

Processament Digital del Senyal

Problemes Tema 4

1. Calculeu la transformada de Fourier dels senyal següents:

- (a) $x[n] = u[n] - u[n - 6]$.
- (b) $x[n] = 2^n u[-n]$.
- (c) $x[n] = (\alpha^n \sin(\omega_0 n)) u[n]$ amb $|\alpha| < 1$.
- (d) $x[n] = |\alpha|^n \sin(\omega_0 n)$ amb $|\alpha| < 1$.

2. Determineu els senyals que tenen com a transformades de Fourier les següents (pels senyals definits a intervals finits, s'entén que s'extenen per periodicitat):

(a) $X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } |\omega| < \omega_0, \\ 1, & \text{si } \omega_0 \leq |\omega| < \pi. \end{cases}$

(b) $X(\omega) = \cos^2(\omega)$.

(c) $X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } |\omega| < \omega_1, \\ 1, & \text{si } \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2, \\ 0, & \text{si } |\omega| > \omega_2. \end{cases}$

(d) $X(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{\pi/8}\right) + \Pi\left(\frac{\omega}{3\pi/8}\right)$. on $\Pi(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

3. Sigui $x[n]$ un senyal amb transformada $X(\omega)$. Expresseu en termes de $X(\omega)$ les transformades dels senyals:

- (a) $x^*[n]$.
- (b) $x^*[-n]$.
- (c) $y[n] = x[n] - x[n - 1]$.
- (d) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$.
- (e) $x[2n + 1]$.
- (f) $x[-2n]$.

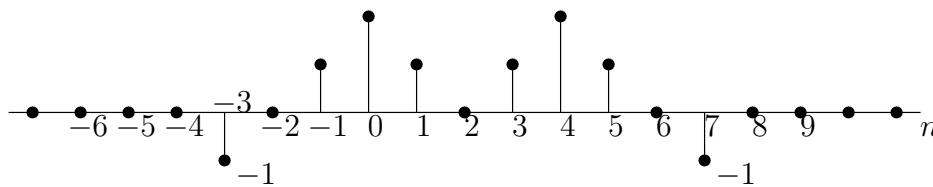
- (g) $x[n] * x[n-1]$.
 - (h) $e^{j\pi n/2} x[n+2]$.
 - (i) $x[n] \cos(3\pi n/10)$.
 - (j) $x[n] * x[-n]$.
4. Sigüin $x[n]$ i $y[n]$ senyals discrets amb transformada de Fourier $X(\omega)$ i $Y(\omega)$, respectivament.
- (a) Trobeu un senyal en funció de x i y que tingui per transformada el producte $X(\omega)Y^*(\omega)$.
 - (b) Proveu que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)Y^*(\omega) d\omega.$$

- (c) Determineu el valor de la suma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n} \frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}.$$

5. Sigüi $X(\omega)$ la transformada de Fourier del senyal $x[n]$ de la figura.



Resoleu les següents qüestions sense calcular explícitament $X(\omega)$.

- (a) Trobeu el valor que pren $X(\omega)$ per $\omega = 0$.
 - (b) Calculeu $\arg X(\omega)$.
 - (c) Avalueu $\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) d\omega$.
 - (d) Trobeu i dibueixeu el senyal que té per transformada de Fourier $\Re(X(\omega))$.
6. Sigüi $x[n]$ un senyal amb transformada $X(\omega)$ i fixem N un enter positiu. Trobeu la transformada dels senyals següents en funció de $X(\omega)$:

- (a)

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & \text{si } N \text{ divideix } n, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

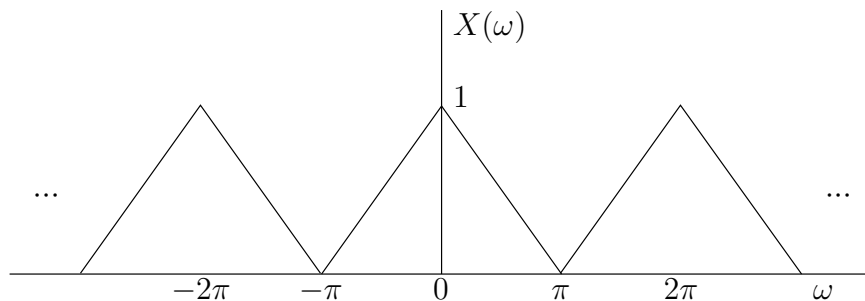
(b)

$$y[n] = x[Nn].$$

(c)

$$y[n] = \begin{cases} x[n/N] & \text{si } N \text{ divideix } n, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Dibueixeu aquestes transformades per al cas que $X(\omega)$ és com a la figura:



7. Un senyal discret

$$x[n] = \frac{1}{T} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

s'ha obtingut per mostreig d'un senyal analògic

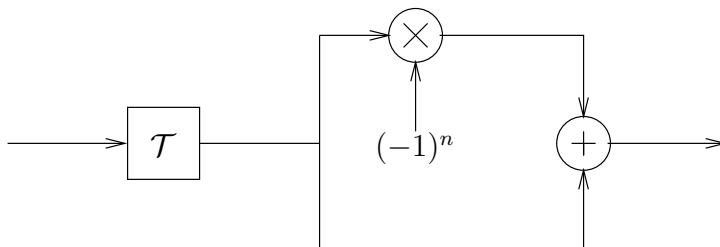
$$x_a(t) = \cos(\Omega_0 t)$$

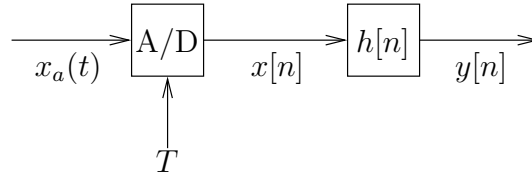
amb taxa de mostreig de 1000 mostres per segon (T denota el període de mostreig). Determineu els possibles valors de Ω_0 .

8. Pel sistema de la figura, doneu-ne la sortida si l'entrada és $\delta[n]$ i el sistema \mathcal{T} és un sistema pas baix ideal amb funció de transferència definida a l'interval $[-\pi, \pi]$ per

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < \pi/2, \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

i extesa per periodicitat a tot \mathbb{R} .





9. Considereu el següent sistema on es representa un procés de mostreig seguit d'un sistema discret.

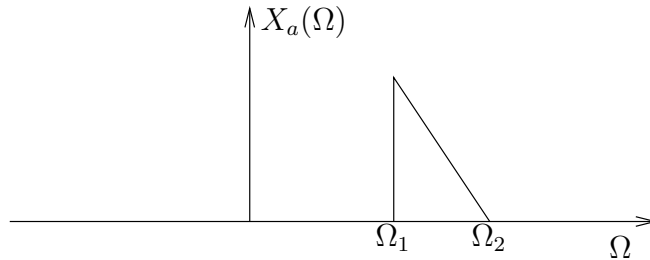
Es té, a més, que

$$X_a(\Omega) = 0, \quad \text{si } \Omega \geq 2\pi \times 10^4,$$

$$x[n] = x_a(nT)$$

$$y[n] = T \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

- (a) Doneu el màxim T possible si volem evitar l'aliasing.
 - (b) Determineu $h[n]$.
 - (c) Doneu $\lim_{n \rightarrow \infty} y[n]$ en termes de $X(\omega)$.
10. Un senyal analògic complex té la transformada de Fourier de la figura.

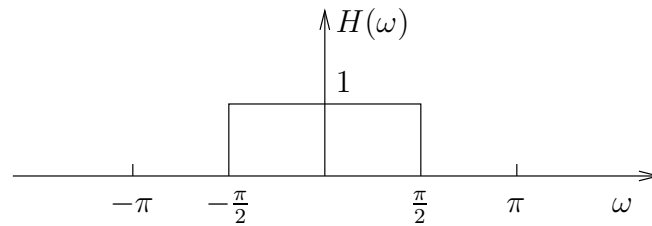
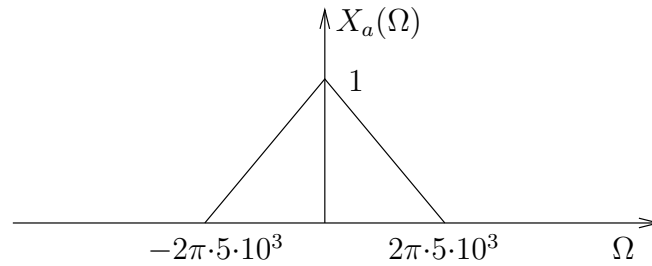
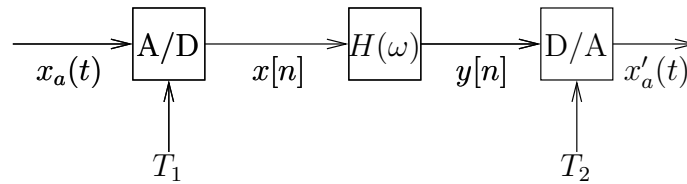


Aquest senyal es mostreja per obtenir $x[n] = x_a(nT)$.

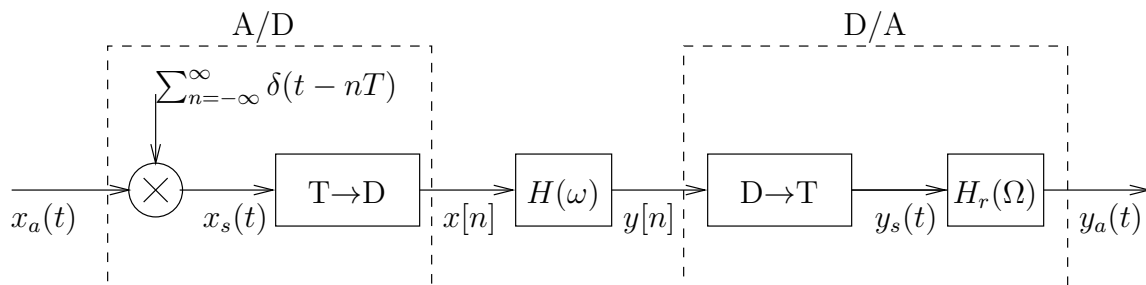
- (a) Dibuixeu $X(\omega)$ per a $T = \pi/\Omega_2$ i $T = 2\pi/\Omega_2$.
 - (b) Quin és el màxim T que es pot fer servir a l'hora de mostrejar de manera que no existeixi el fenomen d'aliasing? (és a dir, de manera que $x_a(t)$ es pugui recuperar a partir de $x[n]$).
 - (c) Repetiu els apartats anteriors pel senyal x'_a amb $X'_a(\Omega) = X_a(\Omega) + X_a(-\Omega)$.
11. Un senyal analògic $x_a(t)$ que no té components freqüencials per a $\Omega > \pi/T_1$ es mostreja amb període T_1 resultant un senyal discret $x[n]$. Amb $x[n]$ es reconstrueix un senyal analògic $x'_a(t)$ fent servir un període entre mostres T_2 . Pel cas general que $T_1 \neq T_2$, expresseu x'_a en funció de x_a . Hi ha diferències essencials entre els casos $T_1 < T_2$ i $T_1 > T_2$?

12. Considereu el sistema de la figura i dibuixeu $X'_a(\Omega)$ pels casos següents:

- (a) $1/T_1 = 1/T_2 = 10^4$.
- (b) $1/T_1 = 1/T_2 = 2 \cdot 10^4$.
- (c) $1/T_1 = 2 \cdot 10^4$, $1/T_2 = 10^4$.
- (d) $1/T_1 = 10^4$, $1/T_2 = 2 \cdot 10^4$.



13. Considereu el sistema següent, que representa un sistema complet de processament digital de senyal analògic:



On els blocs $T \rightarrow D$ i $D \rightarrow T$ simbolitzen, respectivament, el conversor de tren de deltas

a discret i viceversa. Els blocs venen donats per

$$H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{\pi/4}\right)$$

$$H_r(\Omega) = T\Pi\left(\frac{\Omega}{\pi/T}\right)$$

mentre que el senyal d'entrada té transformada

$$X_a(\Omega) = \Lambda\left(\frac{\Omega}{2\pi \cdot 10^4}\right)$$

- (a) Suposant que $1/T = 20$ kHz, dibuixeu $X_s(\Omega)$ i $X(\omega)$.
- (b) Determineu el conjunt de valors possibles de T de manera que el sistema global és equivalent a un sistema pas baix ideal amb funció de transferència

$$H_{eq}(\Omega) = \Pi\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right),$$

amb Ω_c a determinar.

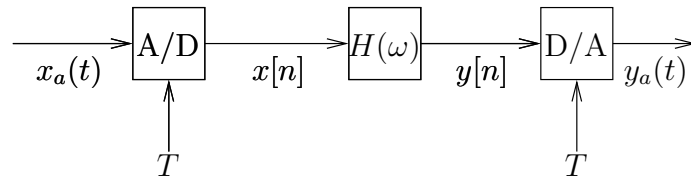
- (c) Pel conjunt trobat a l'apartat anterior, establiu la relació entre Ω_c i $1/T$.

Nota:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| < 1, \\ 0, & \text{altrament,} \end{cases},$$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{si } |t| < 1, \\ 0, & \text{altrament,} \end{cases},$$

14. Un model de sistema digital de processament de senyal analògic ve donat per l'esquema de la figura.



Suposant que el senyal d'entrada no té components freqüencials per a $\Omega > 4000\pi$, trobeu el major T possible i la resposta freqüencial del sistema discret, $H(\omega)$, de manera que

$$Y_a(\Omega) = \begin{cases} |\Omega|X_a(\Omega) & \text{si } 1000\pi < |\Omega| < 2000\pi, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$