Classe pràctica 3. Enunciat

Prob 5 La distància que hi ha entre dos "petits" defectes en un cable de fibra òptica segueix una distribució exponencial de mitjana 5 m.

a) Quina és la probabilitat que no hi hagi "petits" defectes en 10 m? **1 pt.**

b) Quina és la probabilitat que hi hagi dos petits defectes en un tram de 10 metres? **1 pt.**

c) Quina és la desviació estàndard de la distància entre "petits" defectes? **0.5 pt.**

d) Quina és la probabilitat de que el primer "petit" defecte es trobi a una distància entre 11 i 14 metres a partir del punt d'inici d'inspecció del cable? **1 pt.**

e) Quina és la probabilitat de que no hi hagi petits defectes en dos trams de 5 metres separats entre si? **1 pt.**

f) Donat que no es troben "petits" defectes en el primer tram de cinc metres, quina és la probabilitat de que no hi hagi en els següents 8 metres de cable? **1 pt.**

g) Agafam aleatòriament trams de cable de 10 m. Ens interessa trobar un tram de 10 metres amb 2 i només 2 "petits" defectes. Quants trams esperam mirar fins aconseguir-ho? **0.5 pt.**

(Control, curs 2007/08)

Prob 6 Sigui X una variable aleatòria contínua amb funció de densitat $f(x)$ donada per

$$f(x) = \begin{cases} k\,|1-|x|| & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

1. Trobau el valor de k. **1.5 pt.**
2. Calcula $P(-1 \leq x \leq 1)$ **1 pt.**
3. Calculau $E(X)$ **1.5 pt.**

(Control, curs 2007/08)

Classe pràctica 3. Solució

Prob 5 La distància que hi ha entre dos "petits" defectes en un cable de fibra òptica segueix una distribució exponencial de mitjana 5 m.

a) Quina és la probabilitat que no hi hagi "petits" defectes en 10 m? **1 pt.**

b) Quina és la probabilitat que hi hagi dos petits defectes en un tram de 10 metres? **1 pt.**

c) Quina és la desviació estàndard de la distància entre "petits" defectes? **0.5 pt.**

d) Quina és la probabilitat de que el primer "petit" defecte es trobi a una distància entre 11 i 14 metres a partir del punt d'inici d'inspecció del cable? **1 pt.**

e) Quina és la probabilitat de que no hi hagi petits defectes en dos trams de 5 metres separats entre si? **1 pt.**

f) Donat que no es troben "petits" defectes en el primer tram de cinc metres, quina és la probabilitat de que no hi hagi en els següents 8 metres de cable? **1 pt.**

g) Agafam aleatòriament trams de cable de 10 m. Ens interessa trobar un tram de 10 metres amb 2 i només 2 "petits" defectes. Quants trams esperam mirar fins aconseguir-ho? **0.5 pt.**

(Control, curs 2007/08)

Solució:

El distància mitjana és de 5 metres, per tant, $\lambda = \frac{1}{5}$ i la funció de densitat serà $f(x) = \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}$ per a $x \geq 0$

a)

$$P(X > 10) = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}dx = -e^{-\frac{1}{5}x}\Big]_{10}^{+\infty} = e^{-10/5} = 0,135335$$

b) Si hi ha, de mitjana, una "petit" defecte cada cinc metres, ens trobem amb una variable aleatòria Y que segueix una distribució de Poisson de mitjana 1 cada cinc metres o 2 cada 10 metres. Com ens demana informació en 10 metres, tenim una distribució $Po(2)$ i,

$$P(Y = 2) = \frac{e^{-2}2^2}{2!} = 0,270671$$

c) Tornam a considerar la variable aleatòria X. $\sigma_X = \frac{1}{\lambda} = 5$

d) Continuam amb la variable aleatòria X

$$P(11 < X < 14) = \int_{11}^{14} \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}dx = -e^{-\frac{1}{5}x}\Big]_{11}^{14} = 0,049993$$

e) Serien dos successos independents. Si A_i ="No tenir cap petit defecte en el tram i", ens demanen $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2)$. Ara bé,

$$P(A_1) = P(X > 5) = \int_{5}^{+\infty} \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}dx = -e^{-\frac{1}{5}x}\Big]_{5}^{+\infty} = e^{-1} = 0,367879$$

Per tant, $P(A_1 \cap A_2) = 0,367879^2 = 0,135335$.

f) Per la propietat de la pérdua de memòria, hem de cercar $P(X > 8)$

$$P(X > 8) = \int_8^{+\infty} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx = -e^{-\frac{1}{5}x} \Big]_8^{+\infty} = e^{-8/5} = 0,2018965$$

g) Sigui Z la variable aleatòria que ens dóna el nombre de trams de 10 metres que hem de mirar fins obtenir un èxit, on l'èxit seria trobar un amb 2 "petits" defectes. La variable aleatòria Z segueix una distribució geomètrica amb $p = 0,270671$ (segons hem vist a l'apartat b)): $Ge(0,270671)$. Ens demanan $E(Z) = \frac{1}{0,270671} = 3.7$. Per tant esperaríem mirar 4 trams (si es posa 3.7 també està bé)

Prob 6 Sigui X una variable aleatòria contínua amb funció de densitat $f(x)$ donada per

$$f(x) = \begin{cases} k\,|1-|x|| & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

1. Trobau el valor de k. **1.5 pt.**
2. Calcula $P(-1 \le x \le 1)$ **1 pt.**
3. Calculau $E(X)$ **1.5 pt.**

(Control, curs 2007/08)

Solució:

a) Llevem primer el valor absolut de la funció $1 - |x|$. Tendrem

$$f(x) = \begin{cases} |1+x| & \text{si } -2 \le x < 0 \\ |1-x| & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Llevam ara el valor absolut que ens queda. Per això tenim que $1 + x$ és negatiu per a $x < -1$ i positiu per als altres. De forma anàloga ho faríem per $1 - x$. Aleshores

$$f(x) = \begin{cases} k(-1-x) & \text{si } -2 \le x < -1 \\ k(1+x) & \text{si } -1 \le x < 0 \\ k(1-x) & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ k(-1+x) & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Per a que $f(x)$ sigui una funció de densitat tenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\,|1-|x||\,dx = 1$$

Desenvolupant tenim

$$\int_{-2}^{-1} k(-1-x)\,dx + \int_{-1}^{0} k(1+x)\,dx + \int_0^1 k(1-x)\,dx + \int_1^2 k(-1+x)\,dx = \frac{k}{2} + \frac{k}{2} + \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = 2k = 1$$

Per tant, $k = \frac{1}{2}$

b)

$$P(-1 \le x \le 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,|1-|x||\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\,(1+x)\,dx + \int_0^1 \frac{1}{2}\,(1-x)\,dx = \frac{1}{2}$$

c)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{1}{2}\,|1-|x||\,dx = \int_{-2}^{-1} x\,\frac{1}{2}\,(-1-x)\,dx + \int_{-1}^{0} x\,\frac{1}{2}\,(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,\frac{1}{2}\,(1-x)\,dx + \int_{1}^{2} x\,\frac{1}{2}\,(-1+x)\,dx =$$

$$= -\frac{5}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = 0$$