Classe pràctica 1. Enunciat

Prob 1 Definim el següent producte escalar sobre $\mathbb{R}^3$

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

a) Trobau la matriu associada al producte escalar respecte a la base canònica. **1 punt**

b) Trobau l'expressió analítica de $\|(x_1, x_2, x_3)\|$. **1 punt**

c) Sigui $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 3z = 0\}$. Trobau una base ortonormal de S. **3 punt**

d) Trobau una base de $S^\perp$. **2 punt**

e) Calculau la projecció ortogonal sobre S del vector (-1,3,2). **3 punt**

(Control, curs 07/08)

Classe pràctica 1. Solució

Prob 1 Definim el següent producte escalar sobre $\mathbb{R}^3$

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

a) Trobau la matriu associada al producte escalar respecte a la base canònica. **1 punt**

b) Trobau l'expressió analítica de $\|(x_1,x_2,x_3)\|$. **1 punt**

c) Sigui $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 3z = 0\}$. Trobau una base ortonormal de S. **3 punt**

d) Trobau una base de $S^{\perp}$. **2 punt**

e) Calculau la projecció ortogonal sobre S del vector (-1,3,2). **3 punt**

(Control, curs 07/08)

Solució:

a) La matriu és

$$\begin{pmatrix} \langle (1,0,0),(1,0,0)\rangle & \langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle & \langle (1,0,0),(0,0,1)\rangle \\ \langle (0,1,0),(1,0,0)\rangle & \langle (0,1,0),(0,1,0)\rangle & \langle (0,1,0),(0,0,1)\rangle \\ \langle (0,0,1),(1,0,0)\rangle & \langle (0,0,1),(0,1,0)\rangle & \langle (0,0,1),(0,0,1)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\|(x_1,x_2,x_3)\| = \sqrt{\langle (x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle} = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2}$$

-

c) Els elements de S compleixen que $x = -y + 3z$, per tant són de la forma

$$(-y+3z, y, z) = y(-1,1,0) + z(3,0,1)$$

aleshores $\{(-1,1,0),(3,0,1)\}$ és un sistema generador de S, i com són linealment independents ja que el menor de 2n ordre $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ tenim que forman una base de S.

Aplique el mètode de Gram-Schmidt per cercar una base ortonormal.

$$e_1' = (-1,1,0), \qquad \|e_1'\| = \sqrt{(-1)^2 + 2\cdot 1} = \sqrt{3}$$

$$e_2' = (3,0,1) - \frac{\langle (3,0,1),(-1,1,0)\rangle}{\|((-1,1,0)\|^2}(-1,1,0) = (3,0,1) - \frac{-3}{3}(-1,1,0) = (2,1,1)$$

$$\|e_2'\| = \sqrt{2)^2 + 2\cdot 1 + 1^2} = \sqrt{7}$$

Per tant, una base ortogonal és $\{(-1,1,0),(2,1,1)\}$ i una base ortonormal és

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{7}}(2,1,1)\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(\frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right\}$$

d) Els elements de $S^{\perp}$ compleixen que són ortogonals als elements de S, o el que és equivalent, són ortogonals als elements de les bases de S. Considerem la base de S $\{(-1,1,0),(3,0,1)\}$, i sigui $(x,y,z) \in S^{\perp}$, per tant han de complir

$$\langle (x,y,z),(-1,1,0)\rangle = -x + 2y = 0; \qquad \langle (x,y,z),(2,1,1)\rangle = 2x + 2y + z = 0$$

i resolent el sistema format per aquestes dues equacions tenim $y = \frac{x}{2}$ i $z = -3x$. Per tant, els elements de $S^\perp$ són de la forma

$$\left(x, \frac{x}{2}, -3x\right) = x\left(1, \frac{1}{2}, -3\right)$$

Aleshores $S^\perp = \langle\left(1, \frac{1}{2}, -3\right)\rangle = \langle(2,1,-6)\rangle$ i una base de $S^\perp$ és $\{(2,1,-6)\}$.

e) Una base de S és $\{(-1,1,0),(3,0,1)\}$ i una base de $S^\perp$ és $\{(2,1,-6\}$. Per trobar la projecció ortogonal sobre S de (-1,3,2) cercarem x, y i z de forma que

$$(-1,3,2) = x(-1,1,0) + y(3,0,1) + z(2,1,-6)$$

Operant i resolent tenim $x = \frac{67}{21}$, $y = \frac{6}{7}$ i $z = \frac{-4}{21}$, aleshores la projecció ortogonal cercada és

$$P_S(-1,3,2) = \frac{67}{21}(-1,1,0) + \frac{6}{7}(3,0,1) = \left(-\frac{13}{21}, \frac{67}{21}, \frac{6}{7}\right)$$