PROBLEMES ESTADÍSTICA ENGINYERIA
VARIABLE ALEATÒRIA DISCRETA

En els problemes següents,(1 a 9) determinau la funció de probabilitat i la de distribució de totes les variables aleatòries que apareixen.

1) Considerem l'experiment consistent en llançar simultàniament dos daus; repetim l'experiment 2 vegades. Sigui X la variable aleatòria que dóna el nombre de llançaments en què els dos daus han mostrat un nombre parell. Sigui Y la variable aleatòria que dóna el nombre de llançaments en què la suma dels dos daus ha donat un nombre parell.

2) Suposem que tenim un estoc de 10 peces, de les quals sabem que n'hi ha 8 del tipus I i 2 del tipus II; n'agafam dues a l'atzar. Sigui X la variable aleatòria que dóna el nombre de peces del tipus I que hem agafat.

3) Suposem que un alumne realitza el tipus d'examen següent: El professor li va formulant preguntes fins que l'alumne en falla una (no vos demaneu com se l'avalua, ni jo ho sé). La probabilitat que l'alumne encerti una resposta qualsevol és 0.9 (examen fàcil). Sigui X la variable aleatòria que dóna el nombre de preguntes formulades a l'alumne. Quin és el nombre més probable de preguntes formulades?

4) Considerem dos canons que van disparant alternativament cap a un mateix objectiu. El primer canó té una probabilitat d'encert igual a 0.3 i el segon igual a 0.7. El primer canó comença la sèrie de llançaments i no s'aturen fins que un dels dos encerta el blanc. Siguin X la variable aleatòria que dóna el nombre de projectils llançats pel primer canó i Y el nombre de llançaments fets pel segon canó.

5) El mateix problema anterior, calculau la probabilitat de la variable aleatòria X que dóna el nombre de projectils llançats pel primer canó condicionat a que guanya i Y és la variable aleatòria que dóna el nombre de projectils llançats pel segon canó condicionat a que guanya.

6) Suposem que se fa una tirada de 100.000 exemplars d'un determinat llibre. La probabilitat d'una enquadernació incorrecta és 0.0001. Quina és la probabilitat que hi hagi 5 llibres de la tirada mal enquadernats?

7) Dos companys d'estudis se troben en un conegut pub i decideixen jugar a dards d'una manera especial: llançaran consecutivament un dard perhom fins que un dels dos encerti el triple 20. El que llança en primer lloc té una probabilitat 0.7 d'encertar-lo i el que ho fa en segon lloc, una probabilitat 0.8. Sigui X la variable aleatòria que dóna el nombre total de llançaments de dards fets pels dos companys.

8) Un examen tipus test consta de 5 preguntes amb 3 possibles opcions cadascuna, de les quals només una és la correcta. Un alumne contesta a l'atzar les 5 qüestions. Sigui X la variable aleatòria que dóna el nombre de punts obtinguts per l'alumne:

a) Si les respostes errònies no resten punts.

b) Si cada resposta errònia resta 1 punt.

9) Un coche tiene que pasar por cuatro semáforos. En cada uno de ellos el coche tiene la misma probabilidad de seguir su marcha que de detenerse. Sea X la variable aleatoria que cuenta número de semáforos que pasa el coche sin detenerse.

10) Calcular la esperanza y la varianza de todas las variables que aparecen en los problemas anteriores.

11) Un individuo quiere invertir un capital de medio millón de euros en un negocio que tiene una rentabilidad del 50%, pero con el riesgo de perder toda la inversión. Su asesor financiero le informa que este negocio tiene una probabilidad de ser rentable del 0.8 ¿Cuál es el beneficio esperado?

12) Un juego se dice justo si la ganancia esperada de cada jugador es 0. Dos jugadores A y B tiran un dado por turnos, y gana el primero que obtiene un 5. Cada jugador apuesta una cantidad c_j $(j = 1, 2)$, y el total se lo queda el ganador. Si suponemos que comienza a jugar A ¿qué relación tienen que verificar c_1 y c_2 para que el juego sea justo?

13) Se venden 5000 billetes de lotería a 1 euro. cada uno, para un sorteo con un premio de 3000 euros ¿Cuál es la ganancia (pérdida) esperada de una persona que compra tres billetes?

14) Dos personas juegan a cara o cruz, y han decidido continuar la partida hasta que se obtengan como mínimo 3 caras y 3 cruces. Hallar la probabilidad de que el juego no se acabe en 10 tiradas o menos y el número esperado de tiradas.

15) Sea X la variable que nos da la puntuación obtenida al lanzar un dado. Calcular la distribución de las variables $Y = X^2$, $Z = X^2 - 6X + 6$. Calcular las esperanzas y las varianzas de las variables Y y Z.

16) Un contratista estima la probabilidad del número de días necesarios para concluir un proyecto como indica la tabla siguiente:

Tiempo (en días)	1	2	3	4	5
Probabilidad	0.05	0.20	0.35	0.30	0.10

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un proyecto elegido aleatoriamente necesite de tres días para su conclusión?

b) Hallar el tiempo esperado necesario para acabar un proyecto.

c) Hallar la desviación típica del tiempo necesario para terminar un proyecto.

d) El coste del proyecto se divide en dos partes: un coste fijo de dos mil euros, más 200 euros por cada día de duración del proyecto. Hallar la media y la desviación típica del coste total del proyecto.

[11] Sol.: (**100000**)
[12] Sol.: $6c_2 = 5c_1$
[13] Sol.: ($\mathbf{-1.20}$ euros)
[14] Sol.: $\mathbf{\frac{7}{64} = 0.109375}$; $\mathbf{E(X) = \frac{63}{8}}$.
[16] Sol.: a) 0.35, b) 3.2, c) 1.0296, d) 2640; 205.912

17) Una tienda vende paquetes de caramelos. El número de caramelos por paquete varía tal como indica la tabla adjunta.[17]

caramelos	97	98	99	100	101	102	103
probabilidad	0.05	0.14	0.21	0.29	0.20	0.09	0.02

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete elegido al azar tenga 101 o más caramelos?
b) Halla el número esperado de caramelos por paquete y la desviación típica.
c) El coste en la elaboración de un paquete de caramelos viene dada por una cantidad fija de 2.00 euros más 0.05 euros por cada caramelo. Cada paquete de caramelos cuesta 10.00 euros (independientemente del número de caramelos que contiene). Halla la media y la desviación típica del beneficio por paquete.

VARIABLES ALEATÒRIES VECTORIALS DISCRETES

18) Los estudiantes de una universidad se clasifican de acuerdo a sus años en la universidad (X) y el número de visitas a un museo el último año($Y = 0$ si no hizo ninguna visita $Y = 1$ si hizo una visita, $Y = 2$ si hizo más de una visita). En la tabla siguiente aparecen la probabilidades conjuntas que se estimaron para estas dos variables:[18]

Núm. de Visitas (Y)	Núm. de años (X)			
	1	2	3	4
0	0.07	0.05	0.03	0.02
1	0.13	0.11	0.17	0.15
2	0.04	0.04	0.09	0.10

a) Hallar la probabilidad de que un estudiante elegido aleatoriamente no haya visitado ningún museo el último año.

b) Hallar las medias de las variables aleatoria X e Y.

c) Hallar e interpretar la covarianza y la correlación entre las variables aleatorias X e Y.

19) Un vendedor de libros de texto realiza llamadas a los despachos de lo profesores, y tiene la impresión que éstos suelen ausentarse más de los despachos los viernes que cualquier otro día laborable. Un repaso a las llamadas, de las cuales un quinto se realizan los viernes, indica que para el 16% de las llamadas realizadas en viernes, el profesor no estaba en su despacho, mientras que esto ocurre sólo para el 12% de llamadas que se realizan en cualquier otro día laborable. Definamos las variables aleatorias siguientes:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la llamada es realizada el viernes} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si el profesor está en el despacho} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

[17] Sol.: a) 0.31, b) E(X) = 99.8, d.t.(X) = 1.386, c) E(B) = 3.01, d.t.(B) = 0.069.
[18] Sol.: a) 0.17; b) $E(X) = 2.59$, $E(Y) = 1,10$; c) $Cov(X, Y) = 0.191$, r_{XY}=0.259291

a) Hallar la función de probabilidad conjunta de X e Y.

b) Hallar la función de probabilidad condicional de Y, dado que $X = 0$.

c) Hallar las funciones de probabilidad marginal de X e Y.

d) Hallar e interpretar la covarianza de X e Y.

20) Se lanzan al aire dos dados de diferente color, uno es blanco y el otro rojo. Sea X la variable aleatoria "número de puntos obtenidos con el dado blanco, e Y la variable aleatoria "número más grande de puntos obtenido entre los dos dados".

a) Determinar la función de probabilidad conjunta.

b) Obtener las funciones de probabilidad marginales.

c) ¿Son independientes? (**No**)

DISTRIBUCIONS DE PROBABILITAT DISCRETES NOTABLES

21) Un estudiante contesta a una prueba con 20 cuestiones. Cada una de ellas admite diez respuestas posibles, de las cuales sólo dos son verdaderas. El cuestionario se cumplimenta eligiendo sólo una de las diez opciones. ¿Cuál es la probabilidad de responder mal a las 20 preguntas? ¿Cuál es la probabilidad de responder bien a 5? ¿Cuál es la probabilidad de responder bien a más de 5? ¿Cuál es el valor esperado y la varianza de las respuestas correctas?

22) Un pequeño hotel rural dispone de 10 habitaciones. El departamento de reservas hace 12 reservas al día porque sabe que la probabilidad de que cada una de ellas falle es del 25%. Las reservas se realizan de forma independiente.

a) Hallar la probabilidad de que en un día elegido al azar no tenga suficientes habitaciones para atender todas las reservas. (Indica claramente la variable que utilizas y el tipo de distribución que sigue la variable.)

b) Hallar la probabilidad de que en un día elegido al azar no llene todas las habitaciones.

c) Hallar la probabilidad de que en un fin de semana largo (3 dias) no le falten habitaciones ningún dia.

23) Por una larga experiencia se ha estimado que el promedio de errores tipográficos al componer un libro es de 2 por cada 20 páginas.

---

[19]Sol.:

	X		
Y	0	1	$P_Y(y)$
0	0.096	0.032	0.128
1	0.704	0.168	0.872
$P_X(x)$	0.8	0.2	1

; b)

Y	0	1
$P_{Y/X}(y\|0)$	0.12	0.88

d) $Cov(X,Y) = -0.0064$

[21]Sol.: X = "número de respuestas correctas", $P_X(0) = 0.0115$, $P_X(5) = 0.1746$, $E(X) = 4$, $Var(X) = 3.2$

[22]Sol.: a) 0.0317, b) 0.6093, c) 0.9079

a) Hallar la probabilidad de que en un libro de 100 páginas existan a lo sumo 10 erratas.

b) Hallar la probabilidad de que en un libro de 50 páginas existan más de 15 erratas.

c) Hallar la probabilidad de que el número de erratas de una publicación de 10 páginas sea mayor o igual que 2 y menor o igual que 4.

24) En promedio llegan 2.4 clientes por minuto al mostrador de una compañía aérea durante el período de máxima actividad. Asumir que el número de llegadas es Poisson.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no llegue nadie en un minuto?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan más de tres llegadas en un minuto?

25) Una cadena de producción da salida a 10000 unidades diarias, el número medio de unidades incorrectas es 200. Una vez al día, se inspecciona un lote de 100 unidades. Determinar la probabilidad de que el lote contenga más de 3 unidades incorrectas

a) Utilizando la distribución binomial.

b) Utilizando la aproximación de Poisson.

26) Los taxis llegan aleatoriamente (según un proceso Poisson) a la terminal de un aeropuerto con un ritmo medio de un taxi cada 3 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que el último pasajero de una cola de 4 tenga que esperar un taxi más de un cuarto de hora?

27) En una planta de fabricación de circuitos integrados, la proporción de circuitos defectuosos es p. Supongamos que la incidencia de circuitos defectuosos es completamente aleatoria.

a) Determinar la distribución del número X de circuitos aceptables producidos antes del primer circuito defectuoso.

b) ¿Cuál es la longitud media de una cadena de producción exitosa? si $p = 0.05$.

28) Un servidor de mensajería esta en funcionamiento. Los clientes acceden a él de forma independiente. La probabilidad de que el servidor caiga cuando accede el cliente es p. Calcular la distribución de probabilidad del número de clientes a los que se dará servicio antes de que el servidor caiga.

a) Calcular el valor esperado y la varianza de esta variable.

[23] Sol.: a) 0.5830, b) 0.0001, c) 0.2605
[24] Sol.: a) 0.0907, b) 0.2213
[25] Sol.: a) (**0.1410**) ; b) (**0.1429**)
[26] Sol.: (**0.265**)
[27] Sol.: b) (**19**)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se de servicio a más de 1000 clientes sin que se caiga el servidor?

29) Un sistema informático dispone de un sistema de seguridad compuesto por tres claves de 3 dígitos (del 0 al 9) cada una. Para entrar en el sistema hay que averiguar la primera clave, luego la segunda y por último la tercera. Un pirata informático intenta entrar ilegalmente en el sistema, para ello va introduciendo al azar distintas claves de forma independiente, olvidando las que ha introducido antes. Calcular el valor esperado y la varianza del número de intentos antes de romper el sistema.

Comparar el resultado anterior cuando se ataca el sistema de forma similar pero cuando el sistema de seguridad sólo consta de una clave de 9 dígitos. ¿Cuál es el sistema más seguro, desde el punto de vista del número de intentos necesarios para violarlo?

30) La probabilidad de que una cajero automático se estropee en una operación es $p = 0.001$. Responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el número esperado de operaciones correctas hasta el primer error?

b) ¿Cuál es la varianza del número de operaciones correctas hasta el primer error?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de operaciones consecutivas correctas sea mayor o igual que 100?

[28] Sol.: a) $(\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}; \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}^{\mathbf{2}})$ b) $(\mathbf{q}^{\mathbf{1001}})$

[30] Sol.: a) 999, b) 999000, c) 0.9048