Variable aleatòria Gaussiana bidimensional

Recordatori:

Una v.a. X es diu **Gaussiana** o **normal** amb paràmetres μ i σ^2 (i es denota $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$), si la seva funció de densitat és:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La gràfica d'aquesta funció s'anomena **campana de Gauss** (veure Figura 1).

Propietats:

- La funció de densitat de la v.a. Gaussiana és simètrica respecte a $x = \mu$ i la seva amplada és proporcional a σ. La gràfica d'aquesta funció s'anomena **campana de Gauss** (veure Figura 1-esquerra).
- Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ llavors $E(X) = \mu$ i $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.
- $\mathrm{N}(0, 1)$ rep el nom de **normal estàndard** i es denota per Z.
- Les funcions de distribució d'una normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i la normal esàndar $Z \sim N(0, 1)$ estan relacionades per la següent fòrmula:

  $$F_X(x) = F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

  Com que els valors de F_Z estan tabulats, gràcies a aquesta relació es pot conèixer el valor de F_X per a una v.a. normal amb paràmetres qualssevol.
- En problemes d'Enginyeria els valors de probabilitat de la v.a. Gaussiana es solen calcular utilitzant les funcions $\mathrm{erf}(x)$ i $\mathrm{erfc}(x)$, les quals es troben tabulades:

  $$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{2}\mathrm{erf}(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(\frac{\mu - x}{\sqrt{2}\sigma})$$

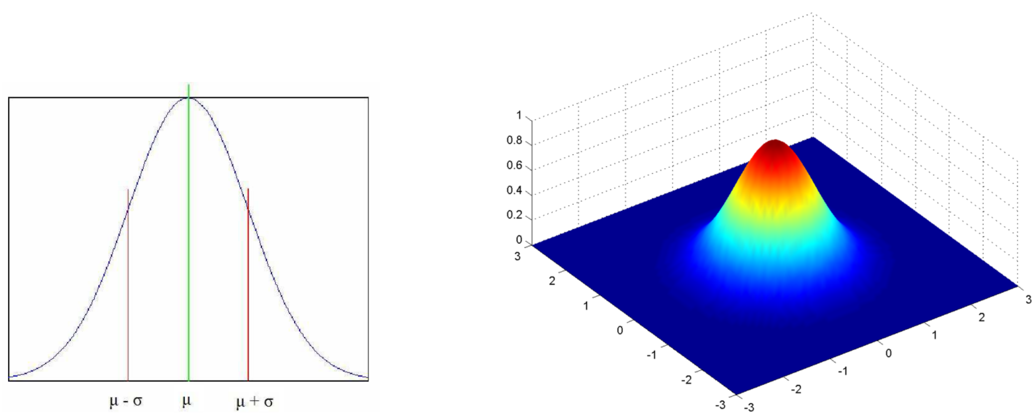

Figura 1: Esquerra: campana de Gauss. Dreta: campana de Gauss bidimensional (font: wikipedia).

En aquest tema:

dues variables aleatòries X i Y es diu que són **conjuntament Gaussianes** si la seva funció de densitat conjunta és:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left[(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X})^2+(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y})^2-2\rho_{XY}(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X})(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y})\right]}$$

La gràfica d'aquesta funció es mostra en la figura 1-dreta.

Propietats:

- Si (X,Y) són conjuntament Gaussianes amb l'anterior funció de densitat conjunta, llavors: $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$, $\mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$ i el coeficient de correlació de les variables és ρ_{XY}.
- Una manera més compacta d'escriure l'anterior funció de densitat és, amb notació matricial:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\det(K)}}\, e^{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-\mu_X & y-\mu_Y \end{pmatrix} K^{-1} \begin{pmatrix} x-\mu_X \\ y-\mu_Y \end{pmatrix}}$$

  on K és la matriu de covariàncies de X i Y: $K = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$.
- Si (X,Y) són conjuntament Gaussianes amb l'anterior funció de densitat conjunta, llavors les funcions de densitat marginals són també Gaussianes: $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ i $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.
- Si (X,Y) són conjuntament Gaussianes, llavors les funcions de densitat condicionals $f_{Y|X}(y|x)$ i $f_{X|Y}(x|y)$ són també Gaussianes.
- Si (X,Y) són conjuntament Gaussianes i $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, amb $\det(A) \neq 0$, llavors (U,V) són conjuntament Gaussianes.
- Si (X,Y) són conjuntament Gaussianes, llavors $Z = a_1 X + a_2 Y$ és una v.a. Gaussiana per a qualsevol valor de les constants a_1 i a_2.