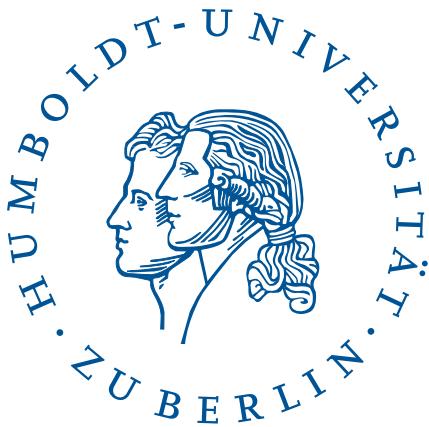


# CCD-Kamera am MST-Prototyp

## BACHELORARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades  
Bachelor of Science  
(B. Sc.)  
im Fach Physik



eingereicht an der  
**Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät**  
**Institut für Physik**  
**Humboldt-Universität zu Berlin**

von  
Herrn Jan-Lukas Krieg  
geboren am 09.01.1995 in Berlin

Gutachter:

1. Prof. Dr. Thomas Lohse
2. Prof. Dr. David Berge

Betreuung:

1. Dr. Ullrich Schwanke

eingereicht am: 1. M 2019

# Contents

<b>1</b>	<b><math>\gamma</math>-Astronomie</b>	<b>2</b>
1.1	Entstehung hochenergetischer Strahlung . . . . .	2
1.2	Quellen hochenergetischer Strahlung . . . . .	2
1.3	Detektion von Strahlung . . . . .	3
1.3.1	Luftschauer . . . . .	3
1.3.2	Cherenkov Strahlung . . . . .	4
1.3.3	Bodengestützte Detektion der Cherenkovstrahlung . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Das Cherenkov Telescope Array</b>	<b>7</b>
2.1	Design-Konzept . . . . .	7
2.1.1	Teleskoptypen . . . . .	7
2.1.2	Arrays . . . . .	8
2.2	Prototyp in Adlershof . . . . .	8
2.2.1	Kameras des MST . . . . .	8
2.2.2	Bestimmung der Bildkoordinaten durch astrometry.net . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Pointingmodell</b>	<b>10</b>
3.1	Koordinaten . . . . .	10
3.2	Entwicklung von Pointingmodellen . . . . .	10
3.3	Pointingmodell mit zwei Parametern . . . . .	11
3.3.1	Vorhersage der CCD-Koordinaten in Abhängigkeit der Drive-Koordinaten . . . . .	11
3.3.2	Vorhersage der Drive-Koordinaten in Abhängigkeit der CCD-Koordinaten . . . . .	12
3.4	Erweiterung des Modells auf vier Parameter . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Anwendung des Pointingmodells auf Daten des Teleskops</b>	<b>13</b>
4.1	Datensatz . . . . .	13
4.2	Programm . . . . .	13
4.3	Anwendung auf das Pointingmodell mit 2 Parametern . . . . .	14
4.4	Anwendung auf das Pointingmodell mit 4 Parametern . . . . .	14

# List of Figures

1.1	Zu sehen sind alle von Fermi-LAT über zwei Jahre aufgezeichneten Gammaquellen ab einer Energie von 1GeV. Am rechten Rand ist beispielsweise der Krebsnebel, welcher 1054 aus einer Supernova hervorging, in dessen Zentrum sich heute ein Pulsar befindet. [?]	4
1.2	Der Cherenkoeffekt: Ein geladenes Teilchen durchfliegt ein dielektrisches Medium mit einer Geschwindigkeit über der der Lichtgeschwindigkeit im Medium und erzeugt Wellenfronten.	5
1.3	Detektion hochenergetischer Strahlung: Das in die Atmosphäre eintretende Photon erzeugt einen elektromagnetischen Luftschauder (oben rechts) der wiederum Cherenkovlicht erzeugt, welches am Boden mit IACTs detektiert werden kann. Ein Detektionsbild ist unten links zu sehen.	6
2.1	Die drei verschieden großen Teleskope des CTA: links die drei Varianten des SMT, in der Mitte das MST und rechts das LST	8
2.2	Der geplante Aufbau der Arrays auf La Palma und in der Atacamawüste: Auf La Palma werden zunächst nur die beiden größeren Teleskoptypen am Krater des Vulkans errichtet. In der Atacamawüste werden alle drei Teleskoptypen verwendet. Aufgrund der großen freien Fläche kann hier auch ein großer Bereich symmetrisch abgedeckt werden.	9
3.1	Die verwendeten Koordinaten	10

## **List of Tables**

# 1 $\gamma$ -Astronomie

Die Astronomie ist die Wissenschaft des Universums und beschreibt die Bewegung und Eigenschaften von Himmelskörpern wie Planeten oder Galaxien, interstellarer Materie und Strahlung. Betrachtete man früher nur Licht im optisch sichtbaren Bereich, so sind im 20. Jahrhundert einige zusätzliche Quellen dazugekommen. Dazu zählen die von Viktor Hess durch Ballonversuche entdeckte kosmische Strahlung, die Röntgen-/bzw die Gammastrahlung sowie die Neutrinoastronomie. Im Gegensatz zur kosmischen Strahlung, die überwiegend aus Protonen besteht, hat ungeladene Photonen- und Neutrinostrahlung den Vorteil, dass diese nicht durch elektromagnetische Felder abgelenkt werden und somit die Quellen dieser Strahlung leichter bestimmt werden können. Photonen haben zusätzlich den Vorteil, dass sie im Gegensatz zu Neutrinos, die nur schwach mit Materie wechselwirken, leichter zu detektieren sind. Ein interessantes Gebiet der letzten Jahre ist die VHE (Very High Energy)-Astronomie, die sich mit Quellen ab einer Energie von 100GeV [?] beschäftigt. Das besondere an dieser Strahlung ist, dass sie so hochenergetisch ist, dass sie nicht mehr thermischen Ursprungs sein kann, sondern andere Erzeugungsmechanismen zugrunde liegen müssen.

## 1.1 Entstehung hochenergetischer Strahlung

### inverser Comptoneffekt

Durch den Comptoneffekt können hochenergetische Photonen einen Teil ihres Impulses und Energie an ein freies Elektron übergeben. Dieser Prozess kann auch invers ablaufen und somit kann ein niederenergetisches Photon, zum Beispiel aus dem kosmischen Mikrowellenhintergrund ( $E = 66\text{meV}$ ), durch einen Stoß mit einem Elektron eine hohe Energie bekommen.

### Brems- und Synchrotronstrahlung

Durchfliegen Elektronen ein starkes Magnetfeld, wie es sie beispielsweise an Neutronensternen gibt, oder starke elektrische Felder in der Nähe von Atomkernen, so erfahren sie eine Beschleunigung. Durch diese Beschleunigung werden Photonen abgesetzt, deren Energie mit der Energie des Elektrons zunimmt.

### Zerfälle und Annihilation

Hochenergetische Photonen können auch durch Zerfälle massiver Teilchen entstehen, wobei die Ruhemasse des Teilchen in kinetischer Energie der Photonen umgewandelt wird. So zerfällt das neutrale Pion zum Beispiel zu 98,8% in zwei Photonen und setzt dabei eine Ruhemasse von  $E_0 = 135\text{MeV}$  [?] um. Eine weitere Möglichkeit ist die Annihilation von Materie und Antimaterie. Auch hier wird die Ruheenergie der Teilchen in kinetische Energie umgewandelt. So entstehen bei der Elektron-Positron-Annihilation zwei Photonen mit der Energie  $E = 511\text{keV}$ . Diese Energien liegen allerdings noch weit unter der Grenze der VHE-Astronomie.

## 1.2 Quellen hochenergetischer Strahlung

Ziel VHE-Astronomie ist es die Quellen hochenergetischer Gammastrahlung zu erforschen. Bild 1.1 zeigt von Fermi-LAT aufgezeichnete Gammaquellen.

### Supernova Überreste

Supernovae sind Explosionen von Sternen die auf zwei Arten stattfinden können: Supernovae vom Typ Ia finden in Systemen von weißen Zwergen mit Sternen statt. Ein weißer Zwerg ist ein ausgebrannter Stern, der größtenteils aus Sauer- und Kohlenstoff besteht. Saugt dieser weiße Zwerg Materie von einem anderen Stern ab, nimmt die Masse zu bis sie die

Chandrasekhar-Grenze von ungefähr 1,4 Sonnenmassen [?] überschreitet und durch den gestiegenen Gravitationsdruck die Kernfusion wieder startet.

Kernkollaps-Supernovae entstehen aus Sternen. Nachdem diese ihren Wasserstoff- und Heliumvorrat verbrannt haben, folgt eine Gravitationskontraktion, die zu einer schnelle Abfolge von Kernfusionen schwererer Elemente führt. Nach dem Erreichen des stabilsten Elements ( $^{56}\text{Fe}$ ) kollabiert der Stern.

Durch eine Supernova entsteht ein massives Objekt, das mit der durch die Explosion verteilten Materie interagieren kann.

### Pulsare

Kollabieren die Überreste einer Supernova von einem Durchmesser von ca  $10^6\text{ km}$  auf ca  $20\text{ km}$  entsteht ein Neutronenstern, der sich aufgrund der Drehimpulserhaltung sehr schnell dreht. Bleibt der magnetische Fluss durch die Oberfläche erhalten, entstehen große Magnetfelder ( $\mathcal{O}(10^8\text{T})$  [?]). Sind Drehimpuls und Magnetfeld nicht parallel zueinander, so nennt man das entstandene Konstrukt Pulsar. In seinem rotierenden Magnetfeld können geladene Teilchen durch die Lorentzkraft auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigt werden, die ihre Energie wiederum an Photonen abgeben können.

### Schwarze Löcher

Schwarze Löcher sind Objekte mit einer Gravitationskraft, die so stark ist, dass auch Photonen, die sich hinter dem Ereignishorizont befinden nicht entkommen können. Durch die starke Anziehung entsteht eine Akkretionsscheibe in der große elektromagnetische Felder herrschen, durch die wiederum hochenergetische Photonen entstehen können. Gerade in Zentren von Galaxien herscht eine hohe Sterndichte, die dazu führt, dass sich hier supermassenreiche schwarze Löcher entstehen können. Diese können mit den großen Mengen an Plasma interagieren und strahlen häufig so hell, dass das Zentrum oder sogar den Rest der Galaxie überstrahlen können. Solche Quellen nennt man aktive galaktische Kerne (AGNs).

### Dunkle Materie

Betrachtet man die Rotation von Galaxien, so stellt man fest, dass sich diese nicht durch die sichtbare Materie erklärbar sind. Um dieses Problem zu lösen, postuliert man die Existenz einer uns nicht bekannten Materieform, der dunklen Materie. Durch die VHE-Astronomie versucht man Erkenntnisse über diese zu gewinnen. Man sucht beispielsweise nach monoenergetischen Energielinien, die durch Selbstannihilation von dunkler Materie entstehen könnten.

## 1.3 Detektion von Strahlung

Prinzipiell lässt sich zwischen bodengestützter und satellitengestützter  $\gamma$ -Astronomie unterscheiden. Durch den Einsatz von Satelliten vermeidet man den störenden Einfluss der Erdatmosphäre, muss dafür allerdings Abstriche in der Größe der Detektoren machen und mit hohen Kosten kalkulieren. Hier soll sich nur mit der bodengestützten Variante beschäftigt werden, die günstiger ist und nicht in der Größe beschränkt ist. Dazu verwendet man sogenannte IACTS (Imaging Atmospheric Cherenkov Telescopes), die die Strahlung nur indirekt detektieren.

### 1.3.1 Luftschauder

Die Atmosphäre ist nur für Photonen im optischen und radiowellen Bereich durchsichtig. Treten hochenergetische Photonen in die Atmosphäre ein, findet Paarbildung statt. Das entstehende Elektron bzw Positron ist ebenfalls hochenergetisch und verliert hauptsächlich durch Bremsstrahlung Energie, worauf die entstehenden Photonen wieder durch Paarbildung wechselwirken können. Die Strahlungslängen für Paarbildung und Bremsstrahlung sind ungefähr gleich lang, sodass die Anzahl der Teilchen mit absteigender Höhe exponentiell zunimmt, wohingegen die durchschnittliche Energie der Teilchen exponentiell abnimmt. Der Luftschauder endet, in einer Höhe von ungefähr 10km [?], wenn die Teilchen

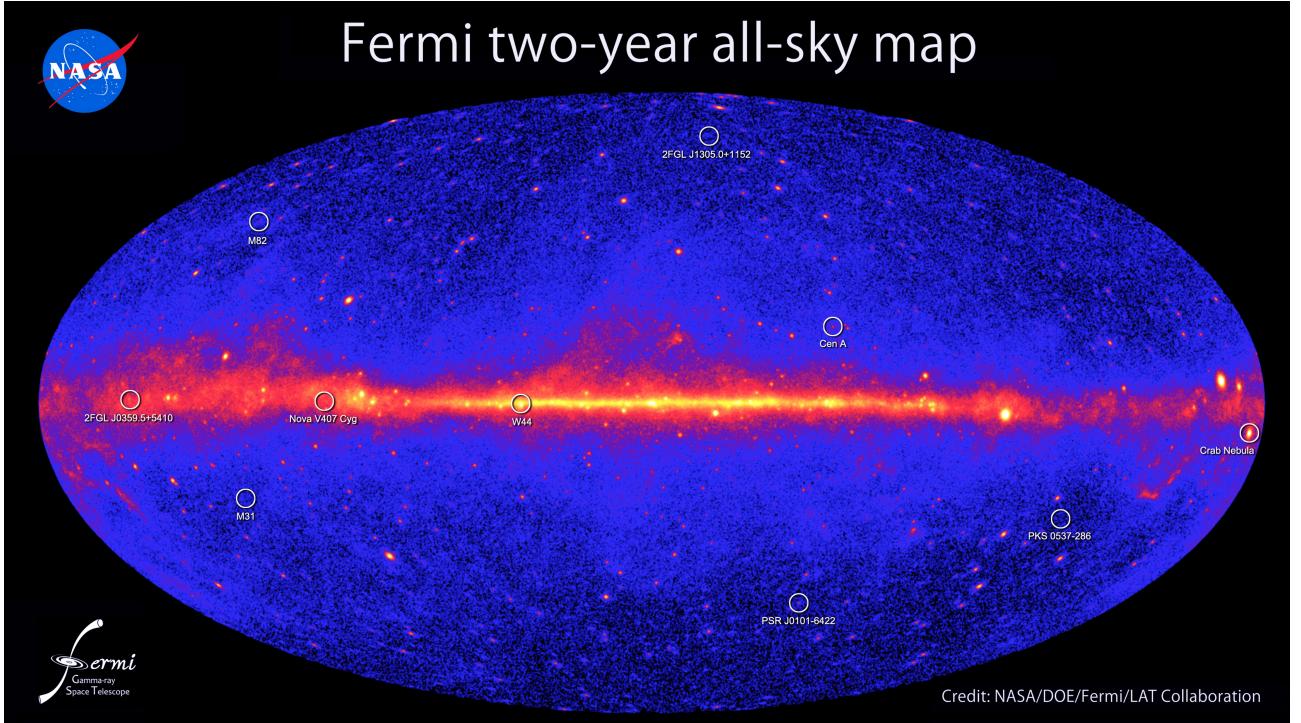


Figure 1.1: Zu sehen sind alle von Fermi-LAT über zwei Jahre aufgezeichneten Gammaquellen ab einer Energie von 1GeV. Am rechten Rand ist beispielsweise der Krebsnebel, welcher 1054 aus einer Supernova hervorging, in dessen Zentrum sich heute ein Pulsar befindet. [?]

niederenergetisch sind und die restliche Energie über Ionisation verlieren.

$$E_n = \frac{E_0}{2^n} \quad (1.1)$$

Neben den oben beschriebenen elektromagnetischen Schauern existieren noch hadronische und myonische Schauer. Hadronische Schauer entstehen wenn hochenergetische Hadronen in die Atmosphäre eindringen. Durch die Wechselwirkung von Hadronen entstehen häufig Pionen, die wiederum in Photonen zerfallen, wodurch wiederum ein elektromagnetischer Schauer entsteht, der allerdings einen anderen Ursprung hat. Entstehen Myonen in einem Schauer, so besteht das Problem, dass diese kaum Energie abgeben und bei hoher Geschwindigkeit den Erdboden erreichen. Somit gibt nur ein Teil des Schauers die Energie ab und die Messung weicht von der Realität ab.

### 1.3.2 Cherenkov Strahlung

Cherenkov Strahlung tritt auf, wenn geladene Teilchen in Materie schneller als die Lichtgeschwindigkeit in diesem Medium bewegen. Hierbei polarisiert das geladene Teilchen auf seiner Trajektorie die einzelnen Atome, die Licht sphärisch abstrahlen. Wäre das Teilchen langsamer als die Ausbreitungsgeschwindigkeit in diesem Medium, würden die Wellen destruktiv interferieren und man würde keine makroskopischen Effekte beobachten. Da sich das Teilchen allerdings schneller als das Licht bewegt, entsteht ein Kegel konstruktiver Interferenz, und ein Lichtblitz breitet sich kegelförmig mit dem Öffnungswinkel

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\beta n}\right) \quad (1.2)$$

aus. Für Luft (in Bodennähe) ergibt sich somit ein maximaler Öffnungswinkel von. Da allerdings die Dichte der Luft in der relevanten Höhe kleiner ist, ist auch der Brechungsindex näher an 1 und der Cherenkovwinkel beträgt noch ungefähr  $\theta = 1^\circ$ [?] Aus dem Winkel lässt sich die Geschwindigkeit des Teilchens rekonstruieren und bei bekannter Masse des Teilchens (in elektromagnetischen Schauern entstehen Elektronen als geladene Teilchen) auch der Impuls und die Energie.

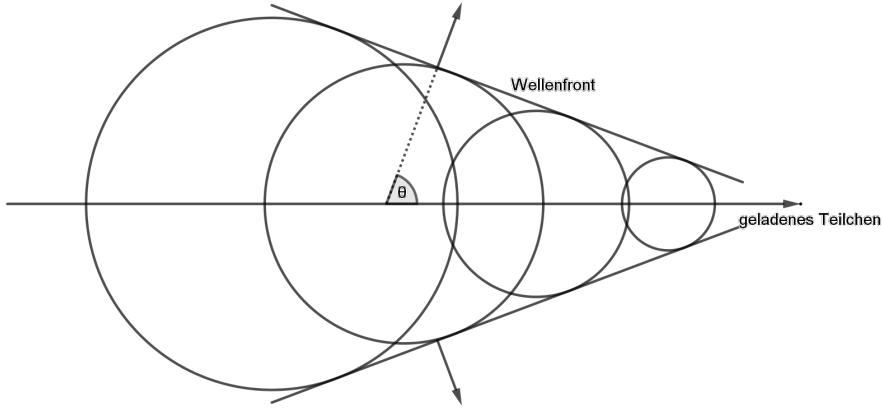


Figure 1.2: Der Cherenkoeffekt: Ein geladenes Teilchen durchfliegt ein dielektrisches Medium mit einer Geschwindigkeit über der der Lichtgeschwindigkeit im Medium und erzeugt Wellenfronten.

### 1.3.3 Bodengestützte Detektion der Cherenkovstrahlung

Ziel der bodengestützten Variante ist es das Cherenkovlicht der sekundären Teilchen aus dem elektromagnetischen Schauer zu detektieren. Bei einem Cherenkovwinkel von  $\theta = 1^\circ$  in 10km Höhe und senkrechter Einstrahlung ergibt sich ein Lichtpool am Boden mit einem Durchmesser von 250m [?]. Somit müssen effektive Flächen in der Größenordnung von  $10^4$  bis  $10^5 \text{ m}^2$  abgedeckt werden um den gesamten Schauer zu detektieren. Typischerweise entstehen bei einem VHE-Photon  $10^8 - 10^9$  Photonen, die innerhalb von wenigen Nanosekunden abgegeben werden. Am Boden hat man somit typische Intensitäten von  $10^3 \frac{1}{\text{m}^2}$  die detektiert werden müssen. Dazu verwendet man Abbildende Cherenkovteleskope (IACTS - Imaging Atmosphaeric Cherenkov Telescopes), die aus einem Reflektor und einem Detektor bestehen. Der Reflektor besteht aus einem oder häufig aus mehreren Spiegeln, die das Cherenkovlicht in der Brennebene bündeln. Bei großen Teleskopen muss der Reflektor parabolisch sein und bei kleineren wird darauf häufig aus Kostengründen verzichtet, da jeder einzelne Spiegel eine individuelle Brennweite braucht. Als Detektor wird eine Cherenkovkamera verwendet, die eine typische Auflösung von 2000 Pixeln und Zeitauslösung 10ns[?] hat. Da die Auflösung im Vergleich zu CCD Kameras eher gering ist, liegt daran, dass der Detektor sehr wenige Photonen in einer sehr kurzen Zeit detektiert werden müssen. Dazu verwendet man Photomultiplier. Aus den aufgenommenen Daten lässt sich mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen die Richtung und die Energie des detektierten Photons rekonstruieren.

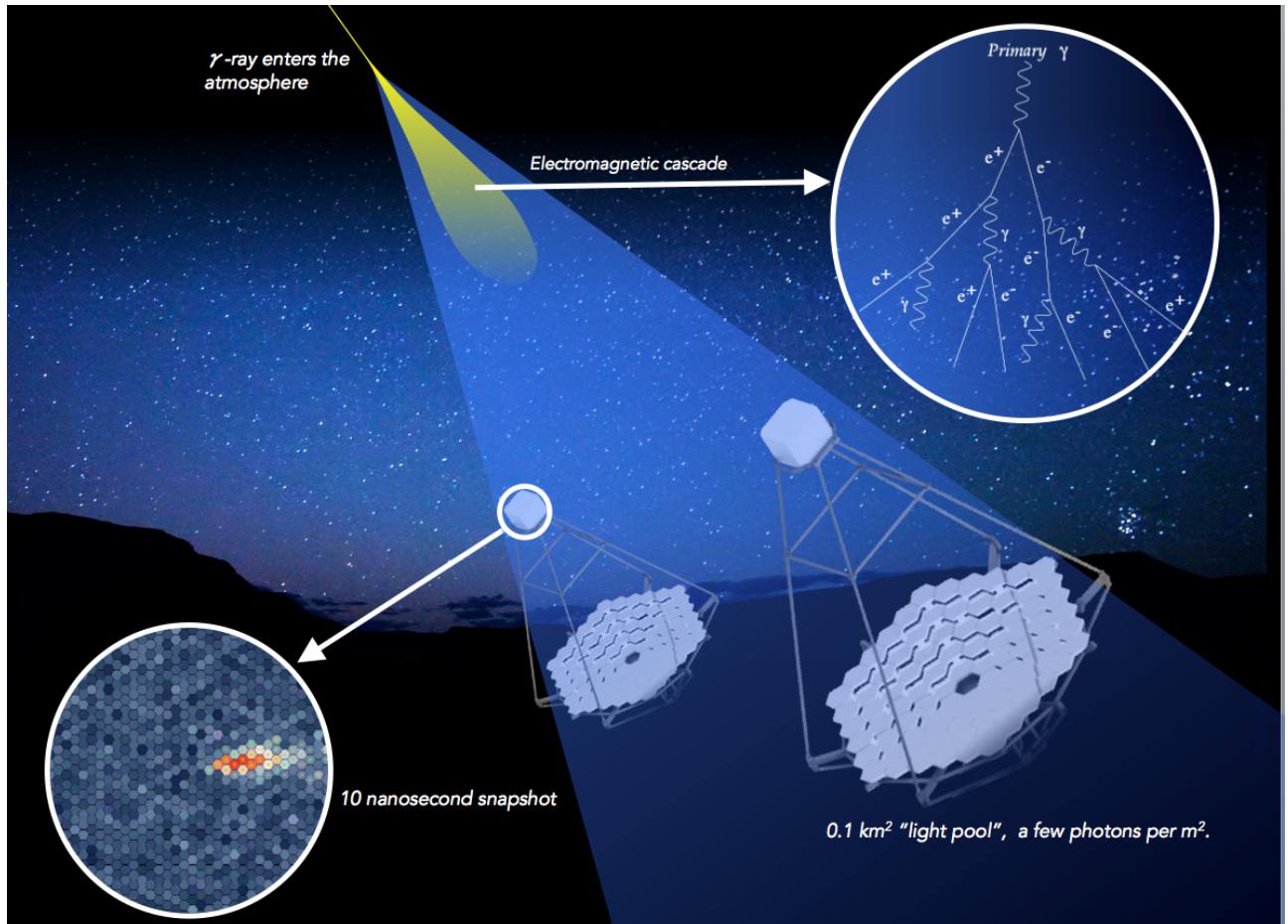


Figure 1.3: Detektion hochenergetischer Strahlung: Das in die Atmosphäre eintretende Photon erzeugt einen elektromagnetischen Luftschauder (oben rechts) der wiederum Cherenkovlicht erzeugt, welches am Boden mit IACTs detektiert werden kann. Ein Detektionsbild ist unten links zu sehen.

## 2 Das Cherenkov Telescope Array

Mit dem Bau des Cherenkov Telescope Arrays (CTA) werden verschiedene Ziele verfolgt [?]:

- Abdeckung des Energiebereichs von 30GeV bis 100TeV
- Verbesserung der Sensitivität um eine Größenordnung im Vergleich zur aktuellen Generation (H.E.S.S., VERITAS und MAGIC)
- Verbesserung der Winkelauflösung auf  $0,1^\circ$  bei 0,1TeV und  $0,05^\circ$  bei 1TeV
- Verbesserung der Energieauflösung auf 25% bei 50GeV und 10% bei 1TeV
- Entdeckung einer großen Anzahl von Quellen bekannter Klassen
- Entdeckung neuer Quellen (zum Beispiel Quellen GRBs)
- Abdeckung des gesamten (nördlichen und südlichen) Himmels

### 2.1 Design-Konzept

Um die oben genannten Ziele zu erreichen, hat man sich für ein Arraykonzept entschieden, dass aus drei unterschiedlich großen Teleskoptypen besteht und an zwei Standorten errichtet wird.

#### 2.1.1 Teleskoptypen

Für das CTA werden drei Teleskope unterschiedlicher Größe entwickelt

##### Small Sized Telescope (SST)

Das kleinste Teleskop ist sensitiv im Bereich von 1TeV bis 300TeV und wird eingesetzt um Schauer grosser Energie zu detektieren. Momentan werden drei verschiedene Varianten entwickelt, die zu einem harmonisiert werden sollen. Das SST 1M ist eine kleinere Variante des MST und SST-2M ASTRI und das SST-2M GCT basieren auf dem Prinzip eines Schwarzschild-Couder Designs. Das SST soll einen Reflektordurchmesser von ca. 4m haben.

##### Medium Sized Telescope (MST)

Das MST basiert auf einem modifiziertem Davies-Cotton-Design und hat einen Durchmesser von 12m. Mit einem Sensitivitätsbereich von 150GeV bis 5TeV deckt es den Kernbereich des CTAs ab. Ein Prototyp des MST wird in Berlin-Adlershof getestet.

##### Large Sized Telescope (LST)

Die größten Teleskope des CTA werden einen Reflektordurchmesser von 23m um auch Strahlung niedriger Energie zu detektieren. Da aufgrund der Größe eine Bauweise aus Stahl zu schwer wäre, werden diese Teleskope aus kohlefaser verstärktem Kunststoff gebaut. Das hat zum Vorteil, dass die Teleskope zwar leichter werden, aber es hat auch den Nachteil, dass die Bauteile durch Bewegung des Teleskops stärker verbiegen, was das Pointing erschwert. Aufgrund der Größe dieser Teleskope reicht es nicht mehr die Reflektoren dieser Teleskope sphärisch zu bauen, sondern parabolisch. Hierbei steigt der Aufwand, da jeder einzelne Spiegel eine individuelle Brennweite hat.



Figure 2.1: Die drei verschieden großen Teleskope des CTA: links die drei Varianten des SMT, in der Mitte das MST und rechts das LST

### 2.1.2 Arrays

Um den gesamten Himmel abdecken zu können wird jeweils eine Anlage auf der Nordhalbkugel und der Südhalbkugel errichtet.

#### südliche Hemisphäre

Die größere der beiden Anlagen wird in der Atacamawüste in Chile errichtet und besteht aus allen drei Teleskoptypen, die auf einer Fläche von  $4\text{km}^2$  verteilt sind 2.2, um so den gesamten Energiebereich des CTAs abzudecken

#### nördliche Hemisphäre

Auf der spanischen Insel La Palma wird die nördliche Anlage errichtet. Hier steht eine kleinere Fläche zur Verfügung und es wird auf die kleinen Teleskope verzichtet, wodurch der Energiebereich auf 20GeV bis 20TeV begrenzt ist.

## 2.2 Prototyp in Adlershof

In Adlershof wurde 2012 vom DESY ein Prototyp des MSTs errichtet um den mechanischen Aufbau zu testen, Pointingmodelle zu entwickeln und um die einzelnen Spiegel zu testen und auszurichten.

### 2.2.1 Kameras des MST

Der Prototyp des MST besitzt drei Kameras in der Mitte des Reflektors. Die Sky-CCD, für die im hier folgenden ein Pointingmodell entwickelt wird, ist schräg montiert, sodass sie am Detektorarm vorbei guckt um Bilder des Nachthimmels aufzunehmen. Aus diesen Bildern lassen sich mithilfe der Astrometry-Software die Koordinaten der Kamera bestimmen, die als die wahren Koordinaten angenommen werden.

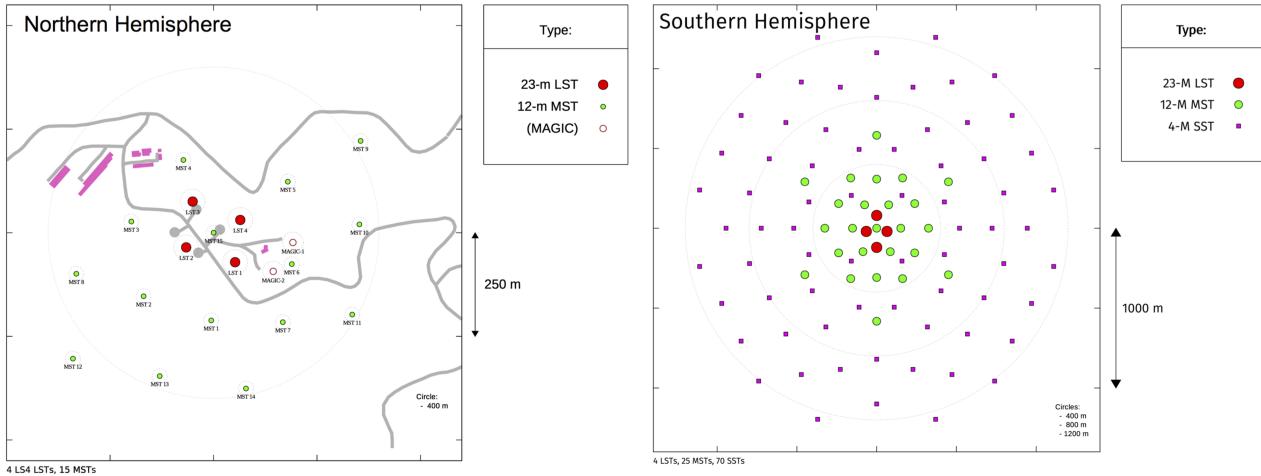


Figure 2.2: Der geplante Aufbau der Arrays auf La Palma und in der Atacamawueste: Auf La Palma werden zunächst nur die beiden grösseren Teleskoptypen am Krater des Vulkans errichtet. In der Atacamawüste werden alle drei Teleskoptypten verwendet. Aufgrund der großen freien Fläche kann hier auch ein großer Bereich symmetrisch abgedeckt werden.

### 2.2.2 Bestimmung der Bildkoordinaten durch **astronometry.net**

Aus den mit der Kamera aufgenommen Bildern lassen sich mithilfe der **astronometry.net** Software die einzelnen Koordinaten der Bilder und die Groesse des Bildausschnitts bestimmen. Auf den einzelnen Bildern werden Sterne erkannt, die jeweils zu Triplets zusammengeschlossen werden. Diese Triplets werden mit zwei Sternenkatalogen

- USNO-B: Ein Katalog mit ungefaehr einer Milliarde Objekten (Sterne und Galaxien)
- TYCHO-2 Ein Katalog mit den 2.5 Millionen hellsten Sternen

Die Software kommt auch mit Fehlern wie fehlenden und zu vielen Objekten klar.

# 3 Pointingmodell

Das Pointing von Teleskopen beschäftigt sich damit, dass das Teleskop so ausgerichtet wird, wie es erwünscht ist. Häufig ist das Problem, dass die eingestellte Position nicht exakt mit der gewünschten Position übereinstimmt. Gründe dafür können Fehler in der Präzision oder auch die Elastizität einzelner Bauteile sein. Da man die aufgenommenen Daten mit den bekannten Positionen am Himmel vergleichen kann, kann man versuchen ein Modell zu finden, welches die Fehler verkleinert oder im Idealfall sogar eliminiert.

## 3.1 Koordinaten

Das MST benutzt ein Koordinatensystem aus zwei Winkeln, welches den Kugelkoordinaten ähnelt. Der Azimutwinkel ( $az$ ) beschreibt die Auslenkung in der Ebenen und läuft von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$ , wobei es für  $az = 0^\circ$  in Richtung Norden ausgerichtet ist. Der Elevationswinkel  $el$  läuft von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  wobei  $el = 90^\circ$  dem Zenit entspricht. Da es bei der Entwicklung von Pointingmodellen von Vorteil sein kann, in kartesischen Koordinaten zu rechnen, wird hier die Konvention verwendet, dass Nordrichtung der x-Richtung, die Westrichtung der y-Richtung und die Zenitrichtung der z-Richtung entspricht.

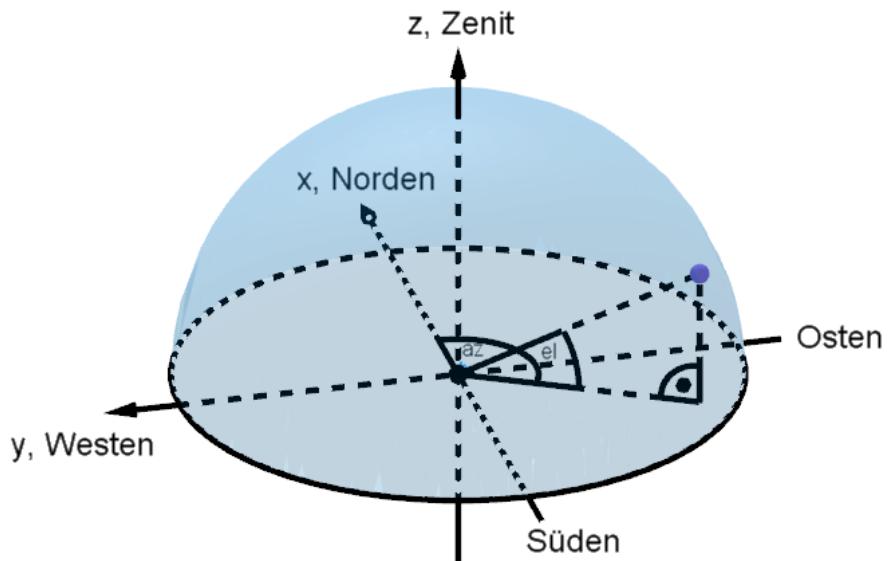


Figure 3.1: Die verwendeten Koordinaten

## 3.2 Entwicklung von Pointingmodellen

Da man das Teleskop so ausrichten will, dass man die gewünschte Position vorgibt (Koordinaten der CCD-Index C) und dann die Koordinaten am Drive (Index D) einstellt, sucht man nach Funktionen, die die Koordinaten des Drives in Abhängigkeit von den gewünschten Koordinaten beschreibt.

In der Regel haben Teleskope so geringe Abweichungen zwischen eingestellter und tatsächlicher Position, dass sich diese Abweichungen als Funktionen schreiben lassen, die in den relevanten Parametern entwickelt werden können.

$$az_D = az_c + \Delta_{az} = az_c + \tilde{f}_{az}(az_c, el_c, \vec{q}) \quad (3.1)$$

$$el_D = el_c + \Delta_{el} = el_C + \tilde{f}_{el}(az_c, el_c, \vec{q}) \quad (3.2)$$

Da die Sky-CCD des MST-Prototyps einen größeren Winkel ( $\mathcal{O}(10^\circ)$ ) zur optischen Achse hat, lässt sich das Entwicklungsverfahren hier nicht anwenden. Stattdessen wird versucht, die einzustellende Position anhand geometrischer Überlegungen in Abhängigkeit der wahren Position vorherzusagen. Man versucht also Funktionen zu finden, die nur von den wahren Koordinaten und einem teleskopsspezifischen Parametersatz abhängen.

$$az_D = f_{az}(az_C, el_C) \quad (3.3)$$

$$el_D = f_{el}(az_C, el_C) \quad (3.4)$$

### 3.3 Pointingmodell mit zwei Parametern

#### 3.3.1 Vorhersage der CCD-Koordinaten in Abhängigkeit der Drive-Koordinaten

Zunächst soll ein Pointingmodell mit zwei Parametern entwickelt werden, bei dem das Drivesystem in der Parkposition ( $el_D = 0, az_D = 0$ ) in eine andere Richtung zeigt als die CCD-Kamera ( $el_C = el_0, az_C = az_0$ ). Die beiden Positionen lassen sich auch durch zwei karthesische Richtungsvektoren  $\vec{r}_D$  und  $\vec{r}_C$  beschrieben. Ausgehend von dieser Startposition wird das Teleskop beziehungsweise die Vektoren  $\vec{r}_D$  und  $\vec{r}_C$  durch orthogonale Transformationen in die gewünschte Position gebracht wird. Als Parkposition für das Drive-System erhält man mit den oben genannten Bedingung folgenden karthesischen Vektor:

$$\vec{r}_D^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Durch eine Drehung um die y-Achse mit dem Winkel  $el$  und anschließender Drehung die z-Achse um den Winkel  $az$  lässt sich aus dieser Startposition jeder Punkt auf der Einheitskugel erreichen. Die beiden Drehungen lassen sich zu einer Transformation  $T(az, el)$  zusammenfassen:

$$T(az, el) = R_z(az)R_y(el) = \begin{pmatrix} \cos(az) & \sin(az) & 0 \\ -\sin(az) & \cos(az) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(el) & 0 & -\sin(el) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(el) & 0 & \cos(el) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$T(az, el) = \begin{pmatrix} \cos(az) \cos(el) & \sin(az) & -\cos(az) \sin(el) \\ -\cos(el) \sin(az) & \cos(az) & \sin(az) \sin(el) \\ \sin(el) & 0 & \cos(el) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Unter der Annahme, dass die Kamera von vornherein in eine andere Richtung als das Drive-System zeigt, lässt sich mit dieser Transformtion  $T(az_0, el_0)$  aus der Startpostion des Drives die Startposition der Kamera bestimmen:

$$\vec{r}_C^0 = T(az_0, el_0)\vec{r}_D^0 = \begin{pmatrix} \cos(az_0) \cos(el_0) \\ -\cos(el_0) \sin(az_0) \\ \sin(el_0) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Wendet man nun die gleiche Transformation  $T(az_D, el_D)$  auf beide Startvektoren an, so erhält man für jedes Koordinatenpaar des Drives die zugehörigen Koordinaten der CCD in Abhängigkeit der Koordinaten des Drives. Für die Richtung des Drives ergibt sich

$$\vec{r}_D = T(az_D, el_D)\vec{r}_D^0 = \begin{pmatrix} \cos(az) \cos(el) \\ -\cos(el) \sin(az) \\ \sin(el) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

und für die Richtung der CCD

$$\vec{r}_C = T(az, el) \vec{r}_C^0 = \begin{pmatrix} \cos(az) (\cos(az_0) \cos(el) \cos(el_0) - \sin(el) \sin(el_0)) - \cos(el_0) \sin(az) \sin(az_0) \\ \sin(az) (\sin(el) \sin(el_0) - \cos(az_0) \cos(el) \cos(el_0)) - \cos(az) \cos(el_0) \sin(az_0) \\ \cos(az_0) \cos(el_0) \sin(el) + \cos(el) \sin(el_0) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Aus diesen Richtungsvektoren müssen wieder die ursprünglichen Koordinaten  $az$  und  $el$  rekonstruiert werden. Die Elevation lässt sich aus der z-Komponente (Höhe) berechnen

$$el = \arcsin(r_z) \quad (3.11)$$

und der Azimutwinkel aus dem Verhältnis von y- zu x-Komponente. Da der Tangens dieses Verhältnis dem Azimuthwinkel mit einem Wertebereich von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$  entspricht muss man als Umkehrfunktion den erweiterten arctan verwenden:

$$az = \arctan 2(r_y, r_x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{r_y}{r_x}\right) & r_x > 0 \\ \arctan\left(\frac{r_y}{r_x}\right) + \pi & r_x < 0, r_y > 0 \\ \pm\pi & r_x < 0, r_y = 0 \\ \arctan\left(\frac{r_y}{r_x}\right) - \pi & x < 0, r_y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & x = 0, r_y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, r_y < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Somit lassen sich mit 3.11 beziehungsweise mit 3.12 in Verbindung mit 3.10 die CCD-Koordinaten in Abhängigkeit der Drive-Koordinaten bestimmen.

$$el_C = \arcsin(\cos(az_0) \cos(el_0) \sin(el_D) + \sin(el_0) \cos(el_D)) \quad (3.13)$$

$$az_C = \arctan 2(\sin(az_D)(\cos(el_D) \cos(az_0) \cos(el_0) - \sin(el_D) \sin(el_0)) - \cos(az_D) \sin(az_0) \cos(el_0), \cos(az_D)(\cos(el_D) \cos(az_0) \cos(el_0) + \sin(el_D) \sin(el_0))) \quad (3.14)$$

### 3.3.2 Vorhersage der Drive-Koordinaten in Abhängigkeit der CCD-Koordinaten

Um die Abhängigkeiten der Drive-Koordinaten von den CCD-Koordinaten zu erhalten, muss das Gleichungssystem 3.13 3.14 nach  $el_D$  und  $az_D$  aufgelöst werden. Da die Formel 3.13 nur von  $el_D$  und  $el_C$  abhängt, kann diese unabhängig von 3.16 umgestellt werden. Dazu werden die in Gleichung 3.13 stehenden Sinus- und Kosinusfunktionen durch Tangensfunktionen ausgedrückt

$$\sin(el_D) = \frac{2t}{1+t^2} \quad (3.15)$$

$$\cos(el_D) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad (3.16)$$

wobei  $t$  der Tangens des halben Winkels ist

$$t = \tan\left(\frac{el_D}{2}\right). \quad (3.17)$$

Somit ergibt sich für Gleichung 3.13 folgender Ausdruck

$$\sin(el_C) = \frac{2t \cos(el_0) \cos(az_0) + (1-t^2) \sin(el_0)}{1+t^2}. \quad (3.18)$$

Aufgelöst nach  $t$  ergeben sich folgende Lösungen

$$t_{1,2} = \frac{\cos(el_0) \cos(az_0) \pm \sqrt{\cos^2(el_0) \cos^2(az_0) - \sin^2(el_0) + \sin^2(el_C)}}{\sin(el_C) + \sin(el_0)} \quad (3.19)$$

Ersetzt man den linken Teil der Formel durch ?? und löst sich die Gleichung nach  $el_D$  auf, so erhält man

$$el_D = 2 \arctan \left( \frac{\cos(el_0) \cos(az_0) - \sqrt{\cos^2(el_0) \cos^2(az_0) - \sin^2(el_0) + \sin^2(el_C)}}{\sin(el_C) + \sin(el_0)} \right) \quad (3.20)$$

Betrachtet man den Wertebereich der Funktion stellt man fest, dass Zur Untersuchung der Azimutabhängigkeit werden aus Gründen der Übersichtlichkeit folgende Terme substituiert

$$\cos(left(el_D \cos(az_0) \cos(el_0) - \sin(el_D) \sin(el_0)) = a \quad (3.21)$$

$$\sin(az_0) \cos(el_D) = b \quad (3.22)$$

Formel 3.14 lässt sich somit durch

$$\tan(az_C) = \frac{a \sin(az_D) - b \cos(az_D)}{a \cos(az_D) + b \sin(az_D)} \quad (3.23)$$

ausdrücken. Teilt man Zähler und Nenner durch  $\cos(az_D)$  so erhält man

$$\tan(az_C) = \frac{a \tan(az_D) - b}{a + b \tan(az_D)}. \quad (3.24)$$

Aufgelöst nach  $\tan(az_D)$  erhält man

$$\tan(az_D) = \frac{a \tan(az_C) + b}{a - b \tan(az_C)} \quad (3.25)$$

beziehungsweise

$$\tan(az_D) = \frac{a \sin(az_C) + b \cos(az_C)}{a \cos(az_C) - b \sin(az_C)} \quad (3.26)$$

Für  $az_D$  erhält man somit

$$az_D = \arctan 2(\sin(az_C)(\cos(el_C) \cos(az_0) \cos(el_0) - \sin(el_C) \sin(el_0)) - \cos(az_C) \sin(az_0) \cos(el_0), \cos(az_C)(\cos(el_C) \cos(az_0) \cos(el_0) - \sin(el_C) \sin(el_0)) + \sin(az_C) \sin(az_0) \cos(el_0)) \quad (3.27)$$

wobei hier noch  $el_D$  durch den Ausdruck 3.15 ersetzt werden muss.

### 3.4 Erweiterung des Modells auf vier Parameter

Unter der Annahme, dass die Skalen des Drivesystems einen Offset haben, also das der Wertebereich von  $el_D$  beispielshalber von  $1^\circ$  bis  $91^\circ$  läuft, kann das Modell mit zwei additiven Konstanten  $el_1$  und  $az_1$  erweitert werden. Das bedeutet, das bei der Vorhersage der CCD-Koordinaten 3.13 und 3.14 ein konstanter Offset zu den Argumenten hinzugefügt wird:

$$el_C^{4par} = el_C(el_D + el_1, az_D + az_1) \quad (3.28)$$

$$az_C^{4par} = az_C(el_D + el_1, az_D + az_1) \quad (3.29)$$

wohingegen bei der Vorhersage der Drive-Koordinaten nur ein konstanter Offset zu den Funktionen 3.15 und 3.16 addiert wird.

$$el_D^{4par} = el_D(el_C, az_C) + el_1 \quad (3.30)$$

$$az_D^{4par} = az_D(el_C, az_C) + az_1 \quad (3.31)$$

# 4 Anwendung des Pointingmodells auf Daten des Teleskops

Um das in Abschnitt entwickelte Pointingmodell zu testen wurde mit dem Prototyp des MST ein Datensatz aufgenommen um die Daten

## 4.1 Datensatz

Der verwendete Datensatz wurde am MST-Prototyp in Adlershof in der Nacht vom 4. auf den 5. Juli 2018 im Zeitraum von 21:00 UTC bis 1:45 UTC aufgenommen. Dazu wurden 105 Positionen beobachtet wobei das Teleskop anfangs Richtung Zenit stand und sich dann in einer abwärtslaufenden Spirale befand. An jeder Position wurden 4 Bilder aufgezeichnet, wovon zwei eine Belichtungszeit von 20 Sekunden hatten. Die jeweils zweiten Bilder mit dieser Belichtungszeit aufgenommenen Bilder wurden verwendet um mithilfe einer Software die Koordinaten des Bildmittelpunktes zu bestimmen. Das war bei 100 Bildern erfolgreich. Der zur Analyse verwendete Datensatz besteht somit aus 100 Einträgen, die jeweils die Elevations und Azimutkoordinaten des Drivesystems (also der am Teleskop eingestellten Koordinaten) und der tatsächlichen (also der Koordinaten des Bildmittelpunktes).

## 4.2 Programm

Um das Pointingmodell auf Konsistenz zu überprüfen wurde ein Programm in ROOT geschrieben, welches die Differenzen der vom Pointingmodell (Index P) bestimmten Werte mit den gemessenen (Index M) Werten berechnet und analysiert. Da die oben entwickelten Pointingmodelle noch freie Parameter haben, die vom Teleskop abhängen werden diese durch eine Regression der Daten bestimmt. Da das Pointingmodell aus zwei Funktionen besteht (jeweils eine für die Elevation und den Azimut), die jedoch von den gleichen Parametern abhängen, muss hier ein kombinierter Fit durchgeführt werden. Dazu wird eine Hilfsvariable eingeführt, die die Summe der Quadrate der Differenzen von Messwerten und vorhergesagten Werten für feste Werte der freien Parameter bestimmt. Durch die Bildung der Quadrate können sich Abweichungen nach oben und unten nicht gegenseitig kompensieren und die Hilfsvariable ist somit ein Maß für die Abweichung von Modell mit den gewählten Parametern und Messwerten. Die besten Parameter erhält man, indem man die Variable minimiert. Dazu wurde die in ROOT integrierte Funktion TMinuit verwendet, die zudem noch die Standardabweichung der Parameter ausgibt. Um die Güte des Modells bestimmen zu können wird noch die Größe  $\frac{\chi^2}{dof}$  verwendet um die Fehler der Messwerte zu bestimmen, in denen das Modell mit dem Datensatz übereinstimmt. Die Größe  $\frac{\chi^2}{dof}$  ist definiert als

$$\frac{\chi^2}{dof} = \sum_{i=1}^N \frac{(P_i - M_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (4.1)$$

wobei hier  $\sigma_i$  der Fehler des Wertes i ist und  $dof$  der Anzahl der Freiheitsgraden entspricht. Diese berechnet sich durch

$$dof = N - \text{Anzahl der Parameter} \quad (4.2)$$

Der perfekte Wert für  $\frac{\chi^2}{dof}$  ist 1. Unter der Annahme, dass die Fehler  $\sigma$  alle gleich groß sind, lassen sich diese wie folgt berechnen

$$\sigma = \sqrt{dof} \quad (4.3)$$

Interessant ist es auch, sich die Korrelation der Parameter untereinander anzugucken

### **4.3 Anwendung auf das Pointingmodell mit 2 Parametern**

Zunächst wird das Modell mit den Parametern  $el_0$  und  $az_0$  untersucht. Dazu

### **4.4 Anwendung auf das Pointingmodell mit 4 Parametern**

# **Selbständigkeitserklärung**

Text der Selbständigkeitserklärung.