5 Moments i funcions d'una var. aleatòria

Prob 5.1 Un individu vol invertir un capital de 3 000 EUR en un negoci que té una rendibilitat del 50%, però amb el possible risc de perdre tota la inversió. El seu assessor financer l'ha informat que aquest negoci té una probabilitat 0,8 de ser rendible. Quin és el benefici esperat?

Prob 5.2 Sigui X una variable aleatòria amb funció de densitat

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2(1+x)/9 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2/3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calculau $E(X)$ i $Var(X)$.

Prob 5.3 Es venen 5000 bitllets de loteria a 0,6 EUR cadascun, per a un sorteig amb un premi de 1800 EUR. Quin és el guany (o pèrdua) esperat d'una persona que compra 3 bitllets?

Prob 5.4 Calculau l'esperança i la variància del nombre de punts obtingut en el llançament d'un dau.

Prob 5.5 Calculau $E(X)$ i $Var(X)$ on X té una funció de densitat f_X donada per:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Prob 5.6 En una planta de fabricació de circuits integrats, la proporció de circuits defectuosos és p. Suposem que la incidència de circuits defectuosos és completament aleatòria.

a) Determinau la distribució del nombre X de circuits acceptables produïts abans del primer circuit defectuós.

b) Quina és la longitud mitjana d'una cadena de producció exitosa si $p = 0.05$.

Prob 5.7 Un sistema de transmissió emet els dígits -1, 0, 1. Quan es transmet el símbol i, es rep el símbol j amb les següents probabilitats: $P(r_1/t_1) = 1$, $P(r_{-1}/t_{-1}) = 1$, $P(r_1/t_0) = 0.1$, $P(r_{-1}/t_0) = 0.1$, $P(r_0/t_0) = 0.8$. Es diu en aquest cas que s'ha produït una distorsió $(i-j)^2$. Quin és el valor mitjà de la distorsió?

Prob 5.8 El nombre mitjà de persones que van a un local és 1000, amb una desviació típica de 20. Quin és el nombre de cadires necessàries perquè sigui segur, amb una probabilitat no menor que 0.75, que tots els assistents podran seure.

Prob 5.9 Usau la desigualtat de Txebixef per tal d'estimar el nombre de vegades que s'ha de llançar a l'aire una moneda sense biaix si volem que amb una probabilitat com a mínim igual a un 90% la freqüència relativa de cares estigui compresa entre 0.45 i 0.55.

Prob 5.10 Sigui X una variable aleatòria que pren els valors $-k, 0, k$ amb probabilitats respectives 1/8, 3/4 i 1/8 [1].

a) Calculau $P(|X-\mu| \geq 2\sigma)$ ($\mu = \mathrm{E}(X), \sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$).

b) Obteniu una fita superior de la probabilitat anterior utilitzant la desigualtat de Txebixef.

Prob 5.11 Sigui X una variable aleatòria amb funció de densitat[2]

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

a) Calculau $P(|X| \geq k)$, on $0 < k < 1$.

b) Obteniu una fita superior de la probabilitat anterior utilitzant la desigualtat de Txebixef.

c) Comparau els dos resultats anteriors per a $k = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$

Prob 5.12 El nombre de diaris venuts diàriament en un quiosc és una variable aleatòria de mitjana 200 i desviació típica 10. Quants d'exemplars diaris ha d'encarregar l'amo del quiosc per tenir una seguretat d'almenys un 99% de no quedar-se sense existències? [3]

Prob 5.13 El nombre de dies a l'any que un treballador d'un petit comerç està de baixa per malaltia és una variable aleatòria de mitjana 10 i desviació típica 2. Si cada un d'aquests dies l'empresa perd 10.000 pts., determinau els límits inferior i superior de les pèrdues anuals per treballador amb un grau de fiabilitat no inferior a un 95%[4].

Prob 5.14 L'ajuntament d'una ciutat ha decidit establir una zona d'aparcament limitat, en la que aparquen 500 vehicles diaris per terme mitjà. Si almenys el 99% dels dies el nombre de cotxos que utilitzen aquest servei està entre 475 i 525, trobau la desviació típica de la variable aleatòria que dóna el nombre de vehicles diaris que ocupen places d'estacionament limitat[1].

Prob 5.15 Coneguda la funció de distribució d'una variable aleatòria contínua X, trobau la funció de densitat de $Y = X^2$ i de $Z = e^X$.

Prob 5.16 La funció de distribució d'una variable aleatòria X és:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1-e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Trobau la funció de densitat de la variable aleatòria $Y = \ln(X+1)$.

---

[1] a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{4}$

[2] a) $(1-k)^2$; b) $\frac{1}{6k^2}$

[3] 300

[4] $1.056 \leq X \leq 18.944$

[1] $\sigma_X = 2,5$

Prob 5.17 El temps de vida, en anys, d'un cert component d'una màquina es modelitza mitjançant la següent funció de densitat

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si el cost Y de funcionament del component, en milers d'euros, és funció del temps de vida, $Y = 2X^2 + 1$, calculau la quantitat que espera gastar l'empresa en concepte de manteniment.

Prob 5.18 La variable aleatòria X segueix una llei $N(\mu, \sigma^2)$. Sabem que $\mu = 5\sigma$, i que $P(X < 6) = 0.8413$.

a) Determinau l'esperança i la variància de X.

b) Quina és la funció de distribució de $Y = 3 - X^2$ i la seva esperança?

Prob 5.19 Sigui X una variable aleatòria amb funció de densitat:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

a) Determinau $\mathrm{E}(\sqrt{X})$ a partir de $f_{\sqrt{X}}$.

b) El mateix a partir de f_X.

Prob 5.20 Considerem una variable aleatòria X amb funció de densitat f_X donada per:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

determinau $\mathrm{E}(\mathcal{Y})$, on $\mathcal{Y} = \ln \mathcal{X}$.

Prob 5.21 Sigui X una variable aleatòria contínua amb distribució uniforme sobre l'interval $(0,1)$.

a) Trobau les funcions de densitat de les variables aleatòries $Y = g(X)$ i $Z = h(X)$, on $g(x) = 8x^3$ i $h(x) = (x - 1/2)^2$.

b) Calculau l'esperança de les variables aleatòries Y i Z de les dues maneres indicades a l'exercici 5.19.

Prob 5.22 Provau que $\mathrm{E}((Z - b)^2)$ pren el valor mínim respecte de b per a $b = \mathrm{E}(Z)$.

Prob 5.23 Un fabricant A d'uns certs dispositius ens assegura que la mitjana (μ) del temps de vida d'un cert component és 1000 i que la desviació típica (σ) és 20. Sigui X la v.a. que ens dóna la duració de la vida d'un component[2].

a) Utilitzau la desigualtat de Txebixef per trobar una fita de la probabilitat que X s'allunya més de dues vegades σ de μ.

b) Consultat el fabricant ens posa en contacte amb l'equip de control que ens assegura que la distribució del temps de vida es pot considerar Gaussiana. En aquest supòsit calculau la probabilitat que X s'allunya més de dues vegades σ de μ

(Examen, juny 2001)

Prob 5.24 El voltatge (V) al llarg d'una resistència és una v.a. uniforme entre 12 i 15 v. Estam interessats en el valor de la potència $W = \frac{V^2}{r}$ ($r = 1000\Omega$) dissipada en r[3].

a) Calculau la funció de distribució de la potència.

b) Calculau l'esperança matemàtica i la variància de la potència.

(Examen, juny 2001)

Prob 5.25 Sigui X una variable aleatòria qualsevol. Definim $Y = X - \beta$.

a) Trobau el valor de β que minimitza $E[Y^2]$.

b) Per al valor de β trobat, expresseu $E[Y^2]$ en funció d'algun moment de X.

(Examen, setembre 2001)

Prob 5.26 Sigui X una v.a. continua de la qual coneixem l'esperança $E(X) = \mu$ i la variància $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. [1]

a) Demostrar la desigualtat de Txebitxef: $P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \qquad \forall a > 0$

   (Indicació: utilitzar la variable auxiliar $Y = X - \mu$ i començar calculant $P(Y^2 \geq a^2)$ amb l'ajut de la desigualtat de Markov.) **0.5 pt.**

b) Si X compta el nombre de persones que van diàriament al cine en una determinada sala. Quina és la capacitat mínima que ha de tenir la sala de cine per assegurar que quedaran persones sense entrada menys del 10% de les vegades? Utilitzar la desigualtat de Txebitexf i considerar que el nombre mitjà de persones que van al cine diàriament és 300 i la seva desviació típica és 20. **0.75 pt.**

c) Repetir l'apartat anterior sense utilitzar la desigualtat de Txebitxef i considerant que X és una variable aleatòria gaussiana. **0.75 pt.**

(Examen, juny 2003)

[2] a) $\frac{1}{4}$, b) $0,0456$
[3] b) $E(W) = \frac{183}{r}$
[1] b) 364, c) 326

Prob 5.27 La centraleta telefònica d'una petita empresa rep una mitjana de 5 cridades per minut. Calculau el nombre mínim de línies necessàries perquè la probabilitat de saturació de la centraleta sigui inferior al 10%, en els casos següents[2]:

a) Utilitzant la desigualtat de Txebytxef, considerant que la desviació típica és 2. **0.5 pt**

b) Si la variable X que compta el nombre de cridades rebudes en un minut per la centraleta és una variable de Poisson. **0.5 pt**

c) En aquest darrer cas, calculau la probabilitat de rebre exactament 10 cridades en 1 minut. **0.5 pt**

Indicació: consideram que hi ha saturació en la centraleta quan el nombre de cridades rebudes en un minut és superior al nombre de línies.
(Examen, juny 2004)

Prob 5.28 Sigui X una variable aleatòria absolutament contínua amb funcions de densitat i distribució $f_X(x)$ i $F_X(x)$, respectivament. Es defineix una nova variable aleatòria $Y = X^2$. Trobar les funcions de densitat i distribució de Y en funció de les de X.

(Examen, setembre 2004)

Prob 5.29 Considerem la variable aleatòria X de funció de densitat

$$f_X(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

i la variable aleatòria $Y = \ln X$ [3]

1. Cercau el valor d'a per a que sigui una funció de densitat. **0,5 pt**
2. Calculau la probabilitat que la variable X prengui un valor comprès entre 1,5 i 1,8. I entre 0 i 1,5. **0,5 pt**
3. Cercau l'esperança matemàtica i la variància de X. **0,5 pt**
4. Calculau $E(\ln X)$ i $Var(\ln X)$ a partir de la funció f_X. **0,75 pt**
5. Cercau la funció de distribució i de densitat de Y. **1 pt**
6. Calculau $E(Y)$ i $Var(Y)$ a partir de la funció f_Y. **0,75 pt**

(Examen, juny 2005)

Prob 5.30 Tenim les variables aleatòries contínues X i Y. La primera segueix una distribució contínua uniforme definida dins l'interval $(0, 20)$ i la segona una distribució exponencial de mitjana 30. [4]

[2] a) 12, b) 8, c) 0.0182
[3] 1) $a = -\frac{1}{2}$; 2)0.345, 0.375; 3) $E(X) = \frac{19}{12}$, $Var(X) = \frac{11}{144}$; 4) $E(\ln X) = \ln 2 - \frac{1}{4}$, $Var(\ln X) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$
[4] b) $\frac{1}{4}$, d) Per a X, 0; per a Y, 0.0497871

a) Escriviu les funcions de densitat de X i Y i calculau les seves funcions de distribució a partir de les funcions de densitat respectives. **1 pt**

b) Utilitzau la desigualtat de Txebitxef per fitar les probabilitats de que X i Y difereixin de la seva mitjana en més de dues desviacions estàndards. **1 pt**

c) Cerca els valors reals corresponents a l'apartat b). **1 pt**

(Examen, setembre 2005)

Prob 5.31 Tenim una variable aleatòria X que ens dóna el temps de vida útil, en anys, d'un determinat aparell electrònic. La funció de densitat d'aquesta variable aleatòria ve donada per [1]

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x & 0 \leq x < 2 \\ b & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{Altres} \end{cases}$$

a) Calculau b. **2 pt.**

b) Calculau la funció de distribució de X. **2 pt.**

c) Calculau la probabilitat que un aparell triat a l'atzar tengui una vida útil superior a 3 anys. **1 pt.**

d) Una fàbrica fabrica un lot de 1000 d'aquests aparells. Calculau la probabilitat que més 300 tenguin una vida útil superior als 3 anys. **2 pt.**

e) Considerem ara la variable aleatòria $Y = \sqrt{X}$. Calculau la funció de distribució de Y **3 pt.**

(Control moments, curs 05/06)

Prob 5.32 Considerem la variable aleatòria X que té per funció de densitat [2]

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{Altres} \end{cases}$$

i $Y = 3X + 2$

a) Calculau $E(X)$ i $Var(X)$. **4 pt.**

b) Calculau $E(Y)$ i $Var(Y)$ **2 pt.**

c) Aplicant la desigualtat de Txebitxef calculau una fita superior de X per a una probabilitat major o igual a 0.9. **4 pt.**

(Control moments, curs 06/07)

Prob 5.33 Sigui X una variable aleatòria contínua que segueix una distribució uniforme dins del rang $0 < x < 10$. Utilitzau la regla de Txebixef per fitar la probabilitat de que X difereixi de la seva mitjana més de dues desviacions estàndards i comparau el resultat amb el valor real de la probabilitat. [3] **2 pt.**
(Examen, setembre 2006)

[1] a) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{1}{3}$, d) 0.9861
[2] a) $E(X) = \frac{2}{3}$, $Var(X) = \frac{2}{9}$; b) $E(Y) = 4$, $Var(Y) = 2$; c) 2.157
[3] Txebixef: $\frac{2}{3}$, real: 0