Fonaments Matemàtiques II

Àlgebra Lineal

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears

Manuel Moyà Quintero

Índex

Capítol 5

Aplicacions lineals

Siguin V i W dos espais vectorials sobre un cos K commutatiu i $f : V \rightarrow W$ una aplicació.

Definició 5.1 *Direm que f és un* **homomorfisme** *o una* **aplicació lineal** *de V en W si compleix:*

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$ *per a tot* $a, b \in V$
- $f(ta) = tf(a)$ *per a tot* $t \in K$ *i per a tot* $a \in V$

Exemple: Vegem que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, x + z, z)$ és una aplicació lineal.

a) Vegem primer que $f[(x, y, z) + (x', y', z')] = f(x, y, z) + f(x', y', z')$. Efectivament,

$$f[(x, y, z) + (x', y', z')] = f(x + x', y + y', z + z') =$$

$$= ((x+x')+(y+y'), (x+x')+(z+z'), z+z') = (x+y, x+z, z)+(x'+y', x'+z', z') =$$

$$= f(x, y, z) + f(x', y', z')$$

b) Vegem ara que $f[t(x, y, z)] = tf(x, y, z)$,

$$f[t(x, y, z)] = f(tx, ty, tz) = (tx + ty, tx + tz, tz) = t(x + y, x + z, z) = tf(x, y, z)$$

Per tant, és una aplicació lineal.

Al conjunt de tots els homomorfismes de V en W el representarem per $Hom_K(V, W)$ i per $Hom(V, W)$, si no es dóna confusió sobre quin és el conjunt K.

Si f és una aplicació lineal bijectiva direm que és un **isomorfisme**.

Si $V = W$ direm que f és un **endomorfisme** i al conjunt de tots els endomorfismes de V el representarem per $End_K(V)$ o $End(V)$. I si és bijectiu l'anomenarem **automorfisme** i al conjunt de tots els automorfismes sobre V el representarem per $GL_K(V)$ o $GL(V)$.

Proposició 5.2 *Si $f : V \to W$ és una aplicació lineal,*

(a) $f(0_V) = 0_W$.

(b) $f(-u) = -f(u)$, per a tot $u \in V$

DEMOSTRACIÓ:

(a) Sigui $u \in V$, com f és lineal es compleix $f(0_V + u) = f(0_V) + f(u)$, és a dir, $f(u) = f(0_V) + f(u)$, aïllant $f(0_V)$ tenim $f(0_V) = f(u) - f(u) = 0_W$.

(b) Vegem que l'oposat a $f(u)$ (és a dir $-f(u)$) és $f(-u)$,

$$f(u) + f(-u) \overset{(1)}{=} f(u + (-u)) = f(0_V) \overset{(2)}{=} 0_W$$

(1) Per ser f lineal. (2) Per l'apartat anterior.

Això ens diu que l'oposat a $-f(u) = f(-u)$.

A continuació es dóna el concepte de composició d'aplicacions, que el necessitam per a operar amb composició d'aplicacions lineals.

Definició 5.3 *Donades dues aplicacions $f : A \to B$ i $g : B \to C$, definim l'aplicació $h : A \to C$ mitjançant $h(a) = g(f(a))$. A aquesta aplicació h l'anomenarem* **aplicació composta** *d'f per g i la representarem per $g \circ f$.*

Exemple1: Siguin $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{p, q, r, s\}$. Definim les aplicacions $f : A \to B$ i $g : B \to C$ de la següent forma: $f(a) = 1$, $f(b) = 1$, $f(c) = 2$, $f(d) = 3$, $g(1) = p$, $g(2) = r$, $g(3) = r$.

L'aplicació $g \circ f : A \to C$ tal que,

$$\begin{gathered}(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = p\\ (g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(1) = p\\ (g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(2) = r\\ (g \circ f)(d) = g(f(d)) = g(3) = r\end{gathered}$$

Exemple 2: Definim les aplicacions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la següent forma: $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$. Aleshores,

$$(g \circ f)(x) = (g(f(x)) = g(\sin x) = \sin^2 x$$

$$(f \circ g)(x) = (f(g(x)) = f(x^2) = \sin x^2$$

Proposició 5.4 *La composició de dues aplicacions lineals és una aplicació lineal.*

Demostració:

Siguin $f : U \to V$ i $g : V \to W$, hem de veure que $g \circ f$ és lineal. Siguin $u, v \in U$ i $t \in K$,

(a)

$$(g\circ f)(u+v) = g(f(u+v)) \overset{(1)}{=} g(f(u)+f(v)) \overset{(2)}{=} g(f(u))+g(f(v)) = (g\circ f)(u)+(g\circ f)(v)$$

(b)

$$(g \circ f)(tv) = g(f(tu) \overset{(1)}{=} g(tf(u)) \overset{(2)}{=} tg(f(u)) = t(g \circ f)(u)$$

(1) Per ser f lineal. (2) Per ser g lineal.

Exemple: Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, x + z, z)$ una aplicació lineal, i $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $g(x, y, z) = (x + y, x + z)$. L'aplicació $g \circ f$ és:

$$(g \circ f)(x, y, z) = g(f(x, y, z)) = g(x + y, x + z, z) = (2x + y + z, x + y + z)$$

que també és lineal.

Proposició 5.5 *Sigui $f : V \to W$ una aplicació lineal:*

(a) Si S és un subespai vectorial de V, $f(S)$ és un subespai vectorial de W.

(b) Si T és un subespai vectorial de W, $f^{-1}(T)$ és un subespai vectorial de V.

Demostració:

(a) Sigui $f(u), f(v) \in f(S)$ on $u, v \in S$, i $t, s \in K$,

$$tf(u) + sf(v) = f(tu) + f(sv) = f(tu + sv) \in S$$

ja que S és un subespai vectorial de V i per tant, $tu + sv \in S$.

(b) Sigui $u, v \in f^{-1}(T)$ i $t, s \in K$, hem de veure que $tu + sv \in f^{-1}(T)$. Efectivament, si $u, v \in f^{-1}(T)$ vol dir que $f(u), f(v) \in T$, i com T és un subespai vectorial de W tenim $tf(u) + sf(v) \in T$, aleshores, per ser f lineal,

$$tf(u) + sf(v) = f(tu) + f(sv) = f(tu + sv) \in T$$

Per tant, $tu + sv \in f^{-1}(T)$

Exemple 1: Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida a la definició 5.1, és a dir, $f(x,y,z) = (x+y, x+z, z)$. Sigui $S = \{(x,y,z)|2x+y+z = 0\}$ un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$, com vàrem veure a l'exemple de la proposició 4.5. Cerquem una base d'$f(S)$

Com els elements d'S compleixen que $2x+y+z = 0$, és a dir, $z = -2x-y$, seran de la forma $(x, y, -2x-y)$, per tant,

$$f(x,y,-2x-y) = (x+y, x+(-2x-y), -2x-y) = (x+y, -x-y, -2x-y)$$

D'aquí deduïm que $f(S) = \{(x+y, -x-y, -2x-y)|x, y \in \mathbb{R}\}$.

Cerquem ara una base d'$f(S)$. Un element qualsevol d'$f(S)$ el podem posar com

$$(x+y, -x-y, -2x-y) = (x, -x, -2x) + (y, -y, -y) = x(1, -1, -2) + y(1, -1, -1)$$

Per tant, $f(S) =< (1,-1,-2), (1,-1,-1) >$ que a més són linealment independents ja que el menor $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Una base d'$f(S)$ és $\{(1,-1,-2), (1,-1,-1)\}$

Exemple 2: Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal anterior, és a dir, $f(x,y,z) = (x+y, x+z, z)$. Sigui $T = \{(x,y,z)|2x+y+z = 0\}$ un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$, com vàrem veure a l'exemple de la proposició 4.5. Cerquem una base de $f^{-1}(T)$.

$(a,b,c) \in f^{-1}(T)$ si $f(a,b,c) = (a+b, a+c, c) \in T$, és a dir, si $2(a+b)+a+c+c = 3a+2b+2c = 0$. Per tant, $f^{-1}(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3|3a+2b+2c = 0\}$. Cerquem una base d'aquest espai vectorial. Els elements d'$f^{-1}(T)$ compleixen $3a+2b+2c = 0$, és a dir, $c = -\frac{3}{2}a - b$, per tant són de la forma

$$\left(a, b, -\frac{3}{2}a - b\right) = \left(a, 0, -\frac{3}{2}a\right) + (0, b, -b) = a\left(1, 0, -\frac{3}{2}\right) + b\,(0, 1, -1)$$

i $f^{-1}(T) =< \left(1, 0, -\frac{3}{2}\right), (0,1,-1) >$ que a més són linealment independents i per tant una base seria

$$\left\{\left(1, 0, -\frac{3}{2}\right), (0,1,-1)\right\}$$

Definició 5.6 *Com a conseqüència de la proposició anterior tenim que $f^{-1}(\bar{0})$ i $f(V)$ són espais vectorials.*

Al subespai vectorial $f^{-1}(\bar{0})$ l'anomenarem **nucli** *de l'aplicació lineal f i el representarem per $Ker\ f$ o $Nuc\ f$.*

A l'espai vectorial $f(V)$ l'anomenarem **imatge** *de l'aplicació lineal f i el representarem per $Im\ f$.*

Exemple: Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$, cerquem el nucli i la imatge d'f.

(a) Cerquem primer el nucli. $(x, y, z) \in Ker\ f$ si $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$, és a dir, $(x + y, x + z, 2x + y + z) = (0, 0, 0)$. Resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}\right\}$$

tenim $y = -x$, $z = -x$, per tant, els elements del nucli seran de la forma $(x, -x, -x) = x(1, -1, -1)$ i $Ker\ f =< (1, -1, -1) >$.

(b) Cerquem ara $Im\ f$. $(a, b, c) \in Im\ f$ si existeix $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (a, b, c)$. Per tant, $(x + y, x + z, 2x + y + z) = (a, b, c)$ i ens queda el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y = a \\ x + z = b \\ 2x + y + z = c \end{array}\right\}$$

Estudiem quan té solució el sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b - a \\ 0 & -1 & 1 & c - 2a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & c - b - a \end{pmatrix}$$

El sistema serà compatible, o el que és igual, tendrà solució, és a dir, existirà (x, y, z) tal que $f(x, y, z) = (a, b, c)$ si es compleix la condició $c - b - a = 0$ i $Im\ f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z - y - x = 0\}$.

Proposició 5.7 *Si $f : V \to W$ és una aplicació lineal:*

(a) f és injectiva si i només si $Ker\ f = \{\bar{0}_V\}$

(b) f és exhaustiva si i només si $Im\ f = W$

Demostració:

(a) $\Rightarrow$) Sabem, per la proposició 5.2 que $f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$, i com f és injectiva, només existeix un element de V que tengui per imatge $\bar{0}_W$. Aleshores $Ker\ f = \{\bar{0}_V\}$

$\Leftarrow$) Sigui $u, v \in V$ tal que $f(u) = f(v)$, aleshores $f(u) - f(v) = \bar{0}_W$, i com f és una aplicació lineal ens queda $f(u - v) = \bar{0}_W$. Ara bé, per hipòtesi $Ker\ f = \{\bar{0}_V\}$, per tant, $u - v = \bar{0}_V$ i $u = v$. Això ens diu que f és injectiva.

(b) $\Rightarrow$) f és exhaustiva si i només si $f(V) = W$, o el que és igual $Im\ f = W$.

Exemple: Vegem si l'aplicació lineal definida a l'exemple de la definició 5.6: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$, és injectiva o exhaustiva. Tal com vàrem veure a l'exemple de la definició 5.6,

$$Ker\ f =< (1, -1, -1) >\neq \{(0, 0, 0)\},$$

per tant no és injectiva.

A l'exemple de la mateixa definició també vàrem veure que

$$Im\ f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z - y - x = 0\} \neq \mathbb{R}^3$$

per tant, tampoc és exhaustiva.

Proposició 5.8 *Sigui $f : V \to W$ és una aplicació lineal i $\{u_1, \ldots, u_p\}$ una família de vectors de V, aleshores:*

$$f(< u_1, \ldots, u_p >) =< f(u_1), \ldots, f(u_p) >$$

Demostració:

$\subseteq$) Sigui $f(t_1u_1 + \ldots + t_pu_p) \in f(< u_1, \ldots, u_p >)$. Com f és una aplicació lineal,

$$f(t_1u_1 + \ldots + t_pu_p) = t_1f(u_1) + \ldots + t_pf(u_p) \in< f(u_1), \ldots, f(u_p) >$$

$\supseteq$) Anàlogament si $t_1f(u_1) + \ldots + t_pf(u_p) \in< f(u_1), \ldots, f(u_p) >$ com f és una aplicació lineal,

$$t_1f(u_1) + \ldots + t_pf(u_p) = f(t_1u_1 + \ldots + t_pu_p) \in f(< u_1, \ldots, u_p >)$$

Exemple 1: Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida als exemples de la proposició 5.5, és a dir, $f(x, y, z) = (x + y, x + z, z)$. Sigui $S = \{(x, y, z)|2x + y + z = 0\}$ un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$, com vàrem veure a l'exemple de la proposició 4.5. Cerquem una base d'$f(S)$

Els elements d'S compleixen que $z = -2x - y$, per tant són de la forma

$$(x, y, -2x - y) = (x, 0, -2x) + (0, y, -y) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, -1)$$

Aleshores $S =< (1,0,-2),(0,1,-1) >$.

Tenint en compte aquesta proposició,

$$f(S) =< f(1,0,-2), f(0,1,-1) >=< (1,-1,-2),(1,-1,-1) >$$

que són linealment independents i per tant base tal com vàrem veure a l'exemple de la proposició 5.5

Exemple 2: Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (x+y, x+z, 2x+y+z)$ ja vista a l'exemple de la definició 5.6, cerquem la imatge d'f.

$$Im\ f = f(\mathbb{R}^3) = f(< (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) >=$$
$$=< f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) >=< (1,1,2),(1,0,1),(0,1,1) >$$

Però són linealment dependents,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant, $Im\ f =< (1,1,2),(1,0,1) >$. Vegem que coincideix amb el resultat que vàrem obtenir a l'exemple de la definició 5.6, és a dir, $Im\ f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z-y-x=0\}$. Per a això posem la primera expressió en la forma com s'expressa la segona.

$(x,y,z) \in< (1,1,2),(1,0,1) >$ si i només si (x,y,z) es pot expressar en combinació lineal de $\{(1,1,2),(1,0,1)\}$, o el que és igual, si el rang de la matriu següent és 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & y-x & z-2x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & z-x-y \end{pmatrix}$$

Aleshores els elements d'$Im\ f$ compleixen $z-x-y=0$.

Proposició 5.9 *Si $\{u_1,\dots,u_n\}$ és una base de V i $\{w_1,\dots,w_n\}$ un sistema de n vectors iguals o diferents de W, aleshores existeix una única aplicació lineal $f : V \to W$ tal que $f(u_i) = w_i$ per a tot $i = 1,\dots,n$.*

DEMOSTRACIÓ:

Sigui $u \in V$, com $\{u_1, \ldots, u_n\}$ és una base de V, existeixen escalars únics t_i amb $i = 1, \ldots, n$ tals que $u = t_1u_1 + \ldots + t_nu_n$. Definirem l'aplicació $f : V \to W$ de la següent forma:

$$f(u) = t_1 f(u_1) + \ldots + t_n f(u_n)$$

(a) Vegem primer que és una aplicació lineal. Siguin $u, v \in V$ i $t \in K$. Com $\{u_1, \ldots, u_n\}$ és una base de V, existeixen escalars únics t_i s_i amb $i = 1, \ldots, n$ tals que $u = t_1u_1 + \ldots + t_nu_n$ i $v = s_1u_1 + \ldots + s_nu_n$

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$

$$f(u+v) = f((t_1u_1 + \ldots + t_nu_n) + (s_1u_1 + \ldots + s_nu_n)) =$$
$$= f((t_1+s_1)u_1 + \ldots + (t_n+s_n)u_n) = (t_1+s_1)f(u_1) + \ldots + (t_n+s_n)f(u_n) =$$
$$= (t_1f(u_1) + \ldots + t_nf(u_n)) + (s_1f(u_1) + \ldots + s_nf(u_n)) =$$
$$= f(t_1u_1 + \ldots + t_nu_n) + f(s_1u_1 + \ldots + s_nu_n) = f(u) + f(v)$$

- $f(tu) = tf(u)$

$$f(tu) = f(t(t_1u_1 + \ldots + t_nu_n)) = f(tt_1u_1 + \ldots + tt_nu_n) = tt_1f(u_1) + \ldots + tt_nf(u_n) =$$
$$= t(t_1f(u_1) + \ldots + t_nf(u_n)) = tf(t_1u_1 + \ldots + t_nu_n) = tf(u)$$

(b) Vegem a continuació que és única. Sigui $u \in V$, aleshores $u = t_1u_1 + \ldots + t_nu_n$ de forma única, i com f és lineal

$$f(u) = f(t_1u_1 + \ldots + t_nu_n) = t_1f(u_1) + \ldots + t_nf(u_n)$$

Aleshores $f(u)$ està totalment determinat. Per tant és única.

Exemple: Sigui $\{(1,2),(2,1)\}$ una base d'$\mathbb{R}^2$ i $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal que compleix $f(1,2) = (-1,-1)$ i $f(2,1) = (-1,2)$. Cerquem $f(a,b)$.

Primer posarem (a,b) en combinació lineal de $\{(1,2),(2,1)\}$,

$$(a,b) = t(1,2) + s(2,1) = (t+2s, 2t+s)$$

i resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{c} t+2s = a \\ 2t+s = b \end{array}\right)$$

ens dóna la solució $t = \frac{2b-a}{3}$, $s = \frac{2a-b}{3}$, aleshores

$$f(a,b) = f\left(\frac{2b-a}{3}(1,2) + \frac{2a-b}{3}(2,1)\right) = \frac{2b-a}{3}f(1,2) + \frac{2a-b}{3}f(2,1) =$$
$$= \frac{2b-a}{3}(-1,-1) + \frac{2a-b}{3}(-1,2) = \left(-\frac{2b-a}{3}, -\frac{2b-a}{3}\right) + \left(-\frac{2a-b}{3}, 2\frac{2a-b}{3}\right) =$$
$$= \left(-\frac{a+b}{3}, \frac{5a-4b}{3}\right)$$

Proposició 5.10 ***(Equació matricial d'una aplicació lineal)***
Sigui $f : V \to W$ una aplicació lineal, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V i $\{w_1, \ldots, w_m\}$ una base de W on,

$$f(u_i) = t_{i1}w_1 + \ldots + t_{im}w_m \qquad \textit{per a } i = 1, \ldots, n$$

si $u = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n \in V$ i $f(u) = y_1w_1 + \ldots + y_mw_m \in W$ es compleix.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1m} & \ldots & t_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

És a dir, les coordenades de $f(u)$ en al base $\{w_1, \ldots, w_m\}$ són iguals a una matriu on la columna i-èssima són les coordenades de $f(u_i)$ en al mateixa base per les coordenades de u en la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Demostració:

$$f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_iu_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_if(u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{m} t_{ij}w_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij}x_i\right)w_j$$

per altra part, $f(u) = \sum_{j=1}^{m} y_jw_j$ i com $\{w_1, \ldots, w_m\}$ una base de W, la descomposició és única. Per tant,

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}x_i \quad \text{per a } j = 1, \ldots, m$$

que expressat en forma matricial ens dóna

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1m} & \ldots & t_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Definició 5.11 *La matriu*

$$A = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1m} & \ldots & t_{nm} \end{pmatrix}$$

de la proposició anterior 5.10, l'anomenarem **matriu associada a una aplicació lineal**

Exemple 1: Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicació lineal tal que $f(1,0,0) = (3,2)$, $f(0,1,0) = (-1,3)$ i $f(0,0,1) = (1,1)$. Trobem la matriu associada respecte a les bases canòniques i les equacions de f. En particular cercarem $f(1,2,-1)$

Un element (x,y,x) de $\mathbb{R}^3$ té de coordenades respecte a la base canònica (x,y,z). Per altra part, $f(x,y,z)$ tendrà de coordenades respecte a la base canònica d'$\mathbb{R}^2$ (x',y'). Per tant, la matriu associada a f respecte a les bases canòniques és

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

i l'equació matricial és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Finalement cerquem $f(1,2,-1)$. Les coordenades de $(1,2,-1)$ respecte a la base canònica d'$\mathbb{R}^3$ també són $(1,2,-1)$. Per tant,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Exemple 2: Sigui $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,0)\}$ una base d'$\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ una base d'$\mathbb{R}^3$ i $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal donada per $f(1,1) = (2,2,1)$ i $f(1,0) = (1,2,0)$. Trobem la matriu associada a f respecte a les bases $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ i les equacions de f. En particular cercarem $f(1,3)$

Cerquem primer les coordenades de les imatges del elements de $\mathcal{B}$ respecte a la base $\mathcal{B}'$,

$$f(1,1) = (2,2,1) = t(1,1,0) + s(1,0,1) + r(0,1,1)$$

resolent el sistema ens surt $t = \frac{3}{2}$, $s = \frac{1}{2}$ $r = \frac{1}{2}$, per tant les coordenades de $f(1,1)$ respecte a la base $\mathcal{B}'$ són $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Anàlogament

$$f(1,0) = (1,2,0) = t(1,1,0) + s(1,0,1) + r(0,1,1)$$

que resolent tenim $t = \frac{3}{2}$, $s = -\frac{1}{2}$ $r = \frac{1}{2}$, per tant les coordenades de $f(1,0)$ respecte a la base $\mathcal{B}'$ són $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

La matriu associada és

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

L'equació matricial és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Per calcular $f(1,3)$ primer hem de calcular les coordenades de $(1,3)$ respecte a la base $\mathcal{B}$,

$$(1,3) = t(1,1) + s(1,0)$$

i resolent el sistema tenim $t = 3,\ s = -2$. L'equació matricial seria,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ara bé, això són les coordenades d'$f(1,3)$ respecte a la base $\mathcal{B}'$, per tant,

$$f(1,3) = \frac{3}{2}(1,1,0) + \frac{5}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1) = (4,2,3)$$

Proposició 5.12 *Sigui $f : V \to W$ una aplicació lineal i sigui A la matriu associada a f respecte a les bases B i $\bar{B}$ bases de V i W respectivament. Sigui ara C la matriu associada a la mateixa aplicació lineal respecte a les bases B' i $\bar{B}'$.*

Si P és la matriu de canvi de B a B' i Q la matriu de canvi de $\bar{B}$ a $\bar{B}'$ aleshores es compleix $C = Q^{-1}AP$.

DEMOSTRACIÓ:

Sigui $v \in V$. Siguin X i $\bar{Y}$ les coordenades de v i $f(v)$ en les bases B i $\bar{B}$ de V i W respectivament. Aleshores

$$\bar{Y} = AX$$

Siguin ara X' i $\bar{Y}'$ les coordenades de v i $f(v)$ en les bases B' i $\bar{B}'$. Aleshores

$$\bar{Y}' = CX'$$

Ens interessa trobar una relació entre C i A.

Si P és la matriu de canvi de base de la base B a B' tenim $X = PX'$. Si Q és la matriu de canvi de la base $\bar{B}$ a $\bar{B}'$ tenim $\bar{Y} = Q\bar{Y}'$, per tant, substituint a $\bar{Y} = CX$ tenim

$$Q\bar{Y}' = APX'; \qquad \bar{Y}' = Q^{-1}APX$$

per altra part $\bar{Y}' = CX'$, i això es compleix per a qualsevol coordenades. Per tant, $C = Q^{-1}AP$

Definició 5.13 *Anomenam* **rang** *de una aplicació lineal $f : V \to W$ i el representarem per $rang\ f$ a $dim\ Im\ f = dim\ f(V)$.*

Exemple: A l'exemple de la proposició 5.8 vàrem definir l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$ i vàrem veure que $Im\ f =< (1, 1, 2), (1, 0, 1) >$, per tant, $rang\ f = dim\ Im\ f = 2$.

Proposició 5.14 *Si A és la matriu associada a una aplicació lineal $f : V \to W$ respecte a les bases $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de V i $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de W, aleshores $rang\ f = rang\ A$.*

DEMOSTRACIÓ:

Sabem que $rang\ f = dim\ Im\ f =< f(u_1, \ldots, f(u_n) >$, on $Im\ f \subseteq W$. Per la proposició 4.41 tenim que W és isomorf a K^n, on l'isomorfisme ve donat per la correspondència entre un element de W i les seves coordenades respecte a la base $\{w_1, \ldots, w_n\}$.
Per tant, el rang d'$\{f(u_1, \ldots, f(u_n)\}$ serà el mateix que el rang dels elements de K^n format per les seves coordenades i aquest és el de les columnes de la matriu A.
Exemple: A l'exemple de la proposició 5.8 vàrem definir l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$. Cerquem el $rang\ f$.

Cerquem la matriu associada a aquesta aplicació lineal respecte a les bases canòniques: $f(1, 0, 0) = (1, 1, 2)$, $f(0, 1, 0) = (1, 0, 1)$ i $f(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$. Per tant,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que té rang 2. Per tant, $rang\ f = 2$.

Proposició 5.15 *Sigui $f : V \to W$ una aplicació aplicació lineal,*

(a) f és exhaustiva si i només si $rang\ f = dim\ W$.

(b) f és injectiva si i només si $rang\ f = dim\ V$.

DEMOSTRACIÓ:

(a) f és exhaustiva si i només si $f(V) = W$ i com $f(V) \subseteq W$ tenim que $f(V) = W$ és equivalent a dir $dim\ f(V) = dim\ W$ tal com es va veure a la proposició 4.19, i per tant equivalent a $rang\ f = dim\ W$.

(b) Suposem que l'equació matricial de l'aplicació lineal f és

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{1m} & \dots & t_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Per la proposició 5.7 tenim que f és injectiva si i només si $Ker\ f = \{\bar{0}\}$, és a dir la solució del sistema homogeni

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{1m} & \dots & t_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

ha de ser única, i això es complirà si i només si el rang de la matriu dels coeficients és igual al nombres d'incògnites, és a dir, $rang\ f = dim\ V$.
Exemple: A l'exemple de la proposició 5.14 vàrem definir l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$ i vàrem veure que $rang\ f = 2$. Com la dimensió del conjunt final $\mathbb{R}^3$ és 3 tenim que no és exhaustiva i com la dimensió del conjunt inicial $\mathbb{R}^3$ també és 3, tampoc és injectiva.

Corol·lari 5.16 *Una aplicació lineal és isomorfisme si i nomes si* $dim\ V = dim\ W$ *i* $Ker\ f = \{\bar{0}_V\}$.

DEMOSTRACIÓ:

$\Rightarrow$) Si és isomorfisme és exhaustiva i injectiva, per tant, per la proposició 5.15 ha de complir que $rang\ f = dim\ W$ i $rang\ f = dim\ V$, és a dir, $dim\ W = dim\ V$. Per altra part si és injectiva, per la proposició 5.7 compleix $Ker\ f = \bar{0}_V$.

$\Leftarrow$) Per la proposició 5.7 com $Ker\ f = \bar{0}_V$ és injectiva. Vegem ara que també és exhaustiva. Efectivament, com és injectiva per la proposició 5.15 $rang\ f = dim\ V$ i com per hipòtesi $dim\ V = dim\ W$ tenim que $rang\ f = dim\ W$, per tant, per la mateixa proposició 5.15 tenim que f és exhaustiva.

Proposició 5.17 *Si* $f : V \to W$ *és una aplicació lineal entre espais vectorials,*

$$dim\ V = dim\ Ker\ f + dim\ Im\ f$$

DEMOSTRACIÓ:

Sigui $\{h_1, \dots, h_r\}$ una base de $Im\ f$, per tant, existeix $\{e_1, \dots, e_r\} \subseteq V$ tal que $f(e_i) = h_i$ per a $i = 1, \dots r$. És a dir, $\{f(e_1, \dots, f(e_r)\}$ és una base de $Im\ f$.

Sigui $\{f_1, \dots, f_k\}$ una base de $Ker\ f$. Vegem que $\{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_k\}$ és una base de V.

- Sistema generador.

  Sigui $u \in V$, aleshores $f(u) \in Im\ f$ i com $\{f(e_1, \ldots, f(e_r)\}$ és una base de $Im\ f$, tenim que
  $$f(u) = t_1 f(e_1) + \ldots + t_r f(e_r) = f(t_1 e_1 + \ldots + t_r e_r)$$
  i passant al primer membre, $f(u - t_1 e_1 - \ldots - t_r e_r) = \bar{0}_V$. Això ens diu que $u - t_1 e_1 - \ldots - t_r e_r \in Ker\ f$, per tant es pot posar en combinació lineal de la base de $Ker\ f$

  $u - t_1 e_1 - \ldots - t_r e_r = s_1 f_1 + \ldots + s_k f_k$; i $u = t_1 e_1 + \ldots + t_r e_r + s_1 f_1 + \ldots + s_k f_k$

  Linealment independents.

  Posem una combinació lineal igualada a zero
  $$t_1 e_1 + \ldots + t_r e_r + s_1 f_1 + \ldots + s_k f_k = \bar{0}_V \quad (1)$$
  apliquem f,
  $$f(t_1 e_1 + \ldots + t_r e_r + s_1 f_1 + \ldots + s_k f_k) =$$
  $$= t_1 f(e_1) + \ldots + t_r f(e_r) + f(s_1 f_1 + \ldots + s_k f_k) = f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$$
  com $s_1 f_1 + \ldots + s_k f_k \in Ker\ f$ tenim que $f(s_1 f_1 + \ldots + s_k f_k) = \bar{0}_W$, per tant,
  $$t_1 f(e_1) + \ldots + t_r f(e_r) = \bar{0}_W$$
  Ara bé, $\{f(e_1, \ldots, f(e_r)\}$ és una base de $Im\ f$, per tant, $t_1 = \ldots = t_r = 0$.

  Com els $t_i = 0$ per a $i = 1, \ldots, r$, de la condició inicial (1) ens queda
  $$s_1 f_1 + \ldots + s_k f_k = \bar{0}_V$$
  i com $\{f_1, \ldots, f_k\}$ una base de $Ker\ f$ tenim $s_1 = \ldots = s_k = 0$.

  Per tant,
  $$dim\ V = r + k = dim\ Im\ f + dim\ Ker\ f$$

Enunciarem ara una sèrie de definicions i proposicions que mostren les relacions entre les aplicacions lineals i les matrius. No es demostrarà cap d'aquestes proposicions.

Proposició 5.18 *Si $f, g \in Hom(V, W)$ i $t \in K$. Definim sobre $Hom(V, W)$ una operació interna "+" i una externa "." sobre K de la següent forma*
$$(f + g)(u) = f(u) + g(u)$$
$$(tf)(u) = tf(u)$$
Aleshores $f + g$ i tf també són aplicacions lineals i $(Hom(V, W), +, \cdot_K)$ és un espai vectorial.

Exemple:

Si $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x,y,z) = (x+y, x+z, 2x+y+z) \text{ i } g(x,y,z) = (x-y, x-z, 2x+y)$$

Aleshores:

$$(f+g)(x,y,z) = f(x,y,z)+g(x,y,z) = (x+y, x+z, 2x+y+z)+(x-y, x-z, 2x+y) =$$

$$= (2x, 2x, 4x+2y+z)$$

$$(tf)(x,y,z) = tf(x,y,z) = t(x+y, x+z, 2x+y+z) = (tx+ty, tx+tz, 2tx+ty+tz)$$

Proposició 5.19 *Si dim $V = m$ i dim $W = n$, l'aplicació:*

$$h : (Hom(V,W), +, \cdot_K) \to (M_{n\times m}(K), +, \cdot_K)$$

on a cada aplicació lineal li fem correspondre la seva matriu associada, és un isomorfisme d'espais vectorials.

Això vol dir que si $f, g : V \to W$ són dues aplicacions lineals i A i B les seves dues matrius associades respecte a les mateixes bases, l'aplicació lineal $f+g$ té per matriu associada respecte a les bases esmentades $A+B$, i l'aplicació lineal tf té associada la matriu tA.

Exemple: Siguin les aplicacions lineals $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de l'exemple de la proposició 5.18:

$$f(x,y,z) = (x+y, x+z, 2x+y+z) \text{ i } g(x,y,z) = (x-y, x-z, 2x+y)$$

Designem per A i B les matrius associada a f i g respectivament respecte a les bases canòniques, per tant, com

$$f(1,0,0) = (1,1,2), \quad f(0,1,0) = (1,0,1), \quad f(0,0,1) = (0,1,1)$$

$$g(1,0,0) = (1,1,2), \quad g(0,1,0) = (-1,0,1), \quad g(0,0,1) = (0,-1,0)$$

tenim que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hem vist que $(f+g)(x,y,z) = (2x, 2x, 4x+2y+z)$ i que $(3f)(x,y,z) = (3x+3y, 3x+3z, 6x+3y+3z)$. Per tant per calcular la matriu associada a aquestes aplicacions lineals tenim:

$$(f+g)(1,0,0) = (2,2,4), \quad (f+g)(0,1,0) = (0,0,2), \quad (f+g)(0,0,1) = (0,0,1)$$

$$(3f)(1,0,0) = (3,3,6), \quad (3f)(0,1,0) = (3,0,3), \quad (3f)(0,0,1) = (0,3,3)$$

que tenen per matrius associades, respectivament

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A + B \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$$

Proposició 5.20 *Sigui $f : U \to V$ i $g : V \to W$ dues aplicacions lineals de matrius associades A i B respecte a les bases (u_i), (v_j) i (w_k) de U, V i W respectivament. Aleshores l'aplicació lineal $g \circ f : U \to W$ té per matriu associada $B.A$, respecte a les bases (u_i) i (w_k).*

Exemple: Siguin les aplicacions lineals $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vistes a l'exemple de la proposició 5.18:

$$f(x,y,z) = (x+y, x+z, 2x+y+z) \text{ i } g(x,y,z) = (x-y, x-z, 2x+y)$$

que tenen de matrius associades, respecte a les bases canòniques

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cerquem la composició d'aquestes aplicacions:

$$(g \circ f)(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = g(x+y, x+z, 2x+y+z) = (y-z, -x-z, 3x+2y+z)$$

i ara vegem quina és la seva matriu associada respecte a les bases canòniques:

$$(g \circ f)(1,0,0) = (0,-1,3), \quad (g \circ f)(0,1,0) = (1,0,2), \quad (g \circ f)(0,0,1) = (-1,-1,1)$$

que té per matriu associada

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definició 5.21 *Un* **anell** *és un conjunt A dotat de dues operacions internes que indicarem amb $(+)$ i $(.)$ tals que:*

- *La estructura $(A;+)$ és de grup abelià.*
- *L'operació $(.)$ és associativa i distributiva respecte a $(+)$.*

L'element neutre de $(+)$ s'anomena **zero** de l'anell i s'escriu 0.

L'operació $(.)$ pot no tenir element neutre, però si en té s'anomena **unitat** de l'anell i el representarem per e o 1.

L'operació $(.)$ pot no ser commutativa, però si ho és direm que l'anell és **commutatiu**

Exemples: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ són anells amb les operacions usuals de suma i producte. Aquests anells són unitaris i commutatius.

Proposició 5.22 *Sigui $f, g \in End(V)$. Definim sobre $End(V)$ dues operacions internes, "+" i "$\circ$", de la següent forma*

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u)$$
$$(g \circ f)(u) = g(f(u))$$

Aleshores $f+g$ i $g \circ f$ també són aplicacions lineals i $(End(V), +, \circ)$ és un anell unitari.

Proposició 5.23 *Si V és un espai vectorial de dimensió m, l'aplicació*

$$h : (End(V), +, \circ) \to (M_m(K), +, .)$$

on a cada endomorfisme li fem correspondre la seva matriu associada respecte a una determinada base, és un isomorfisme d'anells.

Això vol dir que si $f, g : V \to V$ són dues aplicacions lineals i A i B les seves dues matrius associades respecte a la mateixa base, l'aplicació lineal $f+g$ i $g \circ f$ tenen per matriu associada respecte a la base esmentada $A+B$ i BA, respectivament.

Proposició 5.24 *$(GL(V), \circ)$ té estructura de grup.*

Proposició 5.25 *Si $M_{inv}(K)$ és el subconjunt de les matrius invertibles de $M_m(K)$ i dim $V = m$, l'aplicació:*

$$h : (GL(V), \circ) \to (M_{inv}(K), .)$$

on a cada isomorfisme li fem correspondre la seva matriu associada és un isomorfisme de grups.

Això ens diu que si tenim un automorfisme $f : V \to V$ amb maltriu associada A respecte a una determinada base, l'automorfisme invers $f^{-1} : V \to V$ té per matriu associada respecte a la mateixa base A^{-1}.
Exemple: Considerem l'aplicació lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donada per $g(x, y, z) = (x - y, x - z, 2x + y)$ ja definida a l'exemple de la proposició 5.18.

Hem vist abans que la matriu associada a aquesta aplicació, respecte a les bases canòniques és

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cerquem la inversa de g: g^{-1}.

g^{-1} compleix que $g^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$. Per tant hem de cercar el valor de (a, b, c).

Es compleix que $g(a, b, c) = (x, y, z)$, és a dir,

$$g(a, b, c) = (a - b, a - c, 2a + b) = (x, y, z)$$

Resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a - b &=& x \\ a - c &=& y \\ 2a + b &=& z \end{array}\right\}$$

que dóna de solucions: $a = \dfrac{x + z}{3}$, $b = \dfrac{-2x + z}{3}$ i $c = \dfrac{x - 3y + z}{3}$.

Per tant,

$$g^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x + z}{3}, \frac{-2x + z}{3}, \frac{x - 3y + z}{3}\right)$$

Calculem ara la seva matriu associada respecte a les bases canòniques:

$$g^{-1}(1, 0, 0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad g^{-1}(0, 1, 0) = (0, 0, -1), \quad g^{-1}(0, 0, 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

per tant, la matriu associada és:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Índex alfabètic