

# Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass bei geteilten Ressourcen die Kapazität den Bedarf abdeckt

Johannes Lieberherr

10. März 2024

## 1 Problemstellung

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $N := \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

- **Bedarf**  $(b_i)_{i \in N}$ : Für jedes  $i \in N$  ist der Bedarf als eine natürliche Zahl  $b_i$  gegeben.
- **Kapazität**  $(k_I)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset}$ : Für jede Teilmenge  $I \subseteq N$ ,  $I \neq \emptyset$  ist die Kapazität als eine nicht-negative ganze Zahl  $k_I$  gegeben.

**Beispiel 1.** *Jeder Unterricht in einer Schule benötigt einen Raum von einem gewissen Raumtyp  $i \in N$ . Ein Raum ist einem oder mehreren Raumtypen zugeordnet. Es werden  $b_i$  Räume vom Raumtyp  $i \in N$  benötigt und es stehen  $k_I$  Räume, welche genau den Raumtypen  $i \in I$  zugeordnet sind, zur Verfügung.*

**Definition 1** (Abdeckung des Bedarfs). *Der Bedarf  $(b_i)_{i \in N}$  kann durch die Kapazität  $(k_I)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset}$  abgedeckt werden, falls es eine Familie  $(x_I^i)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset, i \in I}$  von nicht-negativen ganzen Zahlen gibt, sodass*

- *die Gleichungen  $b_i = \sum_{I \subseteq N, I \neq \emptyset, i \in I} x_I^i$  für alle  $i \in N$  und*
- *die Ungleichungen  $\sum_{i \in I} x_I^i \leq k_I$  für alle nicht-leeren Teilmengen  $I \subseteq N$*

*erfüllt sind.*

## 2 Notwendige und hinreichende Bedingungen

Damit der Bedarf  $(b_i)_{i \in N}$  durch die Kapazität  $(k_I)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset}$  abgedeckt werden kann, muss für alle nicht-leeren  $I \subseteq N$  eine Ungleichung erfüllt sein, nämlich:

$$\sum_{i \in I} b_i \leq \sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J \quad (1)$$

Weniger klar ist, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind:

**Satz 1.** Wenn für alle nichtleeren Teilmengen  $I \subseteq N$  Ungleichung 1 erfüllt ist, so wird der Bedarf durch die Kapazität abgedeckt.

*Beweis.* (Idee von Jan Draisma). Wir konstruieren folgendes Netzwerk:

- Links die Quelle  $s$ .
- In der ersten Schicht einen Knoten  $i$  und eine Kante  $(s, i)$  mit Kapazität  $b_i$  für jedes  $i \in N$ .
- In der zweiten Schicht einen Knoten  $I$  für jede nichtleere Teilmenge  $I \subseteq N$  und für jedes nichtleere  $I \subseteq N$  und jedes  $i \in I$  eine Kante  $(i, I)$  mit unendlicher Kapazität.
- Rechts die Senke  $t$  und eine Kante  $(I, t)$  mit Kapazität  $k_I$  für jede nichtleere Teilmenge  $I \subseteq N$ .

Zunächst stellen wir fest, dass der Bedarf genau dann abgedeckt wird, wenn der Wert des maximalen Flusses des Netzwerkes gleich der Summe  $b_1 + b_2 + \dots + b_n$  ist.

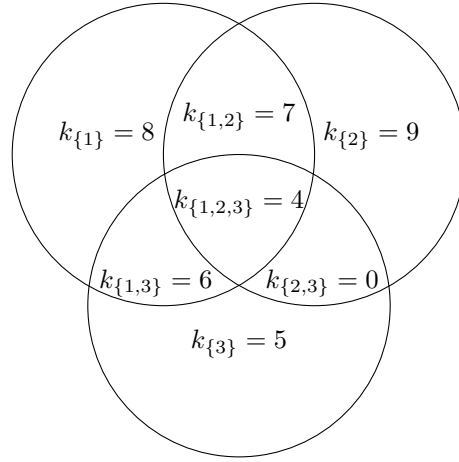
Wir nehmen an, dass der Bedarf nicht abgedeckt wird und demnach der Wert eines maximalen Flusses kleiner als  $b_1 + b_2 + \dots + b_n$  ist. Nach dem Max-Flow-Min-Cut-Theorem gibt es dann einen Schnitt  $(S, T)$  mit Kapazität kleiner als  $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ . Sei  $I := S \cap N$ . Aus  $I = \emptyset$  würde folgen, dass die Kapazität des Schnitts  $\geq b_1 + b_2 + \dots + b_n$  ist. Wir können also  $I \neq \emptyset$  voraussetzen. Da die Kanten vom ersten zum zweiten Layer unendliche Kapazität haben, muss für alle  $J \subseteq N$  mit  $J \cap I \neq \emptyset$  auch  $J \in S$  sein. Die Kapazität des Schnittes ist also gleich  $\sum_{i \in N \setminus I} b_i + \sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J$ . Es folgt die Ungleichung  $\sum_{i \in N \setminus I} b_i + \sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J < b_1 + b_2 + \dots + b_n$  und nach Abzug von  $\sum_{i \in N \setminus I} b_i$  auf beiden Seiten  $\sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J < \sum_{i \in I} b_i$ . Die Ungleichung 1 ist für  $I$  also nicht erfüllt.

Dass es einen maximalen Fluss mit ganzzahligen Werten auf jeder Kante gibt, folgt aus dem Algorithmus von Ford und Fulkerson.  $\square$

**Beispiel 2.**  $N = \{1, 2, 3\}$ .

Bedarf  $(b_i)_{i \in N}$ :  $b_1 = 20$ ,  $b_2 = 14$ ,  $b_3 = 10$ .

Kapazitäten  $(k_I)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset}$ :



Totalsumme der Kapazitäten:  $\sum_{I \subseteq N, I \neq \emptyset} k_I = 39$ .

Test der Ungleichungen:

$I$	$\sum_{i \in I} b_i$	$\sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J$	Erfüllt?
$\{1\}$	20	$8 + 7 + 6 + 4 = 25$	ok
$\{2\}$	14	$9 + 7 + 0 + 4 = 20$	ok
$\{3\}$	15	$5 + 6 + 0 + 4 = 15$	ok
$\{1, 2\}$	$20 + 14 = 34$	$39 - 5 = 34$	ok
$\{1, 3\}$	$20 + 10 = 30$	$39 - 9 = 30$	ok
$\{2, 3\}$	$14 + 10 = 24$	$39 - 8 = 31$	ok
$\{1, 2, 3\}$	$20 + 14 + 10 = 44$	39	nok

### 3 Vorgehen in der Praxis

In der Praxis ist  $k_I = 0$  für die meisten nichtleeren  $I \subseteq N$ . Um zu prüfen, ob die Kapazität den Bedarf abdeckt, müssen deshalb deutlich weniger als  $|\mathcal{P}(N)| - 1 = 2^n - 1$  der Ungleichungen 1 geprüft werden. Dabei kann folgende Tatsache verwendet werden:

**Lemma 1.** Sei  $I \subseteq N$  nichtleer und  $I = I_1 \cup I_2$  eine Partition von  $I$  (d.h.  $\emptyset \neq I_1 \subseteq N$ ,  $\emptyset \neq I_2 \subseteq N$ ,  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ). Wenn  $k_J = 0$  für alle nichtleeren  $J \subseteq N$  mit  $I_1 \cap J \neq \emptyset$  und  $I_2 \cap J \neq \emptyset$ , dann folgt die Ungleichung 1 für  $I$  aus den beiden Ungleichungen 1 für  $I_1$  und  $I_2$ .

*Beweis.* Die Summanden, welche sowohl auf der rechten Seite der Ungleichung 1 für  $I_1$  als auch für  $I_2$  vorkommen, sind genau diejenigen  $k_J$ , für welche  $J \cap I_1 \neq \emptyset$  und  $J \cap I_2 \neq \emptyset$  gilt. Da für diese nach Voraussetzung  $k_J = 0$  ist, folgt die Ungleichung 1 für  $I$  deshalb aus der Summe der Ungleichung 1 für  $I_1$  und  $I_2$ .  $\square$

Beim algorithmischen Erzeugen der Teilmengen von  $N$  wird in einem Schritt zur aktuellen Teilmenge  $I$  jeweils ein neues Element  $j$  hinzugefügt. Falls  $k_J = 0$

für alle nichtleeren  $J \subseteq N$  mit  $I \cap J \neq \emptyset$  und  $\{1\} \cap J \neq \emptyset$  gilt, so kann dieser und alle darauf aufbauenden Schritte wegen des obigen Lemmas übersprungen werden.

Damit kann die Anzahl der zu berücksichtigenden Ungleichungen massiv reduziert werden.

**Beispiel 3.** *Wenn ein Element  $j$  mit keinem anderen Element in  $N$  eine gemeinsame Kapazität zur Verfügung stellt (d.h.  $k_J = 0$  für alle  $J \subseteq N$  mit  $j \in J$  und  $|J| > 1$  gilt), so ist dafür nur die Ungleichung 1 für  $\{j\}$  relevant. Diese ist in diesem Falle besonders einfach:  $b_j \leq k_{\{j\}}$ .*

**Beispiel 4.** *Sei  $N := \{1, 2, 3\}$  und  $k_{\{2,3\}} = k_{\{1,2,3\}} = 0$ . Dann sind nur die Ungleichungen 1 für die Teilmengen  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$  und  $\{1, 2, 3\}$ , nicht jedoch für  $\{2, 3\}$  relevant.*