Classe pràctica 2. Enunciat

Prob 1 Sobre $\mathbb{R}^3$ definim un producte escalar, que té per matriu associada respecte a la base canònica

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calculau l'expressió del producte escalar: $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle =$. **3 pt.**

b) Si $S = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$, calculau $S^\perp$. **3.5 pt.**

c) Trobau la projecció ortogonal de $(-1, 1, -1)$ sobre S. **3.5 pt.**

(Control, curs 08/09)

Classe pràctica 2. Solució

Prob 1 Sobre $\mathbb{R}^3$ definim un producte escalar, que té per matriu associada respecte a la base canònica

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calculau l'expressió del producte escalar: $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle =$. **3 pt.**

b) Si $S = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle$, calculau $S^\perp$. **3.5 pt.**

c) Trobau la projecció ortogonal de $(-1,1,-1)$ sobre S. **3.5 pt.**

(Control, curs 08/09)

Solució:

a)

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_1, y_3) \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + 2x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_3y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 + x_3y_2 + x_1y_3 + x_2y_3 + 2x_3y_3$$

b) Hem de cercar els elements (x, y, z) tal que:

$$\langle (a,b,c), (1,1,0) \rangle = 2a + b + c + a + 2b + c = 3a + 3b + 2c = 0$$

$$\langle (a,b,c), (0,1,1) \rangle = a + 2b + c + a + b + 2c = 2a + 3b + 3c = 0$$

resolent el sistema tenim $a = c$, $b = -\frac{5}{3}\,c$. Per tant, els elements de $S^\perp$ són de la forma

$$(c, -\frac{5}{3}\,c, c) = c(1, -\frac{5}{3}, 1)$$

Aleshores $S^\perp = \langle (1, -\frac{5}{3}, 1) \rangle = \langle (3, -5, 3) \rangle$

c) Per a això posarem el vector $(-1,1,-1)$ com a suma d'un element d'S i d'un element d'S'

$$(-1,1,-1) = x(1,1,0) + y(0,1,1) + z(3,-5,3) = (x + 3z, x + y - 5z, y + 3z)$$

que resolent tenim $x = -\frac{2}{11}$, $y = -\frac{2}{11}$, $z = -\frac{3}{11}$; i la projecció de $(-1,1,-1)$ sobre S serà

$$P_S(-1,1,-1) = -\frac{2}{11}\,(1,1,0) - \frac{2}{11}\,(0,1,1) = \Big(-\frac{2}{11}, -\frac{4}{11}, -\frac{2}{11}\Big)$$