Classes Pràctiques d'Aplicacions Lineals

Classe pràctica 3

Prob 4 Considerem l'aplicació lineal

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}_2[x] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ & a+bx+cx^2 & \mapsto & a-b+(2a+b)x+(c-2b)x^2 \end{array}$$

a) Calculau la seva matriu associada respecte a les bases inicial i final $\{1, x-1, x^2\}$ **2.5 pt.**

b) Trobau una base de $\operatorname{Ker} f$. **2.5 pt.**

c) Trobau una base de $\operatorname{Im} f$. **2 pt.**

d) Si $S = \langle 3, 1+2x \rangle$, trobau $f^{-1}(S)$. **3 pt.**

(Examen, juny 2008)

Solució classe pràctica 3

Prob 4 Considerem l'aplicació lineal

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ & a+bx+cx^2 & \mapsto & a-b+(2a+b)x+(c-2b)x^2 \end{array}$$

a) Calculau la seva matriu associada respecte a les bases inicial i final $\{1, x-1, x^2\}$ **2.5 pt.**

b) Trobau una base de $\operatorname{Ker} f$. **2.5 pt.**

c) Trobau una base de $\operatorname{Im} f$. **2 pt.**

d) Si $S = \langle 3, 1+2x \rangle$, trobau $f^{-1}(S)$. **3 pt.**

Solució:

a) Per calcular la matriu associada respecte a les bases inicial i final $\{1, x-1, x^2\}$, hem de trobar les coordenades de $f(1)$, $f(x-1)$ i $f(x^2)$ en aquesta mateixa base. Cerquem primer les imatges d'aquests elements,

$$f(1) = f(1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2) = 1 + 2x; \qquad f(-1+x) = -2 - x - 2x^2; \qquad f(x^2) = f(0 + 0 \cdot x + x^2) = x^2$$

cerquem ara les coordenades d'aquests polinomis en la base indicada

$$f(1) = 1 + 2x = t \cdot 1 + s(x-1) + rx^2 = t - s + sx + rx^2; \qquad \text{per tant } t = 3,\ s = 2,\ r = 0$$

$$f(-1+x) = -2 - x - 2x^2 = t \cdot 1 + s(x-1) + rx^2 = t - s + sx + rx^2; \qquad \text{per tant } t = -3,\ s = -1,\ r = -2$$

$$f(x^2) = x^2 = t \cdot 1 + s(x-1) + rx^2 = t - s + sx + rx^2; \qquad \text{per tant } t = 0,\ s = 0,\ r = 1$$

per tant, la matriu associada respecte a la base inicial i final $\{1, x-1, x^2\}$ és

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Establim l'isomorfisme $g : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ donat per $g(a + bx + cx^2) = (a, b, c)$. Per tant, l'aplicació f la podem expressar de la forma següent

$$\begin{array}{rccc} f': & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (a,b,c) & \mapsto & (a-b, 2a+b, c-2b) \end{array}$$

El nucli està format pels elements $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$f'(a, b, c) = (a - b, 2a + b, c - 2b) = 0$$

és a dir, tots els elements que satisfan el següent sistema homogeni:

$$\left.\begin{array}{rcl} a-b & = & 0 \\ 2a+b & = & 0 \\ c-2b & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolent el sistema pel mètode de Gauss tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

que és compatible i determinat, i resolent tenim $a = b = c = 0$, per tant,

$$\operatorname{Ker} f' = \{(0, 0, 0)\} \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Ker} f = \{0\}$$

aleshores no té base i dim Ker f=0.

c) Com dim Im f'=dim $\mathbb{R}^3$- dim Ker f'=3-0=3. Aleshores Im f'=$\mathbb{R}^3$ i per tant, Im $f = \mathbb{R}_2[x]$ i una base seria

$$\{1, x, x^2\}$$

d) $(a, b, c) \in f'^{-1}(S')$ si i només si $f'(a, b, c) \in S'$, és a dir, si i només si $(a - b, 2a + b, c - 2b) \in <(3, 0, 0), (1, 2, 0) >$ i això es compleix si i només si els tres vectors són linealment dependents. Aleshores s'ha de complir

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ a-b & 2a+b & c-2b \end{vmatrix} = 6(c - 2b) = 0$$

o el que és igual $c = 2b$. Per tant, els elements de $f'^{-1}(S')$ estaran formats pels vectors

$$(a, b, 2b) = (a, 0, 0) + (0, b, 2b) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 2)$$

i tendríem $f'^{-1}(S') = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 2)\rangle$ i com són linealment independents formen una base. Aleshores

$$f^{-1}(S) = \langle 1, x + 2x^2\rangle$$