

FINAL DE FONAMENTS MATEMÀTICS II. TELEMÀTICA (JUNY 2006)
ÀLGEBRA

P1.- Demostrau, per inducció, que

2 pt.

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} t^n & nt^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)t^{n-2} \\ 0 & t^n & nt^{n-1} \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix}$$

P2.- Considerem les aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $f(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$ i $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $g(x, y, z) = (x + y, x + z)$.

- Defineix, de forma semblant a com hem definit f i g , l'aplicació $g \circ f$. **0,3 pt.**
- Trobau les matrius associades a f , g i $g \circ f$. Quina relació hi ha entre aquestes matrius? Comprovar-ho. **0,3 pt.**
- Cercau una base i la dimensió de $Im f$ i $Ker g$, i indica, només amb les dades d'aquest apartat, si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva. És g injectiva? Per què? **0,6 pt.**
- Tenint en compte només els rangs de les matrius associades a les aplicacions g i $g \circ f$, podries dir si aquestes són exhaustives, injectives o bijectives? Raonau la resposta i indica si ho són. **0,6 pt.**
- Donada la base $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 i $\{(1, 1), (1, -1)\}$ de \mathbb{R}^2 trobau la matriu associada a g respecte a aquestes base. Podries saber quin seria el rang d'aquesta matriu sense calcular-la? Raonau la resposta. **0,6 pt.**
- Aplicant la definició de vector propi, trobau algun vector propi i el seu valor propi corresponent, de l'endomorfisme f . **0,6 pt.**

P3.- Donada l'aplicació $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donada per

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -b \\ a - 2c & 2a - 2b - 2c + d \end{pmatrix}$$

- Demostrau que és un endomorfisme. **0,7 pt.**
- Trobau els valors propis. **0,8 pt.**
- Indica si és diagonalitzable i en aquest cas trobau una base formada per vectors propis. **1 pt.**

P4.- Considerem l'espai euclidià \mathbb{R}^4 , amb el producte escalar habitual. Sigui l'espai vectorial

$$H = \{(x, y, z, t) | 2x + y + 3z - t = 0, 3x + 2y - 4t = 0\}$$

- Calculau una base de H . **0,7 pt.**
- Calculau una base ortonormal de H . **0,8 pt.**
- Trobau una base de H^\perp . **0,8 pt.**
- Trobau les equacions que defineixen H^\perp . **0,7 pt.**

FINAL DE FONAMENTS MATEMÀTICS II. TELEMÀTICA (JUNY 2006)
PROBABILITAT

P5.- La probabilitat que el Barça guanyi la lliga de l'Estat Espanyol és de 0,4, que la guanyi el Madrid és 0,3. La probabilitat que el campió de la lliga guanyi la Champions League és de 0,45 si la guanya el Barça, de 0,5 si la guanya el Madrid (al Madrid sempre li ha anat millor la Champions) i 0,2 si la guanya un altre equip de l'Estat Espanyol.

- a) Quina és la probabilitat que guanyi la lliga un equip que no sigui ni el Barça ni el Madrid? **5 pt.**
- b) Quina és la probabilitat que guanyi la Champions League un equip de l'Estat Espanyol. **1,3 pt.**
- c) Si guanya la Champions un equip de l'Estat Espanyol, quina és la probabilitat que la lliga l'hagi guanyat el Barça? **1,2 pt.**

P6.- La funció de densitat d'una variable aleatòria X és

$$f_X(x) = \begin{cases} k|4 - x^2| & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{Altament} \end{cases}$$

- a) Trobau k . **0,5 pt.**
- b) Trobau la funció de distribució **1 pt.**
- c) Cercau $P(-2 < X < 1)$ **0,5 pt.**
- d) Cercau $P(X \geq 1)$ **0,5 pt.**
- e) Calculau $P(X < 1 | X > -2)$ **0,5 pt.**
- f) Calculau $E(X)$ **0,5 pt.**

P7.- Considerem la bonoloto que consisteix en triar entre els nombres 1 i 49, un determinat nombre d'ells, per encertar la combinació guanyadora en el sorteig corresponent, que està formada per 6 boles de les 49 que es treuen del bombo.

- a) Si un jugador selecciona sis nombres, quina és la probabilitat de que els sis nombres seleccionats coincideixin amb els sis nombres trets del bombo? **0,5 pt.**
- b) Quina és la probabilitat de que cinc dels 6 nombres seleccionats pel jugador apareguin entre els sis nombres sortits del bombo? **0,5 pt.**
- c) Si l'esperança de vida d'una persona és de 80 anys i es posa a jugar a partir dels 20, quina és la probabilitat que almenys una setmana encerti els sis nombres, si sempre selecciona 6 nombres? (Suposam que un any té 52 setmanes). **1 pt.**
- d) Si un jugador participa en la bonoloto cada setmana, quin és el nombre esperat d'anys (suposant que un any té 52 setmanes exactes) que han de passar per a que els sis nombres que ha triat el jugador siguin els sis que ha tret el bombo? **0,5 pt.**
- e) A més de treure sis boles, es treu una altra que és el complementari. Quina és la probabilitat d'encertar cinc resultats, més el complementari si selecciona 6 nombres? **0,5 pt.**
- f) Si triassim deu nombres, quina seria la probabilitat de haver triat els sis nombre guanyadors? **0,5 pt.**