Fonaments Matemàtiques II

Àlgebra Lineal

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears

Manuel Moyà Quintero

Índex

1 Matrius **3**

2 Determinants **17**

3 Sistemes d'equacions lineals **33**

4 Espais Vectorials **45**

5 Aplicacions lineals **83**

6 Valors i vectors propis d'un endomorfisme **101**

7 Espais Euclidians **113**

Capítol 4

Espais Vectorials

Nota: Anomenam **cos** a un conjunt K amb dues operacions internes " + " i "." amb les següents propietats:

a) Respecte a l'operació " + ":

- Associativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$ per a tot $a, b, c \in K$.
- Commutativa: $a+b = b+a$ per a tot $a, b \in K$
- Existència d'element neutre $\mathbf{0}$ que compleix: $a+\mathbf{0} = \mathbf{0}+a = a$ per a tot $a \in K$
- Cada element $a \in K$ té oposat $-a \in K$ que compleix: $a+(-a) = (-a)+a = \mathbf{0}$.

b) Respecte a l'operació "."

- Associativa: $(a.b).c = a.(b.c)$ per a tot $a, b, c \in K$.
- Commutativa: $a.b = b.a$, per a tot $a, b \in K$
- Existeix element neutre $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ que compleix: $a.\mathbf{1} = \mathbf{1}.a = a$ per a tot $a \in K$.
- Tot element $a \in K$ excepte el $\mathbf{0}$ té invers a^{-1} que compleix: $a.a^{-1} = a^{-1}.a = \mathbf{1}$.

c) Distributiva de "." respecte a " + ": $a.(b+c) = a.b + a.c$ per a tot $a, b, c \in K$

Exemples: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ són cossos.

Sigui K un cos.

Definició 4.1 *Anomenam* ***espai vectorial sobre*** K *a un conjunt* V *dotat d'una operació interna* $(+)$*, i una externa* $(.)$ *que opera elements d'un cos* K *amb elements de* V*. Aquestes operacions compleixen les següents propietats:*

Siguin $u, v, w \in V$ *i* $t, s \in K$*,*

1. *Amb l'operació interna "+":*

   a) *Associativa:* $(u+v)+w = u+(v+w)$.
   b) *Commutativa:* $u+v = v+u$.
   c) *Existència d'element neutre* $\bar{0}$ *que compleix:* $u+\bar{0} = \bar{0}+u = u$.
   d) *Cada element* $u \in V$ *té oposat* $-u \in V$ *que compleix:* $u+(-u) = (-u)+u = \bar{0}$.

2. *Amb l'operació externa "."*:

   a) $t(u+v) = tu+tv$
   b) $(t+s)u = tu+su$
   c) $t(su) = (ts)u$
   d) $1.u = u$

Als elements de V els anomenarem **vectors** i als de K **escalars**.

Exemples:

1. El conjunt dels vectors lliures del pla.
2. El conjunt $\mathbb{R}^2$ amb les operacions: $(a,b)+(a',b') = (a+a', b+b')$ i $t(a,b) = (ta, tb)$.
   Com a casos particulars podem posar:
   $$(3,2)+(-3,5) = (0,7); \qquad 5(2,-3) = (10,-15)$$
3. El conjunt $\mathbb{R}^n$ amb les operacions:
   - "+": $(a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n) = (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$.
   - ".": $t(a_1,\ldots,a_n) = (ta_1,\ldots,ta_n)$.

   que és una generalització de l'exemple anterior.
4. El conjunt $\mathbb{R}_2[x] = \{a_0+a_1x+a_2x^2 | a_0,a_1,a_2 \in K\}$ que és el conjunt de polinomis de grau 2 amb la suma i producte habituals.
   Com a casos particulars podem posar:
   $$(3+2x-3x^2)+(-3+5x+2x^2) = 7x-x^2; \qquad 5(3+2x-3x^2) = 15+10x-15x^2$$
5. El conjunt de polinomis
   $\mathbb{R}[x] = \{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n | a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$
   amb les operacions suma i producte habituals. Que és una generalització de l'exemple anterior.

Proposició 4.2 *Es compleix, per a tot $u \in V$ i per a tot $t \in K$:*

1. $0.u = \bar{0}$.
2. $t.\bar{0} = \bar{0}$.
3. $-u = (-1).u$
4. *Si* $t.u = 0$, *aleshores* $t = 0$ *o* $u = \bar{0}$

DEMOSTRACIÓ:

1) $(t+0).u = t.u + 0.u$, per tant, $t.u = t.u + 0.u$ i aïllant, $0.u = \bar{0}$

2) $t.(u+\bar{0}) = t.u + t.\bar{0}$, per tant, $t.u = t.u + t.\bar{0}$ i aïllant, $t.\bar{0} = \bar{0}$

3) $u + (-1).u = 1.u + (-1).u = (1 + (-1)).u = 0.a = \bar{0}$

4) Sigui $t.u = \bar{0}$. Suposem $t \neq 0$, aleshores $t^{-1}.t.u = 0$ i per tant, $1.u = u = \bar{0}$.

Sigui $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una família finita de vectors de V.

Definició 4.3 *Anomenam* ***combinació lineal*** *dels vectors $\{u_1, \ldots, u_n\}$ a qualsevol vector $u = t_1u_1 + \ldots + t_nu_n$, amb $t_1, \ldots, t_n \in K$.*
També direm que el vector u ***depèn linealment*** *dels vectors $\{u_1, \ldots, u_n\}$.*

Exemple: En $\mathbb{R}^3$, si volem posar el vector $(-1, 13, -1)$ en combinació lineal dels vectors $(1, 2, 1), (-1, 3, -1)$ farem:

$$(-1, 13, -1) = x(1, 2, 1) + y(-1, 3, -1) = (x - y, 2x + 3y, x - y)$$

igualant tenim el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x - y & = & -1 \\ 2x + 3y & = & 13 \\ x - y & = & -1 \end{array}\right\}$$

que resolent ens queda $x = 2,\ y = 3$. És a dir,

$$(-1, 13, -1) = 2(1, 2, 1) + 3(-1, 3, -1)$$

Definició 4.4 *Direm que S és un* ***subespai vectorial*** *de V si $S \subseteq V$ i és espai vectorial amb les operacions de V.*

Exemple: $S = \{(x, y, 0)|x, y \in \mathbb{R}\}$ és un subespai vectorial de R^3 ja que compleix les següents propietats:

1. Respecte a l'operació " + ":
   a) Associativa: $((x_1, y_1, 0)+(x_2, y_2, 0))+(x_3, y_3, 0) = (x_1, y_1, 0)+((x_2, y_2, 0)+(x_3, y_3, 0))$. (La demostració es deixa pel lector).
   b) Commutativa: $(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_2, y_2, 0) + (x_1, y_1, 0)$. (La demostració es deixa pel lector).
   c) Existència d'element neutre $\mathbf{0}$= $(0, 0, 0)$ que compleix: $(x, y, 0)+(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, com es veu fàcilment.
   d) Cada element $(x, y, 0) \in S$ té oposat $-(x, y, 0) \in K$ que és $(-x, -y, 0)$ i que compleix: $(x, y, 0) + (-x, -y, 0) = (0, 0, 0)$.
2. Respecte a l'operació "." (les demostracions es deixen pel lector)
   a) $t((x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0)) = t(x_1, y_1, 0) + t(x_2, y_2, 0)$
   b) $(t + s)(x, y, 0) = t(x, y, 0) + s(x, y, 0)$
   c) $t(s(x, y, 0)) = (ts)(x, y, 0)$
   d) $1.(x, y, 0) = (x, y, 0)$

Proposició 4.5 *$S \subseteq V$ és un subespai vectorial de V si i només si compleix*

a) Si $u, v \in S$ aleshores $u + v \in S$

b) Si $t \in K$ i $u \in S$ aleshores $tu \in S$.

DEMOSTRACIÓ:

$\Rightarrow$) És evident, ja que si S és un subespai vectorial, té "+çom operació interna, per tant, $u + v \in S$ si $u, v \in S$, i ".çom operació externa, per tant, $tu \in S$ si $u \in S$ i $t \in K$.

$\Leftarrow$) Vegem que S amb les operacions "+ï ".çompleix les propietat d'espai vectorial. Siguin $u, v, w \in V$ i $t, s \in K$,

1. Amb l'operació interna "+":
   a) Associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$. Es compleix, ja que els elements de V, i per tant els d'S compleixen aquesta propietat.
   b) Commutativa: $u + v = v + u$. Pel mateix motiu que l'anterior.
   c) Existència d'element neutre $\bar{0}$: Hem de veure que $\bar{0} \in S$.

      Efectivament, com $0 \in K$ tenim per hipòtesi $0.u \in S$ per a tot $u \in S$. Ara bé, per la proposició 4.2, $0.u = \bar{0}$, per tant, $\bar{0} \in S$.

d) Cada element $u \in S$ té oposat $-u \in S$ que compleix: $u + (-u) = (-u) + u = \bar{0}$. Efectivament, sabem que si $u \in S$, existeix oposat $-u$ dins V, i hem de veure que aquest $-u$ pertany a S.

Sabem, per la proposició 4.2 que $-u = (-1).u$, i per hipòtesi $(-1).u \in S$, per tant, $-u \in S$.

2. Amb l'operació externa ".":

a) $t(u + v) = tu + tv$

b) $(t + s)u = tu + su$

c) $t(su) = (ts)u$

d) $1.u = u$

Es compleixen totes ja que els elements d'S són també elements de V.

Exemple 1: Demostrem que $S = \{(x, y, 0)|x, y \in \mathbb{R}\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ (Aquest exemple l'hem resolt a l'exemple de la definició 4.4 d'una forma més llarga)
Vegem que compleix les dues condicions:

a) $(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0) \in S$, vegem que la suma també pertany a S

$$(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in S$$

b) Sigui $t \in K$ i $(x, y, 0) \in S$, vegem que $t(x, y, 0) \in S$. Efectivament,

$$t(x, y, 0) = (tx, ty, 0) \in S$$

Per tant S és un subespai de V

Exemple 2: Vegem que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3|2x + y + z = 4\}$ no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$

Efectivament, sigui $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in S$, això ens diu que $2x_1 + y_1 + z_1 = 4$ i $2x_2 + y_2 + z_2 = 4$.

Considerem la suma:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

i hem de veure si compleix la condició de pertànyer a S:

$$2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (2x_1 + y_1 + z_1) + (2x_2 + y_2 + z_2) = 4 + 4 = 8$$

per tant no pertany a S i aleshores S no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$

Exemple 3: Vegem que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x+y+z = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$

Efectivament, sigui $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in S$, això ens diu que $2x_1 + y_1 + z_1 = 0$ i $2x_2 + y_2 + z_2 = 0$.

Considerem la suma:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

i hem de veure si compleix la condició de pertànyer a S:

$$2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (2x_1 + y_1 + z_1) + (2x_2 + y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$$

per tant pertany a S

Considerem ara el producte per un nombre, sigui $t \in \mathbb{R}$ i $(x, y, z) \in S$. Això darrer ens diu que es compleix $2x + y + z = 0$. Vegem que $t(x, y, z) \in S$. Efectivament,

$$t(x, y, z) = (tx, ty, tz)$$

i hem de veure si compleix la condició de pertànyer a S:

$$2tx + ty + tz = t(2x + y + z) = t.0 = 0$$

per tant, pertany a S. Aleshores S és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 4: Vegem que $W = \{a+bx+cx^2 | a, b, c \in \mathbb{R}, a+b-c = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$.

Efectivament, sigui $a_1+b_1x+c_1x^2, a_2+b_2x+c_2x^2 \in S$, això ens diu que $a_1+b_1-c_1 = 0$ i $a_2 + b_2 - c_2 = 0$.

Considerem la suma:

$$(a_1 + b_1x + c_1x^2) + (a_2 + b_2x + c_2x^2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2$$

i hem de veure si compleix la condició de pertànyer a S:

$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2) = (a_1 + b_1 - c_1) + (a_2 + b_2 - c_2) = 0 + 0 = 0$$

per tant pertany a S

Considerem ara el producte per un nombre, sigui $t \in \mathbb{R}$ i $a + bx + cx^2 \in S$. Això darrer ens diu que es compleix $a + b - c = 0$. Vegem que $t(a + bx + cx^2) \in S$. Efectivament,

$$t(a + bx + cx^2) = ta + tbx + tcx^2$$

i hem de veure si compleix la condició de pertànyer a S:

$$ta + tb - tc = t(a + b - c) = t.0 = 0$$

per tant, pertany a S. Aleshores S és un subespai vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exemple 5: Demostrau que el conjunt de les matrius simètriques S de $M_2(\mathbb{R})$ formen un subespai vectorial de $M_2(\mathbb{R})$

Efectivament, sigui $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \in S$

Considerem la suma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in S$$

ja que també és simètrica.

Considerem ara el producte per un nombre, sigui $t \in \mathbb{R}$ i $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S$,

$$t \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & tb \\ tb & tc \end{pmatrix} \in S$$

ja que també és simètrica. Aleshores S és un subespai vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

Proposició 4.6 *$S \subseteq V$ és un subespai vectorial de V si i només si es compleix $t, s \in K$ i $u, v \in S$ aleshores $tu + sv \in S$.*

DEMOSTRACIÓ:

$\Rightarrow$) Per la proposició 4.5 $tu, sv \in S$ i per tant, per la mateixa proposició $tu + sv \in S$

$\Leftarrow$) Vegem si compleix les condicions de la proposició 4.5. Efectivament, fent $t = s = 1$ tenim que $u + v \in S$ i fent $s = 0$ tenim que $tu \in S$, per tant com compleix les condicions, S és un subespai vectorial de V.

Exemple: Demostrem que el conjunt de les matrius simètriques S de $M_2(\mathbb{R})$ formen un subespai vectorial de $M_2(\mathbb{R})$

Aquest exercici està resolt a la proposició 4.5. Ho farem ara aplicant aquesta proposició. Sigui $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \in S$ i $t, s \in \mathbb{R}$,

$$t \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_1 + sa_2 & tb_1 + sb_2 \\ tb_1 + sb_2 & tc_1 + sc_2 \end{pmatrix} \in S$$

ja que és simètrica. Per tant, S és un subespai vectorial de $M_2(\mathbb{R})$

Proposició 4.7 *Si $u_1, \ldots, u_n \in V$, el conjunt de totes les combinacions lineals d'aquests vectors formen un subespai vectorial de V.*

DEMOSTRACIÓ:

Sigui $S = \{t_1u_1 + \ldots + t_nu_n | t_1, \ldots, t_n \in K\}$ el conjunt de totes les combinacions lineals de $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Vegem que és un subespai vectorial de V. Per a això siguin $t, s \in K$ i $t_1u_1 + \ldots + t_nu_n, s_1u_1 + \ldots + s_nu_n \in S$,

$$t(t_1u_1 + \ldots + t_nu_n) + s(s_1u_1 + \ldots + s_nu_n) = tt_1u_1 + \ldots + tt_nu_n + ss_1u_1 + \ldots + ss_nu_n =$$

$$= (tt_1 + ss_1)u_1 + \ldots + (tt_n + ss_n)u_n \in S$$

Per tant, S és un subespai vectorial de V.

Exemple 1: Vegem que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + y + z = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$. Aquest exercici es va resoldre a la proposició 4.5. Ara el resoldrem d'una altra forma més ràpida.

Per demostrar que S és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ basta veure que S està format per totes les combinacions lineals d'elements d'$\mathbb{R}^3$. Efectivament, si $(x, y, z) \in S$ es compleix la condició $2x + y + z = 0$, és a dir, $z = -2x - y$. Per tant els elements d'S són de la forma $(x, y, -2x - y)$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}$, aleshores

$$(x, y, z) = (x, y, -2x - y) = (x, 0, -2x) + (0, y, -y) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, -1)$$

És a dir S està format per totes les combinacions lineals de $\{(1, 0, -2), (0, 1, -1)\}$ i per tant és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2: Demostrem que el conjunt S de les matrius sobre $\mathbb{R}$ de la forma:

$$\begin{pmatrix} a+c & 2a+b & a-c \\ a-b+2c & 0 & a+2b \\ 2b+c & a+b & a-b \end{pmatrix}$$

formen un subespai vectorial de $M_3(\mathbb{R})$.

Efectivament,

$$\begin{pmatrix} a+c & 2a+b & a-c \\ a-b+2c & 0 & a+2b \\ 2b+c & a+b & a-b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & 2a & a \\ a & 0 & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ 2b & b & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & -c \\ 2c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant S està format per totes les combinacions lineals de

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

i per tant és un subespai vectorial de $M_3(\mathbb{R})$

Definició 4.8 *Al subespai vectorial S format per totes les combinacions lineals dels vectors $\{u_1, \ldots, u_n\}$ l'anomenarem **clausura lineal** dels vectors $\{u_1, \ldots, u_n\}$.*

*També direm que S està **generat** pels vectors $\{u_1, \ldots, u_n\}$ i que aquest és un **sistema generador** de S i l'escriurem: $S =< u_1, \ldots, u_n >$.*

Exemple 1: Trobem un sistema generador de l'espai vectorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + y + z = 0\}$.

Hem vist a la proposició 4.7 que S era un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ i per tant un espai vectorial. També hem vist que els elements de S són de la forma

$$(x, y, -2x - y) = (x, 0, -2x) + (0, y, -y) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, -1)$$

per tant, $\{(1, 0, -2), (0, 1, -1)\}$ és un sistema generador de S i podem posar

$$S =< (1, 0, -2), (0, 1, -1) >$$

Exemple 2: Trobem un sistema generador de l'espai vectorial S format per les matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} a + c & 2a + b & a - c \\ a - b + 2c & 0 & a + 2b \\ 2b + c & a + b & a - b \end{pmatrix}$$

Hem vist a la proposició 4.7 que S era un subespai vectorial de $M_3(\mathbb{R})$ i per tant un espai vectorial. També hem vist que els elements de S són de la forma

$$a\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant,
$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$
és un sistema generador d'S i podem posar
$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Definició 4.9 *Direm que els vectors $u_1, \ldots, u_n \in V$ són* ***linealment dependents*** *si existeix una combinació lineal $t_1u_1 + \ldots + t_nu_n = \bar{0}$ amb qualque $t_i \neq 0$.*

Si els vectors $u_1, \ldots, u_n \in V$ no són linealment dependents direm que són ***linealment independents****. O el que és igual si*
$$t_1u_1 + \ldots + t_nu_n = \bar{0} \Rightarrow t_1 = \ldots = t_n = 0$$

Exemple 1: Estudiem la dependència o independència lineal dels vectors de $\mathbb{R}^3$ $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$

Considerem una combinació lineal qualsevol igualada a zero:
$$t(1,1,0) + s(0,1,1) + r(1,0,1) = (0,0,0)$$
i hem de veure si t, s o r han de ser zero o diferent de zero.
$$(0,0,0) = t(1,1,0) + s(0,1,1) + r(1,0,1) = (t,t,0) + (0,s,s) + (r,0,r) =$$
$$= (t+r, t+s, s+r)$$
i hem de resoldre el sistema
$$\left.\begin{array}{rcl} t+r & = & 0 \\ t+s & = & 0 \\ s+r & = & 0 \end{array}\right\}$$
que és un sistema homogeni i el determinant de la matriu dels coeficients és
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

per tant $rang\ M = 3 = rang\ A =$ nombre d'incògnites. Per tant el sistema és compatible i determinat i la solució és $t = s = r = 0$ com a solució única. Aleshores els vectors són linealment independents.

Exemple 2: Estudiem la dependència o independència lineal dels vectors de $\mathbb{R}^3$ $\{(1,2,0),(0,-2,1),(2,-2,3)\}$

De forma similar a com hem fet abans, igualarem a zero una combinació lineal dels vectors

$$(0,0,0) = t(1,2,0) + s(0,-2,1) + r(2,-2,3) = (t+2r, 2t-2s-2r, s+3r)$$

i hauríem de resoldre el sistema homogeni

$$\left.\begin{array}{rcl} t+2r & = & 0 \\ 2t-2s-2r & = & 0 \\ s+3r & = & 0 \end{array}\right\}$$

Ho farem per Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant $rang\ M = 2 = rang\ A <$ nombre d'incògnites. Per tant el sistema és compatible i indeterminat. Té infinites solucions. El sistema ens quedaria de la següent forma:

$$\left.\begin{array}{rcl} t+2r & = & 0 \\ s+3r & = & 0 \end{array}\right\}$$

que resolent ens queda: $s = -3r$ i $t = -2r$ i donant a r un valor qualsevol diferent de zero, per exemple 1, tendríem que $s = -3$ i $t = -2$ i obtendríem la següent combinació lineal:

$$-2(1,2,0) - 3(0,-2,1) + (2,-2,3) = (0,0,0)$$

és a dir, una combinació lineal igual a zero, amb algun coeficient diferent de zero. Per tant són linealment dependents.

Proposició 4.10 *Els vectors $u_1, \ldots, u_m$ són linealment dependents si i només si algun d'ells és combinació lineal dels altres.*

Demostració:

$\Rightarrow$) Si són linealment dependents, existeix una combinació lineal igualada a zero, amb algun coeficient diferent de zero,

$$t_1u_1 + \ldots + t_iu_i + \ldots + t_mu_m = \bar{0}$$

algun coeficient ha de ser diferent de zero, suposem que és t_i. Per tant aïllant u_i,

$$t_iu_i = t_1u_1 + \ldots + t_{i-1}u_{i-1} + t_{i+1}u_{i+1} + \ldots + t_mu_m$$

i com $t_i \neq 0$ té invers,

$$t_i^{-1}t_iu_i = t_i^{-1}(t_1u_1 + \ldots + t_{i-1}u_{i-1} + t_{i+1}u_{i+1} + \ldots + t_mu_m)$$

i d'aquí obtenim:

$$u_i = (t_i^{-1}t_1)u_1 + \ldots + (t_i^{-1}t_{i-1})u_{i-1} + (t_i^{-1}t_{i+1})u_{i+1} + \ldots + (t_i^{-1}t_m)u_m$$

i hem posat u_i en combinació lineal dels altres.

$\Leftarrow$) Si un d'ells es pot posar en combinació lineal dels altres, podem suposar sense perdre generalitat que és u_1, aleshores

$$u_1 = t_2u_2 + \ldots + t_nu_n$$

i passant tot a un primer membre ens queda

$$u_1 - t_2u_2 - \ldots - t_nu_n = \bar{0}$$

és a dir, hem trobat una combinació lineal igualada a zero amb algun coeficient diferent de zero, per tant són linealment dependents.

Exemple 1: Donats els vectors $\{(1,-1,1),(2,1,-2),(4,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$, vegem si són linealment dependents o independents.

Podem observar que $(4,-1,0) = 2(1,-1,1) + (2,1,2)$. Per tant son linealment dependents.

Proposició 4.11 *Considerem l'espai vectorial*

$$K^n = \{(t_1,\ldots,t_n)|t_i \in K,\ i = 1,\ldots,n\}$$

Si tenim un conjunt de vectors, on cada un tengui, davant, almenys un zero més que l'anterior, aquests són linealment independents.

DEMOSTRACIÓ:

Ho farem per inducció.

per $m = 2$: tenim els vectors $\{(0, \ldots, 0, t_i, \ldots, t_n), (0, \ldots, 0, s_j, \ldots, s_n)\}$ amb $i < j$ i $t_i \neq 0$ i $s_j \neq 0$. Vegem que són linealment independents:

$$(0, \ldots, 0) = t(0, \ldots, 0, t_i, \ldots, t_n) + s(0, \ldots, 0, s_j, \ldots, s_n) =$$

$$= (0, \ldots, 0, tt_i, \ldots, tt_n) + (0, \ldots, 0, ss_j, \ldots, ss_n) = (0, \ldots, 0, tt_i, \ldots, tt_j + ss_j, \ldots, tt_n + ss_n)$$

d'aquí tenim que $tt_i = 0$, i com $t_i \neq 0$ té invers, per tant, $tt_i t_i^{-1} = 0$ i aleshores $t = 0$. Per altra part $tt_j + ss_j = 0$, però com $t = 0$ tenim $ss_j = 0$ i pel mateix motiu que acabem de veure, $s = 0$.

Aleshores són linealment independents.

Suposem que és cert per a $m - 1$.

Vegem que és cert per a m:

Considerem el conjunt de vectors $\{(0, \ldots, 0, t_{1i_1}, \ldots, t_{1n}), \ldots, (0, \ldots, 0, t_{mi_m}, \ldots, t_{mn})\}$ on $i_r < i_s$ si $r < s$ i $t_{ji_j} \neq 0$ per a $j = 1, \ldots, m$ i agafem una combinació lineal igualada a zero

$$(0, \ldots, 0) = s_1(0, \ldots, 0, t_{1i_1}, \ldots, t_{1n}) + s_2(0, \ldots, 0, t_{2i_2}, \ldots, t_{1n}) + \ldots +$$
$$+ s_m(0, \ldots, 0, t_{mi_m}, \ldots, t_{mn})$$

Operant a partir del segon sumand tenim

$$(0, \ldots, 0) = s_1(0, \ldots, 0, t_{1i_1}, \ldots, t_{1n}) + (0, \ldots, 0, s_{i_2}, \ldots, s_n)$$

com $s_{i_2} \neq 0$, aplicant la hipòtesi d'inducció per al cas $n = 2$ tenim que els coeficients han de ser zero i com en el segon sumant el coeficient és 1, aleshores el sumant ha de ser zero,

$$(0, \ldots, 0, s_{i_2}, \ldots, s_n) = (0, \ldots, 0) = s_2(0, \ldots, 0, t_{2i_2}, \ldots, t_{1n}) + \ldots +$$
$$+ s_m(0, \ldots, 0, t_{mi_m}, \ldots, t_{mn})$$

i per hipòtesi d'inducció per a $m-1$ tenim $s_2, \ldots, s_m = 0$ i substituint a la primera igualtat tenim

$$(0, \ldots, 0) = s_1(0, \ldots, 0, t_{1i_1}, \ldots, t_{1n})$$

per tant, $s_1 t_{1i_1} = 0$ i com $t_{1i_1} \neq 0$ tenim que $s_1 = 0$

Exemple:
Els vectors $\{(1, 2, 3, 4), (0, -1, 2, -5), (0, 0, 0, 6)\}$ són linealment independents.

Proposició 4.12 *Donats els vectors $\{u_1, \ldots, u_n\}$, si substituïm un d'ells, per exemple u_i, per una combinació lineal de tots amb $t_i \neq 0$, aleshores si eren linealment dependents, ho continuen essent, i si eren linealment independents també ho continuen essent. El recíproc també es compleix*

DEMOSTRACIÓ:

Per demostrar-ho podem suposar, sense perdre generalitat, que l'element que substituïm és u_1. Per tant, hem de veure que si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ són linealment dependents (resp. independents), aleshores $\{t_1u_1 + \ldots + t_nu_n, u_2 \ldots, u_n\}$, amb $t_1 \neq 0$ són linealment dependents (resp. independents).

a) Suposem que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ són linealment dependents, i vegem que també ho són els altres. Per a això considerem una combinació lineal igualada a zero:

$$s_1(t_1u_1 + \ldots + t_nu_n) + s_2u_2 + \ldots + s_nu_n = \bar{0}$$

i vegem que algun coeficient ha de ser diferent de zero. Efectivament, operant tenim

$$s_1t_1u_1 + (s_1t_2 + s_2)u_2 + \ldots + (s_1t_n + s_n)u_n = \bar{0}$$

i com $\{u_1, \ldots, u_n\}$ són linealment dependents, algun dels coeficients ha de ser diferent de zero.

- Si $s_1t_1 \neq 0$, aleshores $s_1 \neq 0$ i els vectors del nou conjunt seria linealment dependents.
- Si $s_1t_i + s_i \neq 0$ aleshores, o bé $s_i \neq 0$ i quedaria demostrat o bé $s_1t_i \neq 0$ i per tant $s_1 \neq 0$ i també quedaria demostrat.

b) Suposem que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ són linealment independents, i vegem que també ho són els altres. Per a això considerem una combinació lineal igualada a zero:

$$s_1(t_1u_1 + \ldots + t_nu_n) + s_2u_2 + \ldots + s_nu_n = \bar{0}$$

i vegem que tots els coeficients han de ser zero. Efectivament, operant tenim

$$s_1t_1u_1 + (s_1t_2 + s_2)u_2 + \ldots + (s_1t_n + s_n)u_n = \bar{0}$$

i com $\{u_1, \ldots, u_n\}$ són linealment independents tots els coeficients han des ser zero.

- Si $s_1t_1 = 0$, aleshores com $t_1 \neq 0$, $s_1 = 0$.
- Si $s_1t_i + s_i = 0$ aleshores com $s_1 = 0$ ens queda $s_i = 0$.

per tant el nou conjunt està format per vectors linealment independents.

Vegem ara el recíproc. Sabem que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow$ $(no\ Q \Rightarrow no\ P)$, per tant
a) Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ linealment dependents $\Rightarrow \{t_1u_1 + \ldots + t_nu_n, u_2 \ldots, u_n\}$ linealment dependents, aleshores $\{t_1u_1 + \ldots + t_nu_n, u_2 \ldots, u_n\}$ linealment independents $\Rightarrow \{u_1, \ldots, u_n\}$ linealment independents.

b) D'igual forma si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ linealment independents $\Rightarrow \{t_1u_1 + \ldots + t_nu_n, u_2 \ldots, u_n\}$ linealment independents, aleshores $\{t_1u_1 + \ldots + t_nu_n, u_2 \ldots, u_n\}$ linealment dependents $\Rightarrow \{u_1, \ldots, u_n\}$ linealment dependents.

Aquesta proposició ens permetrà saber si un conjunt de vectors de K^n són linealment dependents o independents utilitzant matrius, com quan cercàvem el rang d'una matriu. I no només això, sinó que també ens permetrà saber, en el cas que siguin linealment dependents, la relació de dependència.

Exemple 1: Demostrau que els vectors $\{(2,2,-3),(3,1,2),(7,5,-4)\}$ són linealment dependents i trobau la relació de dependència.

$$\begin{array}{c} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} u_{21} = u_{11} \\ u_{22} = 2u_{12} - 3u_{11} \\ u_{23} = 2u_{13} - 7u_{11} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 13 \\ 0 & -4 & 13 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} u_{31} = u_{21} \\ u_{32} = u_{22} \\ u_{33} = u_{23} - u_{22} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Com els tres vectors de la matriu final són linealment dependents, els tres vectors de la matriu inicial també ho són. Per trobar la relació de dependència basta tenir en compte que la darrera fila és $\bar{0}$, i anant enrere tenim

$$u_{33} = \bar{0}; \quad u_{23} - u_{22} = \bar{0}; \quad 2u_{13} - 7u_{11} - (2u_{12} - 3u_{11}) = \bar{0}; \quad -4u_{11} - 2u_{12} + 2u_{13} = \bar{0}$$

per tant, simplificant, la relació de dependència és $2u_{11} + u_{12} - u_{13} = \bar{0}$, és a dir,

$$2(2,2,-3) + (3,1,2) - (7,5,-4) = (0,0,0)$$

Exemple 2: Demostrau que els vectors $\{(2,2,-3),(3,1,2),(1,5,-4)\}$ són linealment independents

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & -8 & 5 \\ 0 & -14 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & -8 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Per la proposició 4.11 els tres darrers vectors són linealment independents, per tant, els tres primers també.

Definició 4.13 *Direm que els vectors $u_1, \ldots, u_n \in V$ formen una* ***base*** *de V si són linealment independents i formen un sistema generador de V*

Exemple 1: El conjunt $\{(1,0),(0,1)\}$ d'elements d'$\mathbb{R}^2$ és una base d'$\mathbb{R}^2$.

Hem de veure que formen un sistema generador i que són linealment independents.

a) Sistema generador: Sigui $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qualsevol,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

per tant formen un sistema generador, ja que qualsevol element d'$\mathbb{R}^2$ es pot posar en combinació lineal de $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

b) Són linealment independents, ja que cada un d'ells té davant, almenys, un zero més (vegeu proposició 4.11)

Exemple 2: Com a generalització de l'exemple anterior tenim que el conjunt

$$\{(1, 0, \ldots, 0, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), (0, 0, \ldots, 1, 0), (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$$

d'elements d'$\mathbb{R}^n$ és una base d'$\mathbb{R}^n$ que es diu **base canònica** d'$\mathbb{R}^n$.

Exemple 3: El conjunt

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

és una base d'$M(2 \times 2)$.

Hem de veure que formen un sistema generador i que són linealment independents.

a) Sistema generador: Sigui $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$ qualsevol,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} =$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per tant formen un sistema generador.

b) Són linealment independents. Per a això considerem una combinació lineal igualada a zero:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Per tant, $x = y = z = t = 0$.

Exemple 4: Com a generalització de l'exemple anterior designem per $E_{ij} \in M(n \times m)$ la matriu que té per element (i, j) l'element unitat 1 de K i tots els altres l'element neutre 0. La família (E_{ij}) on $1 \leq i \leq n$ i $1 \leq j \leq m$ és una base de $M(n \times m)$ que anomenarem **base canònica d'**$M(n \times m)$.

Exemple 5: El conjunt $\{1, x, x^2\}$ és una base de l'espai vectorial $\mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

Hem de veure que formen un sistema generador i que són linealment independents.

a) Sistema generador: És evident, ja que si $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, aleshores existeixen $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Per tant,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

per tant formen un sistema generador.

b) Són linealment independents. Per a això considerem una combinació lineal igualada a zero,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$$

Només ho pot ser si $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

Exemple 6: Com a generalització de l'exemple anterior tenim que $\{1, x, \ldots, x^n\}$ és una base de $\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n | a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$. A aquesta base l'anomenarem **base canònica d'**$\mathbb{R}_n[x]$

Exemple 7: Cerquem una base del subespai vectorial $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + y + z = 0\}$

Hem de veure que formen un sistema generador i que són linealment independents.

a) Sistema generador: $\{(1, 0, -2), (0, 1, -1)\}$ és un sistema generador segons hem vist a l'exemple de la definició 4.8.

b) Linealment independents: $\{(1, 0, -2), (0, 1, -1)\}$ són linealment independents ja que cada un té davant, almenys, un zero més que l'anterior (vegeu proposició 4.11)

Exemple 8: Cercau una base de l'espai vectorial S de les matrius simètriques de $M_2(\mathbb{R})$.

a) Sistema generador:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} =$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per tant,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

és un sistema generador de les matrius simètriques de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Linealment independents:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

per tant, $x = y = z = 0$.

Exemple 9: Hem vist que el conjunt de les matrius sobre $\mathbb{R}$ de la forma:

$$\begin{pmatrix} a+c & 2a+b & a-c \\ a-b+2c & 0 & a+2b \\ 2b+c & a+b & a-b \end{pmatrix}$$

formen un subespai vectorial de $M_3(\mathbb{R})$ (vegeu 4.7). Trobem ara una base.

a) Sistema generador. A la proposició 4.7 hem vist que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

formen un sistema generador d'aquest subespai vectorial.

b) Linealment independents:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a+c & 2a+b & a-c \\ a-b+2c & 0 & a+2b \\ 2b+c & a+b & a-b \end{pmatrix}$$

que resolent ens dóna $a = b = c = 0$.

Definició 4.14 *Siguin $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un conjunt de vectors de V. Anomenam* ***rang*** *d'aquest conjunt de vectors, i el representarem per rang $\{u_1, \ldots, u_n\}$ al major nombre de vectors linealment independents*

Cerquem el *rang* $\{(2,2,-3),(3,1,2),(7,5,-4)\}$. A l'exemple de la proposició 4.12 vàrem veure que $(7,5,-4)$ és combinació lineal dels altres dos, que són linealment independents. Per tant *rang* $\{(2,2,-3),(3,1,2),(7,5,-4)\} = 2$.

Proposició 4.15 *Sigui l'espai vectorial $V =< u_1, \ldots, u_n >$ i $\{v_1, \ldots, v_m\}$ un conjunt de vectors de V linealment independents. Aleshores $m \leq n$.*

DEMOSTRACIÓ:

Ho farem per reducció a l'absurd. Suposem que $m > n$, i considerem la combinació lineal

$$\sum_{j=1}^{m} t_j v_j = t_1 v_1 + \ldots + t_m v_m = \bar{0}$$

com $\{v_1, \ldots, v_m\}$ són linealment independents, els t_j han de ser igual a zero. Vegem que podem trobar algun $t_j \neq 0$.

Com $V =< u_1, \ldots, u_n >$,

$$v_j = s_{j1} u_1 + \ldots + s_{jn} u_n = \sum_{i=1}^{n} s_{ji} u_i$$

aleshores,

$$\bar{0} = \sum_{j=1}^{m} t_j v_j = \sum_{j=1}^{m} t_j \left(\sum_{i=1}^{n} s_{ji} u_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} s_{ji} t_j \right) u_i$$

Però això pot ser zero, amb

$$\sum_{j=1}^{m} s_{ji} t_j = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

que és un sistema homogeni d'n equacions amb m incògnites que és sempre compatible, i com $m > n$ és indeterminat, per tant té infinites solucions i per tant té solució no trivial, és a dir, existeix

$$(t_1, \ldots, t_m) \neq (0, \ldots, 0)$$

contradicció ja que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ són linealment independents.

Exemple: $\mathbb{R}^3 =< (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) >$, aleshores $\{(1,1,2), (2,1,1), (1,0,2), (2,2,3)\}$ no poden ser linealment independents, ja que $4 \not\leq 3$.

Proposició 4.16 *Si un espai vectorial V té una base finita, totes les altres bases tenen el mateix nombre d'elements.*

DEMOSTRACIÓ:

Siguin $\{u_1, \ldots, u_m\}$ i $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dues bases de V.

Com $V =< u_1, \ldots, u_m >$ i $\{v_1, \ldots, v_n\}$ són linealment independents, per la proposició 4.15 tenim que $n \leq m$.

D'igual forma com $V =< v_1, \ldots, v_m >$ i $\{u_1, \ldots, u_m\}$ són linealment independents, per la proposició 4.15 tenim que $m \leq n$.

Per tant, $m = n$.

Exemple: $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$, per tant, $\{(1,1,1),(1,2,2)\}$ no pot ser una base de $\mathbb{R}^3$.

Definició 4.17 *Al nombre d'elements d'una base de V l'anomenarem* ***dimensió*** *de V i el representarem per dim V.*

L'espai nul $\{\bar{0}\}$ no té base ja que el vector $\{\bar{0}\}$ és linealment dependent. De totes formes direm que dim $\{\bar{0}\} = 0$.

Tenint en compte els exemples de la definició 4.13 tenim:

Exemple 1: El conjunt $\{(1,0),(0,1)\}$ d'elements d'$\mathbb{R}^2$ és una base d'$\mathbb{R}^2$, per tant, $dim\ \mathbb{R}^2 = 2$.

Exemple 2: Com a generalització de l'exemple anterior tenim que el conjunt

$$\{(1,0,\ldots,0,0),(0,1,0,\ldots,0,0),(0,0,\ldots,1,0),(0,0,\ldots,0,1)\}$$

d'elements d'$\mathbb{R}^n$ és una base d'$\mathbb{R}^n$, aleshores $dim\ \mathbb{R}^n = n$.

Exemple 3: El conjunt

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

és una base d'$M(2 \times 2)$, per tant, $dim\ M(2 \times 2) = 4$

Exemple 4: Com a generalització de l'exemple anterior designem per $E_{ij} \in M(n \times m)$ la matriu que té per element (i,j) l'element unitat 1 de K i tots els altres l'element neutre 0. La família (E_{ij}) on $1 \leq i \leq n$ i $1 \leq j \leq m$ és una base de $M(n \times m)$, per tant, $dim\ M(n \times m) = n \cdot m$.

Exemple 5: Una base de l'espai vectorial $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + y + z = 0\}$ és $\{(1,0,-2),(0,1,-1)\}$, per tant, $dim\ W = 2$

Exemple 6: Una base de l'espai vectorial S de les matrius simètriques de $M_2(\mathbb{R})$ és

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

per tant $dim\ S = 3$.

Exemple 7: El conjunt de les matrius sobre $\mathbb{R}$ de la forma:

$$\begin{pmatrix} a+c & 2a+b & a-c \\ a-b+2c & 0 & a+2b \\ 2b+c & a+b & a-b \end{pmatrix}$$

formen un subespai vectorial de $M_3(\mathbb{R})$ on una base és

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

per tant la seva dimensió és 3.

Proposició 4.18 *Si V és un espai vectorial de dimensió n i $\{u_1 \dots u_m\}$ un conjunt d'm vectors, aleshores,*

a) Si $m > n$ els vectors són linealment dependents.

b) Si $m < n$ els vectors no formen un sistema generador.

Demostració:

a) Com $dim\ V = n$ si $\{u_1 \dots u_m\}$ són linealment independents, aleshores per la proposició 4.15, $m \leq n$, per tant, si $m > n$, $\{u_1 \dots u_m\}$ són linealment dependents.

b) Si $\{u_1 \dots u_m\}$ formés un sistema generador, aleshores com els elements de la base són linealment independents tendríem, per la proposició 4.15 que $n \leq m$, contradicció, per tant $\{u_1 \dots u_m\}$ no forma un sistema generador.

Aquesta darrera proposició ens diu que una base d'un espai vectorial està formada pel menor nombre de vectors que generen l'espai vectorial.

Exemple: Sabem que $dim\ \mathbb{R}^3 = 3$, per tant

$$\{(1,1,1),(1,2,3),(3,-1,2),(3,2,1)\}$$

no són linealment independents, i

$$\{(1,1,0),(0,1,1)\}$$

no formen un sistema generador, malgrat siguin linealment independents.

Proposició 4.19 *Si S és un subespai de V aleshores $dim\ S \leq dim\ V$. I si $dim\ S = dim\ V$, llavors $S = V$.*

DEMOSTRACIÓ:

Sigui $dim\ V = n$ i $\{u_1, \dots, u_m\}$ una base d'S. Suposem que $dim\ S > dim\ V$, és a dir, $m > n$. Aleshores, per la proposició 4.18 $\{u_1, \dots, u_m\}$ són linealment dependents. Contradicció ja que formen una base d'S, i per tant són linealment independents. Aquesta contradicció ve de suposar que $dim\ S > dim\ V$. Per tant $dim\ S \leq dim\ V$.

Per demostrar l'altra propietat, es requereix enunciar i demostrar una sèrie de propietats que surten dels objectius de l'assignatura.

Exemple: El subespai vectorial $U =< (1, 1, 2), (0, 1, 2), (0, 0, 1) >$ d'$\mathbb{R}^3$ té dimensió 3, ja que els seu sistema generador està format per vectors linealment independents. Per tant, $U = \mathbb{R}^3$.

Proposició 4.20 *Sigui V un espai vectorial de dimensió n. Aleshores un conjunt de n vectors és base si i només si compleix una qualsevol de les condicions:*

a) Són linealment independents.

b) Formen un sistema generador.

DEMOSTRACIÓ:

Per a la seva demostració seria necessari enunciar algunes propietats més, la qual cosa surt dels objectius d'aquesta assignatura.

Proposició 4.21 *Si V i W són dos espais vectorials, el conjunt*

$$V \times W = \{(a, a') | a \in V,\ a' \in W\}$$

amb les operacions $(+)$ i $(.)$ definides per:

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b') \qquad i \qquad t(a, a') = (ta, ta')$$

és un espai vectorial.

DEMOSTRACIÓ:

Es deixa pel lector. Consisteix en demostrar que es compleixen les condicions de la definició 4.1 d'espai vectorial.

Exemples:

1. $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{R}\}$
2. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)|x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Definició 4.22 *A l'espai vectorial* $(V \times W; +, .)$ *l'anomenam* ***espai vectorial producte***

Definició 4.23 *Donats* p *subespais vectorials* $S_1, \ldots, S_p$ *de* V*, anomenam* ***suma lineal*** *o* ***suma*** *d'aquests, al conjunt:*

$$S_1 + \ldots + S_p = \{u_1 + \ldots + u_p|u_1 \in S_1, \ldots, u_p \in S_p\}$$

Proposició 4.24 *La suma* $S = S_1 + \ldots + S_p$ *de subespais vectorials de* V *és un subespai vectorial de* V*.*

DEMOSTRACIÓ:

Siguin $u_i, v_i \in S_i$, $i = 1, \ldots, p$ i $t, s \in K$. Hem de veure que

$$t(u_1 + \ldots + u_n) + s(v_1 + \ldots + v_n) \in S$$

Efectivament,

$$t(u_1 + \ldots + u_n) + s(v_1 + \ldots + v_n) = (tu_1 + sv_1) + \ldots + (tu_p + sv_p) \in S_1 + \ldots + S_p = S$$

Exemple: Si $U =< (1, 3, -1), (2, 1, 4) >$ i $V =< (2, -1, 1), (1, -4, 2) >$, cerquem $U + V$ i una base d'$U + V$.

Un element $w \in U + V$ estarà format per un element $u \in U$ més un element $v \in V$,

$$w = u + v = x(1, 3, -1) + y(2, 1, 4) + z(2, -1, 1) + t(1, -4, 2)$$

per tant $U + V$ estarà format per totes les combinacions lineals de

$$\{(1, 3, -1), (2, 1, 4), (2, -1, 1), (1, -4, 2)\}$$

que serà un sistema generador d'$U + V$, és a dir,

$$U + V =< (1, 3, -1), (2, 1, 4), (2, -1, 1), (1, -4, 2) >$$

Per cercar una base hem de seleccionar només els que són linealment independents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, el quart vector depèn linealment dels altres tres, aleshores una base de $U+V$ és

$$\{(1,3,-1),(2,1,4),(2,-1,1)\} \qquad \text{o bé} \qquad \{(1,3,-1),(0,-5,6),(0,0,27)\}$$

Proposició 4.25 *Si $(S_i)_{i\in I}$ un família finita o infinita de subespais vectorials de V, aleshores*

$$T = \bigcap_{i\in I} S_i$$

és un subespai vectorial de V.

Demostració:

Sigui $u, v \in T$ (tenguem en compte que $T \neq \emptyset$ ja que $\bar{0} \in T$), i $t, s \in K$, això vol dir que $u, v \in S_i$ per a $i \in I$. Aleshores,

$$tu + sv \in S_i; \quad i \in I$$

ja que els S_i són espais vectorials, per tant,

$$tu + sv \in \bigcap_{i\in I} S_i = T$$

Exemple 1: Si $U =< (1,3,-1),(2,1,4) >$ i $V =< (2,-1,1),(1,-4,2) >$, cerquem $U \cap V$ i una base del mateix.

Si $(x,y,z) \in U$ tenim que (x,y,z) depèn linealment de $\{(1,3,-1),(2,1,4)\}$, aleshores

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ x & y & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & y-3x & z+x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -13x+6y+5z \end{pmatrix}$$

i s'ha de complir que $-13x+6y+5z=0$.

Anàlogament si $(x,y,z) \in V$ tenim que $\{(2,-1,1),(1,-4,2),(x,y,z)\}$ són linealment dependents,

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & y+4x & z-2x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -2x+3y+7z \end{pmatrix}$$

i s'ha de complir que $-2x+3y+7z=0$.

Per tant, els elements de $U \cap V$ han de complir les dues equacions,

$$U \cap V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -13x+6y+5z=0,\ -2x+3y+7z=0\}$$

Cerquem ara una base, per a això cerquem primer un sistema generador. Ho farem resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} -13x+6y+5z & = & 0 \\ -2x+3y+7z & = & 0 \end{array}\right\}$$

El resoldrem per Gauss

$$\begin{pmatrix} -13 & 6 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -13 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 27 & 81 & 0 \end{pmatrix}$$

i ens queda el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} -13x+6y+5z & = & 0 \\ 27y+81z & = & 0 \end{array}\right\}$$

qua aïllant, $y=-3z$ i $x=-z$. Aleshores els elements de T seran de la forma,

$$(x,y,z) = (-z,-3z,z) = z(-1,-3,1)$$

Per tant, $T =< (-1,-3,1) >$, i com només és un vector no nul és linealment independents, aleshores una base de T és $\{(-1,-3,1)\}$

Proposició 4.26 (Fórmula de Grassmann)
Si S i T són dos dos subespais vectorials de V, aleshores

$$dim\ S + dim\ T = dim\ (S+T) + dim\ (S \cap T).$$

DEMOSTRACIÓ:

La demostració d'aquesta proposició surt dels objectius d'aquest curs.

Exemple:

En els exemples anteriors hem vist que si $U =< (1,3,-1),(2,1,4) >$ i $V =< (2,-1,1),(1,-4,2) >$ aleshores $dim\ U = 2$, $dim\ V = 2$, $dim\ U+V = 3$, per tant, $dim\ U \cap V = 1$

Definició 4.27 *Si $S_1, \ldots, S_p$ són subespais vectorials de V, direm que l'espai vectorial suma $S = S_1 + \ldots + S_p$ és **suma directa** dels subespais S_i, i el representarem per*

$$S = S_1 \bigoplus \ldots \bigoplus S_p,$$

si cada element $u \in S$, només es pot expressar de forma única com suma $u = u_1 + \ldots + u_p$ on $u_i \in S_i$ per a $i = 1, \ldots, p$.

A u_i l'anomenarem **component i-èssima de** u.

Exemple: Si $S_1 = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{(0, x) | x \in \mathbb{R}\}$ i $S_3 = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$, la suma $S_1 + S_2 + S_3$ no és suma directa, ja que per exemple

$$(3, 3) = (2, 0) + (0, 2) + (1, 1) = (1, 0) + (0, 1) + (2, 2)$$

és a dir, l'expressió no és única.

Proposició 4.28 *Si $S_1, \ldots, S_p$ són subespais vectorials de V i la suma d'aquests és directa, $S_1 \bigoplus \ldots \bigoplus S_p$, aleshores*

$$dim\ (S_1 \bigoplus \ldots \bigoplus S_p) = dim\ S_1 + \ldots + dim\ S_p$$

Demostració:

Ho farem per inducció,

- Per $n = 1$ evident.
- Suposem cert per a $p - 1$,

$$dim\ (S_1 \bigoplus \ldots \bigoplus S_{p-1}) = dim\ S_1 + \ldots + dim\ S_{p-1}$$

- Vegem que és cert per a p.

  Es pot veure de forma trivial que $S_1 + \ldots + S_p = (S_1 + \ldots + S_{p-1}) + S_p$.
  Vegem per altra part que $(S_1 + \ldots + S_{p-1}) \cap S_p = \{\bar{0}_V\}$. Efectivament, si existeix $u \in (S_1 + \ldots + S_{p-1}) \cap S_p$ aleshores $u = u_1 + \ldots + u_{p-1}$ i $u = u_p$, on $u_i \in S_i$ per a $i = 1, \ldots, p$.

  D'aquí tenim que $u_1 + \ldots + u_{p-1} = u_p$, o el que és igual, $u_1 + \ldots + u_{p-1} - u_p = \bar{0}_V$. Ara bé, com $S_1 \bigoplus \ldots \bigoplus S_p$ és suma directa, l'expressió de la suma és única, i com $\bar{0}_V = \bar{0}_V + \ldots + \bar{0}_V$ tenim

$$u_1 = \ldots = u_p = \bar{0}_V$$

i per tant, $u = \bar{0}_V$.

Aplicant ara la proposició 4.26 (fórmula de Grassman) tenim

$dim\ (S_1 + \ldots + S_{p-1}) + dim\ S_p = dim\ ((S_1 + \ldots + S_{p-1}) + S_p) + dim\ (S_1 + \ldots + S_{p-1}) \cap S_p)$

i com $(S_1 + \ldots + S_{p-1}) \cap S_p = \{\bar{0}_V\}$ tenim $dim\ ((S_1 + \ldots + S_{p-1}) \cap S_p) = 0$, per tant,

$$dim\ (S_1 + \ldots + S_{p-1} + S_p) = dim\ (S_1 + \ldots + S_{p-1}) + dim\ S_p$$

i per hipòtesi d'inducció

$$dim\ (S_1 \bigoplus \ldots \bigoplus S_{p-1}) = dim\ S_1 + \ldots + dim\ S_{p-1}$$

per tant,

$$dim\ (S_1 \bigoplus \ldots \bigoplus S_p) = dim\ S_1 + \ldots + dim\ S_{p-1} + dim\ S_p$$

Definició 4.29 *Dos subespais vectorials S i T de V direm que són **suplementaris** si $V = S \bigoplus T$.*

Proposició 4.30 *Dos subespais vectorials S i T de V són suplementaris si i només si $V = S + T$ i $S \cap T = \{\bar{0}\}$*

$\Rightarrow$) Vegem que $V = S + T$. Efectivament, si S i T són suplementaris, $V = S \bigoplus T$, per tant, $V = S + T$.

Vegem ara que $S \cap T = \{\bar{0}\}$. Suposem que existeix $u \in S \cap T$ tal que $u \neq \bar{0}$, per tant

$$u = \bar{0} + u = u + \bar{0}$$

i u és pot posar com a suma d'un element d'S i un element de T de forma no única. Aleshores la suma no seria directa. Contradicció que ve de suposar que $u \neq \bar{0}$.

$\Leftarrow$) Com $V = S + T$ només ens falta mirar si donat un element $u \in V$, aquest es pot posar com a suma d'un element d'S i un de T de forma única.

Suposem que $u = v_1 + w_1 = u_2 + w_2$ on $v_1, v_2 \in S$ i $w_1, w_2 \in T$. D'aquí deduïm que $v_1 - v_2 = w_2 - w_1$. Ara bé, com $v_1 - v_2 \in S$ i $w_2 - w_1 \in T$, tenim que $v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in S \cap T = \bar{0}$, per tant

$$v_1 - v_2 = w_2 - w_1 = \bar{0}$$

de la qual cosa deduïm $v_1 = v_2$ i $w_1 = w_2$. Per tant la suma és directa.

Exemple 1: Comprovem si $U =< (1, 3, -1), (2, 1, 4) >$ i $V =< (2, -1, 1), (1, -4, 2) >$ són suplementaris.

Primer hem de veure si $\mathbb{R}^3 = U + V$. Efectivament, hem vist a l'exemple de la proposició 4.24 que $U + V =< (1,3,-1),(2,1,4),(2,-1,1) >$, on aquests vectors formen base, per tant $dim\ (U + V) = 3$ i com $dim\ R^3 = 3$ tenim que $\mathbb{R}^3 = U + V$ (vegeu proposició 4.19).

Ara hem de veure si $U \cap V = \{\bar{0}\}$, però segons hem vist a l'exemple de la proposició 4.25, $U \cap V =< (-1,-3,1) > \neq \{\bar{0}\}$. Per tant no són suplementaris.

Exemple 2: Si $U =< (1,3,-1),(2,1,4) >$, cerquem V de forma que $\mathbb{R}^3 = U \bigoplus V$.

Transformem la base d'U en una altra que sigui esglaonada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Per tant, $U =< (1,3,-1),(0,-5,6) >$. Com $dim\ \mathbb{R}^3 = 3$ i $dim\ U = 2$, l'espai vectorial suplementari V ha de tenir dimensió 1. Un vector linealment independent dels d'U és $(0,0,1)$, per tant, $V =< (0,0,1) >$

Proposició 4.31 *Sigui $\{u_1,\ldots,u_n\}$ una base de V, si $u = t_1u_1 + \ldots + t_nu_n$ els t_i són únics.*

Demostració:

Suposem que hi ha dues formes d'expressar el vector u,

$$u = t_1u_1 + \ldots + t_nu_n = s_1u_1 + \ldots + s_nu_n$$

d'aquí deduïm

$$\bar{0} = t_1u_1 + \ldots + t_nu_n - (s_1u_1 + \ldots + s_nu_n) = (t_1 - s_1)u_1 + \ldots + (t_n - s_n)u_n$$

i com $\{u_1,\ldots,u_n\}$ són linealment independents, per definició d'independència lineal tenim

$$t_1 - s_1 = 0; \quad \ldots \quad t_n - s_n = 0$$

per tant, $t_1 = s_1,\ \ldots,\ t_n = s_n$

Exemple: Considerem la base de $\mathbb{R}^2$ $\{(1,0),(1,1)\}$ i sigui $(7,4) \in \mathbb{R}^2$. Posem aquest vector en combinació lineal dels elements de la base:

$$(7,4) = x(1,0) + y(1,1)$$

Resolent tenim que és un sistema compatible determinat i per tant de solució única $x = 3$ i $y = 4$.

Definició 4.32 *Donada una base* $\{u_1 \ldots u_n\}$ *de* V*, l'aplicació* $g : V \to K^n$ *tal que a un element* $u = t_1u_1 + \ldots + t_nu_n \in V$ *li fa correspondre* $g(u) = (t_1, \ldots, t_n)$ *s'anomena* ***sistema coordenat*** *de* V *definit per la base* $\{u_1 \ldots u_n\}$*, i a* $(t_1, \ldots, t_n)$ *li direm* ***coordenades*** *de* u *en l'esmentada base. Finalment a l'escalar* t_i *l'anomenarem* ***coordenada i-èssima*** *de* a*.*

Exemple 1: Sigui $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ una base d'$\mathbb{R}^3$ (es es deixa pel lector la seva comprovació). Sigui $(3,4,5) \in \mathbb{R}^3$, cerque les seves coordenades en aquesta base.

$$(3,4,5) = x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,1,1) = (x+y, x+z, y+z)$$

obtenim el següent sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ x+z & = & 4 \\ y+z & = & 5 \end{array}\right\}$$

que resolent ens dóna $x = 1, \; y = 2, \; z = 3$. Per tant les coordenades en la base donada són $(1,2,3)$

Exemple 2: Considerem ara la base canònica de $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Cerquem les seves coordenades de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ respecte a aquesta base,

$$(a,b,c) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = (x,y,z)$$

per tant $x = a$, $y = b$ i $z = c$. Aleshores, les coordenades (x,y,z) coincideixen amb l'element (a,b,c).

Això es compleix sempre que cerquem les coordenades respecte a la base canònica en $\mathbb{R}^n$. **NOTA:** Hem d'utilitzar el concepte d'isomorfisme. Aquest concepte es veu en més intensitat en el tema d'aplicacions lineals. De totes formes posarem aquí la seva definició i algunes altres necessàries.

Definició 4.33 *Donats dos conjunts* A *i* B*,* ***una aplicació*** f ***de*** A ***en*** B *és un criteri que ens permet associar a cada element de* A *un i només un element de* B*. La representarem per:*

$$f : A \to B$$

Al conjunt A l'anomenarem **conjunt inicial** de f, i al conjunt B **conjunt final** de f.
Si f associa l'element b a l'element a direm que b és **la imatge** de a respecte a f i també que a és una **anti-imatge** de b i l'escriurem $f(a) = b$ o $f : a \mapsto b$.
Si A i B són conjunts de nombres, l'aplicació f també es diu **funció**.

Exemple:

$$a)\ \begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{rcl} g:\mathbb{N} & \to & \{-1,1\} \\ n & \mapsto & (-1)^n \end{array} \qquad c)\ \begin{array}{rcl} h:\mathbb{N} & \to & \mathbb{Q} \\ n & \mapsto & \frac{1}{2}n \end{array}$$

Definició 4.34 *Donada una aplicació $f : A \to B$ i un subconjunt A_1 de A, anomenam **imatge de** A_1, i la representarem per $f(A_1)$ al conjunt de les imatges de tots els elements de A_1.*

Exemple: Tenint en compte els exemples de la definició 4.33 tenim,

A l'apartat a), si $A_1 = [-1, 1]$ tenim que $f([-1, 1]) = [0, 1]$.

A l'apartat b), si A_1 és el conjunt del nombres parells, aleshores $g(A_1) = \{1\}$.

A l'apartat c), si A_1 és el conjunt dels nombres parells, $h(A_1) = \mathbb{N}$.

Al conjunt $f(A)$ l'anomenarem **conjunt imatge de** f i el representarem també per Im f.

Als exemples de la definició 4.33 tenim a l'apartat, a) Im f=$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, a l'apartat b), Im g=$\{-1, 1\}$ i a l'apartat c), Im h=$\{\frac{n}{2} | n \in \mathbb{N}\}$

Establirem per conveni que $f(\emptyset) = \emptyset$

Definició 4.35 *Direm que dues aplicacions f i g són **iguals** si tenen el mateix conjunt inicial, el mateix conjunt final i $f(a) = g(a)$ per a tot element a del conjunt inicial.*

Exemple:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

f i g no són iguals, ja que els conjunts inicials no són iguals

Definició 4.36 *Donada una aplicació $f : A \to B$, sigui $B_1 \subseteq B$. Anomenarem **imatge inversa** de B_1 per f al conjunt dels elements de A que tenen per imatge un element de B_1. A aquest conjunt el representarem per $f^{-1}(B_1)$.*

Notem que f^{-1} no és una aplicació i que si B_1 està format per un sol element b aleshores a $f^{-1}(\{b\})$ el representarem per $f^{-1}(b)$.

Per conveni establirem que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Exemples: A l'exemple de la definició 4.33 tenim:

a) $f^{-1}(\{1,4\} = \{\pm 1, \pm 2\}$.

b) $g^{-1}(-1)$ és el conjunt del nombres senars.

c) $h^{-1}(\mathbb{N})$ és el conjunt del nombres parells.

Definició 4.37 *Direm que una aplicació $f : A \to B$ és* ***exhaustiva*** *si $f(A) = B$.*

Per exemple, l'aplicació $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = |x|$ no és exhaustiva ja que no hi ha cap element que tengui per imatge -2. Ara bé, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tal que $g(x) = |x|$ si que ho és.

Definició 4.38 *Una aplicació $f : A \to B$ és* ***injectiva*** *si dos elements qualssevol distints de A tenen imatge distinta.*

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a') \quad \forall a, a' \in A$$

o bé

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a' \quad \forall a, a' \in A$$

Per exemple, l'aplicació $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 2x$ és injectiva. Ara bé, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = x^2$ no ho és ja que $g(2) = g(-2)$.

Definició 4.39 *Direm que una aplicació és* ***bijectiva*** *si és injectiva i exhaustiva.*

Si existeix una aplicació bijectiva entre dos conjunts finits, aquests tenen el mateix nombre d'elements. Això no es compleix entre conjunts infinits, com veurem a continuació.

Exemples:

1. Sigui $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{p, q\}$. Definim $f : A \to B$ tal que $f(a) = p$, $f(b) = p$ i $f(c) = p$. f no és injectiva ni exhaustiva.
2. Sigui $A = \{a, b\}$ i $B = \{p, q, r\}$. Definim $f : A \to B$ tal que $f(a) = p$ i $f(b) = q$. f és injectiva però no exhaustiva.
3. Sigui $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{p, q\}$. Definim $f : A \to B$ tal que $f(a) = p$, $f(b) = p$ i $f(c) = q$. f no és injectiva però si exhaustiva.
4. Designem per $2\mathbb{N} = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$. Aquest conjunt és el de nombres parells i és un subconjunt propi de $\mathbb{N}$, però l'aplicació

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to 2\mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

   és bijectiva.

5.
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} n & (n \textit{ senar}) \\ \frac{1}{2}n & (n \textit{ parell}) \end{cases} \end{array}$$

no és injectiva, ja que $f(3) = f(6) = 3$, però si exhaustiva, ja que si $k \in \mathbb{N}$, $f(2k) = k$.

Definició 4.40 *Un* ***isomorfisme*** *entre els espais vectorials U i V sobre el mateix cos K, és una aplicació bijectiva $f : U \to V$ que compleix les següents propietats:*

- $f(u + u') = f(u) + f(u')$ *per a tot* $u, u' \in U$
- $f(tu) = tf(u)$ *per a tot* $u \in U$ *i per a tot* $t \in K$

Si dos conjunts són isomorfes les propietats de qualsevol d'ells també són propietats de l'altre. Això ens permet treballar en un espai vectorial i traspassar totes les propietats a l'altre.

Proposició 4.41 *Tot espai vectorial V de dimensió n sobre K és isomorf a K^n (espai vectorial sobre K).*

DEMOSTRACIÓ:

Donada una base $\{u_1 \dots u_n\}$ de V, si $u \in V$, aleshores u es pot posar com $u = t_1u_1 + \dots + t_nu_n$, de forma única, segons hem vist en la proposició 4.31. Definim la següent aplicació

$$\begin{array}{rrcl} f: & V & \to & K^n \\ & a & \mapsto & (t_1, \dots, t_n) \end{array}$$

Vegem que és isomorfisme:

(a) Injectiva: Sigui $u, v \in V$, aleshores $u = t_1u_1 + \dots + t_nu_n$ i $v = s_1u_1 + \dots + s_nu_n$. Suposem que $f(u) = f(v)$, aleshores

$$t_1u_1 + \dots + t_nu_n = s_1u_1 + \dots + s_nu_n$$

passant tot al primer membre tenim

$$(t_1 - s_1)u_1 + \dots + (t_n - s_n)u_n = \bar{0}$$

i com $\{u_1 \dots u_n\}$ són linealment independents, $t_1 - s_1 = 0,\ \dots,\ t_n - s_n = 0$. Per tant, $t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n$ i $u = v$.

(b) Exhaustiva: Sigui $(t_1, \dots, t_n) \in K^n$, evidentment existeix $u = t_1u_1 + \dots + t_nu_n \in V$ tal que $f(u) = t_1, \dots, t_n)$

(c) Si $u, v \in V$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$. Efectivament, sigui $u = t_1u_1 + \ldots + t_nu_n$ i $v = s_1u_1 + \ldots + s_nu_n$, aleshores

$$f(u+v) = f((t_1u_1+\ldots+t_nu_n)+(s_1u_1+\ldots+s_nu_n)) = f((t_1+s_1)u_1+\ldots+(t_n+s_n)u_n) =$$

$$= (t_1+s_1, \ldots, t_n+s_n) = (t_1, \ldots, t_n) + (s_1, \ldots, s_n) =$$

$$= f(t_1u_1 + \ldots + t_nu_n) + f(s_1u_1 + \ldots + s_nu_n) = f(u) + f(v)$$

(d) Si $u \in V$ i $t \in K$, $f(tu) = tf(u)$. Efectivament, sigui $u = t_1u_1 + \ldots + t_nu_n$, aleshores

$$f(tu) = f(t(t_1u_1 + \ldots + t_nu_n)) = f(tt_1u_1 + \ldots + tt_nu_n) = (tt_1, \ldots, tt_n) =$$

$$= t(t_1, \ldots, t_n) = tf(t_1u_1 + \ldots + t_nu_n) = tf(u)$$

Exemple 1: L'espai vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ és isomorf a $\mathbb{R}^3$.

Efectivament, tenint en compte que $\{1, x, x^2\}$ és una base d'$\mathbb{R}_2[x]$ segons hem vist en la definició 4.13, l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[x] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & a_0 + a_1x + a_2x^2 & \mapsto & (a_0, a_1, a_2) \end{array}$$

és l'isomorfisme.

Exemple 2: Com a generalització de l'exemple anterior tenim que $\mathbb{R}_n[x]$ és isomorf a $\mathbb{R}^{n+1}$ i l'isomorfisme és

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n & \mapsto & (a_0, a_1, \ldots, a_n) \end{array}$$

Exemple 3: L'espai vectorial $M(2 \times 2)$ és isomorf a $\mathbb{R}^4$.

Tenint en compte, segons hem vist en la definició 4.13, que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

és una base (la base canònica) d'$M(2 \times 2)$, una matriu qualsevol d'$M(2 \times 2)$ es pot posar com

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per tant l'isomorfisme seria:

$$\begin{array}{rccc} f: & M(2 \times 2) & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a, b, c, d) \end{array}$$

Exemple 4: Com a generalització de l'exemple anterior, l'espai vectorial $M(n \times m)$ és isomorf a $\mathbb{R}^{n \cdot m}$.

Exemple 5: Demostrem que $S = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] |\ 2a + b + c = 0\}$ és un subespai vectorial d'$\mathbb{R}_2[x]$ i trobem una base d'S.

Acabam de veure que $\mathbb{R}_2[x]$ és isomorf a $\mathbb{R}^3$ i que l'isomorfisme és

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 & \mapsto & (a_0, a_1, a_2) \end{array}$$

per tant, en lloc d'estudiar S, estudiarem $S' = \{(a, b, c) | 2a + b + c = 0\}$.

Aquest darrer conjunt, S', tal com hem vist a la proposició 4.7 és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$, per tant, S és un subespai vectorial d'$\mathbb{R}_2[x]$.

Per altra part hem vist a la definició 4.13 que una base de S' és

$$\{(1, 0, -2), (0, 1, -1)\}$$

per tant, una base de S és

$$\{1 - 2x^2, x - x^2\}$$

Exemple 6: Desmostrem que el conjunt de les matrius simètriques d'$M(2 \times 2)$ sobre $\mathbb{R}$ és un subespai vectorial d'$M(2 \times 2)$ i trobem una base.

Hem vist abans que $M(2 \times 2)$ és isomorf a $\mathbb{R}^4$ i que l'isomorfisme és

$$\begin{array}{rccc} f: & M(2 \times 2) & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a, b, c, d) \end{array}$$

per tant en lloc d'estudiar el conjunt S de les matrius simètriques $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ estudiarem el conjunt $S' = \{(a, b, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Vegem primer que S' és un subespai vectorial d'S. Efectivament,

$$(a, b, b, c) = a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 1, 0) + c(0, 0, 0, 1)$$

és a dir, S' està format per totes les combinacions lineals de

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

i per la proposició 4.7 és un subespai vectorial d'$\mathbb{R}^4$.

Vegem a continuació que $\{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$ és una base. Acabem de veure que és un sistema generador, a més per la proposició 4.11 són linealment independents, ja que cada un té, davant, almenys un zero més que l'anterior. Per tant és base.

A continuació vegem com cercar les noves coordenades d'un vector quan efectuam un canvi de base.

Proposició 4.42 ***(Canvi de coordenades)***
Siguin $\{u_1,\ldots,u_n\}$ i $\{v_1,\ldots,v_n\}$ dues bases de V (a (u_i) li direm base antiga i (v_i) base nova) i $u\in V$ tal que

$$u = x_1u_1+\ldots+x_nu_n = y_1v_1+\ldots+y_nv_n.$$

Si els elements de la base (v_i) els posam en combinació lineal de la base (u_i) tenim

$$v_i = t_{i1}u_1+\ldots+t_{in}u_n, \quad i=1,\ldots,n$$

aleshores es compleix

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1n} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

*A la matriu (t_{ij}) l'anomenarem **matriu del canvi de base** de la base (u_i) a la base (v_i).*

Tenint en compte l'anterior podríem dir que les coordenades d'un vector en la base antiga és igual a una matriu on les columnes són les coordenades de la base nova en funció de l'antiga, multiplicada per les coordenades del vector en la base nova.

Demostració:

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_iu_i = \sum_{j=1}^{n} y_jv_j$$

però $v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ji}u_i$, per a $j=1,\ldots,n$. Per tant, substituint a l'igualtat anterior

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_iu_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ji}u_i\right)) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} t_{ji}y_j\right)u_i$$

i com $\{u_1, \ldots, u_n\}$ és una base d'V, la descomposició d'un vector en combinació lineal dels elements de la base és única (vegeu proposició 4.31). Per tant,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} y_j, \quad i = 1, \ldots, n$$

que posat en forma matricial és

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1n} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Exemple 1: Donades les bases d'$\mathbb{R}^3$

$$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \quad \text{i} \quad B' = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

calculem les equacions del canvi de base de B a B'.

Donat un element d'$\mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ les seves coordenades respecte a la base B (la base canònica) són (x, y, z), ja que

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Siguin (x', y', z') les coordenades del mateix element en la base nova B'.

Les coordenades de la base nova respecte a l'antiga són

$$\begin{aligned} (1,1,1) &= 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) \\ (0,1,1) &= 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) \\ (0,0,1) &= 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1) \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Exemple 2: Sigui $B = \{(-9, 1), (-5, -1)\}$ i $B' = \{(1, -4), (3, -5)\}$ dues bases d'$\mathbb{R}^2$. Calculem:

a) La matriu de canvi de base de B a B' i les equacions del canvi de base.

b) La matriu de canvi de base de B' a B i les equacions del canvi de base.

c) Si $(1, 2)$ són les coordenades d'un determinat element en la base B, les coordenades de (x', y') respecte la base B'.

Solució:

a) B és la base antiga i B' la nova. Hem de cercar les coordenades dels elements de B' respecte a la base B

$$(1,-4) = x(-9,1) + y(-5,-1) = (-9x-5y, x-y)$$

resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} -9x-5y & = & 1 \\ x-y & = & -4 \end{array}\right\}$$

que té per solució $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{2}$

Anàlogament,

$$(3,-5) = x(-9,1) + y(-5,-1) = (-9x-5y, x-y)$$

resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} -9x-5y & = & 3 \\ x-y & = & -5 \end{array}\right\}$$

que té per solució $x = -2$, $y = 3$.

La matriu del canvi de base de B a B' és

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Si (x, y) són les coordenades en la base B i (x', y') les coordenades en la base B', les equacions del canvi són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

b) B' és la base antiga i B la nova. Hem de cercar les coordenades dels elements de B respecte a la base B'

$$(-9,1) = x(1,-4) + y(3,-5) = (x+3y, -4x-5y)$$

resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x+3y & = & -9 \\ -4x-5y & = & 1 \end{array}\right\}$$

que té per solució $x = 6$, $y = -5$

Anàlogament,

$$(-5,-1) = x(1,-4) + y(3,-5) = (x+3y, -4x-5y)$$

resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x+3y & = & -5 \\ -4x-5y & = & -1 \end{array}\right\}$$

que té per solució $x = 4$, $y = -3$.

La matriu del canvi de base de B a B' és

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Si (x, y) són les coordenades en la base B i (x', y') les coordenades en la base B', les equacions del canvi són

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Anàlogament aquestes equacions i la matriu del canvi de base l'haguéssim pogut calcular aïllant de l'equació matricial de l'apartat a),

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{per tant} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

que ens dóna

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

c) Bastaria posar les equacions del canvi de base

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Índex alfabètic

anti-imatge, 73
aplicació, 73
  bijectiva, 75
  exhaustiva, 75
  injectiva, 75
aplicacions
  iguals, 74

base, 59
base canònica d'$\mathbb{R}^n$, 60
base canònica d'$\mathbb{R}_n[x]$, 61
base canònica de $M(n \times m)$, 60

clausura lineal, 53
combinació lineal, 47
component i-èssima, 70
conjunt
  final, 73
  imatge, 74
  inicial, 73
coordenades, 73
cos, 45

dependència lineal, 47
dimensió, 64

escalar, 46
espai vectorial, 45
  generat, 53
  producte, 67
  suma, 67
  suma directa, 70

funció, 73

imatge
  d'un conjunt, 74
  d'un element, 73
  inversa, 74
isomorfisme, 76

matriu
  del canvi de base, 79

rang d'un conjunt de vectors, 62

sistema coordenat, 73
sistema generador, 53
subespai vectorial, 47
  suplementaris, 71

vector, 46
  linealment dependents, 54
  linealment independents, 54