PROBLEMES ESTADÍSTICA ENGINYERIA
CONTRAST D'HIPÒTESIS

1.- Siendo $\overline{x} = 63.5$ la media de una muestra aleatoria simple de tamaño 36 extraída de una población normal con $\sigma^2 = 144$, poner a prueba, con un nivel de significación $\alpha = 0.05$, la hipótesis nula $\mu = 60$ y decir si se rechaza en favor de la alternativa $\mu < 60$. Calcular el p-valor.

2.- Siendo $\overline{x} = 72.5$ la media de una muestra aleatoria simple de tamaño 100 extraída de una población normal con $\sigma^2 = 900$, poner a prueba, con un nivel de significación $\alpha = 0.10$, la hipótesis nula $\mu = 77$ y decir si se rechaza en favor de las hipótesis alternativas $\mu \neq 70$, $\mu > 70$, $\mu < 70$. Calcular el p-valor en cada caso.

3.- En un contraste bilateral, con $\alpha = 0.01$, ¿para qué valores de $\overline{X}$ rechazaríamos la hipótesis nula $H_0 : \mu = 70$, a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 64 extraída de una población normal con $\sigma^2 = 256$?

4.- El salario anual medio de 1600 personas, elegidas aleatoria e independientemente de cierta población de economistas con $\sigma = 20000$ euros, ha valido 45000 euros ¿Es compatible con este resultado la hipótesis nula, $H_0 : \mu = 43500$, suponiendo $\alpha = .01$? ¿Cuál es el intervalo de confianza para μ? Calcular el p-valor.

5.- Con los datos del ejercicio anterior , ¿son compatibles con el resultado obtenido los siguientes contrastes?:

a) $\begin{cases} H_0 : \mu = 44000 \\ H_1 : \mu > 44000 \end{cases}$

b) $\begin{cases} H_0 : \mu = 46250 \\ H_1 : \mu > 46250 \end{cases}$

6.- El peso medio de los paquetes de café puestos a la venta por la casa comercial CAFEINASA es supuestamente de 1 Kg. Para comprobar esta suposición, elegimos una muestra aleatoria simple de 100 paquetes y encontramos que su peso medio es de 0.978 Kg. y su desviación típica $s = 0.10$ kg. Siendo $\alpha = 0.05$ ¿es compatible este resultado con la hipótesis nula $H_0 : \mu = 1$ frente a $H_1 : \mu \neq 1$? ¿Lo es frente a $H_1 : \mu > 1$? Calcular el p-valor.

7.- El fabricante de la marca de tornillos FDE afirma que el diámetro medio de sus tornillos vale 20 mm. Para comprobar dicha afirmación, extraemos aleatoria e independientemente 16 tornillos , y vemos que la media de sus diámetros es 22 mm. y la desviación típica 4 mm. ¿Podemos aceptar la pretensión del fabricante, suponiendo $\alpha = 0.05$ y siendo el contraste bilateral? Calcular el p-valor.

8.- Para evitar basarse en su intuición los jefes de admisión de personal de las grandes empresas discriminan mediante un test diseñado por un gabinete de psicólogos, supuestamente especializado en selección de personal, a los aspirantes a trabajar en la empresa. La varianza del test de selección solía venir siendo 100. Aplicando un nuevo test a una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 31$, se obtiene que $S = 129$. Suponiendo que la población se distribuye normalmente, ¿es compatible la hipótesis nula $H_0 : \sigma^2 = 100$, frente a la alternativa $H_1 : \sigma^2 > 100$, con $\alpha = 0.01$? Calcular el p-valor.

9.- Una máquina produce cierto tipo de piezas mecánicas. El tiempo en producirlas se distribuye normalmente con varianza desconocida σ^2. Elegida una muestra aleatoria simple de 21 de dichas piezas $(x_1, \ldots, x_{21})$, se obtiene que $\overline{x} = 30$ y $\sum_{i=1}^{21} x_i^2 = 19100$. Comprobar si es compatible la hipótesis nula $H_0 : \sigma^2 = 22$ frente $H_1 : \sigma^2 \neq 22$, con $\alpha = 0.1$, y construir un intervalo de confianza del $(1 - \alpha)100\%$ para el verdadero valor de σ^2. Calcular el p-valor.

10.- A partir de las puntuaciones 15, 22, 20, 21, 19 ,23, construir el intervalo de confianza de σ^2 y decir si es compatible con estos resultado la hipótesis $H_0 : \sigma = 2$, siendo $\alpha = 0.01$ contra una H_1 bilateral. Decir si se utiliza alguna hipótesis adicional. Calcular el p-valor.

11.- Sabiendo que con $\hat{p} = 0.52$ ha sido rechazada $H_0 : p = 0.50$, al nivel de significación $\alpha = 0.05$, ¿cuál ha tenido que ser el tamaño mínimo de la muestra mediante la cual fue rechazada H_0

a) frente a $H_1 : p \neq 0.5$?

b) frente a $H_1 : p > 0.5$?

12.- Lanzamos una moneda al aire 10 veces consecutivas . ¿Con qué número de caras rechazaremos la hipótesis nula de que la moneda está bien balanceada, siendo $\alpha = 0.05$?

13.- Un fabricante de productos farmacéuticos tiene que mantener un estándar de impurezas en el proceso de producción de sus píldoras. Hasta ahora el número medio poblacional de impurezas es correcto pero está preocupado porque las impurezas en algunas de las partidas se salen del rango admitido de forma que provocan devoluciones y posibles reclamaciones por daños a la salud. El gabinete de control de calidad afirma que si la distribución de las impurezas es normal y que si el proceso de producción mantiene una varianza inferior a 1 no tendría que existir ningún problema pues las píldoras tendrían una concentración aceptable. Preocupado por esta tema la dirección encarga una prueba externa en la que se toma una muestra aleatoria de 100 de las partidas obteniéndose $S^2 = 1.1$. ¿Puede aceptar el director de la prueba externa que el proceso de producción cumple la recomendación del gabinete de control?

14.- Un IAP está preocupado por su estándar de calidad y quiere compararlo con el medio europeo. El estándar medio europeo dice que una empresa de este sector tiene una calidad aceptable si tiene un número de quejas que no excede del 3%.

Se sabe que la varianza de las quejas es 0.16. Examinando 64 clientes escogidos al azar se encuentra con que el porcentaje de quejas es del 3.07%. Calcular el p-valor.

a) Contrastar al nivel de significación del 5%, la hipótesis nula de que la media poblacional del porcentaje de quejas es del 3% frente a la alternativa de que es superior al 3%.

b) Hallar el p-valor del contraste.

c) Supongamos que la hipótesis alternativa fuese bilateral en lugar de unilateral(con hipótesis nula $H_0 : \mu = 3$). Deducir, sin hacer ningún cálculo, si el p-valor del contraste sería mayor, menor o igual que el del apartado anterior. Construir un gráfico para ilustrar el razonamiento.

d) En el contexto de este problema, explicar por qué una hipótesis alternativa unilateral es más apropiada que una bilateral.

15.- A partir de una muestra aleatoria se contrasta:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

y se acepta la hipótesis nula al nivel de significación del 5%.

a) ¿Implica esto necesariamente que μ_0 está contenido en el intervalo de confianza del 95% para μ?

b) Si la media muestral observada es mayor que μ_0, ¿implica necesariamente que μ_0 está contenido en el intervalo de confianza del 90% para μ?

16.- Una compañía que se dedica a la venta de franquicias afirma que, por término medio, los delegados obtienen un redimiendo del 10% en sus inversiones iniciales. Una muestra aleatoria de diez de estas franquicias presentaron los siguientes rendimientos el primer año de operación:

6.1, 9.2, 11.5, 8.6, 12.1, 3.9 , 8.4, 10.1, 9.4, 8.9

Asumiendo que los rendimientos poblacionales tienen distribución normal, contrastar la afirmación de la compañía.

17.- Una distribuidora de bebidas refrescantes afirma que una buena fotografía de tamaño real de un conocido actor, incrementará las ventas de un producto en los supermercados en una media de 50 cajas semanales. Para una muestra de 20 supermercados, el incremento medio fue de 41.3 cajas con una desviación típica de 12.2 cajas. Contrastar al nivel de significación $\alpha = 0.05$, la hipótesis nula de que la media poblacional del incremento en las ventas es al menos 50 cajas, indicando cualquier supuesto que se haga. Calcular el p-valor del contraste e interpretarlo.

Problemas de bondad de ajuste

18.- Una compañía de gas afirma, basándose en experiencias anteriores, que normalmente, al final del invierno, el 80% de las facturas han sido ya cobradas, un 10% se cobrará con pago aplazado a un mes, un 6% se cobrará a 2 meses y un 4% se cobrará a más de dos meses. Al final del invierno actual, la compañía selecciona una muestra aleatoria de 400 facturas, resultando que 287 de estas facturas cobradas, 49 a cobrar en un mes, 30 a cobrar en dos meses y 34 a cobrar en un periodo superior a dos meses. ¿Podemos concluir, a raíz de los resultados, que la experiencia de años anteriores se ha vuelto a repetir este invierno?

19.- El Rector de una Universidad opina que el 60% de los estudiantes consideran los cursos que realizan como muy útiles, el 20% como algo útiles y el 20% como nada útiles. Se toma una muestra aleatoria de 100 estudiantes, y se les pregunta sobre la utilidad de los cursos. Resultando que 68 estudiantes consideran que los cursos son muy útiles, 18 consideran que son poco útiles y 14 consideran que no son nada útiles. Contrastar la hipótesis nula de que los resultados obtenidos se corresponden con la opinión personal del Rector.

20.- Considerense los fondos de inversión ordenados en función de su rendimiento en el periodo 1995-99. Se realizó un seguimiento del rendimiento en los cinco años posteriores de una muestra aleatoria de 65 fondos entre el 25% más rentable del periodo 1995-99. En este segundo periodo se observó que 11 de los fondos de la muestra se hallan entre el 25% más rentable en este segundo periodo, 17 en el segundo 25%, 18 en el tercer 25% y 19 en el 25% menos rentable. Contrastar la hipótesis de que un fondo de inversión escogido azar del 25% más rentable en 1995-99 tenga la misma probabilidad de hallarse en cualquiera de las cuatro categorías de rendimiento en el periodo 2000-2004.

21.- A una muestra aleatoria de 502 consumidores se les preguntó la importancia que se le daba al precio a la hora de elegir un ordenador. Se les pidió que valoraran entre: “ninguna importancia”, “alguna importancia” y “principal importancia”. El número respectivo de respuestas en cada tipo fueron 169, 136 y 197. Contrastar la hipótesis nula de que la probabilidad de que un consumidor elegido al azar conteste cualquiera de las tres respuestas es la misma.

22.- Durante cien semanas se ha venido observando el número de veces a la semana que se ha fuera de servicio un servidor de una pequeña empresa de informática, presentándose los resultados de la siguiente tabla:

Núm. Fuera Servicio	0	1	2	3	4	5 o más
Núm. Semanas	10	24	32	23	6	5

El número medio de veces que quedo fuera de servicio por semana durante este periodo fue de 2.1. Contrastar la hipótesis nula de que la distribución de averías es una Poisson.

23.- A lo largo de 100 minutos, llegaron a una web de un periódico 100 internautas. La siguiente tabla muestra la frecuencia de llegadas a lo largo de ese intervalo de tiempo.

Núm. llegadas/min.	0	1	2	3	4 o más
Frec. Observada	10	26	35	24	5

Contrastar la hipótesis nula de que la distribución es Poisson.

KS test.

24.- Se quiere saber si el tiempo entre accesos, en una determinada franja horaria, a una cierta página web sigue una ley exponencial. Se dispone de la siguiente muestra de 25 intervalos entre tiempos de acceso:

$140.7, 13.7, 67.6, 7.8, 49.3, 128.5, 59.6, 234, 171.1, 205.8, 99.3, 199.8, 100.8, 13.5, 12, 33.9, 44.1, 12.3, 56.4, 9.4, 112.1, 8.2, 110.5, 79$

Resolver manualmente o utilizando R las siguientes cuestiones.

a) Contrastar la hipótesis de que la distribución sigue una ley exponencial de parámetro $\lambda = 100$, al nivel $\alpha = 0.05$.

b) Contrastar la hipótesis de que la distribución sigue una ley Poisson de parámetro $\lambda = 105$, al nivel $\alpha = 0.05$.

c) Contrastar la hipótesis de que la distribución sigue una ley Poisson de parámetro $\lambda = 110$, al nivel $\alpha = 0.05$.

d) Contrastar la hipótesis de que la distribución sigue una ley Poisson, estimando el parámetro parámetro partir de la muestra, al nivel $\alpha = 0.05$.

25.- Resolver las mismas cuestiones que en el problema anterior para la muestra (decir si se viola algunas de las condiciones del test KS, pero resolver igualmente el ejercicio):

$$69.9, 31.5, 130.2, 80.5, 236.1, 151.2, 74.8, 13.8, 54.5, 147.6$$

En esta ocasión realizar los cálculos manualmente.

26.- Nos hemos bajado un generador de números aleatorios normales de internet. Queremos contrastar si funciona correctamente. Para ello generamos una muestra de 10 números aleatorios de una normal estándar:

$$-1.18, -0.77, -0.59, -0.27, -0.12, 0.27, 0.29, 0.40, 1.27, 1.60$$

a) Contrastar si provienen de una normal estándar al nivel de significación $\alpha = 0.05$ mediante el test KS. Decir si ha violado alguna de las suposiciones de este test.

b) Contrastar la hipótesis de normalidad contra una distribución normal de media y varianza la estimadas a partir de la muestra.

27.- Con la muestra:

$$0.60, -1.42, 1.05, -0.14, 0.57, 0.11, -0.59, 1.11, -1.55, -1.41$$

Contrastar con un test KS si los datos provienen de una distribución uniforme en el intervalo $(-2, 2)$ al nivel $\alpha = 0.05$

Contrastes de dos parámetros.

Comparación de medias.

Los siguientes problemas tratan de contrastes de parámetros entre dos muestras. Para cada uno de los enunciados contratar contra las hipótesis unilaterales y bilaterales. Calcular también el intervalo de confianza para la diferencia o el cociente de los parámetros. Tomar finalmente la decisión más correcta. Calcular todos los test e intervalos de confianza para $\alpha = 0.05$. Calcular el p-valor en cada caso.

28.- Para comparar la producción media de dos procedimientos de fabricación de cierto elemento se toman dos muestras, una con los elementos fabricados durante 25 días con el primer método y otra con los producidos durante 16 días con el segundo método. Por experiencia se sabe que la varianza del primer procedimiento es $\sigma_1^2 = 12$ y al del segundo $\sigma_2^2 = 10$. De las muestras obtenemos que $\overline{X}_1 = 136$ para el primer procedimiento y $\overline{X}_2 = 128$ para el segundo.

29.- Estamos interesados en comparar la vida media, expresada en horas de dos tipos de componentes electrónicos. Para ello se toma una muestra de cada tipo y se obtiene:

Tipo	tamaño	$\overline{X}$	S
1	50	1260	20
2	100	1240	18

Suponer si es necesario las poblaciones aproximadamente normales.

30.- Para reducir la concentración de ácido úrico en la sangre se prueban dos drogas. La primera se aplica a un grupo de 8 pacientes y la segunda a un grupo de 10. Las disminuciones observadas en las concentraciones de ácido úrico de los distintos pacientes expresadas en tantos por cien de concentración después de aplicado el tratamiento son:

droga 1	20	12	16	18	13	22	15	20		
droga 2	17	14	12	10	15	13	9	19	20	11

Suponer que las reducciones de ácido úrico siguen una distribución normal son independientes y de igual varianza. Ídem pero suponiendo que las varianza son distintas.

31.- Para comparar la dureza media de dos tipos de aleaciones (tipo 1 y tipo 2) se hacen 5 pruebas de dureza con la de tipo 1 y 7 con la de tipo 2. Obteniéndose los resultados siguientes:

$$\overline{X}_1 = 18.2, \quad S_1 = 0.2 \text{ y}$$

$$\overline{X}_2 = 17.8; \quad S_2 = 0.5$$

Suponer que la población de las durezas es normal y que las desviaciones típicas no son iguales. Hacer lo mismo si las varianzas son distintas.

32.- Se encuestó a dos muestras independientes de internautas, una en Menorca y otra en Mallorca, sobre si utilizaban telefonía por intenet. La encuesta de Menorca tuvo un tamaño $n_1 = 500$ y 100 usuarios mientras que en Mallorca se encuestarron a $n_2 = 750$ y se obtuvo un resultado de 138 usuarios.

33.- Se pregunta a un grupo de 100 personas elegido al azar asiste a una conferencia sobre tecnologías de la comunicación. Antes de la conferencia se les pregunta si consideran a internet peligrosa, después de la conferencia se les vuelve a preguntar cual es su opinión. Los resultados fueron los siguientes:

		Después	
		Sí es peligrosa	No es peligrosa
Antes	Sí es peligrosa	50	30
	No es peligrosa	5	15

34.- Tenemos 10 ordenadores, deseamos optimizar su funcionamiento. Con este fin se piensa en ampliar su memoria. Se les pasa una prueba de rendimiento antes y después de ampliar la memoria. Los resultados fueron:

	Ordenador									
Muestra/Tiempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antes ampliación	98.70	100.48	103.75	114.41	97.82	91.13	85.42	96.8	107.76	112.94
Después ampliación	99.51	114.44	108.74	97.92	103.54	104.75	109.69	90.8	110.04	110.09

35.- Las siguientes muestras provienen de dos poblaciones independientes y supuestamente normales. Se desea comparar la igualdan de sus medias, pero antes debemos contrastar si podemos o no aceptar que sus varianza son iguales o distintas. Se pide hacer el contraste de las medias en el caso en que se se decida aceptar varianzas iguales o distintas al nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Contrastar tambien la hipótesis de igualdad de medias en el otro caso (es decir si se decide varianzas ditintas contrastar para iguales y viceversa).