

Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass bei geteilten Ressourcen die Kapazität den Bedarf abdeckt

Johannes Lieberherr

28. Dezember 2024

1 Problemstellung

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $N := \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

- **Bedarf** $(b_i)_{i \in N}$: Für jedes $i \in N$ ist der Bedarf als eine natürliche Zahl b_i gegeben.
- **Kapazität** $(k_I)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset}$: Für jede Teilmenge $I \subseteq N$, $I \neq \emptyset$ ist die Kapazität als eine nicht-negative ganze Zahl k_I gegeben.

Beispiel 1. *Jeder Unterricht in einer Schule benötigt einen Raum von einem gewissen Raumtyp $i \in N$. Ein Raum ist einem oder mehreren Raumtypen zugeordnet. Es werden b_i Räume vom Raumtyp $i \in N$ benötigt und es stehen k_I Räume, welche genau den Raumtypen $i \in I$ zugeordnet sind, zur Verfügung.*

Definition 1 (Abdeckung des Bedarfs). *Der Bedarf $(b_i)_{i \in N}$ kann durch die Kapazität $(k_I)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset}$ abgedeckt werden, falls es eine Familie $(x_I^i)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset, i \in I}$ von nicht-negativen ganzen Zahlen gibt, sodass*

- *die Gleichungen $b_i = \sum_{I \subseteq N, I \neq \emptyset, i \in I} x_I^i$ für alle $i \in N$ und*
- *die Ungleichungen $\sum_{i \in I} x_I^i \leq k_I$ für alle nicht-leeren Teilmengen $I \subseteq N$*

erfüllt sind.

Das Finden der $(x_I^i)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset, i \in I}$ kann mit einem linearen ganzzahligen Programm umgesetzt werden. Je nach Anwendungsfall interessiert jedoch nur die Frage, ob überhaupt eine Lösung existiert, d.h. ob der Bedarf durch die Kapazität abgedeckt werden kann. Die Fragestellung nach der Existenz einer Lösung, kann auch ohne lineares Programm beantwortet werden. Im folgenden werden notwendige und hinreichende Bedingungen dazu angegeben.

2 Notwendige und hinreichende Bedingungen

Damit der Bedarf $(b_i)_{i \in N}$ durch die Kapazität $(k_I)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset}$ abgedeckt werden kann, muss für alle nichtleeren $I \subseteq N$ eine Ungleichung erfüllt sein, nämlich:

$$\sum_{i \in I} b_i \leq \sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J \quad (1)$$

Weniger klar ist, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind:

Satz 1. *Wenn für alle nichtleeren Teilmengen $I \subseteq N$ Ungleichung 1 erfüllt ist, so wird der Bedarf durch die Kapazität abgedeckt.*

Beweis. (Idee von Jan Draisma). Wir konstruieren folgendes Netzwerk:

- Links die Quelle s .
- In der ersten Schicht einen Knoten i und eine Kante (s, i) mit Kapazität b_i für jedes $i \in N$.
- In der zweiten Schicht einen Knoten I für jede nichtleere Teilmenge $I \subseteq N$ und für jedes nichtleere $I \subseteq N$ und jedes $i \in I$ eine Kante (i, I) mit unendlicher Kapazität.
- Rechts die Senke t und eine Kante (I, t) mit Kapazität k_I für jede nichtleere Teilmenge $I \subseteq N$.

Zunächst stellen wir fest, dass der Bedarf genau dann abgedeckt wird, wenn der Wert des maximalen Flusses des Netzwerkes gleich der Summe $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ist.

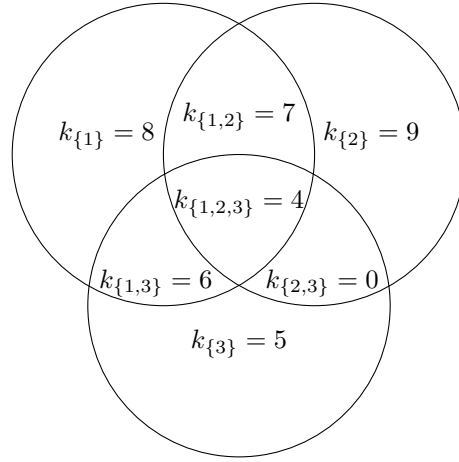
Wir nehmen an, dass der Bedarf nicht abgedeckt wird und demnach der Wert eines maximalen Flusses kleiner als $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ist. Nach dem Max-Flow-Min-Cut-Theorem gibt es dann einen Schnitt (S, T) mit Kapazität kleiner als $b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Sei $I := S \cap N$. Aus $I = \emptyset$ würde folgen, dass die Kapazität des Schnitts $\geq b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ist. Wir können also $I \neq \emptyset$ voraussetzen. Da die Kanten vom ersten zum zweiten Layer unendliche Kapazität haben, muss für alle $J \subseteq N$ mit $J \cap I \neq \emptyset$ auch $J \in S$ sein. Die Kapazität des Schnittes ist also gleich $\sum_{i \in N \setminus I} b_i + \sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J$. Es folgt die Ungleichung $\sum_{i \in N \setminus I} b_i + \sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J < b_1 + b_2 + \dots + b_n$ und nach Abzug von $\sum_{i \in N \setminus I} b_i$ auf beiden Seiten $\sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J < \sum_{i \in I} b_i$. Die Ungleichung 1 ist für I also nicht erfüllt.

Dass es einen maximalen Fluss mit ganzzahligen Werten auf jeder Kante gibt, folgt aus dem Algorithmus von Ford und Fulkerson. \square

Beispiel 2. $N = \{1, 2, 3\}$.

Bedarf $(b_i)_{i \in N}$: $b_1 = 20$, $b_2 = 14$, $b_3 = 10$.

Kapazitäten $(k_I)_{I \subseteq N, I \neq \emptyset}$:



Totalsumme der Kapazitäten: $\sum_{I \subseteq N, I \neq \emptyset} k_I = 39$.

Test der Ungleichungen:

I	$\sum_{i \in I} b_i$	$\sum_{J \subseteq N, J \cap I \neq \emptyset} k_J$	Erfüllt?
$\{1\}$	20	$8 + 7 + 6 + 4 = 25$	ok
$\{2\}$	14	$9 + 7 + 0 + 4 = 20$	ok
$\{3\}$	15	$5 + 6 + 0 + 4 = 15$	ok
$\{1, 2\}$	$20 + 14 = 34$	$39 - 5 = 34$	ok
$\{1, 3\}$	$20 + 10 = 30$	$39 - 9 = 30$	ok
$\{2, 3\}$	$14 + 10 = 24$	$39 - 8 = 31$	ok
$\{1, 2, 3\}$	$20 + 14 + 10 = 44$	39	nok

3 Ideen zum Vorgehen in der Praxis

In der Praxis ist $k_I = 0$ für gewisse $I \subseteq N$. Um zu prüfen, ob die Kapazität den Bedarf abdeckt, müssen deshalb nicht immer alle $|\mathcal{P}(N)| - 1 = 2^n - 1$ der Ungleichungen 1 geprüft werden. Dabei kann folgende Tatsache verwendet werden:

Lemma 1. Sei $I \subseteq N$ nichtleer und $I = I_1 \cup I_2$ eine Partition von I (d.h. $\emptyset \neq I_1 \subseteq N$, $\emptyset \neq I_2 \subseteq N$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$). Wenn $k_J = 0$ für alle nichtleeren $J \subseteq N$ mit $I_1 \cap J \neq \emptyset$ und $I_2 \cap J \neq \emptyset$, dann folgt die Ungleichung 1 für I aus den beiden Ungleichungen 1 für I_1 und I_2 .

Beweis. Die Summanden, welche sowohl auf der rechten Seite der Ungleichung 1 für I_1 als auch für I_2 vorkommen, sind genau diejenigen k_J , für welche $J \cap I_1 \neq \emptyset$ und $J \cap I_2 \neq \emptyset$ gilt. Da für diese nach Voraussetzung $k_J = 0$ ist, folgt die Ungleichung 1 für I deshalb aus der Summe der Ungleichung 1 für I_1 und I_2 . \square

Bemerkungen:

- Der Inhalt von Lemma 1 kann wie folgt umformuliert werden: I , I_1 und I_2 seien wie im Lemma. Zudem sei allgemein $\mathcal{A}_L := \{J \subseteq N \mid L \cap J \neq \emptyset, k_J > 0\}$ für ein beliebiges $L \subseteq N$. Dann folgt die Ungleichung 1 für I aus den Ungleichungen 1 für I_1 und I_2 , falls $\mathcal{A}_{I_1} \cap \mathcal{A}_{I_2} = \emptyset$.
- Das Finden von I_1 und I_2 mit dieser Eigenschaft wird rasch sehr aufwändig. Es ist deshalb ratsam, in einem ersten Schritt, die Menge N wie folgt in unabhängige Komponenten zu zerlegen: die Elemente von N seien die Knoten eines (ungerichteten) Graphen. Zwei unterschiedliche Knoten $i \in N$ und $j \in N$ sind durch eine Kante verbunden, falls ein sowohl i als auch j enthaltendes $L \subseteq N$ mit $k_L > 0$ existiert. Das Problem kann dann statt auf dem gesamten N auf allen Zusammenhangskomponenten von G betrachtet werden.
- In einem Anwendungsbeispiel aus der Stundenplanung an einer Schule mit $|N| = 28$ Raumgruppen und 95 nicht-leeren Teilmengen $I \subseteq N$ mit $k_I > 0$, zerfällt N in 15 Komponenten, wovon die grösste 13 Elemente hat. In dieser grössten Komponente können von den $2^{13} - 1 = 8191$ Ungleichungen 1 mit dem oben beschriebenen Verfahren innerhalb weniger Sekunden 6021 Ungleichungen eliminiert werden, sodass 2170 Ungleichungen übrig bleiben.
- Dieses Beispiel zeigt, dass die Anzahl der Ungleichungen 1 in der Praxis auch nach Zerlegung des Problems in Teilprobleme und Elimination der unnötigen Ungleichungen noch gross bleiben kann. Je nachdem ist es also effizienter, mit Hilfe eines wie in Definition 1 beschriebenen linearen ganzzahligen Programms sicherzustellen, dass der Bedarf durch die Kapazität abgedeckt werden kann.