Fonaments Matemàtiques II

Àlgebra Lineal
Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears

Manuel Moyà Quintero

Índex

1 Matrius **3**

2 Determinants **17**

3 Sistemes d'equacions lineals **33**

4 Espais Vectorials **45**

5 Aplicacions lineals **83**

6 Valors i vectors propis d'un endomorfisme **101**

7 Espais Euclidians **113**

Capítol 6

Valors i vectors propis d'un endomorfisme

Introducció: En el que segueix K representarà un cos commutatiu i V un espai vectorial sobre K.
Si $f : V \to V$ és un endomorfisme de l'espai vectorial V cercarem una base de V de forma que la matriu de f respecte a aquesta base tengui la representació més "simple"possible. Notem que la matriu més "simple"possible seria una diagonal.

Si $f : V \to V$ és una aplicació lineal, i la matriu associada respecte a la base $\{v_1, \dots, v_n\}$, és

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_n \end{pmatrix}$$

vegem a què és igual $f(v_i)$.

L'equació matricial corresponent a aquesta aplicació lineal és

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Les coordenades d'un element de la base respecte a la mateixa base són:

$v_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$ i la seva imatge seria

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & t_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

i ens donaria $y_j = 0$ per a $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ i $y_i = t_i$, per tant

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} t_i v_i = t_i v_i$$

Definició 6.1 *Sigui $f : V \to V$ endomorfisme, anomenam **vector propi** de f a tot vector $v \in V$ tal que existeix un element $t \in K$ que verifica $f(v) = tv$.*

Exemple: Sigui l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x - y - z, x + 3y + z, -x - y + z)$. Aleshores $f(-3, 3, 0) = (-6, 6, 0) = 2(-3, 3, 0)$ i tindríem que $(-3, 3, 0)$ és un vector propi.

Vegem a continuació el concepte de valor propi, però per això tenguem en compte el següent, si $v = 0$ la igualtat anterior es verificarà sigui el que sigui t, ja que sabem (proposició 5.2) que si f és una aplicació lineal es compleix $f(0_V) = 0_V$. Suposem, per tant, que $v \neq 0_V$ i que és un vector propi,

Definició 6.2 *Sigui $f : V \to V$ endomorfisme, anomenam **valor propi** de f a tot element $t \in K$ tal que existeix un vector $v \neq 0$ que compleix $f(v) = tv$*

Exemple: Tenint en compte l'exemple de la definició 6.1, $t = 2$ seria un valor propi.

Proposició 6.3 *Sigui $f : V \to V$ un endomorfisme,*

(a) A tot vector propi $v \neq \bar{0}$ de f li correspon un valor propi únic t anomenat valor propi associat a v.

(b) A tot valor propi t de f li correspon un subespai vectorial $V(t)$ de V, descrit pels vectors $v \in V$ que verifiquen $f(v) = tv$.

DEMOSTRACIÓ:

(a) Suposem que existeixen $t, t' \in K$ tal que $f(v) = tv = t'v$, aleshores $(t - t')v = 0_V$ i per la proposició 4.2 tenim que $t - t' = 0$ i per tant $t = t'$.

(b) Siguin $v_1, v_2 \in V(t)$ i $s \in K$.

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = tv_1 + tv_2 = t(v_1 + v_2)$$

aleshores $v_1 + v_2 \in V(t)$.

Per altra part, i tenint en compte que K és un cos commutatiu,

$$f(sv_1) = sf(v_1) = s(tv_1) = (st)v_1 = (ts)v_1 = t(sv_1)$$

per tant, $sv_1 \in V(t)$.

Exemple: Tenint en compte l'exemple de la definició 6.1, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x - y - z, x + 3y + z, -x - y + z)$, si $(-3, 3, 0)$ és un vector propi, el subespai vectorial generat per aquest vector està format per vectors propis: $< (-3, 3, 0) >$. Ara bé això no vol dir que $V(2)$ sigui $< (-3, 3, 0) >$ ja que podrien existir altres vectors propis associats al valor propi 2 i que no pertanyen a aquest espai vectorial. Aquest seria el cas de $(-2, 1, 1)$ que no pertany a $< (-3, 3, 0) >$ però $f(-2, 1, 1) = 2(-2, 1, 1)$.

Definició 6.4 *L'espai vectorial $V(t)$ definit abans l'anomenarem **subespai vectorial propi associat a** t.*

En la següent proposició veurem com podem cercar el subespai vectorial propi associat a un valor propi t.

Proposició 6.5 *Sigui $f : V \to V$ un endomorfisme, t un valor propi d'f, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V i A la matriu associada a f respecte a la base donada. Aleshores si $X = (x_1, \ldots, x_n)$ són les coordenades d'un element qualsevol de V respecte a la base donada,*

$$V(t) = \{(x_1, \ldots, x_n\} | (A - tI_n)X^t = \mathbf{0}\}$$

DEMOSTRACIÓ:

Si t és un valor propi de f, existeix $v \neq 0_V$ tal que $f(v) = tv$, o el que és igual, $f(v) = t \cdot Id_V(v)$ que és equivalent a $(f - tId_V)(v) = 0_V$ (vegeu la prop. 5.22).

Si A és la matriu associada a l'endomorfisme f i I_n la matriu unitat d'ordre n, que és la matriu associada a l'endomorfisme $Id_V : V \to V$ tal que $Id_V(v) = v$, tenim que $A - tI_n$ és la matriu associada a l'endomorfisme $f - tId_V$ (vegeu la prop. 5.23). Aleshores $X = (x_1, \dots, x_n)$ són les coordenades respecte a la base donada d'un vector propi si i només si $(A - tI_n)X^t = \mathbf{0}$, és a dir,

$$(A - tI_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple: Seguint amb l'exemple de la definició 6.1, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x-y-z, x+3y+z, -x-y+z)$, cerquem $V(2)$. Suposarem, si no es diu res en contra, que la base és la canònica. Per tant, $f(1, 0, 0) = (1, 1, -1)$, $f(0, 1, 0) = (-1, 3, -1)$ i $f(0, 0, 1) = (-1, 1, 1)$ i la matriu A associada a l'aplicació lineal f respecte a la base canònica i $A - 2I_3$ són

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aleshores $V(2)$ està format per tots els vectors de coordenades (x, y, z) que verifiquen l'equació:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolent el sistema ens queda $x = -y-z$, per tant $v = (-y-z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$. Com estam en la base canònica, les coordenades d'un element d'$\mathbb{R}^3$ coincideixen amb l'element mateix. Per tant, $V(2) =< (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) >$.

Proposició 6.6 *Sigui $f : V \to V$ un endomorfisme i A la matriu associada a f respecte a la base $\{u_1, \dots, u_n\}$. Aleshores,*

$$t \text{ és un valor propi de } f \text{ si i només si } |A - tI_n| = 0.$$

Demostració:

t valor propi d'f si i només si existeix un vector $v \neq \bar{0}_V$ tal que $f(v) = tv$, o el que és igual, $(f - tId_V)(v) = \bar{0}_V$.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ són les coordenades de v, la darrera expressió la podem posar, en forma matricial com

$$(A - tI_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

que és un sistema homogeni i que tendrà solució diferent de zero si i només si $rang\ (A - tI_n) < n$, que és equivalent a $|A - tI_n| = 0$.
Exemple: Completem l'exemple de la definició 6.1, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x-y-z, x+3y+z, -x-y+z)$, i cerquem els valors propis i els subespais vectorials propis associats a cada valor propi.
Els valors propis els obtendrem amb l'equació: $\mid A - tI \mid= 0$

$$\begin{vmatrix} 1-t & -1 & -1 \\ 1 & 3-t & 1 \\ -1 & -1 & 1-t \end{vmatrix} = 4 - 8t + 5t^2 - t^3 = 0$$

d'aquí tenim que les arrels són $t = 1$ i $t = 2$ doble. Per tant, només existeixen dos valors propis $t = 1$ i $t = 2$. Cerquem ara els subespais vectorials propis associats.

A l'exemple de la proposició 6.5 es va calcular $V(2) =< (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) >$.

Cerquem ara $V(1)$, que està format per tots els vectors (x, y, z) que verifiquen l'equació $(A - Id_V)X^t =\mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolent el sistema ens queda $x = z,\ y = -z$, per tant $v = (z, -z, z) = z(1, -1, 1)$ i $V(1) =< (1, -1, 1) >$.

Definició 6.7 *Sigui $f : V \to V$ endomorfisme, dim $V = n$ i A la matriu associada a f respecte a una determinada base, el polinomi*

$$p_A(t) = |A - tI_n|$$

*l'anomenarem **polinomi característic** de f.*

Proposició 6.8 *Si A i B són dues matrius associades a un endomorfisme f en bases diferentes, aleshores els polinomis característics corresponents a cada matriu són iguals: $p_A(x) = p_B(x)$. Per tant podem representar al polinomi $p_A(x)$ per $p_f(x)$.*

Demostració:

Sigui $\{u_1, \ldots, u_n\}$ i $\{v_1, \ldots, v_n\}$ les bases que tenen associades les matrius A i B respectivament, i sigui P la matriu del canvi de base de la primera a la segona. Aleshores, per la proposició 5.12 tenim que $B = P^{-1}AP$.

El polinomi característica corresponent a la matriu B és $|B - tI_n|$, ara bé,

$$B - tI_n = P^{-1}AP - tP^{-1}P = P^{-1}(AP - tP) = P^{-1}(A - tI_n)P$$

per tant,

$$|B - tI_n| = |P^{-1}(A - tI_n)P| = |P^{-1}||A - tI_n||P| \overset{(1)}{=} |P|^{-1}|A - tI_n||P| = |A - tI_n|$$

(1) $|P^{-1}| = |P|^{-1}$, ja que $PP^{-1} = I_n$, per tant $|PP^{-1}| = |P||P^{-1}| = |I_n| = 1$

Proposició 6.9 *Sigui f és un endomorfisme de V, dim $V = n$ i p_f el seu polinomi característic. Si p_f admet una arrel múltiple t d'ordre k, aleshores $1 \leq$ dim $V(t) \leq k$.*

Demostració:

Aquesta demostració surt dels objectius del curs.

Proposició 6.10 *Sigui f un endomorfisme sobre V que admet m valors propis diferents, $t_1, \ldots, t_m$. Aleshores els vectors propis no nuls (v_i) on $i = 1, \ldots, m$ associats als t_i són linealment independents.*

Demostració:

Ho farem per inducció,

- Per $m = 1$ és evident.
- Suposem cert per a $m - 1$, per tant $\{v_1, \ldots, v_{m.1}\}$ linealment independents.
- Vegem que és cert per a m. Considerem una combinació lineal igualada a zero, $s_1v_1 + \ldots + s_mv_m = \bar{0}_V$ i multipliquem els dos membres per t_1, ens quedaria

  $$s_1t_1v_1 + \ldots + s_mt_1v_m = \bar{0}_V \qquad (1)$$

  per altra part, si $s_1v_1 + \ldots + s_mv_m = \bar{0}_V$, tenim que $f(s_1v_1 + \ldots + s_mv_m) = f(\bar{0}_V) = \bar{0}_V$, per tant,

  $$f(s_1v_1 + \ldots + s_mv_m) = s_1f(v_1) + \ldots + s_mv(v_m) = s_1t_1v_1 + \ldots + s_mt_mv_m = \bar{0}_V \qquad (2)$$

  restant les igualtats (1) i (2) tenim

  $$s_2(t_2 - t_1)v_1 + \ldots + s_m(t_m - t_1)v_m = \bar{0}_V$$

i per hipòtesi d'inducció són linealment independents, per tant

$$s_2(t_2 - t_1) = \ldots = s_m(t_m - t_1) = 0$$

i com els valors propis són diferents tenim que

$$s_2 = \ldots = s_m = 0$$

Substituint aquest valors a la igualtat de partida ens queda $s_1 v_1 = \bar{0}_V$ i com $v_1 \neq \bar{0}_V$ tenim que $s_1 = 0$.

Corol·lari 6.11 *Si dim $V = n$ tot endomorfisme de V té com a màxim n valors propis distints.*

DEMOSTRACIÓ:

Per la proposició anterior 6.10, els vectors propis associats a valors propis diferents són linealment independents, i com el nombre màxim de vectors linealment independents és el nombre d'elements de la base, arribam a la conclusió de l'enunciat.

Corol·lari 6.12 *Si $t_1, \ldots, t_m$ són valors propis distints i $V(t_1), \ldots, V(t_m)$ els subespais vectorials propis associats, aleshores el subespai vectorial $V(t_1) + \ldots + V(t_m)$ és suma directa dels mateixos.*

DEMOSTRACIÓ:

Sigui $u \in V(t_1) + \ldots + V(t_m)$ aleshores $u = u_1 + \ldots + u_m$, i com els u_i són linealment independents tal com hem vist a la proposició 6.10, tenim que aquesta expressió és única. Per tant la suma és directa.

Corol·lari 6.13 *Sigui V un espai vectorial i f un endomorfisme de V. La intersecció dels subespais vectorials propis $V(t_1)$ i $V(t_2)$ associats a dos valors propis distints d'f és el vector nul,*

$$V(t_1) \cap V(t_2) = \{0\}$$

DEMOSTRACIÓ:

Suposem que existeix $u \in V(t_1) \cap V(t_2)$, aleshores $u = u_1$ i a la vegada $u = u_2$, però aquests dos han de ser linealment independents segons hem vist a la proposició 6.10, la qual cosa és falsa, ja que evidentment un vector no és independent a ell mateix. Per tant, $u = \bar{0}_V$

Definició 6.14 *Direm que un endomorfisme f de l'espai vectorial V de dimensió n sobre K és* ***diagonalitzable*** *si existeix una base de V tal que la matriu associada a f respecte a aquesta base és diagonal.*

Proposició 6.15 *Un endomorfisme f de V és diagonalitzable si i només si és possible trobar una base de V formada per vectors propis.*

DEMOSTRACIÓ:

$\Rightarrow$) Sigui $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V de forma que la matriu associada és

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$$

on la columna i són les coordenades de $f(u_i)$ respecte a la base (u_i), per tant

$$\begin{array}{c} f(u_1) = (d_1, 0, \ldots, 0)_B = d_1 u_1 \\ f(u_2) = (0, d_2, \ldots, 0)_B = d_2 u_2 \\ \ldots \\ f(u_n) = (0, 0, \ldots, d_n)_B = d_n u_n \end{array}$$

i tenim que els u_i són vectors propis.

$\Leftarrow$) Suposem que els u_i són vectors propis d'f, per tant, existeixen valors propis $t_1, \ldots, t_n$ tal que

$$\begin{array}{c} f(u_1) = t_1 u_1 = (t_1, 0, \ldots, 0)_B \\ f(u_2) = t_2 u_2 = (0, t_2, \ldots, 0)_B \\ \ldots \\ f(u_n) = t_n u_n = (0, 0, \ldots, t_n)_B \end{array}$$

i la matriu associada a aquest endomorfisme seria

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t_n \end{pmatrix}$$

que és una matriu diagonal.

Proposició 6.16 *Sigui l'endomorfisme f de V, on dim $V = n$, i siguin $t_1, \ldots, t_m$ els valors propis diferents. Designem per $r_1, \ldots, r_m$ la multiplicitat de les arrels t_i. Aleshores f és diagonalitzable si i només si:*

- $r_1 + \ldots + r_m = n$
- *Per cada arrel t_i d'ordre r_i, dim $V(t_i) = r_i$.*

DEMOSTRACIÓ:

$\Rightarrow$) Si f és diagonalitzable, per la proposició 6.15, existeix una base formada per vectors propis, per tant

$$V = V(t_1) \bigoplus \dots \bigoplus V(t_m)$$

aleshores, per la proposició 4.28, $n = dim\ V = dim\ V(t_1) + \dots + dim\ V(t_m)$.

Per altra part, per la proposició 6.9, $1 \leq dim\ V(t_i) \leq r_i$, per tant,

$$n = dim\ V(t_1) + \dots + dim\ V(t_m) \leq r_1 + \dots + r_m \overset{(1)}{\leq} n$$

(1) Ja que el grau del polinomi característic és n.

Deduïm, per tant, que $dim\ V(t_i) = r_i$ per a $i = 1, \dots, m$ i $r_1 + \dots + r_m = n$.

$\Leftarrow$) Per hipòtesi tenim $n = dim\ V = dim\ V(t_1) + \dots + dim\ V(t_m)$, i per la proposició 6.12, $V = V_{t_1} \bigoplus \dots \bigoplus V(t_m)$. Per tant, podem obtenir una base de V juntant les base dels $V(t_i)$, tots vectors propis, i per la proposició 6.15 f és diagonalitzable.

Exemple: Seguint amb l'exemple de la definició 6.6, tenim els valors propis són $t_1 = 2$ doble i $t_2 = 1$ simple, i $V(2) =< (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) >$ i $V(1) =< (1, -1, 1) >$.

Tinguem en compte que $t = 1$ és una arrel simple i $dim\ V(1) = 1$, i t=2 és arrel doble i $dim\ V(2) = 2$ i $dim\ R^3 = 3 = dim\ V(2) + dim\ V(1)$ tenim que f és diagonalitzable.

Corol·lari 6.17 *Un endomorfisme f de V, espai vectorial de dimensió n, és diagonalitzable si té n valors propis, tots diferents, dins K.*

Proposició 6.18 *Sigui V un espai vectorial de dimensió n i f un endomorfisme sobre V que té per matriu associada A. Si f és diagonalitzable, aleshores la matriu diagonal és:*

$$D = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_n \end{pmatrix}$$

on $t_1, \dots, t_n$ són els n valors propis iguals o diferents de f.

DEMOSTRACIÓ:

Es dedueix de forma immediata de la demostració de la proposició 6.15

Exemple 1: Amb l'exemple de la definició 6.6, la matriu diagonal serà

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i una base formada per vectors propis serà $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, -1, 1)\}$.

A més, la matriu de canvi de base P és la que té per columna i-èssima les coordenades de l'element de la base del subespai vectorial associat al valor propi t_i, de forma que $D = P^{-1}AP$ (vegeu proposició 5.12, on A és la matriu associada a l'aplicació lineal f.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposició 6.19 *Si A és la matriu associada a una aplicació lineal f diagonalitzable, i D és la matriu diagonal, aleshores $A^n = PD^nP^{-1}$, on P és la matriu del canvi de base de la base inicial a la base formada per valors propis.*

DEMOSTRACIÓ:

Si la matriu del canvi de base de la base inicial a la base formada per vectors propis és P, aleshores, per la proposició 5.12 tenim que $D = P^{-1}AP$ i aïllant A ens queda $A = PDP^{-1}$, per tant,

$$A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1}\dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Exemple:

a) Determinar els valors propis i els vectors propis de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

b) Posem la matriu diagonal.

c) Cerquem la matriu de canvi de base.

d) Cerquem A^n.

Solució:

a) Cerquem els valors propis:

$$|A-tI| = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 4 \\ 3 & -4-t & 12 \\ 1 & -2 & 5-t \end{vmatrix} = -t(t-1)(t-2)$$

que té per arrels $t=0,\ t=1,\ t=2$.

Cerquem ara els vectors propis associats al valor propi $t=0$. Si $v=(x,y,z)$ n'és un de vector propi aleshores ha de complir $(A-0I)v=\bar{0}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolent el sistema ens queda $x=-2z,\ y=\frac{3}{2}z$, per tant $v=(-2z,\frac{3}{2}z,z)=z(-2,\frac{3}{2},1)$ i $V(0)=<(-2,\frac{3}{2},1)>=<(-4,3,2)>$ i $dim\ V(0)=1$.

Cerquem els vectors propis associats al valor propi $t=1$. Si $v=(x,y,z)$ n'és un de vector propi aleshores ha de complir $(A-I)v=\bar{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolent el sistema ens queda $x=-4z,\ y=0$, per tant $v=(-4z,0,z)=z(-4,0,1)$ i $V(1)=<(-4,0,1)>$ i $dim\ V(1)=1$.

Finalment, cerquem els vectors propis associats al valor propi $t=2$. Si $v=(x,y,z)$ n'és un de vector propi aleshores ha de complir $(A-2I)v=\bar{0}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolent el sistema ens queda $x=2y,\ z=0$, per tant $v=(2y,y,0)=y(2,1,0)$ i $V(2)=<(2,1,0)>$ i $dim\ V(2)=1$.

b) La matriu diagonal serà

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) La matriu de canvi de base és:

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Cerquem A^n,

$$A^n = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4+3.2^n & 8-2^{n+2} & -20+3.2^{n+2} \\ 3.2^{n-1} & -2^{n+1} & 3.2^{n+1} \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Proposició 6.20 *Per a tot endomorfisme f de V de dimensió n sobre K, tal que el polinomi característic de f té totes les arrels en K, existeix una base de V per a la qual la matriu B associada a f en aquesta base és triangular i els elements de la diagonal principal de B són els valors propis.*

Índex alfabètic

endomorfisme
diagonalitzable, 108

polinomi característic d'un endomorfisme, 105

subespai vectorial
propi associat a un valor propi, 103

valor propi, 102
vector propi, 102