# Pràctica 4 PDS: Reconstrucció d'imatges digitals

Juan Gabriel Gomila Salas

Suposem que esteim de viatge i que hem fet una fotografia ($f$) però aquesta ens ha sortit borrosa.


a) b)

Figura 1: a) Fotografia on s'aprecia el detall del jersey b) Fotogragfia moguda.

Ens agrada molt el paisatge d'aquesta fotografia, però no acceptam el fet de que surti moguda, i per tant, ens agradaria poder reconstruir la informació original sense cap tipus de moviment ($g$). Pensam que això hauria de ser possible, ja que, en termes matricials

$$g = f * h$$

on $h$ és una matriu anomenada 'point spread function', la qual és causant de la pertorbació de la nostra imatge presa i l'operador $*$ designa el producte de convolució discret de les matrius $f$ i $h$. El problema és que, en general, la matriu $h$ és desconeguda. El nostre objectiu serà estimar-la amb una informació addicional.

Suposem que en el moment de fer la fotografia moguda duiem un detall caracteristic del nostre jersey, capell, pantalons, com per exemple les lletres del xandall de la Figura 1a). Tot i que la imatge ens surti moguda, nosaltres sabem que el logotip era aquell en questió, per tant, una transformació $h$ que aplicada sobre el logotip de jerey mogut ens doni el logotip original, podria ser aplicada a tota la imatge moguda $g$ i recuperar així la fotografia inicial $f$.

Aquest serà el nostre objectiu: estimar la transformació $h$ que recompon una subimatge de la imatge moguda inicial: el logotip del jersey. Veurem dos tractaments diferents, així com cap dels dos ens ha donat un resultat satisfactori.

# 1. Transformada de Fourier

Siguin $f$ la imatge inicial que volem reconstruir i $g$ la imatge moguda de què disposam. Siguin, a més, $f_1$ la subimatge del detall del jersey que coneixem (feta, potser, a posteriori a casa, per mirar d'arreglar les fotos d'aquell viatge) i $g_1$ la subimatge del detall del jersey de la imatge moguda ($g_1 \subseteq g$). Suposem que $f_1$ i $g_1$ són del mateix tamany (bé hem fet zero-padding per ajustar una a l'altra o qualssevol de les tècniques d'ampliació o reducció de tamanys d'imatges que verem en la pràctica 2).


a) b)

Figura 2: a) Retall del detall del jersey b) Retall de la fotografia moguda.

Un raonament analeg a l'explicat en la introducció, ens diu que existeix una matriu $h_1$ tal que ens transforma la subimatge dolenta en la subimatge bona a través d'un producte de convolució:

$$f_1(x, y) = g(x, y) * h_1(x, y)$$

Si aplicam transformada de Fourier als dos costats de la igualtat tenim que

$$F_1(u, v) = G_1(u, v) \cdot H_1(u, v)$$

de manera que podem estimar de certa forma $H_1$ de dues formes:

- Aïllam simplement $H_1$ de l'expressió anterior:

$$H_1(u, v) = \frac{F_1(u, v)}{G_1(u, v)}$$

- Tallam per un cert umbral, per evitar dividir per zero, és a dir ens queda definida com una funció a trossos

$$H_1(u, v) = \begin{cases} \dfrac{F_1(u, v)}{G_1(u, v)} & \text{si} \quad G_1(u, v) > \varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad G_1(u, v) \leq \varepsilon \end{cases}$$

Un cop tenim $H_1$ estimada, sols ens cal fer la transformada de Fourier inversa, i ja haurem estimat $h_1$. Ara que ja tenim la PSF que ens reconstrueix el boci del logotip, sols ens cal aplicar-lo a tota la imatge, per això, l'aplicam com si fos un filtre a la imatge sencera.

Fent pràctiques, no hi ha massa diferència entre emprar el primer mètode o el segón a l'hora d'aproximar la funció $H_1(u, v)$, per això, hem emprat un o l'altre indistintament. El resultat aplicat directament al bocí d'imatge dolent (Figura 2b) és reconstruït correctament sense cap tipus d'alteració, ara bé, quan l'intentam aplicar a la imatge sencera, el resultat és el que podem observar en la Figura 3.

En dita Figura, podem veure com el renou s'ha multiplicat, i ens ha destrossat encara més la imatge. Aquest fet és degut a que quan hom disenya un filtre, el valor final d'un píxel depen de tots els que té al seu voltant. En el nostre cas, per disenyar el filtre hem emprat tota la subimatge petita, de manera que no tenim informació sobre l'exterior de dita subimatge. Aquest fet, provoca l'aparició de nou renou, que afegit al que la imatge ja duia de per si, ens ha donat com a resultat la Figura 3.

Figura 3: Reconstrucció passant per les transformades de Fourier.

# 2. Aproximació per un sistema lineal

Un cop hem après dels errors de l'apartat anterior feim el següent raonament. Necessitam informació sobre els píxels veinats per poder construir un filtre acuradament. Partint de les dues subimatges anteriors, en farem dos estractes quadrats i el tamany dels quals sigui múltiple de 3, diem-ne $3n$ ($f_2$ per la subimatge del detall ben presa i $g_2$ per la subimatge del detall mogut), i els separarem en 9 quadrats d'idèntic tamany com els de la figura següent:

| | | |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $C$ |
| $D$ | $E$ | $F$ |
| $G$ | $H$ | $I$ |

A continuació, cercarem un nou filtre $h_2$ que ens transformi el quadrant $E$ de $g_2$ en el quadrant $E$ de $f_1$.

a) b)

Figura 4: a) Retall quadrat del detall del jersey b) Retall quadrat de la fotografia moguda.

Aquest nou filtre, tendrà costat un terç del retall quadrat de la imatge ($n$). Per calcular-lo, sigui el filtre que cercam

$$h_2 = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{n,1} \\ n_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \cdots & h_{n,n} \end{pmatrix}$$

la subimatge quadrada del detall bo

$$f_2 = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{3n,1} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{3n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{3n,1} & f_{3n,2} & \cdots & f_{3n,3n} \end{pmatrix}$$

i la subimatge quadrada del detall mogut

$$g_2 = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{3n,1} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & \cdots & g_{3n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{3n,1} & g_{3n,2} & \cdots & g_{3n,3n} \end{pmatrix}$$

on, per abreviar posam $f_{i,j} := f_2(i,j)$ i $g_{i,j} := g_2(i,j)$.

Aleshores, volem cercar els $h_{i,j}$ tals que, $h_2$ aplicat a $g_2(i,j)$ per $n+1 \leq i,j \leq 2n$ ens doni l'element $f(i,j)$ respectiu. La operació de convolució, no són més que sumes i productes, per tant, es tractarà de resoldre un sistema lineal, on les incognites seràn els $n^2$ elements de $h_2$ i cada equació correspondrà a un dels píxels $g_2(i,j)$ per $n+1 \leq i,j \leq 2n$ on s'aplica el filtre. Per tant, serà un sistema de $n^2$ equacions amb $n^2$ incògnites. En el nostre cas, el quadrat és de tamany $207 \times 207$, per tant, haurem de resoldre un sistema $69^2 \times 69^2$: 4761 equacions i 4761 incògnites.

La forma general d'aquest sistema serà

$$M \cdot x = b,$$

on

$$x = (h_{1,1}, h_{1,2}, \cdots, h_{1,n}, h_{2,1}, \cdots, h_{2,n}, \cdots h_{n,1}, \cdots, h_{n,n})^t$$

$$b = (f_{n+1,n+1}, f_{n+1,n+2}, \cdots, f_{n+1,2n}, f_{n+2,n+1}, \cdots, f_{n+2,2n}, \cdots f_{2n,n+1}, \cdots, f_{2n,2n})^t$$

si deim $l = \lfloor n/2 \rfloor$

$$M = \begin{pmatrix} g_{l+1,l+1} & g_{l+1,l+2} & \cdots & g_{l+1,l+n} & g_{l+2,l+1} & \cdots & g_{l+2,l+n} & \cdots & g_{l+n,l+n} \\ g_{l+1,l+2} & g_{l+1,l+3} & \cdots & g_{l+1,l+n+1} & g_{l+2,l+2} & \cdots & g_{l+2,l+n+1} & \cdots & g_{l+n,l+n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{l+1,l+n} & g_{l+1,l+n+1} & \cdots & g_{l+1,l+2n} & g_{l+2,l+n} & \cdots & g_{l+2,l+2n} & \cdots & g_{l+n,l+2n} \\ g_{l+2,l+1} & g_{l+2,l+2} & \cdots & g_{l+2,l+n} & g_{l+3,l+1} & \cdots & g_{l+3,l+n} & \cdots & g_{l+n+1,l+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{l+2,l+n} & g_{l+2,l+n+1} & \cdots & g_{l+2,l+2n} & g_{l+3,l+n} & \cdots & g_{l+3,l+2n} & \cdots & g_{l+n+1,l+2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{l+n,l+n} & g_{l+n,l+n+1} & \cdots & g_{l+n,l+2n} & g_{l+n+1,l+n} & \cdots & g_{l+n+1,l+2n} & \cdots & g_{l+2n,l+2n} \end{pmatrix}$$

Aleshores, aquest macrosistema es pot resoldre (el nostre triga aproximadament uns 3 minuts a resoldres) i finalment, amb el vector $x$ solució del sistema, podem trobar la matriu $h_2$. Un cop la tenim, només hem d'aplicar el filtre a tota la imatge i veure quin resultat obtenim.

A diferència del cas anterior, aquí si que empram informació addicional per crear el nostre filtre: el filtre es crea pel quadrat de la subimatge $E$, però amb informació dels nou quadrants que formen la nova imatge. Caldria esperar un comportament molt més bo que no pas l'anterior. No es així. Fixem-nos, que passa quan aplicam aquest filtre al fragment d'imatge quadrada:

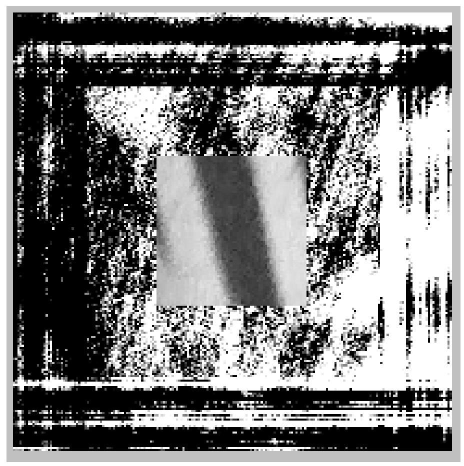

Figura 5: Reconstrucció estimant la matriu $h$ via la resolució d'un sistema lineal.

El filtre $h$ sols ha actuat correctament sobre el quadrat en que ha estat construït, per un píxel que es surti d'aquest quadrat, el filtre ja no actua com caldria. Tot sembla contrari a les nostres espectacions! Que ha passat perque el filtre no hagi actuat de forma correcta? Vegem un petit experiment que vam fer per intentar explicar aquest fet.

Prenguem $f = g$, i ambdos iguals a la imatge quadrada on s'aprecia el detall perfectament. Si aplicam el procediment anterior a aquest cas, ens resulta una reconstrucció perfecte, ja que

$$h = \delta = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ara prenguam $f$ just com abans, però $g$ que sigui $f$ amb un renou addicional, que segueixi una distribució gaussiana de mitjana 0 i desviació típica 2 (Figura 6).

Figura 6: Retall del detall apreciable, amb un renou addicional.

Aliquem ara l'algoritme. En aquest cas, la matriu $h$ no té cap forma descriptible, ja que és una col·lecció de nombres en el rang de $[-0.05, 0.05]$. El resultat, com s'aprecia en la Figura 7, difereix de l'inicial, de manera que podem afirmar que el fracàs del nostre experiment és degut al renou present en una imatge i en l'altre no.

Figura 7: Retall del detall apreciable, amb un renou addicional.

# 3. Conclusions

Tot i disposar d'una informació addicional per estimar la matriu de PSF, $h$, els nostres objectius han estat frustrats, en ambdos casos pel renou de les imatges, sobretot per la diferència de renou entre una imatge i l'altre, com hem pogut apreciar en el darrer experiment de tots. Una possible solució al problema, seria passar un filtre antirrenou a les tres imatges, la del detall bo, la del detall mogut i la que desitjam restaurar ($g$) abans de fer tot el processament. D'aquesta forma, amb renou reduït, tal volta l'aproximació numèrica seria més bona, i ens permetria apreciar en la matriu $h$ zeros a partir d'un llindar, que és la forma típica d'una matriu de PSF.