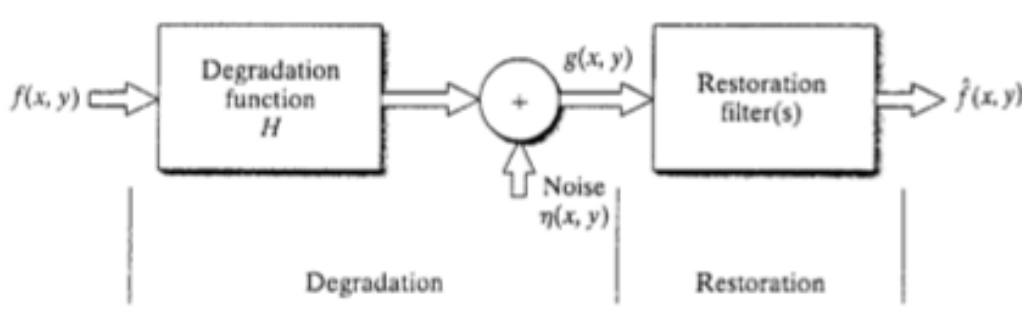


Pràctica 3 PDS: Restauració d'imatges digitals

Juan Gabriel Gomila Salas

La següent imatge, mostra el procés de degradació i restauració d'una imatge digital:



En ell, observam com una imatge donada $f(x, y)$ pot veure's sotmesa a un procés de degradació, donada per una funció $h(x, y)$, a més de la presència d'un renou afegit $\eta(x, y)$, donant com a resultat una funció $g(x, y)$. Aquest procés pot ser descrit en el domini espacial pel procés

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y)$$

on $*$ indica el producte de convolució de dues funcions, o bé en el domini freqüencial, realitzant la transformada de Fourier de l'expressió anterior com

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v)$$

El nostre objectiu serà realitzar un procés de restauració, de manera que siguem capaços d'obtenir una nova imatge $\hat{f}(x, y)$ aproximació de f , la imatge inicial.

1. Imatge Sintètica

En aquesta primera secció, s'explicaran tota una sèrie de mètodes de restauració d'imatges, amb exemples basats en una imatge sintètica consistenten un tauler de 8×8 amb tres colors, blanc, negre i gris.

En la Figura 1, podem observar, respectivament, el tauler, que correspondria a la imatge f que nosaltres inicialment hem vist i fotografiada; el resultat de degradar aquesta imatge deguda a un vector de translació de 7 píxels, en la direcció superior dreta (per exemple, perquè la càmera s'ens ha mogut en dita direcció, donant aquesta sensació d'imatge emborronada); i el resultat d'afegir un renou addicional a la imatge degradada. Aquest renou li hem introduït de forma artificial, de manera que nosaltres sabrem en tot moment que la imatge respon a un renou que segueix una distribució $N(0, 0.001)$, i per tant el podrem tenir ben controlat.

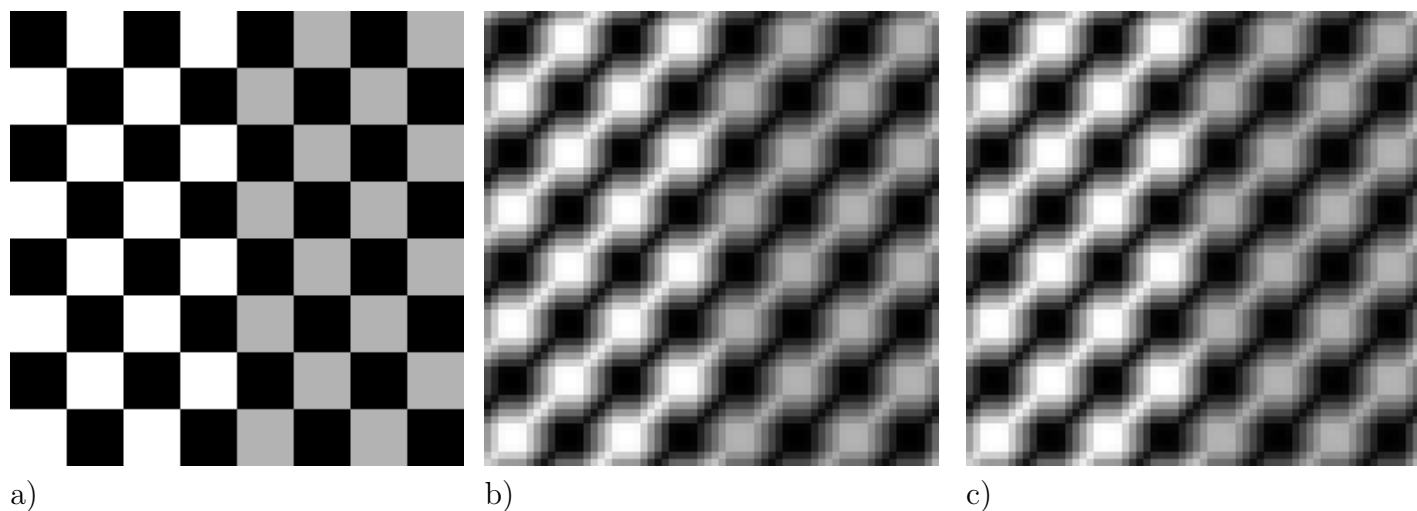


Figura 1: a) Imatge sintètica f consistent en un tauler de 8×8 amb tres colors, blanc, negre i gris. b) Imatge degradada $h * f$ degut a un moviment de la càmera a l'hora de fer la fotografia. c) Imatge degradada amb un renou addicional $h * f + \eta$.

A partir d'ara, el nostre objectiu serà aplicar algunes transformacions, de manera que com a resultat mirem de trobar una imatge, que s'assembli el més possible a la primera imatge de la Figura 1.

1.1. Filtre Invers.

El primer que s'ens acudiria, ja que hem modelat la degradació com

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v)$$

és mirar d'aïllar F , en cas de que coneguem, o poguem modelar la degradació H . Aquesta vendria donada per

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)}$$

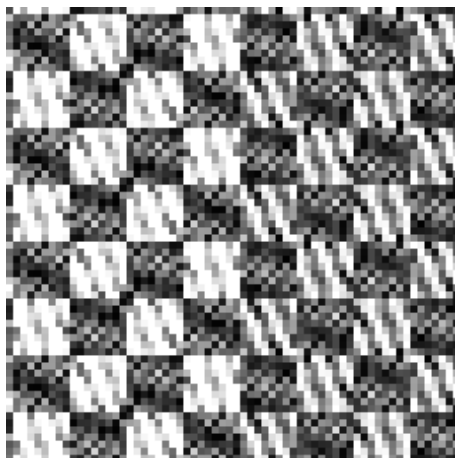
En el cas més favorable, no hi haurà renou, i per tant,

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = F(u, v)$$

però la funció H pot presentar zeros, de manera que en dividir per zeros tendrem problemes per fer una reconstrucció adequada. Si a més, hi ha terme de renou, en dividir per nombres petits, no farem res més que amplificar el renou de la imatge.

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

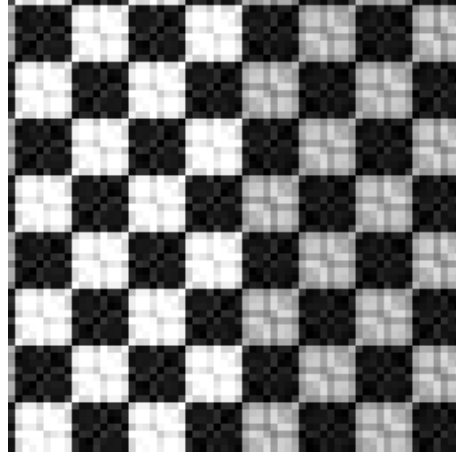
Aquest procés reb el nom de filtratge invers directe. En el nostre cas, el resultat ha estat el següent: Com es pot observar, no hem recuperat la imatge inicial, sinó que



hem amplificat el renou, i per això ens surten aquestes estructures estranyes en la imatge.

Aquesta primera solució intuïtiva, no fa el fet. El problema pareix estar en les divisions per nombres petits, així que podríem definir la nova imatge a trosos de la següent forma

$$\hat{F}(u, v) = \begin{cases} \frac{G(u, v)}{H(u, v)} & \text{si } H(u, v) \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si } H(u, v) < \varepsilon \end{cases}$$



Aquest procés reb el nom de pseudofiltratge invers. En el nostre cas, hem fet diverses proves amb diferents valors d' ε , i per $\varepsilon = 0.1$ el resultat ha estat el següent: Com es pot observar, hem recuperat la imatge inicial d'una forma més eficient que no pas amb el filtratge invers directe.

1.2. Filtre Wiener

Un altre manera de pensar en la restauració d'imatges, és la que va proposar N. Wiener el 1942: volem estimar una imatge \hat{f} que faci mínim l'error quadratic mitja estadístic, és a dir:

$$\hat{f} = \min_h E((f - h)^2)$$

on E és l'esperança i f la imatge no degradada. Si es resol aquest problema, es demostra que, en el domini freqüencial té solució:

$$\hat{F}(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)/S_f(u, v)} G(u, v)$$

on

- $H(u, v)$ és la funció de degradació
- $|H(u, v)|^2 = H^*(u, v) \cdot H(u, v)$
- $H^*(u, v)$ és el complex conjugat de $H(u, v)$
- $S_\eta(u, v) = |N(u, v)|^2$ és la potència espectral del renou

- $S_f(u, v) = |F(u, v)|^2$ és la potència espectral de la imatge no degradada.

La raó $S_\eta(u, v)/S_f(u, v)$ s'anomena raó de la potència renou-senyal. Notem que si la potència espectral del renou és suposadament zero per tots els valors de u i v , el filtre Wiener es redueix al filtre invers que hem vist abans.

Si definim la potència mitjana del renou

$$\eta_A = \frac{1}{MN} \sum_u \sum_v S_\eta(u, v)$$

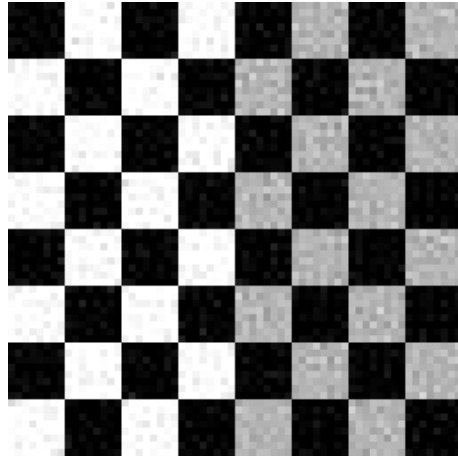
i la potència mitjana de la imatge

$$f_A = \frac{1}{MN} \sum_u \sum_v S_f(u, v)$$

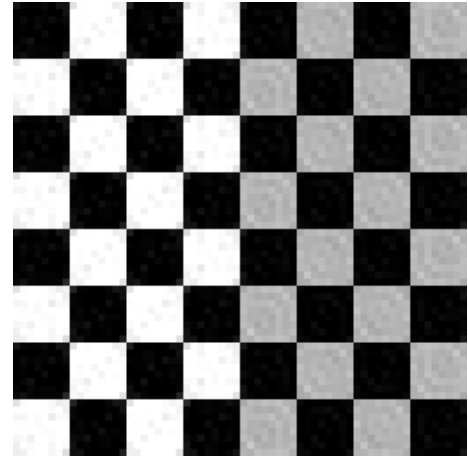
on M i N denoten el nombre de files i columnes de píxels del renou i la imatge respectivament. Aquests valors són nombres constants, i la seva raó

$$R = \frac{\eta_A}{f_A}$$

es un valor escalar, que a vegades s'empra per aproximar la funció $S_\eta(u, v)/S_f(u, v)$, que en general serà desconeguda, resultant un filtre Wiener paramètric. En la següent imatge:



a)



b)

En la figura a) podem observar el resultat d'aplicar el filtre Wiener emprant com a valor R el valor exacte de la raó entre les mitjanes de la imatge i del renou. Això

ha estat possible ja que, com que nosaltres hem introduït el renou, i disposavem de la imatge inicial, hem pogut fer els càlculs pertinents i obtenir aquests resultats. En la figura b) d'altra banda, hem emprat el valor exacte de les dues funcions de correlació $S_\eta(u, v)$ i $S_f(u, v)$. En ambdós casos, els resultats són més que acceptables, sobretot en el segon, el gran problema d'aquest filtre, però, és que es suposa que es coneix tant la funció de degradació H i no sols el renou, sinó com està distribuït aquest en tota la imatge. Modelant la primera, i estimant la segona per la seva raó, via assaig-error, podem arribar a trobar una solució bastant bona de la imatge inicial.

1.3. Filtre de la restricció sobre els mínims quadràtics.

Una imatge i un filtre de degradació, no són més que matrius, per tant a l'hora d'operar amb elles, podem aplicar qualssevol dels mètodes que coneixem sobre matrius per resoldre el nostre problema. En particular, si pensam el problema, com un problema variacional, el que cercam és minimitzar el grau de suavitat de la imatge, cosa que podem traduir en termes d'una edp discreta en termes del laplaciana de f com

$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (\nabla^2 f(x, y))^2$$

sotmés a la restricció de

$$\|g - F\hat{f}\|^2 = \|\eta\|^2$$

on $\|w\|^2 = w^t w$ és la norma eclidiana i ∇^2 és l'operador laplaciana. La solució d'aquest problema en el domini freqüencial, ve donada per

$$\hat{F}(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} G(u, v)$$

on γ és un paràmetre que s'ha d'ajustar perquè se satisfació la restricció de l'edp discreta (notem que $\gamma = 0$ ens torna a donar un filtre invers directe i $P(u, v)$ és la transformada de Fourier de la matriu

$$p(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

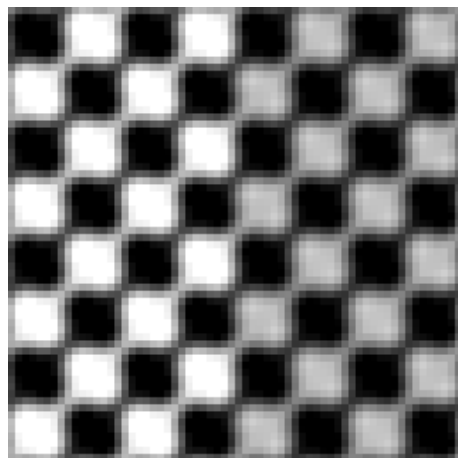
que és l'operador Laplaciana discret. Les úniques incògnites en aquest problema són doncs, γ i el valor de $\|\eta\|^2$. Es pot veure, però que γ es pot trobar iterativament si $\|\eta\|^2$, que és proporcional a la potència del renou, és conegut. D'aquesta manera,

podrem aplicar un algoritme iteratiu, que cercarà el valor de γ proposant com a potència del renou $MN(\sigma_\eta^2 - m_\eta^2)$. Fent variar una mica aquest valor, podrem anar afinant amb un resultat millor.

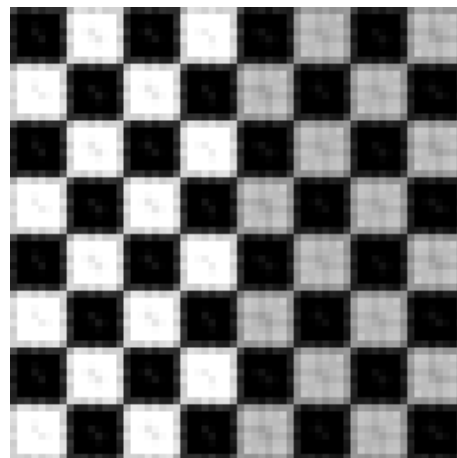
Per exemple, en la següent imatge en a), tenim el resultat d'aplicar el filtre emprant com a valor inicial

$$64 \cdot 64 \cdot (0.001 - 0^2) \simeq 4$$

el resultat resulta, però una mica borrós encara. Per això, en b), hem mirat d'ajustar una mica aquest valor, i l'hem pres igual a 0.4, obtenint un resultat bastant millor i acurat. En cas de no coneixer la distribució, podem anar fent proves intentant aproximar aquesta potència del renou, i mirar quina satisfar millor les nostres necessitats.



a)



b)

1.4. Restauració no lineal iterativa. Algoritme de Lucy-Richardson.

Fins ara, els mètodes exposats són lineals. A més, són directes en el sentit de que la solució s'obté via una aplicació del filtre, la qual cosa els fa fonamentals en la teoria de la restauració d'imatges, per la seva simplicitat. Tot i això, no és l'única metodologia existent.

Els filtres no lineals, obtenen millors resultats que els lineals, però amb l'inconvenient que poden tenir comportaments del tot impredivibles i són més costosos computacionalment parlant. D'entre tots els mètodes no lineals, destaca l'algoritme desenvolupat per Richardson el 1972 i per Lucy el 1974 independentment. Aquest sorgeix d'una formulació de maximització probabilística quan es modelitza una imatge amb

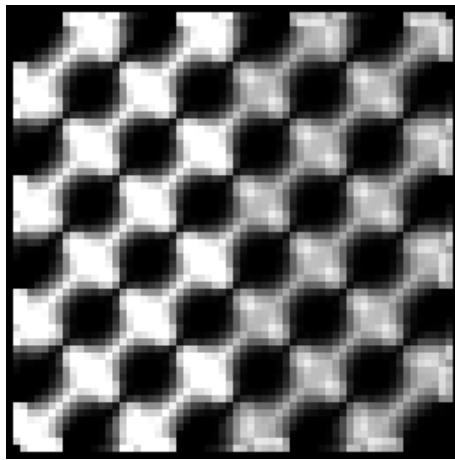
l'estadística de Poisson. La maximizació de la funció de probabilitat del model, ens dóna una equació que se satisfà quan el següent procés iteratiu convergeix:

$$\hat{f}_{k+1}(x, y) = \hat{f}_k(x, y) \left(h(-x, -y) * \frac{g(x, y)}{h(x, y) * \hat{f}_k(x, y)} \right)$$

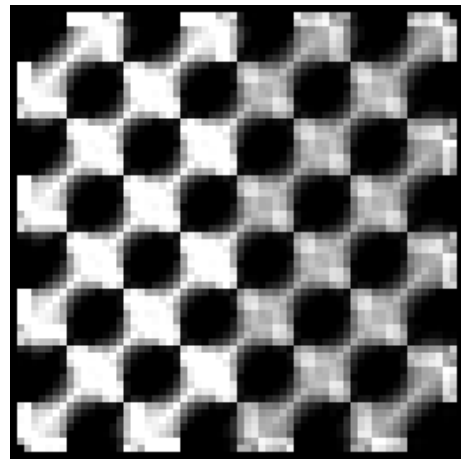
d'aquesta forma, si convergeix, tenim que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k(x, y) = f(x, y)$$

En el nostre cas, hem anat fent proves per $k = 5, 10, 20$ i 100 :



a)

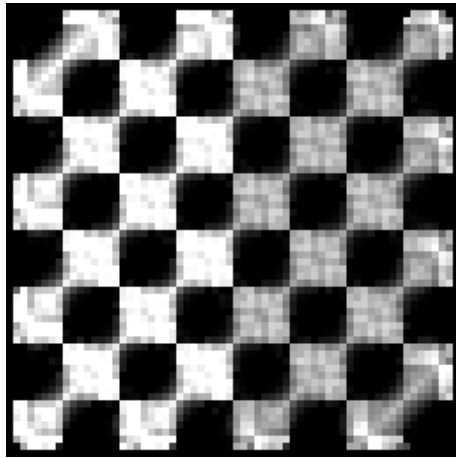


b)

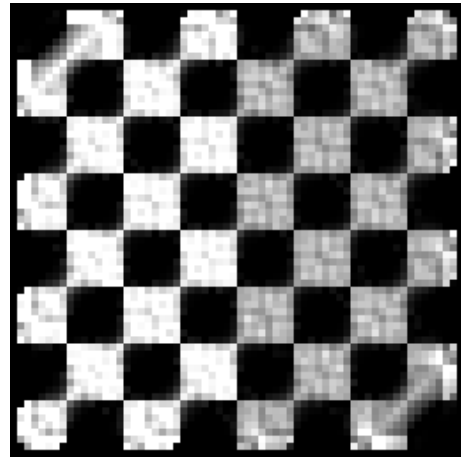
Amb poques iteracions, observam un efecte borrós en la imatge, per tant, hem d'anar fent més iteracions, millorant així el resultat, però esent un procés més costos computacionalment. Avui dia això no suposa massa problema per qualssevol pc (per $k = 100$ en uns dos segons, hem obtingut el resultat), però en els seus orígens, es descartà per realitzar restauració d'imatges.

Hem pogut veure al llarg d'aquestes seccions quatre tipus d'algoritmes:

- Algoritmes directes, que dividien la imatge alterada entre la transformada de Fourier de la funció de degradació, per tant, ens fa falta estimar dita funció de degradació. El resultat no és del tot bo, ja que el renou es pot amplificar degut a la divisió per nombres petits.
- Filtres de Wiener, que fan ús d'una informació addicional: es coneix la distribució exacta del renou. Aquests filtres poden ser útils, per exemple si coneixem



c)



d)

que, en un cert canal de transmissió sempre hi ha el mateix tipus de renou (per exemple, per enviar imatges satèl·lit a la Terra), sinó, fan ús d'una informació massa precisa com per ser aproximada.

- Restriccions sobre els mínims quadràtics, que minimitzen un funcional via la resolució d'una edp discreta, i redueixen tot el procés a aproximar un paràmetre γ de forma aproximada.
- Algoritme de Lucy-Richardson, un algoritme iteratiu, i que, aplicat un nombre suficient de vegades, dóna un resultat suficientment bo, amb la mateixa informació que fa falta per aplicar un filtre directe.

2. Imatge real

En aquesta secció, veurem els resultats d'aplicar els mètodes anteriors a una imatge real, la de la nina que podem veure en la següent fila d'imatges, figura a), juntament amb la seva imatge emborronada amb el mateix procés anterior, és a dir, una translació de mòdul 7 píxels i direcció superior dreta, figura b) i la imatge amb renou addicional, seguint una $N(0, 0.001)$, figura c).



a)

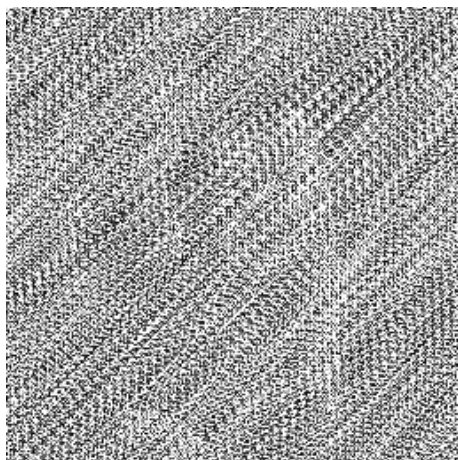


b)



c)

El filtrat directe, figura d) i el pseudofiltre, figura e) amb $\varepsilon = 0.1$ ens dona:



d)



e)

Com s'observa, el filtre directe, ha amplificat el renou de tal forma, que la imatge resulta gairebé irreconeixible, mentres que el pseudofiltre directe, ha reproduït el

resultat inicial de forma bastant fidel. Tot i això, s'observa l'efecte d'anell al voltant de la figura de la nina, degut a realitzar la transformada inversa d'una funció modificada, on, segurament no se satisfan del tot les condicions del Teorema de Shannon (efecte que es coneix amb el nom d'efecte de Gibbs).

Els filtrats de Wiener emprant el valor de la raó R entre les mitjanes del renou i la imatge, figura f) i emprant les funcions de correlació del renou i la imatge, figura g) ens dona:



f)



g)

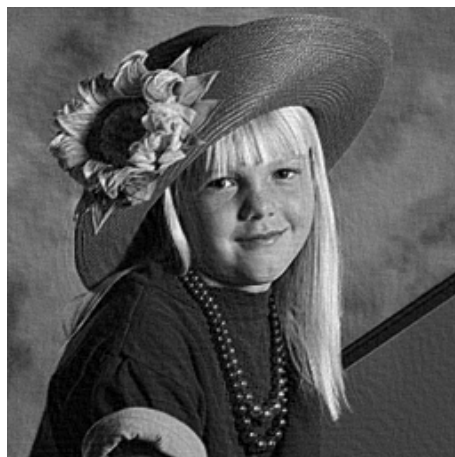
Notem que, en ambdós casos observam resultats més nítids que no pas en el cas anterior, i no és per més, ja que aquests dos són els mètodes que més informació necessiten per poder aplicar-se: distribució exacta, píxel a píxel del renou en la imatge.

Els filtratges resolent l'edp per obtenir els mínims quadràtics de la imatge, emprant com a valor de potència del renou 4, figura h) i 0.4, figura i) respectivament són els de les dues figures de la següent pàgina.

En aquestes figures, s'observa com, si aconseguim atinar amb el valor de potència ideal, el resultat és tant bo com el que ens donava el filtre de Wiener, i sense haver de disposar de tota la informació que feia falta per aquell.



h)



i)

Finalment, per aplicar l'algoritme de Lucy-Richarson, sols necessitam dir el nombre d'iteracions que són necessàries per fer la reconstrucció. Com abans amb la imatge sintètica, hem fet proves amb 5, 10, 20 i 100 iteracions, figures j) a m) respectivament.



j)



k)

Com major és el nombre d'iteracions, més acurat és el resultat, de fet, la darrera figura de totes, és tal volta de les més acurades de tota la secció, tot i que el resultat encara presenta algunes formes anellades al voltant de la figura (efecte de Gibbs).



1)



m)

Si feim una comparació de tots els mètodes, el que proporciona un resultat millor és el filtratge Wiener, amb el gran inconvenient que aquest filtre suposa: es necessita tota la informació de la distribució, píxel a píxel de la imatge per fer una reconstrucció fidedigna. Per tant, com que aquest filtratge serà, en la majoria de cosos impracticable, millor ens haurem de decantar per un dels altres tres.

Lucy-Richardson amb un nombre d'iteracions gran i la resolució dels mínims quadratics, acurant amb la potència del renou donen uns grans resultats: si s'ha de fer una reconstrucció automàtica, el segon resulta impracticable, mentres que si un fa una reconstrucció manual, amb el segon algoritme, es redueix una mica l'efecte de Gibbs de les imatges processades.

En tot cas, els filtres directes, són els que pitjors resultats ofereixen, tot i ser els més simples, i els que a un se li acudiria en primera instància.