PROBLEMES ESTADÍSTICA ENGINYERIA
CONTRAST D'HIPÒTESIS

1) Siendo $\overline{x} = 63.5$ la media de una muestra aleatoria simple de tamaño 36 extraída de una población normal con $\sigma^2 = 144$, poner a prueba, con un nivel de significación $\alpha = 0.05$, la hipótesis nula $\mu = 60$ y decir si se rechaza en favor de la alternativa $\mu < 60$.

2) Siendo $\overline{x} = 72.5$ la media de una muestra aleatoria simple de tamaño 100 extraída de una población normal con $\sigma^2 = 900$, poner a prueba, con un nivel de significación $\alpha = 0.10$, la hipótesis nula $\mu = 70$ y decir si se rechaza en favor de las hipótesis alternativas $\mu \neq 70$, $\mu > 70$, y $\mu < 70$. Hallar el p-valor del contraste, para la hipótesis alternativa $\mu > 70$.

3) En un contraste bilateral, con $\alpha = 0.01$, ¿para qué valores de $\overline{X}$ rechazaríamos la hipótesis nula $H_0 : \mu = 70$, a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 64 extraída de una población normal con $\sigma^2 = 256$?

4) El peso medio de los paquetes de café puestos a la venta por la casa comercial CAFEINASA es supuestamente de 1 kg. Para comprobar esta suposición, elegimos una muestra aleatoria simple de 100 paquetes y encontramos que su peso medio es de 0.978 kg y su desviación típica $\hat{s} = 0.10$ kg. Siendo $\alpha = 0.05$, ¿es compatible este resultado con la hipótesis nula $H_0 : \mu = 1$ frente a $H_1 : \mu \neq 1$? ¿Lo es frente a $H_1 : \mu > 1$?

5) El fabricante de la marca de tornillos FDE afirma que el diámetro medio de sus tornillos vale 20 mm. Para comprobar dicha afirmación, extraemos aleatoria e independientemente 16 tornillos, y vemos que la media de sus diámetros es 22 mm y la desviación típica 4 mm. ¿Podemos aceptar la pretensión del fabricante, suponiendo $\alpha = 0.05$ y siendo el contraste bilateral? Hallar el p-valor del contraste.

6) Una máquina produce cierto tipo de piezas mecánicas. El tiempo en producirlas se distribuye normalmente con varianza desconocida σ^2. Elegida una muestra aleatoria simple de 21 de dichas piezas $(x_1, x_2, \ldots, x_{21})$, se obtiene que $\overline{x} = 30$ y $\sum_{i=1}^{21} x_i^2 = 19100$. Comprobar si es compatible la hipótesis nula $H_0 : \sigma^2 = 22$ frente a $H_1 : \sigma^2 \neq 22$, para $\alpha = 0.1$, y construir un intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ para el verdadero valor de σ^2.

7) A partir de las puntuaciones 15, 22, 20, 21, 19 y 23, construir el intervalo de confianza de σ^2 y decir si es compatible con estos resultados la hipótesis $H_0 : \sigma = 2$, siendo $\alpha = 0.01$. Decir si se utiliza alguna hipótesis adicional.

8) Sabiendo que con $\hat{p} = 0.52$ ha sido rechazada la hipótesis nula $H_0 : p = 0.50$, al nivel de significación $\alpha = 0.05$, ¿cuál ha tenido que ser el tamaño mínimo de la muestra mediante la cual fue rechazada H_0

a) frente a $H_1 : p \neq 0.5$?

b) frente a $H_1 : p > 0.5$?

9) Un fabricante de productos farmacéuticos tiene que mantener un estándar de impurezas en el proceso de producción de sus píldoras. Hasta ahora el número medio poblacional de impurezas es correcto, pero está preocupado porque en algunas partidas las impurezas se salen del rango admitido, de forma que provocan devoluciones y reclamaciones por daños a la salud. El gabinete de control de calidad afirma que si la distribución de las impurezas es normal y el proceso de producción mantiene una varianza inferior a 1 no tendría que existir ningún problema pues las píldoras tendrían una concentración aceptable. Preocupado por esta tema, la dirección encarga una prueba externa en la que se toma una muestra aleatoria de 100 de las partidas, obteniéndose $\hat{s}^2 = 1.1$. Tomando $\alpha = 0.25$, ¿puede aceptar el director de la prueba externa que

[1] Sol.: No se rechaza
[2] Sol.: No se rechaza en ninguno de los tres casos, 20.33%
[3] Sol.: Para $\overline{X} < 64.85$ o $\overline{X} > 75.15$
[4] Sol.: Con la primera, no; con la segunda, sí
[5] Sol.: Sí, 6.7%
[6] Sol.: No es compatible, (6.37, 18.35)
[7] Sol.: Suponemos que la población es normal. La hipótesis es compatible, (2.395, 97.09)
[8] Sol.: a) 2401, b) 1692

el proceso de producción cumple la recomendación del gabinete de control?

10) Una empresa que vende vacaciones está preocupada por su estándar de calidad y quiere compararlo con el medio europeo. El estándar medio europeo dice que una empresa de este sector tiene una calidad aceptable si tiene un número de quejas que no excede del 3%. Se sabe que la población es normal y la varianza de las quejas es 0.16. Examinando 64 ventas escogidas al azar entre las del último mes se encuentra que el porcentaje de quejas es 3.07%.

a) Contrastar, al nivel de significación del 5%, la hipótesis nula de que la media poblacional del porcentaje de quejas es del 3% frente a la alternativa de que es superior al 3%.

b) Hallar el p-valor del contraste.

c) Supongamos que la hipótesis alternativa fuese bilateral en lugar de unilateral (con hipótesis nula $H_0 : \mu = 3$). Deducir, sin hacer ningún cálculo, si el p-valor del contraste sería mayor, menor o igual que el del apartado anterior. Construir un gráfico para ilustrar el razonamiento.

d) En el contexto de este problema, explicar por qué una hipótesis alternativa unilateral es más apropiada que una bilateral.

e) Hallar la probabilidad de que en un contraste unilateral al nivel del 5% se rechace la hipótesis nula cuando el verdadero porcentaje de quejas es del 3.10%.

11) Para una población normal $\mathcal{N}(\mu, 20^2)$, sabiendo que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula $H_0 : \mu = 80$ en favor de la alternativa $H_1 : \mu = 84.66$ es 0.6293 y que el tamaño de la muestra es 100, calcular la probabilidad de rechazar H_0 siendo verdadera. (Suponer contraste unilateral.)

12) En un contraste bilateral, con $\alpha = 0.01$, ¿para qué valores de $\overline{X}$ rechazaríamos la hipótesis nula $H_0 : \mu = 70$, a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 64 extraída de una población normal $\mathcal{N}(\mu, 16^2)$?

13) Calcular β, al contrastar la hipótesis nula $H_0 : \mu = 35$ frente a la alternativa $H_1 : \mu = 39$, como medias de una población normal $\mathcal{N}(\mu, 120)$, valiendonos de una muestra aleatoria simple de tamaño 30, extraída de dicha población. El contraste es unilateral y $\alpha = 0.10$.

14) Lanzamos una moneda al aire 100 veces consecutivas,

a) ¿Podemos aceptar la hipótesis nula $H_0 : P(\text{cara}) = 1/2$ frente a la alternativa $H_1 : P(\text{cara}) \neq 1/2$ si se han obtenido 40 caras? (Tomar $\alpha = 0.10$.)

b) ¿Con qué número de caras rechazaríamos $H_0 : P(\text{cara}) = 1/2$, siendo $\alpha = 0.01$?

15) A partir de una muestra aleatoria se contrasta:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

y se acepta la hipótesis nula al nivel de significación del 5%.

a) ¿Implica esto necesariamente que μ_0 está contenido en el intervalo de confianza del 95% para μ?

b) Si la media muestral observada es mayor que μ_0, ¿implica necesariamente que μ_0 está contenido en el intervalo de confianza del 90% para μ?

[9] Sol.: No
[10] Sol.: a) Es compatible, b) 8.08%, c) mayor, e) 0.6554
[11] Sol.: 0.0228
[12] Sol.: $\overline{X} \leq 64.85$, $\overline{X} \geq 75.15$
[13] Sol.: 0.2358
[14] Sol.: a) No, b) con 63 o más, 37 o menos

16) Una compañía que se dedica a la venta de franquicias afirma que, por término medio, los delegados obtienen un redimiendo del 10% en sus inversiones iniciales. Una muestra aleatoria de diez de estas franquicias presentaron los siguientes rendimientos el primer año de operación:

6.1   9.2   11.5   8.6   12.1   3.9   8.4   10.1   9.4   8.9

Asumiendo que los rendimientos poblacionales tienen distribución normal, contrastar la afirmación de la compañía tomando $\alpha = 0.05$.

17) Una distribuidora de bebidas refrescantes creía que una buena fotografía de tamaño real de un conocido actor incrementaría las ventas de un producto en los supermercados en una media de 50 cajas semanales. Para una muestra de 20 supermercados, el incremento medio fue de 41.3 cajas con una desviación típica de 12.2 cajas. Contrastar al nivel de significación $\alpha = 0.05$, la hipótesis nula de que la media poblacional del incremento en las ventas es al menos 50 cajas, indicando cualquier supuesto que se haga. Calcular el p-valor del contraste e interpretarlo.

18) Dos investigadores, Alberto y Timoteo, desean comprobar la hipótesis nula $H_0 : \mu = 50$, acerca de la misma población normal con $\sigma = 20$ e imponiendo un mismo nivel de significación $\alpha = 0.05$ (contraste bilateral). Alberto extrae una muestra aleatoria simple de tamaño 100 y Timoteo de tamaño 64.

a) Siendo realmente verdadera la hipótesis nula, ¿para quién de los dos es mayor la probabilidad de cometer el error tipo I? ¿Cuánto valen ambas?

b) Siendo realmente verdadera la hipótesis alternativa $H_1 : \mu = 52$, ¿para quién de los dos es mayor la probabilidad de cometer el error tipo II? ¿Cuánto valen ambas? (Suponer contraste bilateral.)

19) Una cadena de restaurantes de comida rápida contrasta cada día que el peso medio de sus hamburguesas es al menos de 320 gr. La hipótesis alternativa es que el peso medio es menor que 320 gr., indicando que se necesita un proceso nuevo de producción. Se puede asumir que los pesos de las hamburguesas siguen una distribución normal, con una desviación típica de 30 gr. La regla de decisión adoptada es rechazar la hipótesis nula si el peso medio muestral es menor de 308 gr.

a) Si se seleccionan muestras aleatorias de $n = 36$ hamburguesas, ¿cuál es la probabilidad de cometer un error tipo I usando esta regla de decisión?

b) Si se seleccionan muestras aleatorias de $n = 9$ hamburguesas, ¿cuál es la probabilidad de cometer un error tipo I usando esta regla de decisión? Explicar por qué el resultado es distinto al del apartado anterior.

c) Suponer que el verdadero peso medio es de 310 gr. Si se seleccionan muestras aleatorias de $n = 36$ hamburguesas, ¿cuál es la probabilidad de cometer un error tipo II usando esta regla de decisión?

20) Un funcionario que trabaja en el departamento de colocación de una universidad, quiere determinar si los hombres y las mujeres Ingenieros en Edificación reciben, en promedio, diferentes ofertas de salario en su primer trabajo después de licenciarse. El funcionario seleccionó aleatoriamente ocho pares de licenciados en esa disciplina de manera que las calificaciones, intereses e historial de los integrantes de cada pareja fuesen lo más parecidos posible. La mayor diferencia fue que un miembro de cada pareja era hombre y el otro mujer. La tabla adjunta ofrece la mayor oferta salarial (en miles de euros al mes) que recibió cada miembro de la muestra al terminar su carrera.

[15]Sol.: a) No, b) sí
[16]Sol.: Se acepta la afirmación
[17]Sol.: Se rechaza la hipótesis nula. 0.005
[18]Sol.: a) es igual para ambos; 0.05, b) Alberto: 0.8300; Timoteo: 0.8741
[19]Sol.: a) 0.0082, b) 0.1151, c) 0.6554

pareja	mayor oferta salarial	
	HOMBRE	MUJER
1	2.620	2.260
2	2.470	2.360
3	2.840	2.930
4	2.170	2.230
5	2.860	2.620
6	2.930	2.590
7	2.830	2.850
8	2.430	2.130

Asumiendo que las distribuciones son normales,

a) Para $\alpha = 5\%$, contrastar la hipótesis nula de que las medias poblacionales son iguales frente a la alternativa que la verdadera media es mayor para los hombres que para las mujeres.

b) Para $\alpha = 10\%$, contrastar frente a una alternativa bilateral, la hipótesis nula de que la media para los hombres difiere en 300 euros de la media para las mujeres.

21) Con el objeto de comparar dos métodos de aprendizaje de la lectura, se toman 6 parejas de hermanos gemelos, aplicándose un método a cada hermano y evaluando los resultados mediante un test. Dichos resultados fueron:

método 1	112	133	152	107	120	124
método 2	100	130	150	110	112	110

¿Puede afirmarse, con un nivel de significación 0.1, que los métodos no son igualmente eficaces?

22) Dos máquinas dosificadoras, exactamente iguales, se utilizan una para empaquetar garbanzos y otra para empaquetar judías. Con el fin de contrastar que están ajustadas al mismo peso, se pesaron el último paquete de garbanzos y judías producidas cada día durante una semana, obteniéndose los siguientes resultados (en gramos):

	lunes	martes	miercoles	jueves	viernes
garbanzos	980	1000	990	990	1000
judías	1000	1010	990	1000	990

Suponiendo que las dos distribuciones de peso son normales y con la misma varianza, ¿podemos aceptar, con un nivel de significación de 0.05, que las dos máquinas están ajustadas al mismo peso?

23) De una muestra aleatoria de 203 anuncios publicados en revistas británicas, 52 eran humorísticos. De una muestra aleatoria independiente de 270 anuncios publicados en revistas americanas, 56 eran humorísticos. Contrastar, frente a una alternativa bilateral, la hipótesis nula de que la proporción de anuncios cómicos de las revistas británicas y americanas son iguales. Calcular el p-valor.

24) Se quiere averiguar si existen diferencias significativas entre dos plataformas digitales, al considerar los ingresos por cliente cuando utilizan la modalidad de pago por visión. Para tal propósito se elegieron al azar 20 clientes de cada plataforma y se anotó el gasto por cliente y mes en dicha modalidad, obteniéndose para la plataforma 1 un gasto medio mensual por cliente de 27 euros y una desviación típica muestral de 6 euros y para la plataforma 2 un gasto medio mensual por cliente de 27,6 euros y una desviación típica muestral de 9 euros. A un nivel de significación $\alpha = 0.05$, ¿existen diferencias significativas entre las dos plataformas en cuanto a la modalidad analizada?

25) Se quiere averiguar si ha habido una reducción significativa en el porcentaje de votantes a un determinado partido político, el el último año. Para ello se eligieron al azar 100 personas y se las preguntó si votarían

[20]Sol.: a) el salario medio de los hombres es superior al salario medio de las mujeres, b) los salarios medios no difieren en 300 euros.
[21]Sol.: Si.
[22]Sol.: Si
[23]Sol.: 21.12%
[24]Sol.: No existen diferencias significativas.

al partido en cuestión, obteniéndose un porcentaje de respuestas afirmativas del 39%. Si el porcentaje de votantes a favor era del 42% hace un año, cuando se preguntó a 150 personas, contrastar a nivel $\alpha = 0.05$ si la reducción habida ha sido significativa. Calcular el p-valor del contraste.

26) En un centro de enseñanza de idiomas se escogieron dos grupos de 25 alumnos para comprobar la distinta eficacia de dos métodos de aprendizaje. El primer grupo estudió con el método tradicional y el segundo con un método audiovisual nuevo. Los alumnos del primer grupo obtuvieron una calificación media de 7.2 con una desviación típica de 2.4, y los del segundo, 5.8 con una desviación típica de 1.5. Para $\alpha = 0.01$, ¿existen diferencias significativas entre ambos métodos? (Suponer poblaciones normales con distinta varianza.)

27) Una muestra de 200 bombillas de la marca A dio una vida media de funcionamiento de 2280 horas con una desviación típica de 80 horas. Otra muestra de 180 bombillas de la marca B dio vida media 2320 horas con desviación típica 100 horas. ¿Se puede afirmar al nivel 0.01, que es mayor la vida media para la marca B?

28) Un inversionista desea comparar los riesgos asociados con dos mercados A y B. El riesgo de un mercado dado se mide por la variación de los cambios diarios de precios. El inversionista piensa que el riesgo asociado con el mercado B es mayor que el del mercado A. Se obtienen muestras aleatorias de 21 cambios de precios diarios para el mercado A y de 16 para el mercado B. Se obtienen los siguientes resultados:

	$\overline{X}$	$\hat{s}_X$
mercado A	0.3	0.25
mercado B	0.4	0.45

a) Si se supone que las muestras provienen de dos poblaciones normales e independientes, a un nivel de $\alpha = 0.05$, ¿encuentra apoyo la creencia del inversionista?

b) Si la varianza muestral de A es la dada, ¿cuál es el máximo valor de la desviación típica muestral de B con base en $m = 16$ que no llevará al rechazo de la hipótesis nula del apartado a?

29) Un economista al servicio de una agencia estatal desea determinar si la frecuencia de desempleo en dos grandes áreas urbanas del estado son diferentes. Toma dos muestras aleatorias de 500 personas de cada ciudad y encuentra 35 personas desempleadas en un área y 25 en la otra. Bajo las suposiciones adecuadas y con un nivel de $\alpha = 0.05$, ¿existe alguna razón para creer que las frecuencias de desempleo en las dos áreas son diferentes? ¿Cuál es el valor de p?

[25] Sol.: 31.92%
[26] Sol.: No existen diferencias.
[27] Sol.: Si.
[28] Sol.: a) No, b) 0.1072
[29] Sol.: No, 0.1836