Problemes resolts Tema 3: processos estocàstics

Problema 1. Considerem el procés aleatori amb temps discret $X(n)$ definit a continuació. Es llança una moneda a l'aire i si surt cara $X(n) = 1$, en cas contrari $X(n) = -1$, per a tot n.

a) Dibuixau alguns camins de mostra del procés.

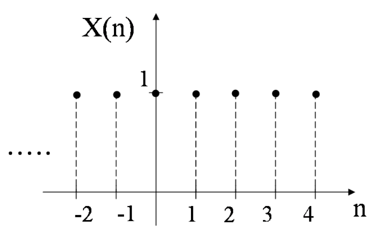
b) Calculau la funció de probabilitat de $X(n)$.

c) Calculau la funció de probabilitat conjunta de $X(n)$ i $X(n+k)$.

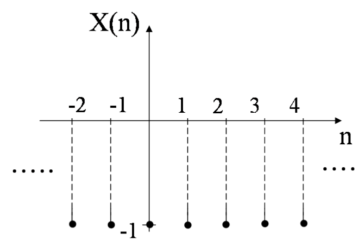
d) Calculau $\mu_X(n)$ y $C_X(n,m)$.

Solució:

a)



Realització del procés quan la moneda surt cara



Realització del procés quan la moneda surt creu

b)

$$P(X_n = x) = \begin{cases} 0 \qquad \text{si } x \notin \{-1,1\} \\ P(X_n = 1) = P(\text{cara}) = \frac{1}{2} \\ P(X_n = -1) = P(\text{creu}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

c)

$$P(X_n = x, X_{n+k} = y) = P(X_{n+k} = y | X_n = x) \cdot P(X_n = x) = \begin{cases} 0 \qquad \text{si } x \text{ ó } y \notin \{-1,1\} \\ P(X_{n+k} = 1 | X_n = -1) \cdot P(X_n = -1) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ P(X_{n+k} = -1 | X_n = 1) \cdot P(X_n = 1) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ P(X_{n+k} = 1 | X_n = 1) \cdot P(X_n = 1) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ P(X_{n+k} = -1 | X_n = -1) \cdot P(X_n = 1) = -1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

d)

$\mu_X(n) = E(X_n) = 1 \cdot P(X_n = 1) + (-1) \cdot P(X_n = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$$R_X(n,m) = E(X_n \cdot X_{n+m}) = \begin{cases} \text{si } m = n \\ \qquad E(X_n^2) = 1^2 \cdot P(X_n = 1) + (-1)^2 \cdot P(X_n = -1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \text{si } m \neq n \\ \qquad E(X_n \cdot X_{n+m}) = \begin{aligned}[t] & 1 \cdot 1 \cdot P(X_n = 1, X_{n+m} = 1) + \\ & 1 \cdot (-1) \cdot P(X_n = 1, X_{n+m} = -1) + \\ & (-1) \cdot 1 \cdot P(X_n = -1, X_{n+m} = 1) + \\ & (-1) \cdot (-1) \cdot P(X_n = -1, X_{n+m} = -1) = \\ & = \frac{1}{2} + 0 + 0 + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned} \end{cases}$$

$C_X(n,m) = R_X(n,m) - \mu_X(n) \cdot \mu_X(n+m) = 1 - 0 \cdot 0 = 1$

Problema 2. Considerem el procés aleatori en temps discret $X(n)$ definit a continuació. Es llança una moneda a l'aire; si surt cara $X(n) = (-1)^n$ i $X(n) = (-1)^{n+1}$ si surt creu, per a tot n.

a) Dibuixau alguns camins de mostra del procés.

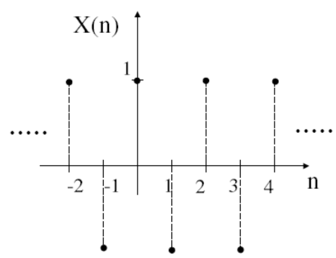
b) Calculau la funció de probabilitat de $X(n)$.

c) Calculau la funció de probabilitat conjunta de $X(n)$ i $X(n+k)$.

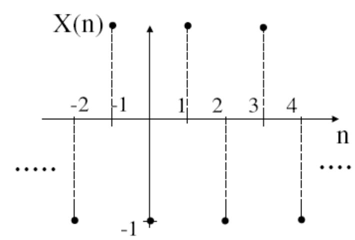
d) Calculau $\mu_X(n)$ y $C_X(n,m)$.

Solució:

a)



Realització del procés quan la moneda surt cara



Realització del procés quan la moneda surt creu

b)

$$P(X(n) = x) = 0 \qquad \text{si } x \notin \{-1, +1\}$$

$$P(X(n) = 1) = \begin{cases} \text{si } n \text{ parell} & P(cara) = 1/2 \\ \text{si } n \text{ imparell} & P(creu) = 1/2 \end{cases}$$

$$P(X(n) = -1) = \begin{cases} \text{si } n \text{ parell} & P(creu) = 1/2 \\ \text{si } n \text{ imparell} & P(cara) = 1/2 \end{cases}$$

En resum:

$$P(X(n) = x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \{-1, +1\} \\ \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \quad \text{o} \quad x = -1 \end{cases}$$

c)

$$P(X(n)=x, X(n+k)=y) = 0 \qquad \text{si } x,y \notin \{-1,+1\}$$

si $k=0$:

$$P(X(n)=x, X(n)=y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ P(X(n)=x) = 1/2 & \text{si } x = y \quad \text{ i } x \in \{-1,+1\} \end{cases}$$

si k parell :

$P(X(n)=1, X(n+k)=-1) = 0$

$P(X(n)=-1, X(n+k)=1) = 0$

$P(X(n)=1, X(n+k)=1) = P(X(n)=1) = 1/2$

$P(X(n)=-1, X(n+k)=-1) = P(X(n)=-1) = 1/2$

si k imparell :

$P(X(n)=-1, X(n+k)=-1) = 0$

$P(X(n)=1, X(n+k)=1) = 0$

$P(X(n)=1, X(n+k)=-1) = P(X(n)=1) = 1/2$

$P(X(n)=-1, X(n+k)=1) = P(X(n)=-1) = 1/2$

d)

$$\mu_X(n) = E(X(n)) = 1 \cdot P(X(n)=1) + (-1) \cdot P(X(n)=-1) = 1 \cdot \tfrac{1}{2} - 1 \cdot \tfrac{1}{2} = 0$$

$$R_X(n,m) = E(X(n) \cdot X(m)) =$$

$$= \begin{cases} \text{si } n=m & E(X(n)\cdot X(n)) = E((X(n)^2) = E(1) = 1 \\[2ex] \text{si } |m-n| \text{ parell} & \begin{aligned} E(X(n)\cdot X(m)) = \; & 1\cdot 1\cdot P(X(n)=1, X(m)=1) + \\ & +1\cdot(-1)\cdot P(X(n)=1, X(m)=-1) + \\ & (-1)\cdot 1\cdot P(X(n)=-1, X(m)=1) + \\ & (-1)\cdot(-1)\cdot P(X(n)=-1, X(m)=-1) = \tfrac{1}{2} - 0 - 0 + \tfrac{1}{2} = 1 \end{aligned} \\[2ex] \text{si } |m-n| \text{ imparell} & \begin{aligned} E(X(n)\cdot X(m)) = \; & 1\cdot 1\cdot P(X(n)=1, X(m)=1) + \\ & +1\cdot(-1)\cdot P(X(n)=1, X(m)=-1) + \\ & (-1)\cdot 1\cdot P(X(n)=-1, X(m)=1) + \\ & (-1)\cdot(-1)\cdot P(X(n)=-1, X(m)=-1) = 0 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + 0 = -1 \end{aligned} \end{cases}$$

$$C_X(n,m) = R_X(n,m) - \mu_X(n)\cdot\mu_X(m) = R_X(n,m) - 0\cdot 0 = \begin{cases} 1 & \text{si } |n-m| \text{ parell o } 0 \\[2ex] -1 & \text{si } |n-m| \text{ imparell} \end{cases}$$

Problema 3. Sigui $g(t)$ un pols rectangular a l'interval $(0,1)$, és a dir $g(t) = 1$ si $t \in (0,1)$ i zero a la resta de casos. Considerem el procés aleatori definit per $X(t) = Ag(t)$ on $A = \pm 1$ amb la mateixa probabilitat.

a) Calculau la funció de probabilitat de $X(t)$.

b) Calculau $\mu_X(t)$

c) Calculau la funció de probabilitat conjunta de $X(t)$ i $X(t+d)$, amb $d > 0$.

d) Calculau $C_X(t, t+d)$ amb $d > 0$.

Solució:

a)

Les dues possibles realitzacions del procés

$$P(X(t) = x) = 0 \qquad \text{si } x \notin \{-1, 0, 1\}$$

$$P(X(t) = 1) = P(Ag(t) = 1) = \begin{cases} \text{si } t \notin (0,1) & 0 \\ \\ \text{si } t \in (0,1) & P(A = 1) = 1/2 \end{cases}$$

$$P(X(t) = -1) = P(Ag(t) = -1) = \begin{cases} \text{si } t \notin (0,1) & 0 \\ \\ \text{si } t \in (0,1) & P(A = -1) = 1/2 \end{cases}$$

$$P(X(t) = 0) = P(Ag(t) = 0) = \begin{cases} \text{si } t \notin (0,1) & 1 \\ \\ \text{si } t \in (0,1) & P(A = 0) = 0 \end{cases}$$

b)

$$\mu_X(t) = E(X(t)) = (-1) \cdot P(X(t) = -1) + 0 \cdot P(X(t) = 0) + 1 \cdot P(X(t) = 1) = \begin{cases} \text{si } t \notin (0,1) & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \\ \\ \text{si } t \in (0,1) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

Per tant, $\mu_X(t) = 0 \ \forall t$.

c)

$$P(X(t)=x, X(t+d)=y) = 0 \qquad \text{si } x, y \notin \{-1,0,1\}$$

si $t \notin (0,1)$ i $t+d \notin (0,1)$:
$$P(X(t)=x, X(t+d)=y) = 0 \qquad \text{si } x \neq 0 \quad \text{o} \quad y \neq 0$$

$$P(X(t)=0, X(t+d)=0) = 1$$

si $t \in (0,1)$ i $t+d \notin (0,1)$:
$$P(X(t)=x, X(t+d)=y) = 0 \qquad \text{si } x = 0 \quad \text{o} \quad y \neq 0$$

$$P(X(t)=1, X(t+d)=0) = P(X(t)=1) = 1/2$$

$$P(X(t)=-1, X(t+d)=0) = P(X(t)=-1) = 1/2$$

si $t \notin (0,1)$ i $t+d \in (0,1)$:
$$P(X(t)=x, X(t+d)=y) = 0 \qquad \text{si } x \neq 0 \quad \text{o} \quad y = 0$$

$$P(X(t)=0, X(t+d)=1) = P(X(t+d)=1) = 1/2$$

$$P(X(t)=0, X(t+d)=-1) = P(X(t+d)=-1) = 1/2$$

si $t \in (0,1)$ i $t+d \in (0,1)$:
$$P(X(t)=x, X(t+d)=y) = 0 \qquad \text{si } x = 0 \quad \text{o} \quad y = 0$$

$$P(X(t)=1, X(t+d)=-1) = 0$$

$$P(X(t)=-1, X(t+d)=1) = 0$$

$$P(X(t)=1, X(t+d)=1) = P(X(t)=1) = 1/2$$

$$P(X(t)=-1, X(t+d)=-1) = P(X(t)=-1) = 1/2$$

d)

$$\begin{aligned}
C_X(t,t+d) &= R_X(t,t+d) - \mu(t)\mu(t+d) = R_X(t,t+d) - 0\cdot 0 = R_X(t,t+d) = E(X(t)\cdot X(t+d)) = \\
&= 0\cdot 0\cdot P(X(t)=0, X(t+d)=0) + 0\cdot 1\cdot P(X(t)=0, X(t+d)=1) + \\
&+ 0\cdot(-1)\cdot P(X(t)=0, X(t+d)=-1) + 1\cdot 0\cdot P(X(t)=1, X(t+d)=0) + \\
&+ 1\cdot 1\cdot P(X(t)=1, X(t+d)=1) + 1\cdot(-1)\cdot P(X(t)=1, X(t+d)=-1) + \\
&+ (-1)\cdot 0\cdot P(X(t)=-1, X(t+d)=0) + (-1)\cdot 1\cdot P(X(t)=-1, X(t+d)=1) + \\
&+ (-1)\cdot(-1)\cdot P(X(t)=-1, X(t+d)=-1) = \\
&= P(X(t)=1, X(t+d)=1) - P(X(t)=1, X(t+d)=-1) - \\
&- P(X(t)=-1, X(t+d)=1) + P(X(t)=-1, X(t+d)=-1) = \\
&= \begin{cases} \text{si } t \in (0,1) \quad \text{i} \quad t+d \in (0,1) & \frac{1}{2} - 0 + 0 + \frac{1}{2} = 1 \\ \text{en cas contrari} & 0 - 0 - 0 + 0 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Problema 4. Un procés aleatori està definit per l'equació $Y(t) = g(t-T)$ on $g(t)$ és el pols del problema anterior ($g(t) = 1$ si $t \in (0,1)$ i zero sinó) i T és una v.a. amb distribució uniforme a l'interval unitat.

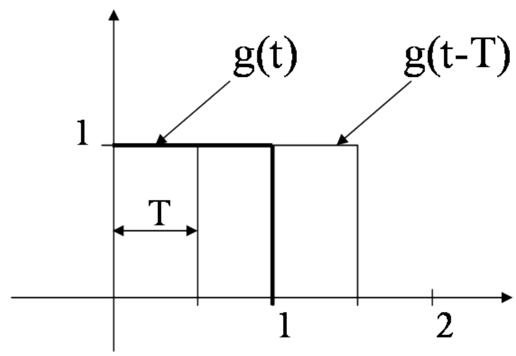
a) Calculau la funció de probabilitat de $Y(t)$.

b) Trobau la funció $\mu_Y(t)$

c) Calculau $C_Y(0.5, 0.75)$ y $C_Y(1.2, 1.5)$.

Solució:

a) La següent figura mostra la forma de $g(t)$ i de $g(t-T)$, on $0 < T < 1$, ja que $T \sim \mathcal{U}(0,1)$. A més,
$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$$



$Y(t) \in \{0,1\}$, per tant és una v.a. discreta.

$$P(Y(t) = y) \quad = 0 \text{ si } y \notin \{0,1\}$$

$$P(Y(t) = 1) \quad = P(g(t-T) = 1) = P(0 < t - T < 1)) = P(t-1 < T < t) = F_T(t) - F_T(t-1) =$$

$$= \begin{cases} \text{si } t < 0 & (\Rightarrow\ F_T(t) = F_T(t-1) = 0) & 0 - 0 = 0 \\ \text{si } 0 \le t < 1 & (\Rightarrow\ F_T(t) = t\,,\, F_T(t-1) = 0) & t - 0 = t \\ \text{si } 1 \le t < 2 & (\Rightarrow\ F_T(t) = 1\,,\, F_T(t-1) = t-1) & 1 - (t-1) = 2 - t \\ \text{si } t \ge 2 & (\Rightarrow\ F_T(t) = F_T(t-1) = 1) & 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$P(Y(t) = 0) \quad = 1 - P(Y(t) = 1) =$$

$$= \begin{cases} \text{si } t < 0 & 1 - 0 = 1 \\ \text{si } 0 \le t < 1 & 1 - t \\ \text{si } 1 \le t < 2 & 1 - (2-t) = t - 1 \\ \text{si } t \ge 2 & 1 - 0 = 1 \end{cases}$$

b)

$$\mu_Y(t) = 0 \cdot P(Y(t) = 0) + 1 \cdot P(Y(t) = 1) = P(Y(t) = 1) = \begin{cases} \text{si } t < 0 & 0 \\ \text{si } 0 \le t < 1 & t \\ \text{si } 1 \le t < 2 & 2 - t \\ \text{si } t \ge 2 & 0 \end{cases}$$

c)

$C_Y(t_1, t_2) = R_Y(t_1, t_2) - \mu_Y(t_1) \cdot \mu_Y(t_2)$

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) = \quad & 0 \cdot 0 \cdot P(Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 0) + 0 \cdot 1 \cdot P(Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 1) + \\ & +1 \cdot 0 \cdot P(Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 0) + 1 \cdot 1 \cdot P(Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 1) = P(Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 1) \end{aligned}$$

Cas $t_1 = 0.5$, $t_2 = 0.75$:

$P(Y(0.5) = 1, Y(0.75) = 1) = P(T < 0.5) = F_T(0.5) = 0.5$

$\mu_Y(0.5) = 0.5$

$\mu_Y(0.75) = 0.75$

$C_Y(0.5, 0.75) = 0.5 - 0.5 \cdot 0.75 = 0.125$

Cas $t_1 = 1.2$, $t_2 = 1.5$:

$P(Y(1.2) = 1, Y(1.5) = 1) = P(T > 0.5) = 1 - P(T \leq 0.5) = 1 - F_T(0.5) = 1 - 0.5 = 0.5$

$\mu_Y(1.2) = 2 - 1.2 = 0.8$

$\mu_Y(1.5) = 2 - 1.5 = 0.5$

$C_Y(0.5, 0.75) = 0.5 - 0.8 \cdot 0.5 = 0.1$

Problema 5. Sigui $Y(t) = g(t-T)$ el procés del problema anterior però amb T una v.a. exponencial de paràmetre λ.

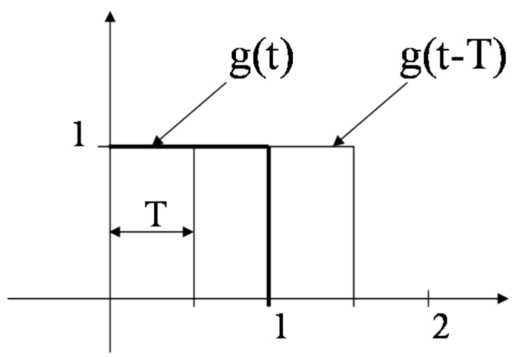
a) Calculau la funció de probabilitat de $Y(t)$.

b) Trobau la funció $\mu_Y(t)$

c) Calculau $C_Y(0.2, 1.2)$ y $C_Y(1.5, 1.5)$.

Solució:

a) La següent figura mostra la forma de $g(t)$ i de $g(t-T)$, on $T > 0$. A més, com que $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, $F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$



$Y(t) \in \{0, 1\}$, per tant és una v.a. discreta.

$$P(Y(t) = y) \quad = 0 \text{ si } y \notin \{0, 1\}$$

$$P(Y(t) = 1) \quad = P(g(t-T) = 1) = P(0 < t - T < 1)) = P(t - 1 < T < t) = F_T(t) - F_T(t-1) =$$

$$= \begin{cases} \text{si } t \leq 0 & (\Rightarrow \ F_T(t) = F_T(t-1) = 0) & 0 - 0 = 0 \\ \text{si } 0 < t \leq 1 & (\Rightarrow \ F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}, F_T(t-1) = 0) & 1 - e^{-\lambda t} - 0 = 1 - e^{-\lambda t} \\ \text{si } t > 1 & (\Rightarrow \ F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}, F_T(t-1) = 1 - e^{-\lambda(t-1)}) & e^{-\lambda t}(e^{\lambda} - 1) \end{cases}$$

$$P(Y(t) = 0) \quad = 1 - P(Y(t) = 1) =$$

$$= \begin{cases} \text{si } t \leq 0 & 1 - 0 = 1 \\ \text{si } 0 < t \leq 1 & 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} \\ \text{si } t > 1 & 1 - e^{-\lambda t}(e^{\lambda} - 1) \end{cases}$$

b)

$$\mu_Y(t) = 0 \cdot P(Y(t) = 0) + 1 \cdot P(Y(t) = 1) = P(Y(t) = 1) = \begin{cases} \text{si } t \leq 0 & 0 \\ \text{si } 0 < t \leq 1 & 1 - e^{-\lambda t} \\ \text{si } t > 1 & e^{-\lambda t}(e^{\lambda} - 1) \end{cases}$$

c)

$C_Y(t_1, t_2) = R_Y(t_1, t_2) - \mu_Y(t_1) \cdot \mu_Y(t_2)$

$$R_Y(t_1, t_2) = \quad 0 \cdot 0 \cdot P(Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 0) + 0 \cdot 1 \cdot P(Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 1) +$$

$$+ 1 \cdot 0 \cdot P(Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 0) + 1 \cdot 1 \cdot P(Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 1) = P(Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 1)$$

Cas $t_1 = 0.2$, $t_2 = 1.2$:

$P(Y(0.2) = 1, Y(1.2) = 1) = P((0 < T < 0.2) \cap (0.2 < T < 1.2)) = P(\emptyset) = 0$

$\mu_Y(0.2) = 1 - e^{-0.2\lambda}$

$\mu_Y(1.2) = e^{-1.2\lambda}(e^{\lambda} - 1)$

$C_Y(0.2, 1.2) = 0 - (1 - e^{-0.2\lambda}) \cdot e^{-1.2\lambda}(e^{\lambda} - 1) = (e^{-0.2\lambda} - 1)e^{-1.2\lambda}(e^{\lambda} - 1)$

Cas $t_1 = 1.5$, $t_2 = 1.5$:

$P(Y(1.5) = 1, Y(1.5) = 1) = P(0.5 < T < 1.5) = F_T(1.5) - F_T(0.5) = (1 - e^{-1.5\lambda}) - (1 - e^{-0.5\lambda}) =$
$= e^{-0.5\lambda} - e^{-1.5\lambda}$

$\mu_Y(1.5) = e^{-1.5\lambda}(e^{\lambda} - 1)$

$C_Y(1.5, 1.5) = e^{-0.5\lambda} - e^{-1.5\lambda} - (e^{-1.5\lambda}(e^{\lambda} - 1))^2$

Problema 6. Sigui $Z(t) = At + B$ on A i B són v.a. independents.

a) Calculau la funció de densitat de $Z(t)$.

b) Trobau $\mu_Z(t)$ i $C_Z(t_1, t_2)$.

Solució:

b)

$$\mu_Z(t) = E(Z(t)) = E(At + B) = tE(A) + E(B)$$

$$\begin{aligned}
R_Z(t_1, t_2) &= E(Z(t_1) \cdot Z(t_2)) = E((At_1 + B) \cdot (At_2 + B)) = \\
&= E(A^2 t_1 t_2 + AB(t_1 + t_2) + B^2) = t_1 t_2 E(A^2) + (t_1 + t_2)E(AB) + E(B^2) \\
C_Z(t_1, t_2) &= R_Z(t_1, t_2) - \mu_Z(t_1)\mu_Z(t_2) = \\
&= t_1 t_2 E(A^2) + (t_1 + t_2)E(AB) + E(B^2) - (t_1 E(A) + E(B)) \cdot (t_2 E(A) + E(B)) = \\
&= t_1 t_2 (E(A^2) - E(A)^2) + (t_1 + t_2)(E(A)E(B) - E(A)E(B)) + (E(B^2) - E(B)^2) = \\
&= t_1 t_2 \mathrm{Var}(A) + \mathrm{Var}(B)
\end{aligned}$$

On s'ha aplicat que $E(AB) = E(A)E(B)$, ja que les v.a. són independents.

Problema 7. Trobau una expressió de $E((X(t_2) - X(t_1))^2)$ en termes de la funció d'autocorrelació.

Solució:

$$\begin{aligned} E((X(t_2) - X(t_1))^2) &= E(X(t_2)^2 - 2X(t_1)X(t_2) + x(t_1)^2) = E(X(t_2)^2) - 2E(X(t_1)X(t_2)) + E(x(t_1)^2) = \\ &= R_X(t_1, t_1) + R_X(t_2, t_2) - 2R_X(t_1, t_2) \end{aligned}$$

Problema 8. ¿Un procés ortogonal és incorrelat? ¿Un procés incorrelat és ortogonal?

Solució:

Recordem que:
$X(t)$ i $Y(t)$ ortogonals $\Longleftrightarrow R_{XY}(t_1, t_2) = 0 \qquad \forall t_1, t_2$
$X(t)$ i $Y(t)$ incorrelats $\Longleftrightarrow C_{XY}(t_1, t_2) = 0 \qquad \forall t_1, t_2$

ortogonal $\Longleftrightarrow$ incorrelat? NO
si $R_{XY}(t_1, t_2) = 0$, llavors $C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \cdot \mu_Y(t_2) = \mu_X(t_1) \cdot \mu_Y(t_2) \neq 0$ (en general)

incorrelat $\Longleftrightarrow$ ortogonal? NO
si $C_{XY}(t_1, t_2) = 0$, llavors $R_{XY}(t_1, t_2) = C_{XY}(t_1, t_2) + \mu_X(t_1) \cdot \mu_Y(t_2) = \mu_X(t_1) \cdot \mu_Y(t_2) \neq 0$ (en general)

Problema 13. Sigui $M(n)$ un procés discret definit com la seqüència de les mitjanes d'una successió de v.a. X_i iid:

$$M(n) = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Trobau la mitjana,la variància i l'autocovariància de $M(n)$.

Solució:

$$E(M(n)) = E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(X_1 + \cdots + X_n) = (\text{i.i.d.}) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot E(X) = E(X)$$

$$\text{Var}(M(n)) = \text{Var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = (\text{i.i.d.}) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \text{Var}(X) = \frac{\text{Var}(X)}{n}$$

Calculam l'autocorrelació i l'autocovariància en el cas $k \geq n$:

$$\begin{aligned}
R_M(n,k) &= E(M(n) \cdot M(k)) = E\left(\tfrac{X_1+\cdots+X_n}{n} \cdot \tfrac{X_1+\cdots+X_k}{k}\right) = \\
&= \tfrac{1}{nk} E(X_1X_1 + X_1X_2 + \cdots + X_nX_k) = \tfrac{1}{nk} \cdot [E(X_1X_1) + E(X_1X_2) + \cdots + E(X_nX_k)] = \\
&= \tfrac{1}{nk} \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k E(X_iX_j) = \tfrac{1}{nk} \left[\textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^k E(X_iX_j) + \sum_{i=1}^n E(X_i^2)\right] = \\
&= (E(X_iX_j) = E(X_i) \cdot E(X_j) \text{ si } i \neq j, \text{ ja que } X_i \text{ i } X_j \text{ són independents}) = \\
&= \tfrac{1}{nk} \left[\textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^k E(X) \cdot E(X) + \sum_{i=1}^n E(X^2)\right] = \\
&= \tfrac{1}{nk} \left[(nk-n)E(X)^2 + n(\text{Var}(X) + E(X)^2)\right] = E(X)^2 + \tfrac{\text{Var}(X)}{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_M(n,k) &= R_M(n,k) - E(M(n)) \cdot E(M(k)) = R_M(n,k) - E(X)^2 = E(X)^2 + \tfrac{\text{Var}(X)}{k} - E(X)^2 = \\
&= \tfrac{\text{Var}(X)}{k} = \text{Var}(M(k)) = C_M(k,k)
\end{aligned}$$

Problema 14. Suposem que una secretària rep cridades que arriben d'acord amb un procés de Poisson amb un ritme de 10 cridades per hora. Quina és la probabilitat que cap cridada es quedi sense resposta si la secretària surt de l'oficina els primers 15 i els darrers 15 minuts d'una hora?

Solució:

Definim el procés $X(t) =$ *nombre de cridades en el període* $(0, t)$ (temps en minuts). Per l'enunciat sabem que $X(t) \sim \text{Po}(\lambda t)$, amb $\lambda = 10$.

Per a que cap cridada quedi sense resposta si la secretària surt de l'oficina els primers 15 i els darrers 15 minuts d'una hora ha de passar que no es rebi cap cridada durant els primers 15 minuts ni durant els darrers 15 minuts:

$$P(\text{cap cridada perduda}) = P(\text{cap cridada primers 15 min.} \cap \text{cap cridada darrers 15 min.})$$

Si les cridades són independents entre sí podem escriure

$$P(\text{cap cridada perduda}) = P(\text{cap cridada primers 15 min.}) \cdot P(\text{cap cridada darrers 15 min.})$$

D'altra banda:

$$P(\text{cap cridada primers 15 min.}) = P(0 \text{ cridades en període } (0, \frac{1}{4})) = P(X(\frac{1}{4}) = 0)$$

Com que $X(\frac{1}{4}) \sim \text{Po}(\lambda \frac{1}{4}) = \text{Po}(2.5)$, llavors $P(X(\frac{1}{4}) = 0) = \frac{2.5^0}{0!} e^{-2.5} = 0.082$.

Tenim a més que el nombre de cridades en els darrers 15 minuts és igual al nombre de cridades rebudes fins al minut 60 (en el període de 0 a 1 hora) menys el nombre de cridades rebudes fins al minut 45 (en el període de 0 a $\frac{3}{4}$ d'hora). Per tant:

$$P(\text{cap cridada darrers 15 min.}) = P(X(1) - X(\frac{3}{4}) = 0)$$

D'altra banda, es pot demostrar que si $A \sim \text{Po}(\lambda)$ i $B \sim \text{Po}(\mu)$ i $A \geq B$, llavors $A - B \sim \text{Po}(\lambda - \mu)$. Aplicant aquesta propietat al nostre problema tenim que $X(1) \sim \text{Po}(10)$, $X(\frac{3}{4}) \sim \text{Po}(7.5)$, per tant $X(1) - X(\frac{3}{4}) \sim \text{Po}(10 - 7.5) = \text{Po}(2.5)$. De manera que:

$$P(X(1) - X(\frac{3}{4}) = 0) = \frac{2.5^0}{0!} e^{-2.5} = 0.082$$

Per tant el resultat final és:

$$P(\text{cap cridada perduda}) = 0.082 \cdot 0.082 = 0.006724$$

Problema 14. Suposem que una secretària rep cridades que arriben d'acord amb un procés de Poisson amb un ritme de 10 cridades per hora. Quina és la probabilitat que cap cridada es quedi sense resposta si la secretària surt de l'oficina els primers 15 i els darrers 15 minuts d'una hora?

Solució:

L'enunciat ens diu que es tracta d'un procés de Poisson, per tant, si definim $X(t)$ com el *nombre de cridades en el periode* $(0,t)$ tenim que $X(t) \sim \text{Po}(\lambda t)$.

$$P(\text{cap cridada sense resposta}) = P(\{X(15\text{min.}) = 0\} \cap \{X(1\text{h.}) - X(45\text{min.}) = 0\}) =$$

$$= P(\{X(1/4) = 0\} \cap \{X(1) - X(3/4) = 0\}) = \text{cridades independents} = P(X(1/4) = 0) \cdot P(X(1) - X(3/4) = 0)$$

D'altra banda, si $X(t) \sim \text{Po}(\lambda t)$ es verifica que $X(t_2) - X(t_1) \sim \text{Po}(\lambda(t_2 - t_1)) \sim X(t_2 - t_1)$, sempre que $t_2 > t_1$. Per tant:

$$\begin{aligned} P(X(1/4) = 0) \cdot P(X(1) - X(3/4) = 0) \quad &= P(X(1/4) = 0) \cdot P(X(1 - 3/4) = 0) = P(X(1/4) = 0) \cdot P(X(1/4) = 0) = \\ &= \left(\tfrac{(10/4)^0}{0!} e^{-10/4}\right)^2 = e^{-5} = 0.006738 \end{aligned}$$

Problema 16. Un impuls de renou ocorr en una línia telefònica d'acord amb un procés Poisson de paràmetre λ per segon.

a) Trobau la probabilitat que no ocorri cap impuls en el transcurs d'un missatge de t segons.

b) Suposem que el missatge està codificat i que si s'ha produït un impuls podem corregir el missatge. Quina és la probabilitat que un missatge de t segons estigui lliure d'errors o es pugui corregir?

Solució:

Definim $N(t)$ com el *nombre d'impulsos de renou en t segons*. Per l'enunciat $N(t) \sim \text{Po}(\lambda t)$.

a)

$$P(N(t) = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

b)

$$P(N(t) \leq 1) = P(N(t) = 0) + P(N(t) = 1) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-\lambda t} = (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$$

Problema 15. Els clients arriben a una màquina de refrescs segons un procés Poisson de mitjana λ. Suposem que cada vegada que un client deposita una moneda, la màquina dispensa un refresc amb probabilitat p. Trobau la funció de probabilitat del nombre de begudes dispensades en un temps t. (Nota: s'ha de suposar que la màquina conté un nombre ilimitat de refrecs).

Solució:

Definim:
$N(t)$: *nombre de begudes dispensades en un temps t*
$C(t)$: *nombre de clients que arriben a la màquina de begudes en un temps t*, per l'enunciat $C(t) \sim \mathrm{Po}(\lambda t)$.

Podem calcular la probabilitat de $N(t)$ aplicant la fórmula de la probabilitat total:

$$\begin{aligned} P(N(t)=k) &= P(N(t)=k|C(t)=k)\cdot P(C(t)=k) + P(N(t)=k|C(t)=k+1)\cdot P(C(t)=k+1)+\cdots = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} P(N(t)=k|C(t)=n)\cdot P(C(t)=n) \end{aligned}$$

D'altra banda, si definim Y com $Y = N(t)|_{C(t)=n}$, llavors Y compta el nombre de begudes dispensades amb èxit d'un total de n intents. Per tant $Y \sim B(n,p)$ i $P(N(t)=k|C(t)=k) = P(Y=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. De manera que:

$$\begin{aligned} P(N(t)=k) &= \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} = \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}(\frac{p}{1-p})^k(1-p)^n\frac{(\lambda t)^n}{n!} = \\ &= e^{-\lambda t}\frac{1}{k!}(\frac{p}{1-p})^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{((1-p)\lambda t)^n}{(n-k)!} \end{aligned}$$

En el sumatori feim el canvi de variable $m = n-k$, de manera que quan $n=k$, $m=0$ i quan $n=\infty$, $m=\infty$:

$$\begin{aligned} P(N(t)=k) &= e^{-\lambda t}\frac{1}{k!}(\frac{p}{1-p})^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{((1-p)\lambda t)^{m+k}}{m!} = \\ & e^{-\lambda t}\frac{1}{k!}(\frac{p}{1-p})^k(1-p)^k(\lambda t)^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{((1-p)\lambda t)^m}{m!} \end{aligned}$$

Aplicant la igualtat següent (obtinguda a partir del polinomi de Taylor): $e^x = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}$, tenim que

$$P(N(t)=k) = e^{-\lambda t}\frac{1}{k!}p^k(\lambda t)^k e^{((1-p)\lambda t)} = \frac{(\lambda t p)^k}{k!}e^{-\lambda t p}$$

Aquesta expressió correspon a la funció de probabilitat de una v.a. de Poisson amb paràmetre $\lambda t p$, per tant:

$$N(t) \sim \mathrm{Po}(\lambda t p)$$

Problema 17. Els missatges arriben a un ordinador desde dues línies telefòniques segons dos processos de Poisson independents i amb ritmes λ_1 i λ_2 respectivament.

a) Trobau la probabilitat que un missatge arribi primer per la linea 1.

b) Trobau la funció de densitat del temps que tarda un missatge en arribar per alguna de les línies.

c) Trobau la probabilitat de $N(t)$ el nombre total de missatges que arriben a l'ordinador en un interval de longitud t.

d) Generalitzau el resultat anterior quan es junten k línies telefòniques independents Poisson amb paràmetres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ y $N(t) = N_1(t) + \ldots + N_k(t)$.

Solució:

a) Definim
$N_1(t)$: *nombre de missatges enviats per la línia 1 en el període* $(0, t)$
$N_2(t)$: *nombre de missatges enviats per la línia 2 en el període* $(0, t)$
T_1: *temps que tarda en arribar un missatge per la línia 1*
T_2: *temps que tarda en arribar un missatge per la línia 2*

Ens demanen calcular $P(T_1 < T_2)$:

$$P(T_1 < T_2) = P(T_1 - T_2 < 0) = \iint_A f_{T_1T_2}(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$$

on A és el conjunt de valors (t_1, t_2) tals que $t_1 - t_2 < 0$ i $f_{T_1T_2}$ és la funció de densitat conjunta de T_1 i T_2 (consideram que són v.a. contínues). Com les dues línies són independents llavors $f_{T_1T_2}(t_1, t_2) = f_{T_1}(t_1) \cdot f_{T_2}(t_2)$.

Per a calcular les funcions de densitat de T_1 i T_2 començam calculant les funcions de distribució:

$$\begin{aligned} F_{T_1}(t) &= P(T_1 \leq t) = (\text{el missatge arriba abans de } t \text{ segons}) = (\text{en } t \text{ segons s'ha rebut al menys 1 missatge}) = \\ &= P(N_1(t) \geq 1) = 1 - P(N_1(t) \leq 0) = 1 - P(N_1(t) = 0) = 1 - \tfrac{(\lambda_1 t)^0}{0!} e^{-\lambda_1 t} = 1 - e^{-\lambda_1 t} \end{aligned}$$

Aquest resultat és vàlid quan $t \geq 0$, en cas contrari $F_{T_1}(t) = 0$. En resum:

$$F_{T_1}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Aquesta funció de distribució correspon a una v.a. exponencial amb paràmetre λ_1, per tant $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$. Raonant de manera similar trobariem que $T_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. Per tant:

$$f_{T_1T_2}(t_1, t_2) = f_{T_1}(t_1) \cdot f_{T_2}(t_2) = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2} & \text{si } t_1 > 0 \text{ i } t_2 > 0 \\ \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Ara ja podem calcular la probabilitat que ens demanen. La regió d'integració A té la forma dun triangle limitat per l'eix t_2 i la recta $t_1 - t_2 = 0$.

$$P(T_1 < T_2) = \int_0^\infty \int_{t_1}^\infty \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2}\, d_{t_2}\, d_{t_1} = \cdots = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

b) Definim T: *temps que tarda en arribar un missatge per alguna de les línies.* Calculam primer la funció de distribució de T:

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= P(T_1 \leq t \cup T_2 \leq t) = P(T_1 \leq t) + P(T_2 \leq t) - P(T_1 \leq t \cap T_2 \leq t) = (T_1 \text{ i } T_2 \text{ independents}) = \\ &= P(T_1 \leq t) + P(T_2 \leq t) - P(T_1 \leq t) \cdot P(T_2 \leq t) = (1 - e^{-\lambda_1 t}) + (1 - e^{-\lambda_2 t}) - (1 - e^{-\lambda_1 t}) \cdot (1 - e^{-\lambda_2 t}) = \\ &= \cdots = 1 - e^{(\lambda_1 + \lambda_2) t} \end{aligned}$$

Aquest resultat és vàlid si $t \geq 0$, en cas contrari $P(T \leq t) = 0$. El resultat obtengut correspon a la funció de distribució d'una v.a. exponencial amb paràmetre $\lambda_1 + \lambda_2$. Per tant:

$$T \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

c) Definim $N(t)$:*nombre total de missatges en el període* $(0, t)$. Tenim que $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.

$$\begin{aligned}
P(N(t) = k) \quad &= P(N_1(t) + N_2(t) = k) = (\text{fórmula de la prob. total}) = \\
&= P(N_1(t) + N_2(t) = k|_{N_1(t)=0}) \cdot P(N_1(t) = 0) + P(N_1(t) + N_2(t) = k|_{N_1(t)=1}) \cdot P(N_1(t) = 1) + \cdots + \\
&\quad + P(N_1(t) + N_2(t) = k|_{N_1(t)=k}) \cdot P(N_1(t) = k) = \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k} P(N_1(t) + N_2(t) = k|_{N_1(t)=i}) \cdot P(N_1(t) = i) = \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k} P(N_2(t) = k - i) \cdot P(N_1(t) = i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda_2 t)^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2 t} \frac{(\lambda_1 t)^i}{(i)!} e^{-\lambda_1 t} = \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \textstyle\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k-i)!i!} (\lambda_2 t)^{k-i} (\lambda_1 t)^i = \\
&= \tfrac{1}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\lambda_1 t)^i (\lambda_2 t)^{k-i} = \\
&= (\text{aplicant la fórmula del binomi de Newton}) = \\
&= \tfrac{1}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} ((\lambda_1 + \lambda_2)t)^k = \tfrac{((\lambda_1+\lambda_2)t)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}
\end{aligned}$$

Aquesta funció de probabilitat correspon a una v.a. de Poisson de paràmetre $\lambda_1 + \lambda_2$. Per tant:

$$N(t) \sim \text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

d) En aquest cas $N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \cdots + N_k(t)$. Raonant de manera similar a l'apartat anterior i agrupant les variables de dos en dos de manera successiva arribarem a:

$$N(t) \sim \text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)$$

Exemple 6. Calculau $C_{XY}(t_1, t_2)$ per als processos $X(t) = \cos(\omega t + \Theta)$ i $Y(t) = \sin(\omega t + \Theta)$, on $\Theta \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$.

Solució:
La funció de densitat de Θ és

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } -\pi \le \theta \le \pi \\ \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Per tant:

$$\begin{aligned}
\mu_X(t) \quad &= E(X(t)) = E(\cos(\omega t + \Theta)) = \int_{\mathbb{R}} \cos(\omega t + \theta) f_\Theta(\theta)\, d\theta = \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \theta)\, d\theta = 0
\end{aligned}$$

(S'ha aplicat la propietat de que la integral d'un periode d'una funció sinusoïdal és 0)

$$\begin{aligned}
\mu_Y(t) \quad &= E(Y(t)) = E(\sin(\omega t + \Theta)) = \int_{\mathbb{R}} \sin(\omega t + \theta) f_\Theta(\theta)\, d\theta = \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega t + \theta)\, d\theta = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{XY}(t_1, t_2) \quad &= R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - 0 = E(X(t_1)Y(t_2)) = \\
&= E(\cos(\omega t_1 + \Theta)\sin(\omega t_2 + \Theta)) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t_1 + \theta)\sin(\omega t_2 + \theta)\, d\theta = \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\tfrac{1}{2}\sin(\omega(t_1 + t_2) + 2\theta) - \tfrac{1}{2}\sin(\omega(t_1 - t_2)) \right) d\theta = \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\sin(\omega(t_1 + t_2) + 2\theta)\, d\theta - \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\sin(\omega(t_1 - t_2))\, d\theta = \\
&= 0 - \tfrac{1}{2}\sin(\omega(t_1 - t_2)) \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = -\tfrac{1}{2}\sin(\omega(t_1 - t_2))
\end{aligned}$$

(S'ha aplicat que $\cos A \cdot \sin B = \frac{1}{2}\sin(A + B) - \frac{1}{2}\sin(A - B)$)