3 Variable aleatòria discreta

Prob 3.1 Considerem l'experiment consistent en llançar simultàniament dos daus; repetim l'experiment 2 vegades. Sigui X la variable aleatòria que dóna el nombre de llançaments en què els dos daus han mostrat un nombre parell. Sigui Y la variable aleatòria que dóna el nombre de llançaments en què la suma dels dos daus ha donat un nombre parell. Determinau la distribució de probabilitat i la de distribució. Feu la representació gràfica i cercau el valor esperat i la variància de les dues distribucions.

Prob 3.2 Suposem que tenim un estoc de 10 peces, de les quals sabem que n'hi ha 8 del tipus I i 2 del tipus II; n'agafem dos a l'atzar. Sigui X la variable aleatòria que dóna el nombre de peces del tipus I que hem agafat. Determinau la distribució de probabilitat i la de distribució. Feu la representació gràfica i cercau el valor esperat i la variància.

Prob 3.3 Un cotxe ha de passar per quatre semàfors. A cadascun d'ells el cotxe té igual probabilitat de seguir la seva marxa que d'haver-se d'aturar. Trobau la distribució de distribució del nombre X de semàfors passats pel cotxe sense aturar-se. Feu la representació gràfica i cercau el valor esperat i la variància.

Prob 3.4 Suposem que se fa una tirada de 100 000 exemplars d'un determinat llibre. La probabilitat d'una enquadernació incorrecta és 0.0001. Quina és la probabilitat que hi hagi 5 llibres de la tirada mal enquadernats? Si designem per X la variable aleatòria que ens dóna el nombre de llibres mal enquadernats, determinau la distribució de probabilitat i la de distribució, així com el valor esperat i la variància.

Prob 3.5 Un examen tipus test consta de 5 preguntes amb 3 possibles opcions cadascuna, de les quals només una és la correcta. Un alumne contesta a l'atzar les 5 qüestions. Sigui X la variable aleatòria que dóna el nombre de punts obtinguts per l'alumne (1 punt per cada pregunta encertada). Determinau la distribució de probabilitat i la de distribució:

a) Si les respostes errònies no resten punts.

b) Si cada resposta errònia resta 1 punt.

Prob 3.6 Suposant que cada infant té probabilitat 0.51 de ser nin, trobau la probabilitat que una família amb 6 infants tengui:[1]

a) Almenys un nin.

b) Almenys una nina.

c) El valor esperat de nines

Prob 3.7 Se sap que la probabilitat que una determinada màquina fabriqui una peça defectuosa és 0.0001. En un any se fabriquen 20 000 peces. Quina és la probabilitat que el nombre de peces defectuoses produïdes en un any sigui major que 2? Quin és el valor esperat de peces defectuoses? i la variància?[2]

[1] a) 0.9862; b) 0.9824, c) 2.94
[2] a) 0.323, b) 2; c) 1.9998

Prob 3.8 Suposem que un alumne realitza el tipus d'examen següents: El professor li va formulant preguntes fins que l'alumne en falla una. La probabilitat que l'alumne encerti una resposta qualsevol és 0.9. Sigui X la variable aleatòria que dóna el nombre de preguntes formulades a l'alumne. Determinau la distribució de probabilitat i la de distribució. Quin és el nombre més probable de preguntes formulades?

Prob 3.9 Es llança un dau fins que surti un 2. Sigui X el nombre de llançaments necessaris. Obteniu la distribució de distribució de X. Repetiu el càlcul si se llancen dos daus. Determinau el valor esperat de llançaments en els dos casos.

Prob 3.10 Suposem que el nombre X de persones d'una població que tenen les empremtes digitals d'un determinat tipus t té una distribució de Poisson amb un cert paràmetre λ.

a) Explicau quan i perquè aquesta suposició té sentit.

b) Provau que $P(X = 1|X \geq 1) = \lambda \cdot \left(e^\lambda - 1\right)^{-1}$.

c) Un lladre descuidat deixa unes clares empremtes del tipus t durant un robatori. Se sap que la probabilitat de que una persona seleccionada a l'atzar tengui aquest tipus d'empremta és 10^{-6}. La ciutat té 10^7 habitants. Suposem que se troba una persona amb aquest tipus d'empremta digital. Creus que serà el lladre? En cas negatiu, quina grandària de la població te convenceria?

Prob 3.11 Els accidents de treball que se produeixen en una fàbrica en una setmana segueixen una llei de Poisson tal que la probabilitat que hi hagi 5 accidents és 16/15 de la que n'hi hagi 2. Calculau:[3]

a) El paràmetre λ de la llei de Poisson.

b) El nombre màxim d'accidents setmanals amb una probabilitat de com a màxim el 90%.

Prob 3.12 Arriben missatges a un ordinador a un ritme mitjà de 10 missatges per segon. Sabem que el nombre de missatges que arriben en un segon és una variable aleatòria de Poisson.

a) Trobau la probabilitat que no arribi cap missatge en un segon.

b) Trobau la probabilitat que arribin més de 5 missatges en un segon.

Prob 3.13 Una cadena de producció té un output de 10000 unitats diàries, i el nombre mitjà d'unitats incorrectes és de 200. Una vegada al dia, s'inspecciona un lot de 100 unitats. Determinau la probabilitat que el lot contingui més de 3 unitats incorrectes

[3] a) 4; b) 6

a) Utilitzant la distribució binomial.

b) Utilitzant l'aproximació de Poisson.[4]

Prob 3.14 Els taxis arriben aleatòriament a la terminal d'un aeroport a un ritme mitjà d'un taxi cada 3 minuts. Quina és la probabilitat que el darrer passatger d'una cua de 4 hagi d'esperar un taxi més d'un quart d'hora?[5]

Prob 3.15 Sigui X una variable aleatòria amb distribució $B(n,p)$ i considerem la variable $Y = n - X$, determineu la funció de probabilitat de Y. Suposem que tenim una v.a. $B(n,p)$ amb n gran i p pròxim a 1, es pot aproximar de qualque manera aquesta distribució per una distribució Poisson?

Prob 3.16 Sigui X una variable aleatòria que segueix una llei geomètrica amb paràmetre p i $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\}$.[6]

a) Calculau $P(X > k)$ per a $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

b) Calculau la probabilitat que X sigui senar.

c) Calculau $P(X = k/X \leq m)$.

(Examen Telemàtica, juny 2000)

Prob 3.17 Sigui X la v.a. geomètrica (paràmetre p) que modela el nombre de persones que esperen en una parada d'autobús. Suposam que el nombre màxim de passatgers que pot transportar l'autobús és M.[1]

a) Calculau la distribució de probabilitat de la v.a. Y que modela el nombre de persones que queden a la parada després de passar l'autobús.

b) Calculau el nombre mig de passatgers que no poden pujar a l'autobús.

(Examen Telemàtica, setembre 2001)

Prob 3.18 Tres persones llancen a la vegada una moneda a l'aire. El joc continua fins que alguna d'elles obtengui un resultat diferent a les altres dues. La persona que obtengui el resultat diferent guanya. Si X és el nombre de rondes necessàries fins tenir un guanyador, [2]

---

[4] a) 0,145; b) 0,143

[5] 0,265

[6] a) q^{k+1}, b) $\frac{q}{1+q}$, c) $\frac{pq^k}{1-q^{m+1}}$

[1] a) $f_Y(y) = \begin{cases} 1 - q^{M+1} & si \quad y = 0 \\ pq^{M+y} & si \quad y = 1,2,3,\ldots \\ 0 & altrament \end{cases}$ b) $E(Y) = \frac{q^{M+1}}{p}$

[2] a) $f_X(x) = \begin{cases} (\frac{3}{4})^{x-1}\frac{1}{4} & x = 1,2,3,\ldots \\ 0 & altrament \end{cases}$,

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - (\frac{3}{4})^k & k \leq x < k+1, \ k = 1,2,3,\ldots \end{cases}$ c) $E(X) = 4$ i $V(X) = 12$

a) Calcular la funció de probabilitat de X **0.5 pt.**

b) Calcular la funció de distribució de X **0.5 pt.**

c) Quin serà el nombre mitjà de jugades que s'han de fer fins que algú guanyi? Calcular $Var(X)$. **0.75 pt.**

(Examen Telemàtica, juny 2003)

Prob 3.19 Un sistema de transmissió emet, de manera equiprobable, els dígits -1, 0 i 1. Quan es transmet el símbol i es rep el símbol j amb les següents probabilitats: $P(r_1|t_1) = 0.9$, $P(r_0|t_1) = 0.1$, $P(r_1|t_0) = 0.1$, $P(r_0|t_0) = 0.8$, $P(r_{-1}|t_0) = 0.1$, $P(r_0|t_{-1}) = 0.1$, $P(r_{-1}|t_{-1}) = 0.9$.
On r_i denota el succés "rebre el símbol i" i t_j denota el succés "enviar el símbol j".[3]

a) Si definim la variable aleatòria $D = (i - j)^2$ com la distorsió de la comunicació. Quin és l'espai mostral de D? **0.5 pt.**

b) Quin és el valor mitjà de la distorsió? **0.75 pt.**

(Examen Telemàtica, setembre 2003)

Prob 3.20 Un lot de 100 circuits integrats en conté 20 de defectuosos. Es trien dos a l'atzar, sense reposició.[4]

a) Quina és la probabilitat que el segon circuit sigui defectuós? **0.25 pt**

b) Si el segon circuit ha estat defectuós, quina és la probabilitat que el primer no ho hagi estat? **0.25 pt**

c) Si consideram 5 lots idèntics i independents entre si, quina és la probabilitat que en dos d'aquests lots algun dels circuits agafats sigui defectuós? **1 pt**

(Examen Telemàtica, juny 2004)

Prob 3.21 Una empresa fabrica mobles econòmics però de baixa qualitat. S'ha determinat que el nombre de defectes en cada un dels panells de fusta emprats per a la fabricació dels mobles segueix una llei de Poisson de mitjana 0.2.[5]

a) Si examinam un panell, quina és la probabilitat que no tengui cap defecte? **0.25 pt**

b) Si examinam 50 panells independents, quina és la probabilitat que cap d'ells tengui defectes? **0.25 pt**

c) Si examinam un per un els panells fins a trobar-ne un de defectuós, quina és la probabilitat que el panell defectuós sigui el que fa 20? (suposam que els panells són independents entre si). **0.25 pt**

[3] a) $E = \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (0,-1), \cdots\}$, b) $E(X) = \frac{0{,}4}{3}$
[4] a) 0.2, b) 0.808, c) 0.34
[5] a) 0.8187307, b) 0.0000453998, c) 0.00405515, d) 5, e) 0.0175231

d) Si examinam un per un els panells fins a trobar-ne un de defectuós, quin és el nombre esperat de panells que és necessari examinar abans de trobar un defecte? (suposam que els panells són independents entre si). **0.5 pt**

e) Quina és la probabilitat que un panell tengui dos o més defectes? **0.25 pt**

(Examen Telemàtica, setembre 2004)

Prob 3.22 Un fabricant de monitors per a ordinador adquireix panells de plàstic per a la seva fabricació. Els defectes que tenen els panells segueixen una distribució de Poisson de mitjana 0.03 defectes per panell.[6]

a) Quina és la probabilitat de que un panell no tengui cap defecte? **0.5 pt**

b) Quina és la probabilitat de que un panell tengui més de 2 defectes? **0.75 pt**

c) Si examinam 60 panells, quina és la probabilitat de que cap d'ells tengui un defecte? **0.75 pt**

d) Si examinam 60 panells, quina és la probabilitat de que el nombre de panells amb més de dos defectes sigui menor o igual a 3? **0.75 pt**

e) Si ens posam a examinar panells, quina és la probabilitat de que el primer tauler defectuós sigui l'onzè. **0.75 pt**

f) Quin és el nombre esperat de panells que seria necessari examinar abans de trobar un de defectuós? **0.5 pt**

(Examen Telemàtica, setembre 2005)

Prob 3.23 Considerem la bonoloto que consisteix en triar entre els nombres 1 i 49, un determinat nombre d'ells, per encertar la combinació guanyadora en el sorteig corresponent, que està formada per 6 boles de les 49 que es treuen del bombo[7].

a) Si un jugador selecciona sis nombres, quina és la probabilitat de que els sis nombres seleccionats coincideixin amb els sis nombres trets del bombo? **0,5 pt.**

b) Quina és la probabilitat de que cinc dels 6 nombres seleccionats pel jugador apareguin entre els sis nombres sortits del bombo? **0,5 pt.**

c) Si l'esperança de vida d'una persona és de 80 anys i es posa a jugar a partir dels 20, quina és la probabilitat que almenys una setmana encerti els sis nombres, si sempre selecciona 6 nombres? (Suposam que un any té 52 setmanes). **1 pt.**

d) Si un jugador participa en la bonoloto cada setmana, quin és el nombre esperat d'anys (suposant que un any te 52 setmanes exactes) que han de passar per a que els sis nombres que ha triat el jugador siguin els sis que ha tret el bombo? **0,5 pt.**

e) A més de treure sis boles, es treu una altra que és el complementari. Quina és la probabilitat d'encertar cinc resultats, més el complementari si selecciona 6 nombres? **0,5 pt.**

[6] a) 0.970446, b) $4.39995 \cdot 10^{-6}$, c) 0.165304, d) 1, e) 0.0218942, f) 33.8364

[7] a) $7.1511238 \cdot 10^{-8}$, b) $1.84499 \cdot 10^{-5}$, c) 0.000223086, d) 268919.54 anys, e) $4.2906743 \cdot 10^{-7}$, f) $1.501736 \cdot 10^{-5}$

f) Si triassim deu nombres, quina seria la probabilitat de haver triat els sis nombre guanyadors? **0,5 pt.**

(Examen Telemàtica, juny 2006)

Prob 3.24 Una petita empresa de venda d'ordinadors, munta 20 ordinadors per hora. La situació normal és que l'1% dels ordinadors muntats no funcionin i requereixin tornar a ser muntats. Sigui X el nombre d'ordinadors que requereixen tornar a ser muntats en una hora. Es considera que hi ha un problema en el procés de muntatge si X es major que la mitjana més 4 vegades la desviació típica[8].

a) Si ens trobam amb una situació normal, quina és la probabilitat de que hi hagi un problema en el procés de muntatge? **1 pt.**

b) Si el nombre d'ordinadors que és necessari tornar a muntar és del 4%, quina és la probabilitat que X sigui major que 1? **1 pt.**

c) En aquest darrer cas, quina és la probabilitat que X sigui major que 1, almenys en una de les tandes del muntatge de les properes 5 hores? **1 pt.**

d) Si el procés de muntatge no s'interrop, i amb les condicions de l'apartat b), quina seria la probabilitat que la primera tanda en que $X > 1$ sigui a partir de la tercera? Quantes hores haurien de passar, per terme mitjà, fins a trobar una tanda en que X sigui major que 1? **1 pt.**

(Examen Telemàtica, setembre 2006)

Prob 3.25 El nombre de missatges o comunicats que arriben diàriament per correu electrònic a la redacció de la part forana d'un determinat diari de les Illes Balears, segueix una distribució de Poisson de mitjana 7. El redactor d'aquesta secció només pot atendre (per estudiar i investigar) un màxim de 9 missatges diaris[1]

a) Trobau la probabilitat de que en un dia qualsevol no es pugui fer càrrec de tots els missatges que hi arriben. Indicau els possibles valors de la variable aleatòria. **1.5 pt.**

b) Calculau la probabilitat que en un període de 10 dies, com a màxim 3 d'aquests dies no es pugui fer càrrec dels missatges que han arribat. Indicau els possibles valors de la variable aleatòria i de quin tipus de distribució es tracta. **2 pt.**

c) Si ens situam al dia d'avui, a l'inici de la jornada, quina és la probabilitat de que el primer dia que no es pugui fer càrrec dels missatges sigui avui, demà o passat demà? Indicau els possibles valors de la variable aleatòria i de quin tipus de distribució es tracta **2 pt.**

(Control, curs 2006/07)

[8] a) 0.017, b) 0.19, c) 0.651, d) 0.656, 5,26

[1] a) 0.1695, b) 0.9352, c) 0.4272

Prob 3.26 A una antena de televisió colectiva es volen posar quatre amplificadors per a quatre freqüències (un amplificador per freqüència). L'instal·lador pren a l'atzar els quatre amplificadors, sense reemplaçament, d'una capsa que conté 30 amplificadors d'un proveïdor i 70 d'altre[2].

a. Quin tipus de distribució de probabilitat podríem fer servir per a resoldre aquest exercici? Quina seria la seva distribució de probabilitat? **1 pt.**

b. Quina és la probabilitat de que els quatre amplificadors siguin del mateix proveïdor? i Quina és la probabilitat de que exactament tres dels amplificadors siguin del mateix proveïdor? **1.5 pt.**

(Examen Telemàtica, setembre 2007)

[2]a) $P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{30}{x}\binom{70}{4-x}}{\binom{100}{4}} & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$, b) 0.240818, 0.491275