Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass bei geteilten Ressourcen die Kapazität den Bedarf abdeckt

Johannes Lieberherr

20. November 2024

1 Problemstellung

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $N := \{1, 2, 3, ..., n\}$.

- **Bedarf** $(b_i)_{i \in N}$: Für jedes $i \in N$ ist der Bedarf als eine natürliche Zahl b_i gegeben.
- **Kapazität** $(k_I)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset}$: Für jede Teilmenge $I \subseteq N$, $I \neq \emptyset$ ist die Kapazität als eine nicht-negative ganze Zahl k_I gegeben.

Beispiel 1. *Jeder Unterricht in einer Schule benötigt einen Raum von einem gewissen Raumtyp $i \in N$. Ein Raum ist einem oder mehreren Raumtypen zugeordnet. Es werden b_i Räume vom Raumtyp $i \in N$ benötigt und es stehen k_I Räume, welche genau den Raumtypen $i \in I$ zugeordnet sind, zur Verfügung.*

Definition 1 (Abdeckung des Bedarfs)**.** *Der Bedarf $(b_i)_{i \in N}$ kann durch die Kapazität $(k_I)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset}$ abgedeckt werden, falls es eine Familie $(x_I^i)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset, i \in I}$ von nicht-negativen ganzen Zahlen gibt, sodass*

- *die Gleichungen $b_i = \sum_{I \subseteq N, I \neq \emptyset, i \in I} x_I^i$ für alle $i \in N$ und*
- *die Ungleichungen $\sum_{i \in I} x_I^i \leq k_I$ für alle nicht-leeren Teilmengen $I \subseteq N$*

erfüllt sind.

2 Notwendige und hinreichende Bedingungen

Damit der Bedarf $(b_i)_{i \in N}$ durch die Kapazität $(k_I)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset}$ abgedeckt werden kann, muss für alle nichtleeren $I \subseteq N$ eine Ungleichung erfüllt sein, nämlich:

$$\sum_{i \in I} b_i \leq \sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J \tag{1}$$

Weniger klar ist, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind:

Satz 1. *Wenn für alle nichtleeren Teilmengen $I \subseteq N$ Ungleichung 1 erfüllt ist, so wird der Bedarf durch die Kapazität abgedeckt.*

Beweis. (Idee von Jan Draisma). Wir konstruieren folgendes Netzwerk:

- Links die Quelle s.
- In der ersten Schicht einen Knoten i und eine Kante (s,i) mit Kapazität b_i für jedes $i \in N$.
- In der zweiten Schicht einen Knoten I für jede nichtleere Teilmenge $I \subseteq N$ und für jedes nichtleere $I \subseteq N$ und jedes $i \in I$ eine Kante (i,I) mit unendlicher Kapazität.
- Rechts die Senke t und eine Kante (I,t) mit Kapazität k_I für jede nichtleere Teilmenge $I \subseteq N$.

Zunächst stellen wir fest, dass der Bedarf genau dann abgedeckt wird, wenn der Wert des maximalen Fluss des Netzwerkes gleich der Summe $b_1 + b_2 + ... + b_n$ ist.

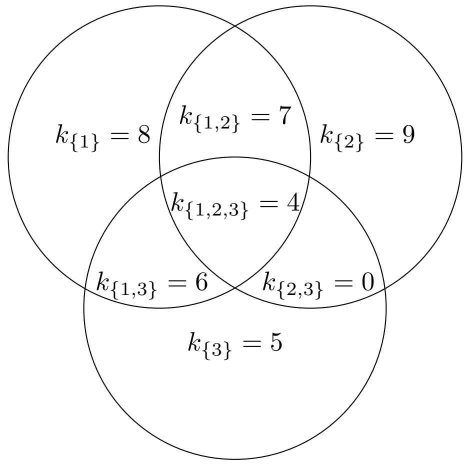
Wir nehmen an, dass der Bedarf nicht abgedeckt wird und demnach der Wert eines maximalen Flusses kleiner als $b_1 + b_2 + ... + b_n$ ist. Nach dem Max-Flow-Min-Cut-Theorem gibt es dann einen Schnitt (S,T) mit Kapazität kleiner als $b_1 + b_2 + ... + b_n$. Sei $I := S \cap N$. Aus $I = \emptyset$ würde folgen, dass die Kapazität des Schnitts $\geq b_1 + b_2 + ... + b_n$ ist. Wir können also $I \neq \emptyset$ voraussetzen. Da die Kanten vom ersten zum zweiten Layer unendliche Kapazität haben, muss für alle $J \subseteq N$ mit $J \cap I \neq \emptyset$ auch $J \in S$ sein. Die Kapazität des Schnittes ist also gleich $\sum_{i \in N \setminus I} b_i + \sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J$. Es folgt die Ungleichung $\sum_{i \in N \setminus I} b_i + \sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J < b_1 + b_2 + ... + b_n$ und nach Abzug von $\sum_{i \in N \setminus I} b_i$ auf beiden Seiten $\sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J < \sum_{i \in I} b_i$. Die Ungleichung 1 ist für I also nicht erfüllt.

Dass es einen maximalen Fluss mit ganzzahligen Werten auf jeder Kante gibt, folgt aus dem Algorithmus von Ford und Fulkerson. □

Beispiel 2. $N = \{1,2,3\}$.

Bedarf $(b_i)_{i \in N}$*:* $b_1 = 20$, $b_2 = 14$, $b_3 = 10$.

Kapazitäten $(k_I)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset}$*:*



Totalsumme der Kapazitäten: $\sum_{I \subseteq N, I \neq \emptyset} k_I = 39$.
Test der Ungleichungen:

I	$\sum_{i \in I} b_i$	$\sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J$	*Erfüllt?*
$\{1\}$	20	$8+7+6+4=25$	*ok*
$\{2\}$	14	$9+7+0+4=20$	*ok*
$\{3\}$	15	$5+6+0+4=15$	*ok*
$\{1,2\}$	$20+14=34$	$39-5=34$	*ok*
$\{1,3\}$	$20+10=30$	$39-9=30$	*ok*
$\{2,3\}$	$14+10=24$	$39-8=31$	*ok*
$\{1,2,3\}$	$20+14+10=44$	39	*nok*

3 Ideen zum Vorgehen in der Praxis

In der Praxis ist $k_I = 0$ für gewisse $I \subseteq N$. Um zu prüfen, ob die Kapazität den Bedarf abdeckt, müssen deshalb nicht immer alle $|\mathcal{P}(N)| - 1 = 2^n - 1$ der Ungleichungen 1 geprüft werden. Dabei kann folgende Tatsache verwendet werden:

Lemma 1. *Sei $I \subseteq N$ nichtleer und $I = I_1 \cup I_2$ eine Partition von I (d.h. $\emptyset \neq I_1 \subseteq N$, $\emptyset \neq I_2 \subseteq N$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$). Wenn $k_J = 0$ für alle nichtleeren $J \subseteq N$ mit $I_1 \cap J \neq \emptyset$ und $I_2 \cap J \neq \emptyset$, dann folgt die Ungleichung 1 für I aus den beiden Ungleichungen 1 für I_1 und I_2.*

Beweis. Die Summanden, welche sowohl auf der rechten Seite der Ungleichung 1 für I_1 als auch für I_2 vorkommen, sind genau diejenigen k_J, für welche $J \cap I_1 \neq \emptyset$ und $J \cap I_2 \neq \emptyset$ gilt. Da für diese nach Voraussetzung $k_J = 0$ ist, folgt die Ungleichung 1 für I deshalb aus der Summe der Ungleichung 1 für I_1 und I_2. $\square$

Offene Fragen:

- Wie genau Lemma 1 in der Praxis eingesetzt werden kann, um effizient alle nicht notwendigen Ungleichungen zu finden ist mir noch nicht klar.
- Vermutlich ist die Anzahl der relevanten Ungleichungen in vielen Anwendungsfällen auch nach dem Eliminieren der unnötigen Ungleichungen zu gross, als dass dieser Ansatz dem offensichtlicheren Ansatz - das Sicherstellen der Bedingungen in Definition 1 via ein ganzzahliges lineares Programm - überlegen wäre.