Examen Parcial de Fonaments Matemàtics II.
(febrer 2000)

P1.- Considerau les següents operacions sobre $\mathbb{R}$:

$$x \triangle y = x + y + 4 \qquad x * y = xy + ax + ay + 12$$

per a tots $x, y \in \mathbb{R}$

a) Demostreu que $(\mathbb{R}, \triangle)$ té estructura de grup abelià. **(0.5 pt.)**

b) Per a quins valors de $a \in \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \triangle, *)$ té estructura d'anell commutatiu?. **(0.5 pt.)**

c) Per a quins valors de $a \in \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \triangle, *)$ té estructura de cos? **(0.5 pt.)**

P2.- Calculeu el següent determinant:

$$\begin{vmatrix} a^2 - b^2 & a(a+b) & -b(a+b) \\ \ln(ab) & \ln a & \ln b \\ \sqrt{12} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1.5 pt.)}$$

P3.- Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ i $A = \begin{pmatrix} -1 & -a & a^2 \\ a & -a^2 & a \\ a & 1 & -a^3 \end{pmatrix}$

a) Calculeu el rang de A segons els valor de a. **(0.75 pt.)**

b) Calculeu A^{-1} quan A sigui invertible. **(0.75 pt.)**

c) Resoleu el següent sistema d'equacions lineals segons el valors dels paràmetres a i b. **(1 pt.)**

$$A. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

P4.- Considereu el conjunt $B = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 | a - b + c + d = 0\}$

a) Determineu si B és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$. **(0.5 pt.)**

b) Completeu a una base de B : $\{(0, 0, -1, 1)\}$. **(0.75 pt.)**

c) Trobeu, si existeix, un altre subespai A tal que $A \bigoplus B = \mathbb{R}^4$. **(0.75 pt.)**

P5.- Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(x, y, z) = (x + z, 0, x + y)$$

a) Demostreu que f és una aplicació lineal. **(0.5 pt.)**

b) Calculeu el nucli i el conjunt imatge de l'aplicació f i doneu una base i la dimensió. **(1 pt.)**

c) Determineu si f és injectiva i si és exhaustiva. **(1 pt.)**

Duració de l'examen 3:30 hores.