

FINAL DE FONAMENTS MATEMÀTICS II.
(JUNY 2000)

P1.- Demostrau que si en un grup l'ordre de qualsevol element és dos, llavors és commutatiu. **(0.75 pt.)**

P2.- a) Estudia i resoleu quan es pugui el següent sistema d'equacions: **(0.75 pt.)**

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 4 \\ z & = & 2 \\ (a^2 - 4)z & = & a - 2 \end{array} \right\}$$

b) Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, demostrau que les solucions del sistema d'equacions lineals

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

formen un subespai vectorial de \mathbb{R}^n i que la seva dimensió coincideix amb el nucli de qualche aplicació lineal. **(0.75 pt.)**

P3.- Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donada per $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + z)$

a) Calculau $Im f$, $Ker f$ donant una base. **(0.75 pt.)**

b) Completau, si és necessari, una base de $Im f$ a una base de \mathbb{R}^3 . **(0.5 pt.)**

c) Comprovau que $Im f \oplus Ker f = \mathbb{R}^3$. **(0.5 pt.)**

P4.- Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donada per $f(x, y, z) = (2x - y - z, x - z, -x + y + 2z)$.

a) Diagonalitzau l'endomorfisme f i trobau la matriu de canvi de base. **(0.75 pt.)**

b) Trobau $f^n(1, 1, 1)$. **(0.75 pt.)**

P5.- Sigui $\mathbb{R}_2[t]$ l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals de grau menor o igual a 2. Consideram el següent producte:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt, \quad \text{amb } p, q \in \mathbb{R}_2[t].$$

a) Demostrau que $\langle p, q \rangle$ és un producte escalar a l'espai vectorial $\mathbb{R}_2[t]$. **(0.75 pt.)**

b) Trobau una base ortonormal d'aquest espai euclidià. **(0.75 pt.)**

P6.- Un sistema de comunicacions admet un voltatge arbitrari v i s'obté una sortida $Y = v + N$, on N és una variable aleatòria normal de mitjana $\mu = 0$ i variància $\sigma^2 = 4$. Suposem que el canal és utilitzat per retransmetre informació binària de la manera següent:

- per transmetre un 0 apliquem un voltatge de -1.
- per transmetre un 1 apliquem un voltatge de +1.

a) Trobau la probabilitat que el receptor s'equivoqui si s'ha emès un 0. **(0.5 pt.)**

b) Trobau la probabilitat que el receptor s'equivoqui si s'ha emès un 1. **(0.5 pt.)**

c) Trobau la probabilitat que el receptor s'equivoqui, suposant que la probabilitat d'emetre un 0 o un 1 és la mateixa. **(0.5 pt.)**

P7.- Sigui X una variable aleatòria que segueix una llei geomètrica amb paràmetre p i $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots\}$.

a) Calculau $P(X > k)$ per a $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ **(0.5 pt.)**

b) Calculau la probabilitat que X sigui senar. **(0.5 pt.)**

c) Calculau $P(X = k/X \leq m)$. **(0.5 pt.)**