sqrt{2}) = 36(-\sqrt{2})^2 - 24 \Rightarrow f''(-\sqrt{2}) = 72 - 24 \Rightarrow f''(-\sqrt{2}) = 48 \Rightarrow$ $(f''(-\sqrt{2}) =, 0)$ é um ponto de mínimo de $f(x)$.

Para $x = \sqrt{2} \Rightarrow f''(\sqrt{2}) = 36(\sqrt{2})^2 - 24 \Rightarrow f''(\sqrt{2}) = 72 - 24 \Rightarrow f''(\sqrt{2}) = 48 \Rightarrow$ $(f''(\sqrt{2}) =, 0)$ é um ponto de mínimo de $f(x)$.

O gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 12x^2$ é

Figura 19. Gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 12x^2$.



Fonte: Próprio autor.

As funções multivariáveis podem ser aplicadas em várias situações do nosso cotidiano, como por exemplo, na determinação do volume de uma piscina, na contenção de derrames de petróleos em mares e no cálculo das variações de preço de determinado produto.

Em Matemática, as derivadas parciais são utilizadas na resolução de um problema de otimização para maximizar ou minimizar uma função previamente definida, visando a encontrar uma solução ótima do problema, isto é, que resulte no melhor desempenho possível do sistema.

1.2. Funções de duas variáveis

Dado um subconjunto $D \subset IR^2$, uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par $(x, y) \in D$ um único valor real denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é chamado de domínio de f e sua imagem é o conjunto $\{f(x, y): (x, y) \in D\}$.

Quando não se menciona o domínio D, subentende-se que o domínio de f é o maior subconjunto de IR^2 para o qual a regra definida por f está bem definida. Também se escreve $z = f(x, y)$ para os valores assumidos por f em um ponto qualquer (x, y). As variáveis x e y são variáveis independentes e z é a variável dependente.

Exemplo: O domínio da função f dada por:

$$f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}.$$

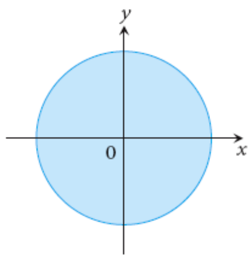
Solução:

O conjunto de todos os pontos (x, y) para os quais $9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow - x^2 - y^2 \geq -9 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 9$, isto é:

$$D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$$

que é todos os pontos interiores e sobre a circunferência de centro (0, 0) e raio 3.

Figura 20. Domínio da função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.



Fonte: Bianchini, 2016.

A imagem de f é o conjunto:

$$\{z: z = \sqrt{9-x^2-y^2} \text{ e } (x, y) \in D\} = [0, 3].$$

1.2.1. Gráfico e Curva de Nível

O gráfico de uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ com um domínio $D \subset IR^2$ é o conjunto

$$\{(x, y, z) \in IR^3: z = f(x, y) \text{ e } (x, y) \in D\}.$$

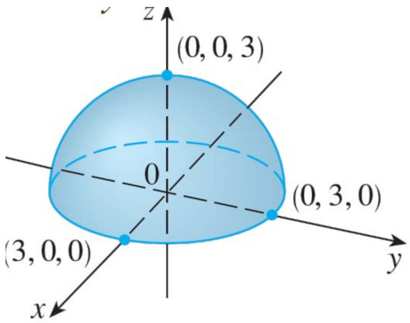
Exemplo: O gráfico da função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ é o conjunto

$$\{(x, y, z) \in IR^3: x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ e } z \in [0, 3]\}.$$

Solução:

O gráfico da função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ é

Figura 21. Gráfico da função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.



Fonte: Bianchini, 2016.

a parte superior da esfera de centro (0, 0, 0) e raio 3.

Às vezes, traçar o gráfico de uma função não é uma das tarefas mais fáceis, a menos que se tenha um bom programa gráfico.

Um modo de se obter informações sobre o comportamento de uma função é através de suas curvas de nível, uma técnica muito utilizada em cartografia.

A curva de nível k da função f é o conjunto

$$\{(x, y) \in D: f(x, y) = k\}.$$

A função f que fornece a temperatura em cada ponto $(x, y) \in D$, as curvas de nível são chamadas de isotérmicas.

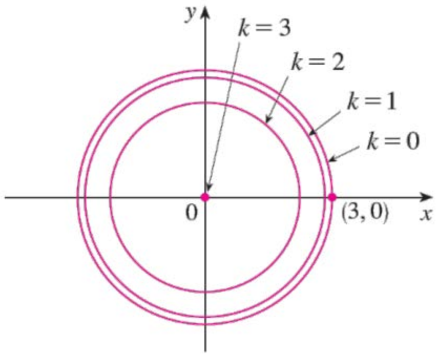
A função f que fornece a pressão atmosférica em cada ponto $(x, y) \in D$, as curvas de nível são chamadas de isobáricas.

Exemplo: A função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$, as curvas de nível são circunferências de centro (0, 0) e raio igual a $\sqrt{k}$, com $0 \leq k \leq 3$.

Solução:

A representação gráfica das curvas de nível à função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ é

Figura 22. Curvas de nível da função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.



Fonte: Bianchini, 2016.

Já foi visto o significado geométrico da derivada de uma função *f* em um ponto x_o como sendo a inclinação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto $(x_o, f(x_o))$, bem como a taxa de variação da função na direção do eixo x.

<u>Exemplo</u>: A temperatura em uma placa de metal em cada ponto (x, y) é dada por $T(x, y) = 9x^2 + 4y^2$.

<u>Solução</u>:

Como $T(2, 1) = 9(2)^2 + 4(1)^2 = 9(4) + 4 = 36$, a equação da curva de nível que passa pelo ponto (2, 1), chamada de isotérmica, é:

$$9x^2 + 4y^2 = 40.$$

Para calcular a taxa (instantânea) de variação de temperatura no ponto (2, 1) em relação à distância andada na direção do eixo x, observe que y permanece constante e igual a 1, o que varia é apenas a variável x.

Neste caso, o que se faz é calcular o limite das taxas médias de variação de temperatura em relação à variação de x:

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(2+h,1)-T(2,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{9(2+h)^2+4(1)^2-40}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{9(4+4h+h^2)+4-40}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{36+36h+9h^2+4-40}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{36h+9h^2}{h}=\lim_{h\to 0} 36+9h=36 \text{ graus/metro.}$$

Ao ver o cálculo da taxa (instantânea) de variação de temperatura no ponto (2, 1) em relação à distância andada na direção do eixo y, observe que y permanece constante e igual a 2, o que varia é apenas a variável y.

Neste caso, o que se faz é calcular o limite das taxas médias de variação de temperatura em relação à variação de y:

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(2,1+h)-T(2,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{9(2)^2+4(1+h)^2-40}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{36+4(1+2h+h^2)-40}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{36+4+8h+4h^2-40}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{8h+4h^2}{h}=\lim_{h\to 0} 8+4h=8 \text{ graus/metro.}$$

1.2.2. Derivadas parciais

A derivada parcial de *f* em relação a x um ponto (x_o, y_o) é denotada e definida por:

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

A derivada parcial de *f* em relação a y um ponto (x_o, y_o) é denotada e definida por:

$$f_y(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Para calcular a derivada parcial de *f* em relação a x, considera-se y como uma constante e deriva-se a função *f* normalmente como uma função de uma variável x, usando as técnicas de derivação de uma função de apenas uma variável.

Da mesma forma, para encontrar a derivada parcial de *f* em relação a y, considera-se x como uma constante.

<u>Exemplo</u>: Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ de $f(x, y) = x^2y^3$.

<u>Solução</u>:

Para calcular a derivada parcial de *f* em relação a x, considera-se y como uma constante e deriva-se a função *f* normalmente como uma função de uma variável x, pela regra do produto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2)' y^3 + x^2 (y^3)' = (2x)y^3 + x^2(0) = 2xy^3.$$

Para calcular a derivada parcial de *f* em relação a y, considera-se x como uma constante e deriva-se a função *f* normalmente como uma função de uma variável y, pela regra do produto:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2)' y^3 + x^2 (y^3)' = (0)y^3 + x^2(3y^2) = 3x^2y^2.$$

<u>Desafio</u>: Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$.

<u>Gabarito</u>: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$.

As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ de uma função z = f(x, y) são, também, funções de duas variáveis. Assim, pode-se considerar novamente suas derivadas parciais, chamadas de derivadas parciais de segunda ordem de z = f(x, y).

A derivada de segunda ordem de uma função f de duas variáveis, é definida e denotada por:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y);$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y);$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y);$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y).$$

<u>Exemplo</u>: Dada a função $f(x, y) = x^2y^3$.

<u>Solução</u>:

As derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(x)'y^3 + 2x(y^3)' = 2y^3 + 2x(0) = 2y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 3x^2y^2 = 3(x^2)'y^2 + 3x^2(y^2)' = 3(0)y^2 + 3x^2(2y) = 6x^2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2(x)'y^3 + 2x(y^3)' = 2(0)y^3 + 2x(3y^2) = 6xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3(x^2)'y^2 + 3x^2(y^2)' = 3(2x)y^2 + 3x^2(0) = 6xy^2$$

<u>Desafio</u>: Determine as derivadas de primeira e segunda ordem da função $f(x, y) = x^3 + 2y^3 + 3x^2y^2$.

<u>Gabarito</u>:

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 6y^2$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y + 6x^2$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 12xy$

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 12xy$

A figura 23 mostra a interpretação geométrica da derivada parcial de *f* em relação a x no ponto (a, b), $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$. Quando a função é derivada em relação a x, a variável y é mantida fixa. Com isso, se tem uma função de uma variável x, z = *f* (x, b).

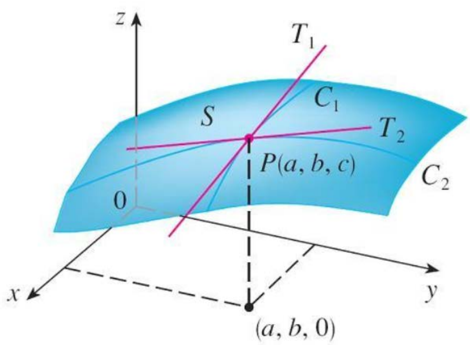
O gráfico desta função de uma variável x é a curva C_1 obtida pela interseção do gráfico de *f* com o plano y = b. A curva C_1 tem uma reta tangente T_1 no ponto P do gráfico de *f*.

A derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ representa, então, a inclinação da reta tangente ao gráfico de z = *f* (x, b).

Quando a função é derivada em relação a y, a variável x é mantida fixa. Com isto, se tem uma função de uma variável y, z = *f* (x, b). O gráfico desta função de uma variável y é a curva C_2 obtida pela interseção do gráfico de *f* com o plano x = a. A curva C_1 tem uma reta tangente T_2 no ponto P do gráfico de *f*.

A derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ representa, então, a inclinação da reta tangente ao gráfico de z = *f* (a, y).

Figura 23. Derivada parcial.



Fonte: Guidorizzi, 2014.

As retas T_1 e T_2 definem um plano e, evidentemente, chamado de plano tangente à superfície que é gráfico de uma função de duas variáveis.

1.2.3. Plano tangente

A equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $P(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ é dada por:

$$z = f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_o).$$

Exemplo: O plano tangente ao paraboloide no ponto $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 5\right)$ tem equação:

$$z = f\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)\left(y - \sqrt{3}\right).$$

Solução:

Como $f(x, y) = 1 + 4x^2 + y^2$. As derivadas parciais da função $f(x, y)$ são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4(2x) = 8x \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y,$$

Isto é:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right) = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}.$$

Logo, a equação do plano tangente é dada por:

$$z = 5 + 4\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\sqrt{3}\left(y - \sqrt{3}\right).$$

O vetor cujas coordenadas são as derivadas parciais da função $f(x, y)$, ou seja

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right),$$

é dito vetor gradiente de f no ponto $(x, y) \in D$.

CAPÍTULO 2

EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO

2.1. Introdução a Máximos e Mínimos

Em várias áreas, quando se consegue construir um modelo matemático bastante representativo da realidade vivenciada, é possível encontrar uma solução ótima do problema, isto é, uma solução que resulte no melhor desempenho possível.

Essa linha de formulação da solução de problema que envolve a obtenção da melhor aplicação de recursos, de modo a otimizar um ou mais objetivos pré-estabelecidos tais como maximização de lucros ou minimização de custos, é objeto de estudo do Cálculo Diferencial, em especial utilizando-se a derivada.

2.2. Máximos e Mínimos

Um ponto (x_o, y_o) é chamado ponto crítico de f se as derivadas parciais satisfazem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

ou então se alguma delas não existe.

Geometricamente, isto significa que se o gráfico de f tem um plano tangente em $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$. Este plano tangente é horizontal à superfície neste ponto. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local, um mínimo, ou ainda, nenhum dos dois.

Exemplo: Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7$. Determine o extremo local de $f(x, y)$.

Solução:

As derivadas são $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4$.

Estas derivadas parciais são nulas para $x = 1$ e $y = 2$.

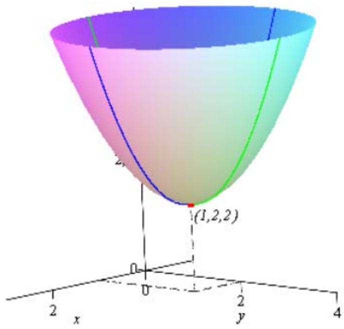
Logo, $(1, 2)$ é o único ponto crítico de $f(x, y)$.

Completando o quadrado na função, tem-se $f(x, y) = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + 7 - 1 - 4 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 2$.

Como $(x - 1) \geq 0$ e $(y - 2) \geq 0$, então, $f(x, y) \geq 2$ para qualquer (x, y).

Assim, $(1, 2)$ é um ponto de mínimo absoluto de f.

Figura 24. Gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7$.



Fonte: Bianchini, 2016.

Exemplo: Seja $f(x, y) = y^2 - x^2$. Determine o extremo local de $f(x, y)$.

Solução:

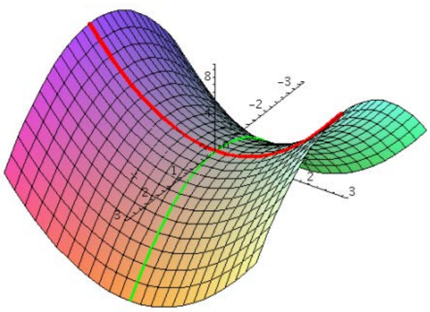
As derivadas parciais são $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ e se anulam somente para x = 0 e y = 0.

Logo, (0, 0) é o único ponto crítico de $f(x, y)$.

Observe que o ponto (0, 0) é ponto de mínimo para a curva $f(0, y) = y^2$ e máximo para a curva $f(x, 0) = -x^2$.

Este ponto é chamado de ponto de sela.

Figura 25. Gráfico de $f(x, y) = y^2 - x^2$.



Fonte: Bianchini, 2016.

2.2.1. Teste da Segunda Derivada

Seja f uma função de duas variáveis com derivadas parciais de segunda ordem contínua em um disco aberto com centro em um ponto crítico (a, b) de f.

Denote por:

$$A = f_{xx}(a, b),\ B = f_{xy}(a, b),\ C = f_{yy}(a, b) \text{ e } D = B^2 - AC.$$

a. Se $D < 0$ e $A > 0$, então (a, b) é um ponto de mínimo local de f.

b. Se $D < 0$ e $A < 0$, então (a, b) é um ponto de máximo local de f.

c. Se $D > 0$, então (a, b) é um ponto de sela de f.

No caso de $D = 0$, o teste não fornece informação. A função pode ter um máximo, um mínimo ou um ponto de sela.

<u>Exemplo</u>: Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 - 7y$.

<u>Solução</u>:

Tem-se:

$$f_x(x, y) = 4x - y \text{ e } f_y(x, y) = -x + 2y - 7.$$

Para encontrar os pontos críticos, deve-se:

$$4x - y = 0 \text{ e } -x + 2y - 7 = 0.$$

Da primeira equação, conclui-se que $y = 4x$, substituindo na segunda equação $-x + 2(4x) - 7 = 0 \Rightarrow -x + 8x = 7 \Rightarrow x = 1$ e, assim, $y = 4$.

Logo, o único ponto crítico de f é (1, 4).

As derivadas parciais de segunda ordem são:

$$f_{xx}(x, y) = 4,\ f_{xy}(x, y) = -1 \text{ e } C = f_{yy}(x, y) = 2$$

Portanto, $A = f_{xx}(1, 4) = 4$

$B = f_{xy}(1, 4) = -1$

$C = f_{yy}(1, 4) = 2$

$D = B^2 - AC = (-1)^2 - 4(2) = 1 - 8 = -7 < 0.$

Como D < 0 e A > 0, pelo teste da segunda derivada, (1, 4) é ponto de mínimo local da função *f*.

Desafio: Dada a função $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

a. Encontre os pontos críticos de $f(x, y)$.

b. Determine as derivadas parciais de $f(x, y)$.

c. Classifique os pontos críticos de $f(x, y)$.

Gabarito:

a. (1, 2), (2, 1), (-1, -2) e (-2, -1) são os pontos críticos de $f(x, y)$.

b. $f_{xx}(x, y) = 6x$, $f_{xy}(x, y) = 6y$ e $C = f_{yy}(x, y) = 6x$.

c. (1, 2) e (-1, -2) são pontos de sela; (2, 1) é ponto de mínimo e (-2, -1) é ponto de máximo.

CAPÍTULO 3

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

3.1. Introdução a Multiplicadores de Lagrange

A importância da otimização no processo produtivo é inegável. Do ponto de vista matemático, para a otimização de determinada grandeza, é preciso modelá-la de acordo com uma função e, daí, conforme a situação, procurar um máximo ou um mínimo.

Uma das formas utilizadas para otimização de funções sujeita a restrições é o método dos Multiplicadores de Lagrange.

3.2. Multiplicadores de Lagrange

Considere a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3$ sobre a curva C: $4x^2 - 8x + y^2 - 2y + 1 = 0$.

Completando os quadrados em ambas as equações acima, trata-se de encontrar os extremos de um paraboloide

$$z = 1 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$

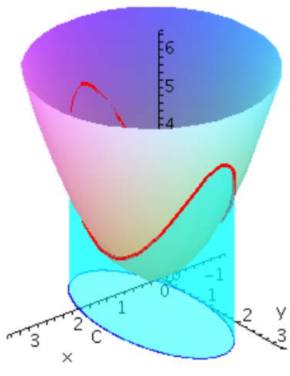
sobre uma elipse.

$$(x-1)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Conforme a representação gráfica, vê-se que esta função tem quatro pontos extremos, sendo dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo.

Figura 26. Gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3$ e

C: $4x^2 - 8x + y^2 - 2y + 1 = 0$



Fonte: Bianchini, 2016.

Os vetores $\nabla f(x, y) = (2x - 2, 2y - 2)$ e $\nabla g(x, y) = (8x - 8, 2y - 2)$ são paralelos, isto é, existe um número real λ tal que $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$.

Assim:

$$\begin{cases} 2x-2=\lambda(8x-8) \\ 2y-2=\lambda(2y-2) \\ 4x^2-8x+y^2-2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=4\lambda(x-1) \\ y-1=\lambda(y-1) \\ 4x^2-8x+y^2-2y+1=0 \end{cases}.$$

Da segunda equação, tem-se que $y \neq 1$, então $\lambda = 1$.

Substituindo este valor na primeira equação, tem-se $x = 1$.

Substituindo este valor na terceira equação, encontra-se $4(1)^2 - 8(1) + y^2 - 2y + 1 = 0$ $\Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = -1$ e $y = 3$.

Assim, $(1, -1)$ e $(1, 3)$ são os primeiros pontos críticos de $f(x, y)$.

Agora, se $y = 1$, substituindo-se na terceira equação tem-se $4x^2 - 8x + (1)^2 - 2(1) + 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0$ e $x = 2$. $(0, 1)$ e $(2, 1)$ são os outros pontos críticos de $f(x, y)$.

Como $f(1, -1) = (1)^2 + (-1)^2 - 2(1) - 2(-1) + 3 = 5$,

$f(1, 3) = (1)^2 + (3)^2 - 2(1) - 2(3) + 3 = 5$,

$f(0, 1) = (0)^2 + (1)^2 - 2(0) - 2(1) + 3 = 2$,

$f(2, 1) = (2)^2 + (1)^2 - 2(2) - 2(1) + 3 = 2$.

Logo, $(1, -1)$ e $(1, 3)$ são pontos de máximo e $(0, 1)$ e $(2, 1)$ são pontos de mínimo da função $f(x, y)$.

O método dos Multiplicadores de Lagrange pode ser resumido nos seguintes passos:

1º) Determine todos os valores de x, y e λ para os quais

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \text{ e } g(x, y)\ 0$$

isto é, resolver o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y). \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

2º) Calcule os valores da função f (x, y) em todos os pontos (x, y) encontrados acima.

3º) O maior valor encontrado é o valor máximo da função f (x, y) e o menor valor encontrado é o valor mínimo da função f (x, y).

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, W. **Aprendendo Cálculo de Várias Variáveis.** UFRJ, 2016.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. 3. ed. Harbra, 1986.

BRYAN J. F.; MANLY, **Métodos Estatísticos Multivariados uma Introdução**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

BRYAN F. J.; MANLY, ALBERTO J. A. N. **Métodos Estatísticos Multivariados**: Uma Introdução. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2019.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2004.

CRESPO, A. A**. Estatística Fácil,** São Paulo: Saraiva, 2004

FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A., **Curso de Estatística**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 1 e 2. LTC, 2014.

JOHONSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied multivariate statistical analysis**. 3. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1992.

MINGOTI, S. A. **Análise de Dados Métodos de Estatística Multivariada**. Minas Gerais: Editora da UFMG, 2005. 300 p.

RORRES, C.; HOWARD, A. Álgebra Linear com Aplicações. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol 2, McGraw-Hill, 1988.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Álgebra Linear. 2. ed. Pearson, 2010.

TIZZIOTTI, G. C.; SANTOS, J. V. Álgebra Linear. UFU, 2012.

https://github.com/allanbreyes/udacity-data-science/blob/master/p3/data/wineQualityReds.csv