1 Tema 1. Els Nombres Complexos

1.1 Introducció.

La manera habitual d'introduir el concepte de nombre complex sol ser indicant que amb els nombres reals no n'hi ha prou, que hi ha certes equacions de segon grau que no som capaços de resoldre només amb els nombres reals. Per exemple, l'equació

$$x^2 + 1 = 0$$

és irresoluble en $\mathbb{R}$.

Històricament, els nombres complexos apareixen en el Renaixement i no precisament per a resoldre equacions de segon grau sinó quan volem resoldre equacions de tercer grau.

La fórmula de Tartaglia (o de Scipione del Ferro) per a resoldre l'equació:

$$x^3 + px + q = 0$$

és:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}\ .$$

Si l'aplicam per a resoldre l'equació $x^3 - 7x + 6 = 0$ obtenim:

$$x = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{-100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{-100}{27}}}$$

Una solució s'obté observant que:

$\left(1 + \sqrt{\frac{-4}{3}}\right)^3 = -3 + \sqrt{\frac{-100}{27}}$ i també que $\left(1 - \sqrt{\frac{-4}{3}}\right)^3 = -3 - \sqrt{\frac{-100}{27}}$.

Aleshores:

$$x = 1 + \sqrt{\frac{-4}{3}} + 1 - \sqrt{\frac{-4}{3}} = 2\,.$$

De fet, $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$ es a dir, que les seves arrels són $-3, 1, 2$.

1.2 Els nombres complexos.

Definició 1.2.1. *Designarem per* $\mathbb{C} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ *el* ***conjunt del nombres complexos****, dotat amb dues operacions, suma* $+$ *i producte* $\cdot$*, definides de la forma següent:*

Donats $z_1 = (a_1, b_1),\ z_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$,

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2\ ,\ a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Definició 1.2.2. *Donats* $z = (a,b),\ w = (c,d)$ *dos nombres complexos, direm que són* ***iguals****,* $z = w$ *si* $a = c$ *i* $b = d$*.*

Definició 1.2.3. *Donat el nombre complex* $z = (a,b)$ *direm que* a *és la* ***part real*** *de* z *i* b *és la* ***part imaginària*** *de* z*. Ho denotam* $Re\ z$*,* $Im\ z$ *respectivament. Si la part real d'un nombre complex és zero direm que és* ***imaginari pur****.*

Teorema 1.2.1. *La terna* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *és un cos commutatiu. Es verifica que:*

- *L'element neutre de la suma és* $(0,0)$ *que denotarem per* 0*.*
- *L'element neutre del producte és* $(1,0)$ *que denotarem per* 1*.*
- *L'oposat respecte de la suma és: si* $z = (a,b)$*, aleshores,* $-z = (-a,-b)$*.*
- *L'invers respecte del producte és: si* $z = (a,b) \neq 0$*, llavors,*

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right).$$

Observació El conjunt $A = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ és un subcos de $\mathbb{C}$ que és isomorf a $\mathbb{R}$.

En efecte, es pot veure que la següent funció és un isomorfisme.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & A \\ & a & \longrightarrow & (a,0) \end{array}$$

Per això deim que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Definició 1.2.4. *El nombre complex* $(0,1)$ *s'anomena* ***unitat imaginària*** *i es denota per* i*.*

Notació Observem que, si $z = (a,b)$, aleshores

$$z = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + b\, i,$$

aquesta representació s'anomena la **forma binòmica** d'un nombre complex.

Definició 1.2.5. *Direm* ***conjugat*** *d'un nombre complex* $z = a + b\, i$ *al nombre complex* $\overline{z} = a - b\, i$.

Propietats Siguin $z, w \in \mathbb{C}$ llavors:

a) $\overline{\overline{z}} = z$.

b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$. *b')* $\overline{z_1 + \ldots + z_n} = \overline{z_1} + \ldots + \overline{z_n}$.

c) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. *c')* $\overline{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n}$.

d) $z \cdot \overline{z}$ és real i $z \cdot \overline{z} \geq 0$.

e) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$.

f) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ si $w \neq 0$.

Observació És fàcil veure que si $z \in \mathbb{C}$, $Re\ z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $Im\ z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Definició 1.2.6. *Direm* ***mòdul*** *o* ***valor absolut*** *d'un nombre complex* $z \in \mathbb{C}$ *al nombre real* $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Si $z = a + b\, i$, *resulta que* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propietats Si $z, w \in \mathbb{C}$ resulta:

a) $|\overline{z}| = |z|$.

b) $|z\, w| = |z|\, |w|$.

c) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$.

d) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

e) $|Re\ z| \leq |z|$, $|Im\ z| \leq |z|$.

f) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

1.3 Impossibilitat d'ordenar el cos del nombres complexos

Si intentam definir una relació d'ordre sobre $\mathbb{C}$, que sigui compatible amb les operacions suma i producte del cos i que estengui les propietats que se verifiquen en els reals, veiem que no és possible. En efecte, si per exemple suposam que existeix una relació d'ordre que compleix:

a) ordre total,

b) si $z_1 < z_2 \Longrightarrow z_1 + z < z_2 + z\,,$

c) Si $z_1 > 0$ i $z_2 > 0 \Longrightarrow z_1\, z_2 > 0\,,$

llavors resulta que:

Ja que $i \neq 0$ per a) sabem que o bé $i > 0$ o bé $i < 0$.

Suposem $i > 0 \Longrightarrow i \cdot i > 0 \Longrightarrow -1 > 0 \Longrightarrow -1 + 1 > 0 + 1 \Longrightarrow 0 > 1$.

Per altra banda, ja que $-1 > 0 \Longrightarrow (-1)(-1) > 0 \Longrightarrow 1 > 0$.

Per tant hem arribat a una contradicció.

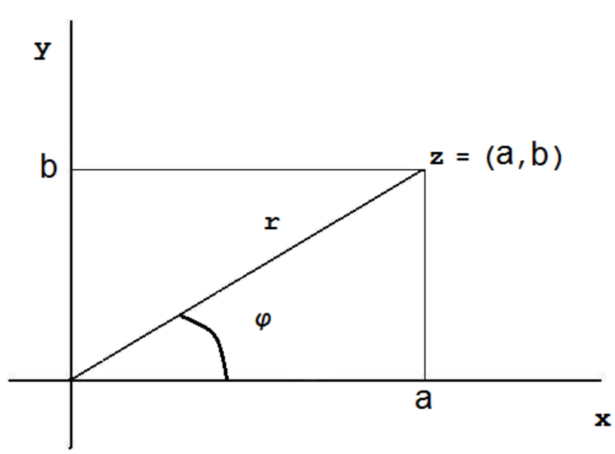
Un raonament anàleg demostra que si suposam $i < 0$ també arribam a una contradicció.

1.4 Representació geomètrica del nombres complexos

Tot nombre complex $z = (a, b)$ pot ser representat geomètricament per un punt d'un pla, anomenat **pla complex**, amb coordenades (a, b). L'eix de la primera coordenada s'anomena **eix real** i l'altre **eix imaginari**.

Si consideram coordenades polars tenim que si $z = (a, b) \neq 0\,,$ llavors

$$\begin{array}{l} a = r\, \cos\varphi \\ b = r\, \sin\varphi \end{array} \qquad \text{on} \quad r = |z|\,, \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$



Definició 1.4.1. *El nombre* φ *tal que* $0 \leq \varphi < 2\pi$ *s'anomena* ***argument principal*** *de* z *i es denota per* $Arg\ z$*. (També se diu* ***valor principal*** *de* $arg\ z$*).*

Definició 1.4.2. *Donat* $z = (a, b)$ *un nombre complex,* $z \neq 0$ *es pot escriure com*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$

expressió coneguda com la ***forma trigonomètrica*** *o* ***forma polar*** *de* z*.*

Notació A vegades també s'utilitza la representació mòdul argument r_φ.

Observació Si definim el conjunt d'arguments de z,

$$arg\ z = \{\theta \in \mathbb{R}\ :\ \theta = Arg\ z + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

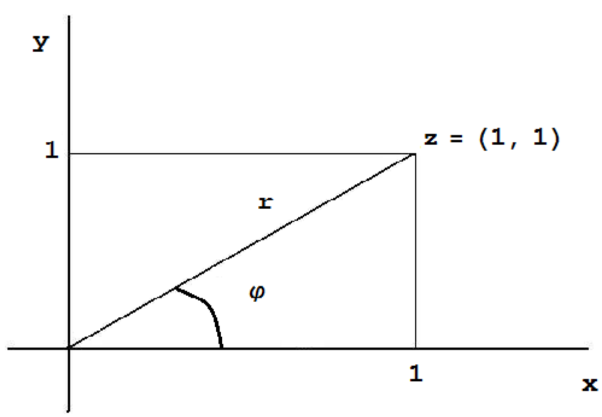
llavors z es pot escriure com:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{amb} \quad \theta \in arg\ z.$$

Exemple 1.4.1. *Sigui* $z = 1+i$ *aleshores,* $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ *i* $Arg\ z = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$

d'on la forma trigonomètrica seria: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

i el conjunt d'arguments: $arg\ z = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ :\ k \in\ \mathbb{Z}\right\}$.



1.5 Operacions en la forma trigonomètrica

Producte

Siguin $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tals que $z_j = |z_j|(\cos\theta_j + i\sin\theta_j)$, $\theta_j \in$ $arg\ z_j$, $j = 1, 2.$

llavors

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$$

$$= |z_1||z_2|((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)) =$$

$$|z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

per tant: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ i $\theta_1 + \theta_2 \in$ $arg\ (z_1 \cdot z_2)$.

Observació Pel que hem dit abans deduïm que: si $z_1 \cdot z_2 \neq 0$

$$arg\ (z_1 \cdot z_2) = arg\ z_1 + arg\ z_2 \quad \text{(igualtat entre conjunts).}$$

Divisió

Siguin $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ amb $z_2 \neq 0$, si deim $z = \dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}$ d'on $z_1 = z \cdot z_2$ i per les propietats del producte:

$$|z_1| = |z| \cdot |z_2| \Longrightarrow |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

i també

$$arg\ z_1 = arg\ z + arg\ z_2 \Longrightarrow arg\ z = arg\ z_1 - arg\ z_2 \quad \text{(igualtat entre conjunts).}$$

D'això es dedueix fàcilment que

$$\text{si } z = r(\cos\ \varphi + i\sin\varphi) \quad \text{llavors} \quad z^{-1} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\varphi) + i\ \sin(-\varphi)\right).$$

1.6 Forma exponencial d'un nombre complex

L'equació

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \sin\theta$$

que defineix $e^{i\theta}$ per a tot $\theta \in \mathbb{R}$ s'anomena **fórmula d'Euler**.

Si escrivim un nombre complex no nul en forma polar $z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$, aleshores la fórmula d'Euler permet expressar z més compactament en lo que s'anomena la **forma exponencial**:

$$z = r\,e^{i\theta}$$

Les expressions del producte, divisió i invers donades a la secció anterior se poden escriure de manera natural en forma exponencial.

Siguin $z_1, z_2 \neq 0$ que venen donats per $z_1 = r_1\ e^{i\theta_1}\,, \quad z_2 = r_2\ e^{i\theta_2}$, llavors:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\ e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\frac{1}{z_1} = z_1^{-1} = \frac{1}{r_1}\ e^{-i\theta_1}$$

Observació Evidentment, donat $z \neq 0, \quad z \in \mathbb{C}$, té infinites expressions de la forma exponencial.

$$z = r\ e^{i(\theta+2k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

1.7 Potències i arrels

Definició 1.7.1. *Donat* $z \in \mathbb{C}\,, \quad z \neq 0$, *definim:*

$$z^0 = 1\,.$$

$$z^{n+1} = z^n \cdot z\,, \qquad n \geq 0\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Proposició 1.7.1. *a) si* $z = r\,e^{i\theta} \Longrightarrow z^n = r^n\,e^{in\theta}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$

b) si $z \neq 0\,, \qquad z^n \cdot z^m = z^{n+m}\,, \qquad n, m \in \mathbb{Z}\,.$

c) $(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$

Observació En el cas de $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$, la propietat *a)* expressada en forma trigonomètrica queda:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

que es coneix com **fórmula de De Moivre**.

Per altra banda, si ens plantejam resoldre l'equació $w^n = z, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \neq 0$, és a dir, trobar les arrels n-èssimes de z, tenim el resultat següent:

Proposició 1.7.2. *Tot $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ admet n arrels n-èssimes diferents* $w_0, w_1, ..., w_{n-1}$. *Per calcular-les, si $|z| = r$ i $Arg\, z = \varphi$ aleshores*

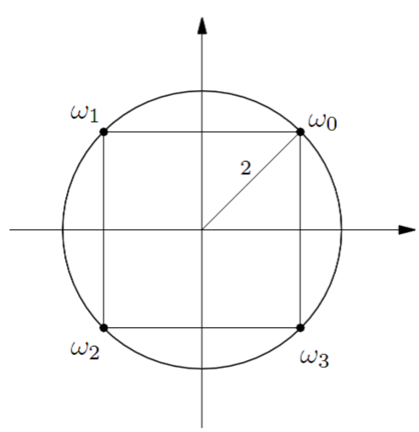
$$|w_k| = \sqrt[n]{r}\,, \quad arg\, w_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, ..., n-1\,.$$

Observació Si miram els arguments de les arrels n-èssimes, veim que les diferències dels arguments de cada dues arrels consecutives són sempre iguals; concretament, totes valen $\frac{2\pi}{n}$. Geomètricament, això vol dir que les n arrels n-èssimes es troben sobre una circumferència i formen els n vèrtexs d'un polígon regular de n costats centrat a l'origen.

Exemple 1.7.1. *Resoleu l'equació:* $z^4 = -16$.

Com que $|-16| = 16$ i $Arg\,(-16) = \pi$, tenim que $|w_k| = \sqrt[4]{16} = 2$ i que $arg\ w_k = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3$.

Per tant, $Arg\ w_0 = \dfrac{\pi}{4}\,, \quad Arg\ w_1 = \dfrac{3\pi}{4}\,, \quad Arg\ w_2 = \dfrac{5\pi}{4}\,, \quad Arg\ w_3 = \dfrac{7\pi}{4}$



1.8 Exponencial d'un nombre complex

Definició 1.8.1. *A tot nombre complex $z = a + bi$ s'associa un nou nombre complex, que anomenarem **exponencial de** z i indicarem per e^z, definit per*

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Observació Si $z \in \mathbb{R}$ ($Im\, z = 0$), aquesta definició proporciona l'exponencial en $\mathbb{R}$.

Proposició 1.8.1. *Es compleixen les propietats següents:*

a) *Si* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, *aleshores* $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\, e^{z_2}$

b) $e^z \neq 0$ *per a tot* $z \in \mathbb{C}$

c) $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$ *per a tot* $z \in \mathbb{C}$

d) *Per a tot* $b \in \mathbb{R}$, $e^{ib} = \cos b + i \sin b$

e) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

f) $|e^z| = e^a$, *on* $z = a + bi$

g) $Arg\, e^z = b\,(m\grave{o}dul 2\pi)$, *on* $z = a + bi$

h) $Re\, e^z = e^a\, \cos b$, $\quad Im\, e^z = e^a\, \sin b$