3 Tema 3. Funcions de vàries variables. Diferenciació

3.1 Introducció a les derivades parcials

Considerarem primer una funció de dues variables $f:\ D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on D és un obert i $(a,b) \in D$. Si fixam $y = b$ podem consideram la funció

$$g(x) = f(x,b).$$

Si existeix $g'(a)$ llavors direm que és la **derivada parcial de f respecte de la variable x en el punt** (a,b). Ho denotam per $f_x(a,b)$. D'on

$$f_x(a,b) = g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

i per tant

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

Anàlogament, si fixam $x = a$ podem considerar la funció

$$l(y) = f(a,y),$$

i si existeix $l'(b)$ li direm **derivada parcial de f respecte de la variable y en el punt** (a,b), i ho denotarem per $f_y(a,b)$. Igualment tenim que

$$f_y(a,b) = l'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{l(b+h)-l(b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

de forma que

$$f_y(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

Per tant, calcular la derivada parcial respecte d'una variable implica prendre les altres variables com constants i derivar respecte a la variable indicada.

Notació Per representar les derivades parcials de f utilitzarem les següents notacions:

$$\begin{array}{cccc} f_x(a,b) & \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & D_1 f(a,b) & D_x f(a,b) \\ f_y(a,b) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) & D_2 f(a,b) & D_y f(a,b) \end{array}$$

i si $z = f(a,b)$ escriurem

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial z}{\partial x}(a,b) & z_x(a,b) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) & \dfrac{\partial y}{\partial x}(a,b) & z_y(a,b) \end{array}$$

Exemple 3.1.1. *Si* $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$*; calculau* $f_x(x,y)\,,\quad f_y(x,y)$ *i avaluar-les en el punt* $(2,1)$.

Solució

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_x(2,1) = 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2\cdot 1^3 = 16$$

$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y \qquad f_y(2,1) = 3\cdot 2^2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 = 8$$

Per veure el significat geomètric associat a les derivades parcials d'una funció de dues variables reals recordem que, l'equació $z = f(x,y)$, representa una superfície S en R^3 .

A partir del significat geomètric de la derivada d'una funció real de variable real, tenim que (veure figura 1):

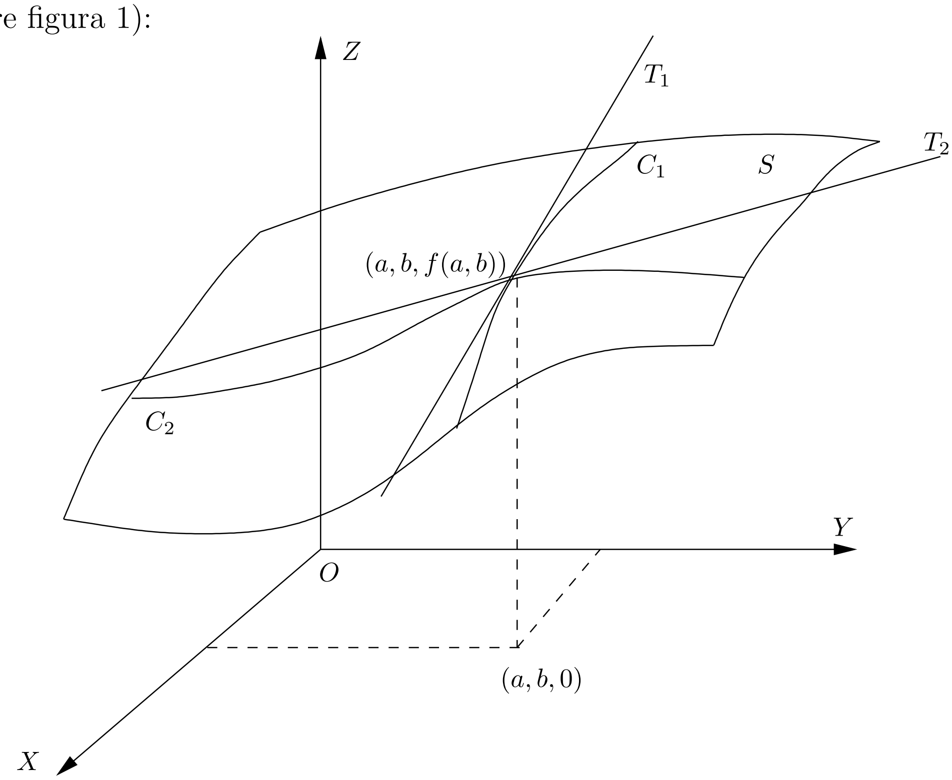

Figura 1: Significat geomètric de les derivades parcials d'una funció de dues variables.

- El pla $y = b$ (que és paral.lel al pla xz) talla a S en una corba C_1 de tal manera que $g'(a) = f_x(a,b)$ és la pendent de la recta tangent T_1 a la corba C_1 en el punt $(a, b, f(a, b))$.
- El pla $x = a$ (que és paral.lel al pla yz) talla a S en una corba C_2 de tal manera que $l'(b) = f_y(a,b)$ és la pendent de la recta tangent T_2 a la corba C_2 en el punt $(a, b, f(a, b))$.

Observació Els vectors directors de les rectes T_1 i T_2 són perpendiculars (ja que els plans que els generen són perpendiculars entre sí). Aquests vectors juntament amb el punt $(a, b, f(a, b))$ generen un pla, del que més endavant parlarem anomenat pla tangent.

Exemple 3.1.2. *Si* $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, *calculau* $f_x(1,1)$ *i* $f_y(1,1)$.

Solució

Tenim que

$$\begin{array}{ll} f_x(x,y) = -2x, & \qquad f_x(1,1) = -2 \\ f_y(x,y) = -4y, & \qquad f_y(1,1) = -4 \end{array}$$

Exemple 3.1.3. *Sigui* $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$, *calculau* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *i* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Solució

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{-x}{(1+y)^2}.$$

Donarem ara la definició general de derivada parcial per a una funció de n variables.

Definició 3.1.1. *Sigui* $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *amb* D *obert. Sigui el punt* $a \in D$ *i consideram el vector unitari* $u_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. *Definim la* ***derivada parcial de*** f ***respecte de la variable*** x_k ***en el punt*** $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *i ho denotarem per* $f_{x_k}(a)$ *com*

$$f_{x_k}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\, u_k) - f(a)}{h}$$

Observació Recordem que en funcions d'una variable real, la derivabilitat en un punt implica la continuïtat en aquest punt. En canvi en el següent exemple veurem que l'existència de derivades parcials en un punt no implica que la funció sigui continua en aquest punt.

Exemple 3.1.4. *Sigui* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+3y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$. *Estudiau la continuïtat de* f *en* $(0,0)$ *i l'existència de* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Solució Estudiem primer les derivades parcials.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Ara bé, f no és continua en $(0,0)$ ja que el límit

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0 \\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x \to 0} f(x,mx) = \lim_{x \to 0} \frac{xmx}{x^2 + 3m^2x^2} = \frac{m}{1+3m^2}$$

depèn de m aleshores no existeix el límit. En definitiva, f no és contínua en $(0,0)$.

Aquest exemple mostra que el concepte de derivada parcial no generalitza el concepte de derivada d'una funció real de variable real, ara bé és una eina molt útil en el estudi de les funcions de diverses variables.

3.2 Derivades direccionals

Presentarem ara el concepte de derivada direccional, que té com a casos particulars les derivades parcials.

Definició 3.2.1. *Sigui* $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D *obert. Sigui* $a \in D$ *i el vector* $u \in \mathbb{R}^n$ *amb* $\|u\| = 1$. *Direm* ***derivada direccional de*** f ***en*** a ***en la direcció del vector*** u*, i ho denotarem per* $D_u f(a)$*, al límit, si existeix,*

$$D_u f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\,u) - f(a)}{h}$$

Observació Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D obert i $a = (x_0, y_0)$, $u = (a,b)$ amb $\|u\| = 1$ llavors

$$D_u f((x_0,y_0)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + a\,h, y_0 + b\,h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Si consideram $u = \overrightarrow{i} = (1,0)$ ó $u = \overrightarrow{j} = (0,1)$ llavors

$$D_{\overrightarrow{i}} f(a) = D_1 f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a), \qquad D_{\overrightarrow{j}} f(a) = D_2 f(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

En general si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D obert. Sigui el punt $a \in D$ i consideram el vector unitari $u_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ es té que

$$D_{u_k} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\,.$$

Exemple 3.2.1. *Considerem la funció $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$. Calculau la derivada direccional de la funció f en el punt $(1, 0)$ i en la direcció que forma amb l'eix x un angle de $\frac{2\pi}{3}$ radians.*

Solució La direcció ve donada pel vector

$$u = \left(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{on} \quad \|u\| = 1.$$

Així, utilitzant la definició tenim que

$$\begin{aligned}
D_u f(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h\,u) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f((1,0) + h(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})) - f(1,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(1 - \frac{h}{2}, h\frac{\sqrt{3}}{2}) - f(1,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(1 - \frac{h}{2})^2 + 3(h\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{11}{4}h^2 - 2h}{h} = -2
\end{aligned}$$

per tant

$$D_u f(1, 0) = -2.$$

Més endavant presentarem una manera de calcular les derivades direccionals, sense tenir que fer el límit donat en la definició.

3.3 Diferenciabilitat. Diferencial

En la següent definició generalitzarem el concepte de diferenciabilitat a funcions de diverses variables.

Definició 3.3.1. *Sigui una funció vectorial de variable vectorial, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, D obert i $a \in D$, direm que f **és diferenciable en** $a \in D$ si existeix una aplicació lineal $L_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ verificant que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - L_a(h)}{\|h\|} = 0$$

Definició 3.3.2. *A l'aplicació lineal* $L_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *se li diu **diferencial de** f **en** a i es denota per $Df(a)$ o $df(a)$.*

Definició 3.3.3. *Sigui* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, *$D$ obert, direm que f **és diferenciable en** D si és diferenciable en tots els punts de D.*

Definició 3.3.4. *La matriu associada a l'aplicació lineal $Df(a)$ respecte de les bases canòniques s'anomena **matriu jacobiana** de f en el punt a i ho denotam per $Jf(a)$.*

Teorema 3.3.1. *Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és diferenciable en a, llavors la matriu jacobiana de f en a és:*

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Exemple 3.3.1. *Considerem la funció*

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\mapsto \left(1+e^x, \sin(xy), \frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

Calculau la matriu jacobiana de f en el punt $(0,2)$.

Solució Calculem les derivades parcials de cada una de les funcions components.

$$\begin{aligned} f_1 \,:\, \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto 1+e^x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2 \,:\, \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \sin(xy) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_3 \,:\, D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{x}{y} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = e^x \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy) \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy) \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$

Tenim que la matriu jacobiana en un punt qualsevol del domini de f val:

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ \\ \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

Per tant

$$Jf(0,2) = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 2\cos 0 & 0\cos 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{0}{2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Donarem ara una sèrie de propietats relacionades amb les funcions diferenciables.

Teorema 3.3.2. *Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és diferenciable en a, llavors f és contínua en a.*

Teorema 3.3.3. *Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ verifica que en un entorn de a, existeixen totes les derivades parcials i són funcions contínues, llavors f és diferenciable en a.*

3.4 Gradient. Pla tangent

Definició 3.4.1. *Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D obert i el punt $a \in D$, suposem que existeixen totes les derivades parcials de f en el punt a. Definim el* ***vector gradient de f en*** *a com el vector*

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

Observació Es pot demostrar que el vector gradient ens dona la direcció en la qual f creix més ràpidament.

Corol.lari 3.4.1. *Siguin $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D obert i $a \in D$. Suposem que f és diferenciable en a. Llavors la derivada direccional de f segons qualsevol vector unitari u es pot calcular com el següent producte escalar*

$$D_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$$

Aplicarem aquest resultat a repetir el càlcul fet a l'exemple 3.2.1.

Exemple 3.4.1. *Considerem la funció $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$. Calculau la derivada direccional de la funció f en el punt $(1,0)$ i en la direcció que forma amb l'eix x un angle de $\frac{2\pi}{3}$ radians.*

Solució Calculam primer les derivades parcials de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$$

Per tant el gradient en aquest punt val: $\nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right) = (4,0)\,.$

La direcció ve donada pel vector

$$u = \left(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{on} \quad \|u\| = 1.$$

Així, utilitzant el resultat del corol.lari anterior

$$D_u f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot u = (4,0) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2$$

Exemple 3.4.2. *Calculau la derivada direccional $D_u f(1,2)$ si $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ i u és el vector unitari donat per l'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$.*

Solució El vector u ve donat per

$$u = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Calculam ara les derivades parcials de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x + 8y$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 13$$

Per tant el gradient en aquest punt val: $\nabla f(1,2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right) = (-3,13)\,.$

per tant

$$D_u f(1,2) = (-3,13)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{13-3\sqrt{3}}{2}$$

Definició 3.4.2. *Sigui* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D *obert. Sabem que l'equació* $z = f(x,y)$ *representa una superfície* S. *Definim* ***el pla tangent*** *de* S *en el punt* $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \in S$ *com:*

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)$$

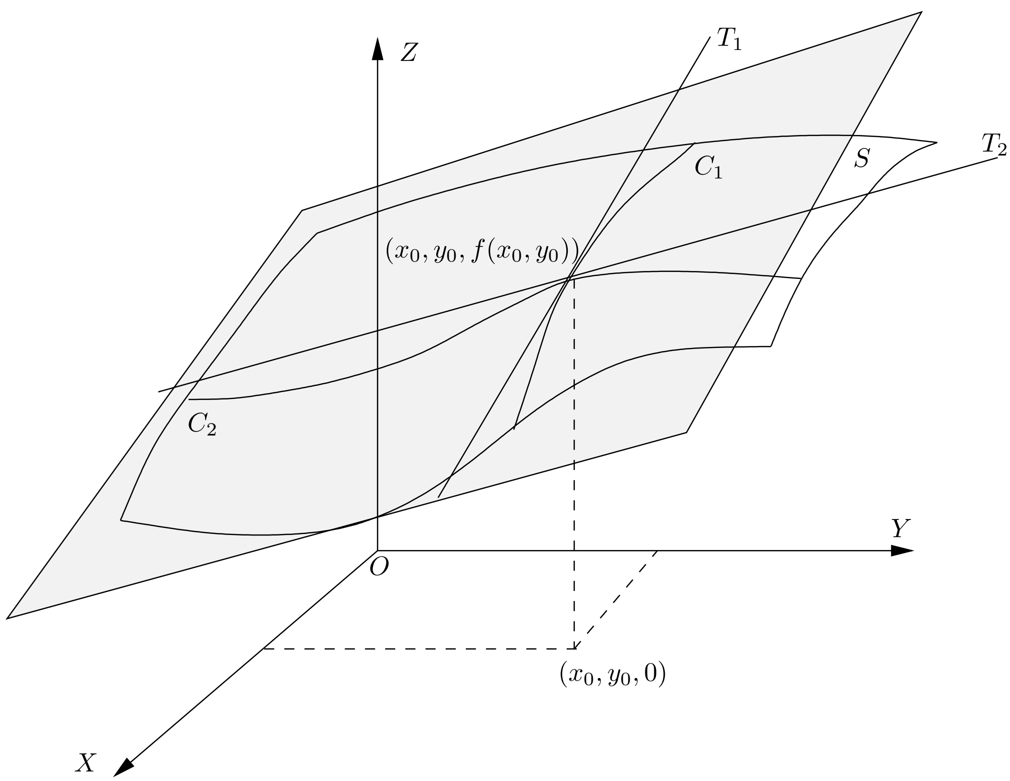

Figura 2: Pla tangent a S en el punt $(x_0, y_0, (f(x_0,y_0))$.

Exemple 3.4.3. *Trobau el pla tangent a la superfície* $z = 2x^2 + y^2$ *en el punt* $(1,1,3)$.

Solució Sigui $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ i observau que $f(1,1) = 3$. Les derivades parcials en el punt $(1,1)$ són

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2$$

així, l'equació del pla tangent és:

$$z = 3 + 4(x-1) + 2(y-1) \implies z = 3 + 4x - 4 + 2y - 2 \implies 4x + 2y - z - 3 = 0$$

3.5 Regla de la cadena

Com ja sabem, la composició de funcions està present de manera majoritària dins el conjunt de les funcions, d'aquí l'importància del següent resultat.

Teorema 3.5.1. *(Regla de la cadena)*

Sigui $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, U obert de $\mathbb{R}^n$, f diferenciable en $a \in U$. Sigui $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$ on V és un obert de $\mathbb{R}^m$, tal que $f(U) \subset V$ i g diferenciable en $f(a)$. Llavors $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ és diferenciable en a i es verifica que

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \cdot Jf(a)$$

Exemple 3.5.1. *Si $z = x^2y + 3xy^4$, on $x = e^t$, $y = \sin t$, calculau $\dfrac{dz}{dt}$*

Solució Si consideram les funcions: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definides per $f(t) = (e^t, \sin t)$, $g(x,y) = x^2y + 3xy^4$, aleshores la nostra funció z és $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $h = g \circ f$. Ja que les funcions f i g són diferenciables en tot el seu domini (tenen totes les derivades parcials i són contínues), llavors h és diferenciable.

Calculem les seves matrius jacobianes:

$$Jf = \begin{pmatrix} \dfrac{d\,f_1}{d\,t} \\ \\ \dfrac{d\,f_2}{d\,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad\qquad Jg = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + 3y^4 & x^2 + 12xy^3 \end{pmatrix}$$

$$Jh = Jg \cdot Jf = ((2xy+3y^4)e^t + (x^2+12xy^3)\cos t) = ((2e^t \sin t + 3\sin^4 t)e^t + (e^{2t} + 12\, e^t \sin^3 t)\cos t)$$

En definitiva, $\dfrac{dz}{dt}(t) = h'(t) = (2e^t \sin t + 3\sin^4 t)e^t + (e^{2t} + 12\, e^t \sin^3 t)\cos t$

Molt sovint es fa el càlcul anterior de la següent manera:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2xy + 3y^4)e^t + (x^2 + 12xy^3)\cos t =$$

$$= (2e^t \sin t + 3\sin^4 t)e^t + (e^{2t} + 12\, e^t \sin^3 t)\cos t$$

Exemple 3.5.2. *Si* $z = e^x \sin y$ *on* $x = s\,t\,,\ y = s + t$, *calculau* $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ *i* $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

Solució Si consideram les funcions: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,,\quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definides per $f(s,t) = (s\,t, s+t)\,,\quad g(x,y) = e^x \sin y$, aleshores la nostra funció z és $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $h = g \circ f$. Ja que les funcions f i g són diferenciables en tot el seu domini (tenen totes les derivades parcials i són contínues), llavors h és diferenciable.

Calculem les seves matrius jacobianes:

$$Jf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial s} & \dfrac{\partial f_1}{\partial t} \\ & \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial s} & \dfrac{\partial f_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & s \\ & \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad Jg = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$Jh = Jg \cdot Jf = \begin{pmatrix} e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & s \\ & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} te^x \sin y + e^x \cos y & se^x \sin y + e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} te^{st} \sin(s+t) + e^{st} \cos(s+t) & se^{st} \sin(s+t) + e^{st} \cos(s+t) \end{pmatrix}$$

Com abans, es pot fer de la següent manera

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} &= (e^x \sin y)(t) + (e^x \cos y)(1) \\ &= te^{st} \sin(s+t) + e^{st} \cos(s+t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} &= (e^x \sin y)(s) + (e^x \cos y)(1) \\ &= se^{st} \sin(s+t) + e^{st} \cos(s+t) \end{aligned}$$

3.6 Derivades parcials d'ordre superior

Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ D obert. Suposem que existeixen les derivades parcials de f en cada punt de D, llavors, f_x, f_y són funcions de les quals hi ha la possibilitat de calcular les seves derivades parcials $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, $(f_y)_y$, que reben el nom de **derivades parcials de segon ordre de** f (en el punt considerat). Utilitzarem la següent notació:

$$(f_x)_x \qquad f_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad D_{11}f$$

$$(f_x)_y \qquad f_{xy} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad D_{12}f$$

$$(f_y)_x \qquad f_{yx} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad D_{21}f$$

$$(f_y)_y \qquad f_{yy} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad D_{22}f$$

Observació És important notar com és l'ordre de les variables en les diferents notacions.

De la mateixa manera, cada una d'aquestes derivades parcials de segon ordre pot admetre derivades parcials, obtenint les **derivades parcials de tercer ordre de** f i, així successivament. Per exemple:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = f_{xyx} = D_{121}f$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = f_{xyy} = D_{122}f$$

Exemple 3.6.1. *Donada* $f(x,y) = \sin x \sin^2 y$*, calculau totes les derivades parcials de segon ordre de* f*.*

Solució

$$f_x(x,y) = \cos x \sin^2 y \qquad f_y(x,y) = 2\,\sin x\,\sin y \cos y = \sin x \sin(2y)$$

$$f_{xx}(x,y) = -\sin x \sin^2 y \qquad f_{xy}(x,y) = 2\cos x \sin y \cos y = \cos x \sin(2y)$$

$$f_{yx}(x,y) = \cos x \sin(2y) \qquad f_{yy}(x,y) = 2 \sin x \cos(2y)$$

Observació Notau com en l'exemple es verifica que $f_{xy} = f_{yx}$. Aquest fet no és una casualitat. Les derivades f_{xy}, f_{yx} reben el nom de **derivades creuades** i existeixen moltes funcions que verifiquen la igualtat de les derivades creuades. En el resultat següent veurem respecte quines condicions es verifica aquesta igualtat.

Teorema 3.6.1 (Teorema de Schwarz)**.** *Sigui* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D *obert. Sigui* $(a, b) \in D$*. Si existeix un entorn* U *de* (a, b) *tal que existeixen* f_x, f_y, f_{xy} *per tot punt de* U *i* f_{xy} *és contínua en* (a, b)*, llavors existeix* $f_{yx}(a, b)$ *i es verifica que*

$$f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b)$$

Exemple 3.6.2. *Calculau* f_{xxyz} *si* $f(x, y, z) = \sin(3x + yz)$*.*

Solució Com f és composició de les funcions

$$g(x) = \sin x \qquad h(x, y, z) = 3x + yz$$

que admeten derivades parcials de tots els ordres i són contínues podem fer

$$f_x(x, y, z) = 3\cos(3x + yz), \quad f_{xx}(x, y, z) = -9\sin(3x + yz)$$

$$f_{xxy}(x, y, z) = -9z\cos(3x + yz), \quad f_{xxyz}(x, y, z) = -9\cos(3x + yz) + 9yz\sin(3x + yz).$$

A més, podem assegurar que per aquesta funció es verifica

$$f_{xxyz} = f_{zxxy} = f_{zyxx} = f_{xyzx} = \cdots .$$

3.7 Extrems relatius de funcions de diverses variables

Una de les aplicacions més importants del càlcul diferencial és la recerca de màxims i mínims d'una funció. Hi ha moltes situacions en què és útil saber els valors màxims i mínims d'una funció de diverses variables. Començarem el nostre estudi amb una mica de terminologia.

Definició 3.7.1. *Siga la funció escalar* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *i* $x_0 \in A$*. Direm que* x_0 *és un* ***mínim local (o relatiu) de*** f *si existeix un entorn* V *de* x_0 *tal que per a tot* $x \in V \cap A$ *es verifica que* $f(x) \geq f(x_0)$*. Anàlogament, direm que* x_0 *és un* ***màxim local (o relatiu) de*** f *si existeix un entorn* W *de* x_0 *tal que per a tot* $x \in W \cap A$ *es verifica que* $f(x) \leq f(x_0)$*.*

Direm que x_0 *és una* ***extrem local (o relatiu) de*** f *si és un màxim o un mínim local de* f*. Si* x_0 *és un punt de* A *tal que* $f(x) \geq f(x_0)$ *per a tot* $x \in A$*, aleshores direm que* x_0 *és un* ***mínim absolut (o global) de*** f*. Anàlogament, si* $f(x) \leq f(x_0)$ *per a tot* $x \in A$*, llavors direm que* x_0 *és un* ***màxim absolut (o global) de*** f*.*

El següent teorema proporciona, respecte a certes hipòtesis, una condició necessària que ha de verificar un extrem relatiu.

Teorema 3.7.1. *Sigui* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un obert i* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funció diferenciable en* $x_0 \in U$ *. Si* x_0 *és un extrem relatiu de* f *llavors* $Df(x_0) = 0$*.*

Definició 3.7.2. *Sigui* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un obert i* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funció diferenciable en* $x_0 \in U$*. Si* $Df(x_0) = 0$ *direm que* x_0 *és un* ***punt crític de*** f *(punt estacionari). Si* x_0 *és un punt crític de* f *que no és ni màxim ni mínim de* f *direm que és un* ***punt de sella de*** f*.*

Observació El nom de punt de sella ve explicat pel següent exemple. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida per $f(x, y) = x^2 - y^2$. Aquesta funció té un punt de sella en el $(0, 0)$ i la seva gràfica sembla una sella de muntar (veure figura 3).

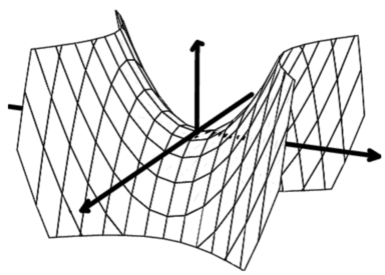

Figura 3: Gràfica de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Estudiant la gràfica de la funció f podem veure que $f(0, 0)$ és un màxim en la direcció de l'eix x, però que és un mínim en la direcció de l'eix y (quan tallem la superfície amb plans paral.lels al pla yz i xz respectivament).

Tenim que f és diferenciable en tot $\mathbb{R}^2$ i verifica

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Per tant $(0, 0)$ és un punt crític. A més, és un punt de sella ja que per tot $r > 0$ hi ha punts de la bolla $B((0, 0), r)$, tals que:

$$f(r/2, 0) = r^2/4 > 0 \qquad f(0, r/2) = -r^2/4 < 0$$

Exemple 3.7.1. *Calcular els màxims i mínims de la funció* $f(x, y) = x^2 + y^2$*.*

Solució Observam que $f(x, y) = x^2 + y^2$ és una funció diferenciable en $\mathbb{R}^2$, per tant, els extrems de f s'han de trobar entre el conjunt de punts crítics de f.

Calculem els punts crítics de f resolent el sistema de equacions

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

L'únic punt crític de f és el punt $(x,y) = (0,0)$ i el seu valor és $f(0,0) = 0$. Observem que $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0)$ per tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, per tant en el punt $(0,0)$ la funció f assoleix el seu mínim. De fet és un mínim global. Observau que la gràfica de f és un paraboloide.

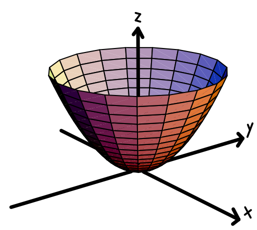

Figura 4: Gràfica de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Exemple 3.7.2. *Calcular els màxims i mínims de la funció* $f(x,y) = x^2+y^2-2x-6y+14$.

Solució Observam que igual que abans, f és una funció diferenciable en tot $\mathbb{R}^2$, per tant, els extrems de f s'han de trobar entre el conjunt de punts crítics de f.

Calculem els punts crítics de f resolent el sistema de equacions

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2 = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

L'únic punt crític de f és el punt $(x,y) = (1,3)$ i el seu valor és $f(1,3) = 4$. Completant quadrats podem veure que

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4 \geq 4 = f(1,3) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

D'aquí $f(1,3) = 4$ és un valor mínim de f. De fet en el aquest punt la funció assoleix el seu mínim global.

Per tal d'obtenir condicions suficients per l'existència d'extrems relatius definim primer el següent concepte.

Definició 3.7.3. *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Suposem que f té totes les derivades de segon ordre en el punt $x_0 \in U$. Anomenam* ***matriu hessiana de f a x_0*** *a la matriu*

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Ara ja podem establir diversos criteris per tal de classificar els punts crítics d'una funció f.

Teorema 3.7.2. *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció que admet totes les derivades parcials segones i són contínues. Sigui $x_0 \in U$ un punt crític de f. Sigui $Hf(x_0)$ la seva matriu hessiana. Llavors:*

a) f té un mínim relatiu en x_0 si, i només si, tots els valors propis de $Hf(x_0)$ són positius.

b) f té un màxim relatiu en x_0 si, i només si, tots els valors propis de $Hf(x_0)$ són negatius.

c) f té un punt de sella en x_0 si, i només si, $Hf(x_0)$ té valors propis positius i negatius.

Teorema 3.7.3. *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció que admet totes les derivades parcials segones i són contínues. Sigui $x_0 \in U$ un punt crític de f. Sigui $Hf(x_0)$ la seva matriu hessiana, i sigui Δ_k el seu menor principal d'ordre k. Llavors:*

a) Si $\Delta_k > 0 \;\; k = 1, \ldots, n$, llavors f té un mínim relatiu en x_0.

b) Si $(-1)^k \Delta_k > 0 \;\; k = 1, \ldots, n$, llavors f té un màxim relatiu en x_0.

Observació Els dos resultats anteriors no cobreixen totes les possibilitats. En els casos no contemplats, hi ha que fer altres estudis per poder decidir quin tipus de punt crític tenim.

En el cas $n = 2$ podem escriure el següent resultat.

Teorema 3.7.4. *Sigui $U \subset \mathbb{R}^2$ un obert i $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció que admet totes les derivades parcials segones i són contínues. Sigui $(a,b) \in U$ un punt crític de f. Considerem*

$$Hf(a,b) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \quad \textit{i sigui} \quad \Delta = AC - B^2.$$

a) Si $\Delta > 0$ i $A > 0$, llavors f té un mínim local en (a,b).

b) Si $\Delta > 0$ i $A < 0$, llavors f té un màxim local en (a,b).

c) Si $\Delta < 0$, llavors f té un punt de sella en (a,b).

d) Si $\Delta = 0$, no podem dir res sobre el punt (a,b).

Exemple 3.7.3. *Trobau els extrems de la funció $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.*

Solució Trobem primer els punts crítics de f resolent el sistema d'equacions

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ \\ y^3 - x = 0. \end{cases}$$

Per resoldre el sistema d'equacions prenem $y = x^3$ de la primera equació i la substituïm en la segona, obtenint

$$\begin{aligned} x^9 - x = x(x^8 - 1) &= x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \\ &= x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) \end{aligned}$$

així, les solucions són $x = 0$, $x = 1$ i $x = -1$. Els punts crítics són $(0,0)$, $(1,1)$ i $(-1,-1)$. Per classificar-lo utilitzem el teorema anterior. Calculem primer la matriu hessiana.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}, \qquad \Delta = 144x^2y^2 - 16 \quad \text{i} \quad A = 12x^2$$

Considerant cada un dels punts crítics obtinguts tenim que:

$(0,0)$: $\Delta(0,0) = -16 < 0$, llavors en $(0,0)$ la funció té un punt de sella.

$(1,1)$: $\Delta(1,1) = 144 - 16 > 0$ i $A = 12 > 0$, llavors en $(1,1)$ la funció assoleix un mínim local.

$(-1,-1)$: $\Delta(-1,-1) = 144 - 16 > 0$ i $A = 12 > 0$, llavors la funció té en $(-1,-1)$ un mínim local.

Exemple 3.7.4. *Trobau els màxims i mínims relatius de la funció*

$$f(x,y) = x^2 e^{-x^2-y^2}$$

Solució Per calcular els punts crítics de f calculem primer les seves derivades parcials

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x - 2x^3)e^{-x^2-y^2} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x^2 y e^{-x^2-y^2}$$

Un punt (x,y) serà un extrem relatiu de f si

$$\left.\begin{aligned} (2x-2x^3)e^{-x^2-y^2} &= 0 \\ -2x^2ye^{-x^2-y^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x(1-x^2) &= 0 \\ x^2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

De la primera equació obtenim $x = 0$ o $x = \pm 1$.

Si $x = 0$, de la segona equació y pot prendre qualsevol valor. Obtenim, per tant, els punts $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Si $x = \pm 1$, de la segona equació $y = 0$. Obtenim, per tant, els punts $(1,0)$, $(-1,0)$.

Per classificar els punts crítics calculem en primer lloc les derivades parcials de segon ordre de f.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= (2 - 10x^2 + 4x^4)e^{-x^2-y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 4y(x^3 - x)e^{-x^2-y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2x^2 e^{-x^2-y^2}(2y^2 - 1) \end{aligned}$$

Així, considerant cada un dels punts crítics i avaluant les derivades parcials de segon ordre en cada un d'ells obtenim el següent.

Punt $(0,y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,y) = 2e^{-y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,y) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,y) = 0.$$

Així, com

$$\begin{vmatrix} 2e^{-y^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

el criteri no decideix. Però com $f(0,y)=0$, i en qualsevol entorn del punt $(0,y)$, si (u,v) és un punt d'aquest entorn es té que $f(u,v)=u^2e^{-u^2-v^2}\geq 0=f(0,y)$, tenim que en els punts de la forma $(0,y)$ la funció f assoleix mínims relatius. A més el seu valor és $f(0,y)=0$.

Punts $(1,0),(-1,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1,0)=-4e^{-1},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\pm 1,0)=0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\pm 1,0)=-2e^{-1}.$$

Així, com

$$\begin{vmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{vmatrix}=8e^{-2}>0,\quad \text{i}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1,0)=-4e^{-1}<0$$

tenim que en els punts $(1,0),(-1,0)$ la funció f arriba a un màxim relatiu. La funció val $f(1,0)=f(-1,0)=1/e$.

3.7.1 Extrems absoluts

Ja hem vist en el tema de continuïtat el Teorema de Weierstrass que ens diu que si $K\subset\mathbb{R}^n$ és un conjunt compacte i si $f:K\longrightarrow\mathbb{R}$, és una funció contínua en K, llavors f té un màxim i un mínim absoluts en K. Ara bé, pot passar que s'agafin en un punt interior de K o en la frontera de K.

Si f és diferenciable a l'interior de K, llavors si aquests extrems es troben en l'interior de K, es donaran en punts crítics de f.

Així, per calcular els extrems absoluts de f, si f és contínua en K i diferenciable a l'interior de K, hem de fer el següent:

1) Trobar els punts crítics de f en l'interior de K. Després avaluar f en aquests punts.

2) Trobar els extrems de f a la frontera de K.

3) Comparar els valors obtinguts en 1) i 2) per determinar els extrems absoluts.

Exemple 3.7.5. *Trobau els extrems absoluts de la funció $f(x,y)=x^2-2xy+2y$ en el rectangle $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,0\leq x\leq 3,\,0\leq y\leq 2\}$.*

Solució Com f és un polinomi és una funció contínua i C és un compacte, podem afirmar que f té extrems absoluts en C.

Calculem primer el punts crítics de f a l'interior de C.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-2y=0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2x+2=0 \end{cases}$$

llavors l'únic punt crític en l'interior de C és el punt $(1,1)$. Ara com

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 2 \cdot 0 - (-2)^2 = -4 < 0$$

tenim que en el punt $(1,1)$ la funció f assoleix un punt de sella.

Estudiem ara que passa a la frontera.

* $x = 3:\quad f(3,y) = 9 - 4y\,,\quad 0 \le y \le 2\,.$ Ja que $f(3,y)$ és una funció decreixent en y així, el màxim s'assoleix en $y = 0$ i el mínim a $y = 2$ i valen $f(3,0) = 9 \quad f(3,2) = 1$.
* $x = 0:\quad f(0,y) = 2y\,,\quad 0 \le y \le 2\,.$ Ja que $f(0,y)$ és una funció creixent en y així, el màxim s'assoleix a $y = 2$ i el mínim a $y = 0$ i valen $f(0,2) = 4 \quad f(0,0) = 0$.
* $y = 2:\quad f(x,2) = (x-2)^2\,,\quad 0 \le x \le 3\,.$ Com $f'(x) = 2(x-2)$, llavors $x = 2$ és el punt on $f(x,2)$ té el seu mínim (ja que $f''(x) = 2 > 0$) i val $f(2,2) = 0\,.$ El màxim ho aconsegueix en el punt $x = 0$ ja que $f(0,2) = 4 \quad f(3,2) = 1$.
* $y = 0:\quad f(x,0) = x^2\,,\quad 0 \le x \le 3$, que és una funció creixent en l'interval $[0,3]$. Així, el màxim l'assoleix en el punt $x = 3$ i el mínim en el punt $x = 0$ i valen $f(3,0) = 9 \quad f(0,0) = 0$.

Comparant entre si els màxims i els mínims, tenim que el màxim absolut s'assoleix en el punt $(3,0)$ i el seu valor és $f(3,0) = 9$, i el mínim absolut s'assoleix en els punts $(0,0)$ i $(2,2)$ i el seu valor és $f(0,0) = f(2,2) = 0$.

Exemple 3.7.6. *Trobau els extrems absoluts de la funció* $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ *en la regió* $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \le 1\}$.

Solució Com f és un polinomi és una funció contínua i K és un compacte, podem afirmar que f té extrems absoluts en K.

Calculem primer el punts crítics de f a l'interior de K.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

llavors l'únic punt crític en l'interior de K és el punt $(1/2, 1/2)$. Ara com

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 2 \cdot 2 - (0)^2 = 4 > 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1/2,1/2) > 0$$

tenim que en el punt $(1/2,1/2)$ la funció f assoleix un mínim local i val $f(1/2,1/2) = 1/2$.

Estudiem ara que passa a la frontera de K. La podem expressar com

$$\partial K = \{(\cos\theta, \sin\theta) \ : \ \theta \in [0, 2\pi]\}$$

llavors f sobre la frontera ve donada per la funció

$$g(\theta) = 2 - \cos\theta - \sin\theta$$

D'on

$$g'(\theta) = \sin\theta - \cos\theta\,, \qquad g''(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$$

Per tant

$$g'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = \cos\theta \Rightarrow \theta \in \{\pi/4, 5\pi/4\}$$

i ja que $g''(\pi/4) = \sqrt{2} > 0\,,$ $\quad g''(5\pi/4) = -\sqrt{2} < 0$ tenim que g té un mínim en $\theta = \pi/4$ que correspon al punt $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ i un màxim en $\theta = 5\pi/4$ que correspon al punt $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Avaluant la funció en aquests punts podrem decidir els extrems absoluts:

$f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = 2 - \sqrt{2} \approx 0.58 \qquad f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = 2 + \sqrt{2} \approx 3.41.$

En definitiva, en $(1/2, 1/2)$ tenim un mínim absolut de f i val $1/2$, i en $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ tenim un màxim absolut de f i val $2 + \sqrt{2}$.