Fonaments Matemátiques II

Probabilitat

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears

Manuel Moyà Quintero

Índex

Capítol 4

Variable aleatòria contínua

4.1 Distribució de probabilitat contínua

El concepte de variable aleatòria es va veure a la definicióVarAleDiscreta1, definirem a continuació els següents conceptes.

Definició 4.1 *Un* **espai mostral continu** *és aquell que consta de un nombre infinit (no numerable) de punts. Una* **variable aleatòria contínua** *és aquella que conté un interval de nombres reals.*

Exemple: La variable aleatòria X que representa l'estatura d'una persona, és contínua, ja que pot prendre qualsevol valor dins un interval.

és important trobar un mitjà senzill per descriure la distribució d'una variable aleatòria contínua X. Per a això cercarem una funció $f_X(x)$ de forma que l'àrea entre $f_X(x)$, l'eix OX i les rectes $x = a$ i $x = b$ ens doni la probabilitat $P(a \leq X \leq b)$ (Vegeu la figura 4.1)

Definició 4.2 *Una* **funció de densitat** *d'una variable aleatòria contínua X és una funció f que té les següents propietats:*

(i) $f(x) \geq 0$.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

(iii) $\int_a^b f(x)dx = P(a \leq X \leq b)$

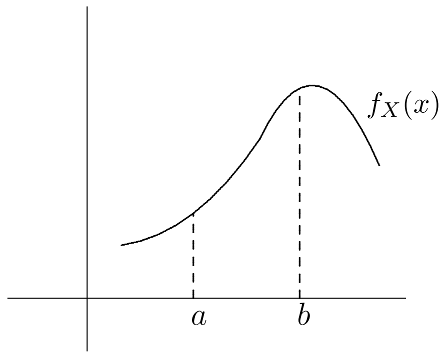

Figura 4.1: Funció de densitat

Si el domini de la variable aleatòria X no és tota la recta real, se suposa que $f(x) = 0$ per a tots aquells valors que es troben fora del domini.

En una variable aleatòria contínua es compleix $P(X = a) = 0$ (la funció de densitat de X satisfà aquesta condició, ja que $\int_a^a f(x)dx = 0$).

A més, tenin en compte això, també es compleix

$$P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x < b)$$

Exemple 1: Sigui la funció $f(x) = ke^{-x}$ per a $x \geq 0$. Calculeu k per a que f sigui una funció de densitat i cerquem $P(1 < X < 2)$.

Per la propietat (i) de la definició $f(x) \geq 0$, per tant, k ha de ser positiu.

Per altra part, si

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

tenim, per la propietat (ii) de la definició

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} ke^{-x} = -ke^{-x}]_0^{\infty} = 0 + k = 1$$

Per tant, $k = 1$.

Finalment, per la propietat (iii) de la definició,

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 e^{-x} = -e^{-x}]_1^2 = -e^{-2} + e^{-1} = 0,23$$

Exemple 2: Sigui la variable aleatòria contínua X el diàmetre d'un forat fet a una placa metàl·lica. El diàmetre requerit és 12,5 mm, però moltes pertorbacions aleatòries en el procés donen com a resultat diàmetres més grans. La recopilació de dades indica que la distribució X es pot modelar amb la funció de densitat de probabilitat $f_X(x) = 20e^{-20(x-12,5)}$ amb $x \geq 12,5$. Si rebutgem les peces que tenen un diàmetre major que 12,60 mm, quina proporció de peces s'espera rebutjar? Quina proporció de peces tenen un diàmetre entre 12,5 mm i 12,6 mm?

a) Cerquem primer la proporció de peces amb un diàmetre major que 12,60mm.

$$P(X > 12,60) = \int_{12,6}^{\infty} 20e^{-20(x-12,5)}dx = -e^{-20(x-12,5)}\Big]_{12,6}^{\infty} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} -e^{-20(x-12,5)}\Big]_{12,6}^{t} = 0,135$$

b) Cerquem ara la proporció de peces amb un diàmetre entre 12,5mm i 12,6mm.

$$P(12,5 < X < 12,6) = \int_{12,5}^{12,6} 20e^{-20(x-12,5)}dx = -e^{-20(x-12,5)}\Big]_{12,5}^{12,6} = 0,865$$

Definició 4.3 *Sigui X una variable aleatòria contínua i $f(x)$ la seva funció de densitat. Definim* **funció de distribució** *de X a*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Exemple 1: En el exemple de la definició 4.2 calculem $F_X(x)$.

$$F_X(x) = \int_0^x e^{-t}dt = -e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}$$

per tant,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 2: A l'exemple de la definició 4.2 calculem la seva funció de distribució.

La funció de densitat és $f_X(x) = 20e^{-20(x-12,5)}$ amb $x \geq 12.5$, per tant, la funció de distribució serà per a $x \geq 12,5$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{12.5}^{x} 20e^{-20(t-12,5)}\,dt = -e^{-20(t-12,5)}\Big]_{12,5}^{x} =$$

$$= -e^{-20(x-12,5)} + 1$$

Per tant,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 12,5 \\ 1 - e^{-20(x-12,5)} & x \geq 12,5 \end{cases}$$

Proposició 4.4 *Si X és una variable aleatòria contínua amb funció de densitat $f_X(x)$ i de distribució $F_X(x)$, per a tots els valors de x per als quals existeix $F'_X(x)$, tenim*

$$F'_X(x) = f_X(x)$$

DEMOSTRACIÓ:

és conseqüència immediata del teorema fonamental del càlcul.

Exemple 1: Sigui X la variable aleatòria que ens dóna el corrent mesurat en mil·liampers, en un conductor prim de coure. Calculem la funció de densitat associada a la funció de distribució:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 0 \\ 0.05x & si & 0 \leq x < 20 \\ 1 & si & x \geq 20 \end{cases}$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 0 \\ 0.05 & si & 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & si & x > 20 \end{cases}$$

4.2 Valor esperat

Definició 4.5 *Sigui X una variable aleatòria contínua, amb la funció de densitat f_X contínua. Anomenam* **Esperança matemàtica**, **valor esperat** *o* **mitjana** *de X, i la representarem per $E(X)$ o μ_X a*

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Anomenarem **Variància** *de X, i la representarem per σ_X^2 o $V(X)$ a*

$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx.$$

anomenam **desviació típica** *a σ_X*

Exemple 1: A l'exemple 1 de la definició 4.2 tenim la funció de densitat $f(x) = e^{-x}$ per a $x \geq 0$. Calculem el valor esperat i la variància.

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x}\, dx$$

Fen la integració per parts

$$\left.\begin{array}{ll} \int x e^{-x}\, dx & \\ u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}\, dx & v = -e^{-x} \end{array}\right\}$$

tendríem

$$\int x e^{-x}\, dx = -x e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

calculant μ_X tenim

$$\mu_X = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t x e^{-x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^t = \lim_{t\to+\infty} (-t e^{-t} - e^{-t} + 1) = 1$$

Anàlogament

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} (x-1)^2 e^{-x}\, dx$$

Integrant per parts

$$\left.\begin{array}{ll} \int (x-1)^2 e^{-x}\, dx & \\ u = (x-1)^2 & du = 2(x-1)dx \\ dv = e^{-x}\, dx & v = -e^{-x} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{ll} = -(x-1)^2 e^{-x} + \int 2(x-1) e^{-x}\, dx & \\ u = 2(x-1) & du = 2dx \\ dv = e^{-x}\, dx & v = -e^{-x} \end{array}\right\}$$

tenim

$$\int (x-1)^2 e^{-x}\, dx = -(x-1)^2 e^{-x} - 2(x-1) e^{-x} + \int 2 e^{-x}\, dx =$$

$$= -(x-1)^2 e^{-x} - 2(x-1) e^{-x} - 2e^{-x}$$

calculant σ_X^2 tenim

$$\sigma_X^2 = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t (x-1)^2 e^{-x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} [-(x-1)^2 e^{-x} - 2(x-1) e^{-x} - 2e^{-x}]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} (-(t-1)^2 e^{-t} - 2(t-1) e^{-t} - 2e^{-t} + 1) = 1$$

4.3 Distribució uniforme

Definició 4.6 *Una variable aleatòria X segueix una* **distribució rectangular o uniforme** *i la representarem per $U(a,b)$ si la seva funció de densitat és:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & si\ a \le x \le b \\ \\ 0, & altrament \end{cases}$$

Integrant obtendríem la funció de distribució que seria

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ a < x \le b \\ 1 & si\ x > b \end{cases}$$

La distribució rectangular sorgeix, per exemple, en el estudi de l'arrodoniment d'errors quan les observacions es registren amb una certa precisió.

Exemple1: Si les observacions de la temperatura diària es registren arrodonides al grau més pròxim, calculeu la probabilitat que l'error estigui entre -0,2 i 0,3.

A l'arrodonim al grau més pròxim, la diferència entre la temperatura registrada i la vertadera és un nombre comprés entre -0,5 i 0,5 i es pot suposar que l'error es distribueix uniformement al llarg d'aquest interval, per tant la funció de densitat és

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{0,5-(-0,5)} = 1, & si\ \ -0,5 \le x \le 0,5 \\ \\ 0, & altrament \end{cases}$$

aleshores,

$$P(-0,2 < X < 0,3) = F(0,3) - F(-0,2) = \int_{-0,5}^{0,3} dt - \int_{-0,5}^{-0,2} dt =$$
$$= t]_{-0,5}^{0,3} - t]_{-0,5}^{-0,2} = 0,3 + 0,5 - (-0,2 + 0,5) = 0,5$$

També

$$P(-0,2 < X < 0,3) = \int_{-0,2}^{0,3} dt = t]_{-0,2}^{0,3} = 0,5$$

Exemple 2: Efectuam l'experiment que consisteix en triar a l'atzar un nombre real entre 0 i 1. Sigui X la variable aleatòria que ens dóna el nombre triat. Trobau la funció de densitat i de distribució d'aquesta variable aleatòria.

Com triam a l'atzar un nombre, la probabilitat es distribueix uniformement al llarg de l'interval $[0,1]$. Per tant

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \le x \le 1 \\ \\ 0, & altrament \end{cases}$$

La funció de distribució que seria

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ x & si\ 0 < x \leq 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Proposició 4.7 *Si X és una variable aleatòria uniforme,$U(a,b)$, el valor esperat i la variància són:*

$$\mu_X = \frac{a+b}{2}; \qquad \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemple 1: Considerant un exemple anterior

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{0,5-(-0,5)} = 1, & si\ -0,5 \leq x \leq 0,5 \\ \\ 0, & altrament \end{cases}$$

tenim que

$$\mu_X = \frac{a+b}{2} = 0; \qquad \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

4.4 Distribució normal o de Gauss

Definició 4.8 *Direm que una variable aleatòria X segueix una* **distribució normal** *o* **de Gauss** *de paràmetres μ i σ i la representarem per $N(\mu,\sigma)$ si té com a funció de densitat*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La gràfica d'aquesta funció es coneix com la **campana de Gauss** i té la forma indicada al dibuix 4.2

La variable aleatòria normal $N(0,1)$ rep el nom de **variable aleatòria normal estàndard** i la representarem amb la lletra Z.

Exemple 1: Calculem les següents probabilitats:

a) $P(Z \leq 1,26) = 0,8962$

b) $P(Z > 1,26) = 1 - P(Z \leq 1,26) = 1 - 0,8962 = 0,1038$

c) $P(Z < -0,86) = P(Z > 0,86) = 1 - P(Z \leq 0,86) = 1 - 0,8051 = 0,1949$

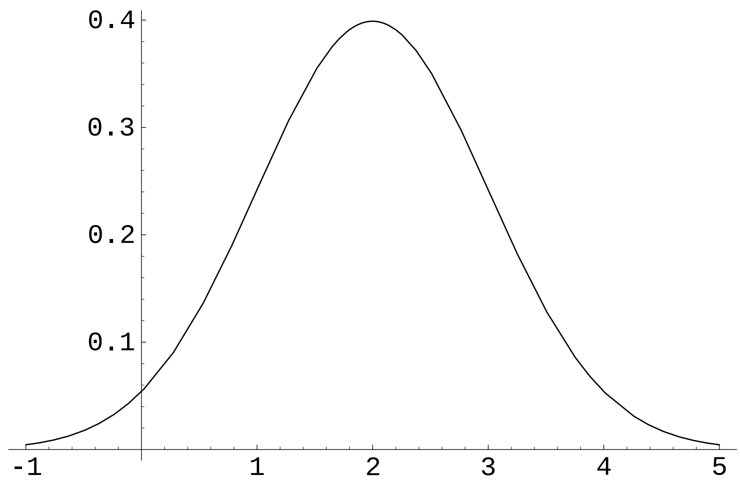

Figura 4.2: Funció de distribució normal N(2,1)

d) $P(Z > -1,37) = P(Z < 1,37) = 0,9147$

e)

$$P(-1,25 < Z < 0,37) = P(Z < 0,37) - P(Z < -1,25) =$$
$$= P(Z < 0,37) - P(Z > 1,25) = P(Z < 0,37) - (1 - P(Z < 1,25)) =$$
$$= 0,6443 - (1 - 0,8944) = 0,5387$$

Proposició 4.9 *Una variable aleatòria normal té les següents propietats:*

1. $f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$, *és a dir, és simètrica respecte a la recta* $x = \mu$.
2. $f_X(x)$ *té el seu màxim en el punt* $x = \mu$.

Proposició 4.10 *Si* X *és una variable aleatòria normal* $N(\mu, \sigma^2)$, *aleshores:*

a) $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ *és una variable aleatòria normal estàndard.*

b) $P(X \leq x) = P\left(\dfrac{X - \mu}{\sigma} \leq \dfrac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z)$.

Aquesta proposició ens permet calcular les diferents probabilitats d'una variable aleatòria qualsevol fent servir la taula corresponent a una variable aleatòria normal estàndard. Aquest procés s'anomena **tipificació** d'una variable aleatòria normal

Exemple 1: Suposem que els mesuraments de corrent realitzats en un filferro conductor segueix una distribució normal de mitjana 10 mil.liampers o variància de 4 mil.liampers^2.

a) Quina és la probabilitat de que el valor del mesurament sigui major que 13 mil.liampers?

b) Quina és la probabilitat de que el valor del mesurament de corrent estigui entre 9 i 11 mil.liampers?

c) Quin és el valor per al qual la probabilitat de que el mesurament de corrent tengui una magnitud menor que aquest sigui 0,98?

a)

$$P(X > 13) = P\left(\frac{X-10}{2} > \frac{13-10}{2}\right) = P(Z > 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) =$$
$$= 1 - 0,9332 = 0,0668$$

b)

$$P(9 < X < 11) = P\left(\frac{9-10}{2} < \frac{X-10}{2} < \frac{11-10}{2}\right) =$$
$$= P(-0,5 < Z < 0,5) = P(Z < 0,5) - P(Z < -0,5) =$$
$$= P(Z < 0,5) - [1 - P(Z < 0,5)] = 0,6915 - (1 - 0,6915) = 0,3829$$

c) $P(X < x) = 0,98$, és a dir,

$$P\left(\frac{X-10}{2} < \frac{x-10}{2}\right) = P\left(Z < \frac{x-10}{2}\right) = 0,98$$

que cercant a la taula ens dóna $z = 2,05$, per tant,

$$\frac{x-10}{2} = 2,05 \qquad x = 14,1 \text{ mil.liampers}$$

Proposició 4.11 ***(Aproximació d'una variable aleatòria binomial a una normal)***

Si X és una variable aleatòria binomial $B(n,p)$, per a determinats valors de n i p aquesta variable s'aproximarà a una v.a contínua Y que segueix una distribució normal de mitjana np i variància npq. $N(np, npq)$

Aquesta aproximació serà bona quan $np > 5$ i $nq > 5$.

Exemple 1: Suposem que un canal de comunicació digital, la probabilitat de rebre un bit de forma errònia és $p = 10^{-5}$. Si es transmeten 16 mil.lions de bits, quina és la probabilitat de que es presentin més de 150 errors?.

Per resoldre aquest problema tenint en compte una distribució binomial tendríem

$$P(X > 150) = 1 - P(X \leq 150) =$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{150} \binom{16000000}{x} (10^{-5})^x (1 - 10^{-5})^{16000000-x}$$

amb una dificultat de càlcul evident.

Per tant, utilitzarem aquesta proposició i com $np = 16000000.10^{-5} = 160 > 5$ i $nq = 16000000(1-10^{-5}) > 5$ tenim que la podem aproximar a una v.a. contínua Y que segueix una distribució normal de mitjana $np = 16000000.10^{-5} = 160$ i variància $npq = 16000000.10^{-5}.(1 - 10^{-5}) = 159,998$, $N(160; 159,998)$.

Per aquesta aproximació hem de tenir en compte que si $X > 150$ aleshores $Y > 150,5$ ja que el valor 150 de la v.a discreta X equival a l'interval $(149,5; 150,5)$

Per tant,

$$P(X > 150) = P(Y > 150,5) = P(Z > \frac{150,5 - 160}{12,65}) = P(Z > -0,75) =$$

$$= P(Z < 0,75) = 0,773$$

Suposem ara que es transmeten 50 bits i que la probabilitat d'error és 0,1. En aquest cas tenim $np = 50.0,1 = 5$ i $nq = 50.0,9 = 45$. Calculem la probabilitat que es presentin dos o menys errors. Ho farem pels dos procediments,

a) Distribució binomial: $B(50; 0,1)$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \binom{50}{0} 0,9^{50} + \binom{50}{1} 0,1^1.0,9^{49} + \binom{50}{2} 0,1^2.0,9^{48} = 0,112$$

b) Distribució normal de mitjana $\mu = np = 5$ i variància $npq = 4,5$. $N(5; 4,5)$.

$$P(X \leq 2) = P(Y < 2,5) = P(Z < \frac{2,5 - 5}{2,12}) = P(Z < -1,17925) = 0,119$$

que com es pot comprovar és una aproximació bastant bona

Proposició 4.12 ***(Aproximació d'una variable aleatòria de Poisson a una normal)***

Si X és una variable aleatòria de Poisson de paràmetre λ, per a determinats valors de λ aquesta variable s'aproximarà a una v.a contínua Y que segueix una distribució normal de mitjana λ i variància λ.

Aquesta aproximació serà bona per a $\lambda > 5$.

Exemple 1: Suposem que el nombre de partícules d'asbest (tipus de mineral semblant a l'amiant) en un centímetre quadrat de pols té una distribució de Poisson amb mitjana 1000. Si analitzem un centímetre quadrat de pols, quina és la probabilitat de trobar-ne menys de 950 partícules d'asbest?

Per calcular aquesta probabilitat hauríem de fer

$$P(X \leq 950) = \sum_{x=0}^{950} \frac{e^{-1000}1000^x}{x!}$$

amb un càlcul complicat.

Aproximem-ho ara a una distribució normal de mitjana 1000 i variància 1000, $N(1000; 1000)$.

A l'igual que l'aproximació d'una distribució binomial si $X \leq 950$, $Y < 950,5$.

$$P(X \leq 950) = P(Y < 950,5) = P(Z < \frac{950,5 - 1000}{31,62}) =$$

$$= P(Z < -1,56546) = 0,0587$$

4.5 Distribució exponencial

Definició 4.13 *Direm que una variable aleatòria contínua X segueix una* **distribució exponencial** *de paràmetre λ i la representarem per $Exp(\lambda)$ si té com a funció de densitat*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Integrant obtendríem la funció de distribució, si $x \geq 0$ tendríem

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

i la funció de distribució seria

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

En un exemple fet quan es va estudiar la distribució de Poisson, es va considerar la variable aleatòria discreta que ens dóna el nombre de defectes superficials en un fil ferro sabent que la mitjana de defectes en L mil·límetres era λ. Doncs bé, si considerem la variable aleatòria X que ens dóna la longitud des de el punt inicial del fil ferro fins trobar el primer defecte, o el que seria igual la distància entre dos defectes, ens trobem amb una distribució exponencial de paràmetre λ.

Exemple 1: En una xarxa grossa d'ordinadors, l'accés dels usuaris al sistema segueix una distribució de Poisson de mitjana 25 accessos per hora. Quina és la probabilitat de que no hagi accessos en un interval de 6 minuts?

Designem per X la variable aleatòria que ens dóna el temps en hores des de l'inici de l'interval fins que es presenta el primer accés. X segueix una distribució exponencial de paràmetre $\lambda = 25$ accessos per hora. Ens demanen la probabilitat que X sigui major que 6 minuts (0,1 hores), és a dir,

$$P(X > 0,1) = \int_{0,1}^{\infty} 25e^{-25x}dx = e^{-2,5} = 0,082.$$

Considerem ara la pregunta: quina és la probabilitat de que el temps transcorregut fins al següent accés estigui entre 2 i 3 minuts? Passam les dades a hores i tenim

$$P(0,033 < X < 0,05) = \int_{0,033}^{0,05} 25e^{-25x}dx = 0,152.$$

S'ha trobat que la distribució exponencial és un model apropiat per calcular la probabilitat de que una peça de maquinària duri un total de t unitats de temps abans de que falli.

Exemple 2: Un fabricant de maquinària electrònica sap per experiència que la seva maquinària dura com mitjana 2 anys sense reparacions i que el període anterior a la primera avaria segueix una distribució exponencial de densitat $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$. Quina proporció dels seus clients necessitaran reparacions a causa de falles de la maquinària abans d'un any?.

Consisteix en calcular $P(X < 1)$,

$$P(X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx = -e^{-\frac{x}{2}}\Big]_0^1 = -e^{-\frac{1}{2}} + 1 = 0,393$$

Per tant, inclòs si la duració de la vida és el doble de la duració garantida, hi ha una probabilitat considerable de que la maquinaria falli abans de que finalitzi la garantia.

Proposició 4.14 *Si una variable aleatòria X segueix una distribució exponencial $Exp(\lambda)$, aleshores*

$$\mu_X = \frac{1}{\lambda}; \qquad \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Vegem a continuació el següent exemple que ens servirà de base per enunciar la **propietat de pèrdua de memòria**.

Exemple 1: Sigui X el temps transcorregut entre les deteccions d'una partícula rara per un comptador Geiger; suposem que X segueix una distribució exponencial amb paràmetre 1,4 minuts.

a) Calcular la probabilitat de detectar una partícula durant un lapsus de 30 segons que transcorre des de que s'engega el comptador Geiger.

b) Suposem que s'ha encés el comptador Geiger i transcorren 3 minuts sense detectar cap partícula, quina és la probabilitat de detectar una partícula en els 30 segons següents?

Considerem com unitat de temps el minut. Estam davant una distribució $Exp(1,4)$

a) $P(X < 0,5) = 1 - e^{-1,4.0,5} = 0,50$

b)

$$P(X < 3,5|X > 3) = \frac{P(3 < X < 3,5)}{P(X > 3)} = \frac{F(3,5) - F(3)}{1 - F(3)} = 0,50$$

Per tant, després d'esperar tres minuts sense detectar cap partícula, la probabilitat de detectar una en els 30 segons següents és la mateixa que la de detectar-la 30 segons després d'engegar l'ordinador.

Proposició 4.15 (Propietat de la pèrdua de memòria)

Si X és una variable aleatòria d'una distribució exponencial, aleshores

$$P(X > s + t|X > s) = P(X > t), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Exemple 1: S'ha demostrat que la durada de la vida de certs elements segueix una distribució exponencial amb paràmetre $\frac{1}{8}$ (mesos). Es demana:

a) Calculau la probabilitat que un element tengui una vida compresa entre 3 i 12 mesos.

b) El quàntil 0,95 de la distribució (valor x_0 tal que $P(X \leq x_0) = 0,95$)

c) Probabilitat que un element que ja ha viscut 10 mesos duri 25 mesos o més.

d) El valor esperat i la variància.

Tenim una distribució exponencial $Exp(\frac{1}{8})$

a)

$$P(3 < X \leq 12) = \int_3^{12} f(x)dx = F_X(12) - F_X(3) =$$
$$= (1 - e^{-\frac{1}{8}12}) - (1 - e^{-\frac{1}{8}3}) = 0,4642$$

b)

$$0,95 = P(X \leq x_0) = F_X(x_0) = 1 - e^{-\frac{1}{8}x_0}; \qquad x_0 = 23,96$$

per tant el 95% dels elements viuen menys de 23,96 mesos.

c)

$$P(X > 25|X > 10) = P(X > 15 + 10|X > 10) = P(X > 15) =$$
$$= 1 - P(X \leq 15) = 1 - e^{-\frac{1}{8}15} = 0,1533$$

d) $\mu_X = \frac{1}{\lambda} = 8$ mesos ; $\qquad \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2} = 64$

Índex alfabètic