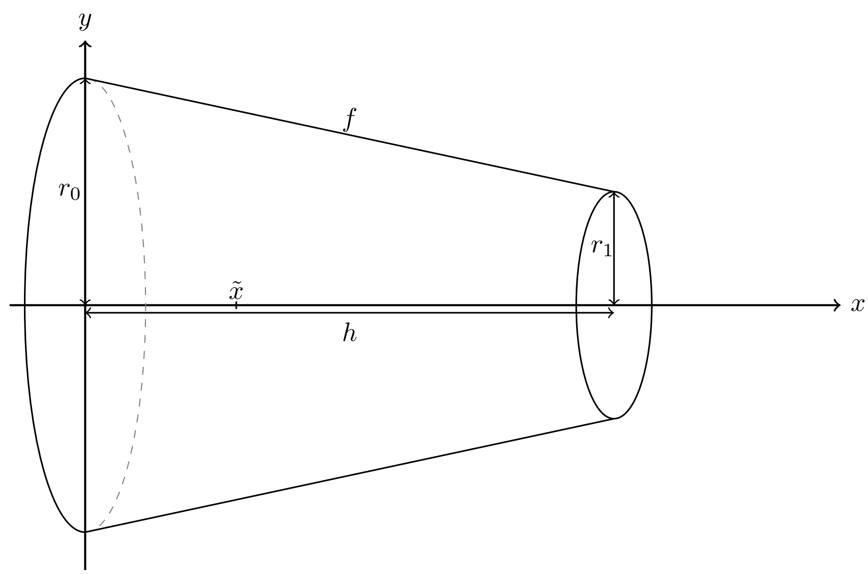
Schwerpunkt beim Kegelstumpf

Johannes Lieberherr

10. März 2024



$f(x) = mx + r_0$ mit $m = \frac{r_1 - r_0}{h}$

$$M_1(\tilde{x}) := \int_0^{\tilde{x}} \pi f^2(x)(\tilde{x} - x)\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\tilde{x}} f^2(x)(\tilde{x} - x)\mathrm{d}x$$

$$M_2(\tilde{x}) := \int_{\tilde{x}}^{h} \pi f^2(x)(x - \tilde{x})\mathrm{d}x = \pi \int_{\tilde{x}}^{h} f^2(x)(x - \tilde{x})\mathrm{d}x$$

Die Stelle $\tilde{x}$ ist Gleichgewichtsstelle, wenn $M_1(\tilde{x}) = M_2(\tilde{x})$ gilt.
Wegen

$$M_1(\tilde{x}) = \pi \int_0^{\tilde{x}} f^2(x)(\tilde{x} - x)\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\tilde{x}} f^2(x)\tilde{x}\mathrm{d}x - \pi \int_0^{\tilde{x}} f^2(x)x\mathrm{d}x = \pi\tilde{x} \int_0^{\tilde{x}} f^2(x)\mathrm{d}x - \pi \int_0^{\tilde{x}} x f^2(x)\mathrm{d}x$$

und

$$M_2(\tilde{x}) = \pi \int_{\tilde{x}}^{h} f^2(x)(x - \tilde{x})\mathrm{d}x = \pi \int_{\tilde{x}}^{h} f^2(x)x\mathrm{d}x - \pi \int_{\tilde{x}}^{h} f^2(x)\tilde{x}\mathrm{d}x = \pi \int_{\tilde{x}}^{h} x f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\tilde{x} \int_{\tilde{x}}^{h} f^2(x)\mathrm{d}x$$

folgt aus $M_1(\tilde{x}) = M_2(\tilde{x})$

$$\pi\tilde{x}\int_0^{\tilde{x}} f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\int_0^{\tilde{x}} xf^2(x)\mathrm{d} = \pi\int_{\tilde{x}}^h xf^2(x)\mathrm{d}x - \pi\tilde{x}\int_{\tilde{x}}^h f^2(x)\mathrm{d}x,$$

also

$$\pi\tilde{x}\int_0^{\tilde{x}} f^2(x)\mathrm{d}x + \pi\tilde{x}\int_{\tilde{x}}^h f^2(x)\mathrm{d}x = \pi\int_{\tilde{x}}^h xf^2(x)\mathrm{d}x + \pi\int_0^{\tilde{x}} xf^2(x)\mathrm{d}x,$$

und damit

$$\pi\tilde{x}\int_0^h f^2(x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^h xf^2(x)\mathrm{d}x,$$

woraus schlussendlich

$$\tilde{x} = \frac{\int_0^h xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^h f^2(x)\mathrm{d}x}$$

folgt.

$F(x) := \frac{m^2x^3}{3} + mr_0x^2 + r_0^2x$ ist eine Stammfunktion von $f^2(x)$.
$G(x) := \frac{m^2x^4}{4} + \frac{2mr_0x^3}{3} + \frac{r_0^2x^2}{2}$ ist eine Stammfunktion von $xf^2(x)$.
Wegen $F(0) = 0$ und $G(0) = 0$ folgt

$$\tilde{x} = \frac{G(h)}{F(h)} = \frac{\frac{m^2h^4}{4} + \frac{2mr_0h^3}{3} + \frac{r_0^2h^2}{2}}{\frac{m^2h^3}{3} + mr_0h^2 + r_0^2h} = \frac{\frac{m^2h^3}{4} + \frac{2mr_0h^2}{3} + \frac{r_0^2h}{2}}{\frac{m^2h^2}{3} + mr_0h + r_0^2}.$$

Mit Hilfe von $mh = \frac{r_1-r_0}{h}h = r_1 - r_0$ vereinfacht sich dies zu

$$\tilde{x} = \frac{G(h)}{F(h)} = \frac{\frac{(r_1-r_0)^2h}{4} + \frac{2(r_1-r_0)r_0h}{3} + \frac{r_0^2h}{2}}{\frac{(r_1-r_0)^2}{3} + (r_1-r_0)r_0 + r_0^2} = h\cdot\frac{\frac{(r_1-r_0)^2}{4} + \frac{2(r_1-r_0)r_0}{3} + \frac{r_0^2}{2}}{\frac{(r_1-r_0)^2}{3} + (r_1-r_0)r_0 + r_0^2}$$

Nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen folgt

$$\tilde{x} = h\cdot\frac{\frac{3r_1^2+2r_0r_1+r_0^2}{12}}{\frac{r_1^2+r_0r_1+r_0^2}{3}} = \frac{h}{4}\cdot\frac{3r_1^2+2r_0r_1+r_0^2}{r_1^2+r_0r_1+r_0^2}.$$

Für die Gleichgewichtsstelle ergibt sich in Abhängigkeit der Variablen h, r_0 und r_1 die Formel

$$\tilde{x}(h, r_0, r_1) = \frac{h}{4}\cdot\frac{3r_1^2+2r_0r_1+r_0^2}{r_1^2+r_0r_1+r_0^2}$$

Plausibilisierungen:

- Für $r_0 = r_1$ handelt es sich um einen Zylinder. Die Anschauung verlangt, dass $\tilde{x}(h, r_0, r_0) = \frac{h}{2}$ gilt. Einsetzen in die obige Formel und Zusammenfassen bestätigt diese Erwartung.

- Aus Symmetriegründen muss $\tilde{x}(h, r_1, r_0) = h - \tilde{x}(h, r_0, r_1)$ gelten. Auch dies bestätigt man durch Nachrechnen.
- Für $r_1 = 0$ liegt ein Kegel vor. Einsetzen und Vereinfachen liefert $\tilde{x}(h, r_0, 0) = \frac{h}{4}$, die (eher) bekannte Formel für den Schwerpunkt eines Kegels.