Solucions Problemes Tema 3

1.

(a) $-2z^4 + z^3 + 3z$, ROC:$\mathbb{C} - \{\infty\}$

(b) $3 + 3z + z^3 - 2z^4$, ROC:$\mathbb{C} - \{\infty\}$

(c) $3z^{-1} + z - 2z^2$, ROC:$\mathbb{C} - \{0, \infty\}$

(d) $3 + z^{-1} - z^{-2}$, ROC:$\mathbb{C} - \{0\}$

2.

(a) $\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$, ROC:$|z| > 1$

(b) $\dfrac{1}{(1 - z^{-1})^2}$, ROC:$|z| > 1$

(c) $\dfrac{1}{1 - az^{-1}} + \dfrac{1}{1 - a^{-1}z^{-1}}$, ROC: $\begin{cases} |z| > 1/|a| & \text{si } |a| \geq 1 \\ |z| > |a| & \text{si } |a| < 1 \end{cases}$

(d) $\dfrac{1}{1 - az^{-1}} + \dfrac{1}{1 - a^{-1}z^{-1}}$, ROC: $\begin{cases} \emptyset & \text{si } |a| \geq 1 \\ |a| < |z| < 1/|a| & \text{si } |a| < 1 \end{cases}$

(e) $\dfrac{1 - \cos\omega z^{-1}}{1 - 2\cos\omega z^{-1} + z^{-2}}$, ROC:$|z| > 1$

(f) $\dfrac{\cos\omega z^{-3} + \cos\omega z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - 2\cos\omega z^{-1} + z^{-2})^2}$, ROC:$|z| > 1$

(g) $\dfrac{1 - a\cos\omega z^{-1}}{1 - 2a\cos\omega z^{-1} + a^2z^{-2}}$, ROC:$|z| > |a|$

(h) $-z\dfrac{a\cos\omega z^{-2}(1 - 2a\cos\omega z^{-1} + a^2z^{-2}) - (1 - a\cos\omega z^{-1})(2a\cos\omega z^{-2} - 2a^2z^{-3})}{(1 - 2a\cos\omega z^{-1} + a^2z^{-2})^2}$, ROC:$|z| > |a|$

(i) $\dfrac{z^{-1}(1 + az^{-1})}{(1 - az^{-1})^3} + \dfrac{z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$, ROC:$|z| > |a|$

3.

(a) =(b) $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \dfrac{1}{1 - 2z^{-1}}$, ROC:$\frac{1}{3} < |z| < 2$

5.

(a) $\dfrac{X(z)}{1 - z^{-1}}$

(b) $\dfrac{X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})}{2}$

(c) $X(z^2)$

7.

Pas 1: $X(z) = \dfrac{5z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(3 - z^{-1})} = \dfrac{5z}{(z - 2)(3z - 1)}$

Pas 2: $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{5}{(z - 2)(3z - 1)} = \dfrac{A}{z - 2} + \dfrac{B}{3z - 1} = \text{(es calculen A i B)} = \dfrac{1}{z - 2} + \dfrac{-3}{3z - 1}$

Pas 3: $X(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{-3z}{3z-1} = \frac{1}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = X_1(z) - X_2(z)$

on $X_1(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$, $X_2(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$.

Per tant, $x[n] = x_1[n] - x_2[n]$

Pas 4: possibles solucions (mirant taules de transformades):

1. $x_1[n]$ causal, $x_2[n]$ causal:
   - $x_1[n] = 2^n u[n]$, $ROC_1 : |z| > 2$
   - $x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$, $ROC_2 : |z| > 1/3$
   - $ROC = ROC_1 \cap ROC_2 = |z| > 2$, $\quad x[n] = 2^n u[n] - (\frac{1}{3})^n u[n]$
2. $x_1[n]$ causal, $x_2[n]$ anticausal:
   - $x_1[n] = 2^n u[n]$, $ROC_1 : |z| > 2$
   - $x_2[n] = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$, $ROC_2 : |z| < 1/3$
   - $ROC = ROC_1 \cap ROC_2 = \emptyset$, No és possible
3. $x_1[n]$ anticausal, $x_2[n]$ causal:
   - $x_1[n] = -2^n u[-n-1]$, $ROC_1 : |z| < 2$
   - $x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$, $ROC_2 : |z| > 1/3$
   - $ROC = ROC_1 \cap ROC_2 = 1/3 < |z| < 2$, $\quad x[n] = -2^n u[-n-1] - (\frac{1}{3})^n u[n]$
4. $x_1[n]$ anticausal, $x_2[n]$ antcausal:
   - $x_1[n] = -2^n u[-n-1]$, $ROC_1 : |z| < 2$
   - $x_2[n] = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$, $ROC_2 : |z| < 1/3$
   - $ROC = ROC_1 \cap ROC_2 = |z| < 1/3$, $\quad x[n] = -2^n u[-n-1] + (\frac{1}{3})^n u[-n-1]$

14.

a)

Pas 1: $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] = x_1[n] - \frac{1}{4}x_1[n-1]$

on $x_1[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

$X(z) = X_1(z) - \frac{1}{4}z^{-1}X_1(z) = (1 - \frac{1}{4}z^{-1})X_1(z) = \text{(taules transformades)} = \frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$,

$ROC = |z| > 1/2$

Pas 2: $y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

$Y(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$, $\quad ROC = |z| > 1/3$

Pas 3: $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}{\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{z(z-\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{4})}$

Pas 4: $\frac{H(z)}{z} = \frac{z-\frac{1}{2}}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{4})} = \frac{A}{z-\frac{1}{3}} + \frac{B}{z-\frac{1}{4}} = \text{(es calculen A i B)} = \frac{-2}{z-\frac{1}{3}} + \frac{3}{z-\frac{1}{4}}$

Pas 5: $H(z) = \frac{-2z}{z-\frac{1}{3}} + \frac{3z}{z-\frac{1}{4}}$

La ROC es calcula en l'apartat b).

b)

Pas 1: a partir del resultat de l'apartat a): $H(z) = \frac{-2z}{z-\frac{1}{3}} + \frac{3z}{z-\frac{1}{4}} = -2\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + 3\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = -2H_1(z) + 3H_2(z)$

on $H_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$, $H_2(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$.

Per tant, $h[n] = -2h_1[n] + 3h_2[n]$

Pas 2: solució causal (l'enunciat diu que és un sistema LTI causal) (mirant taules de transformades):

$h_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$, $ROC_1 : |z| > 1/3$

$h_2[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$, $ROC_2 : |z| > 1/4$

$h[n] = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$, $ROC = ROC_1 \cap ROC_2 : |z| > 1/3$

c) A partir del resultat del pas 3 de l'apartat a):

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z(z-\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{4})} = \frac{z^2-\frac{1}{2}z}{z^2-\frac{7}{12}z+\frac{1}{12}} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{7}{12}z^{-1}+\frac{1}{12}z^{-2}}$

$Y(z)\left(1-\frac{7}{12}z^{-1}+\frac{1}{12}z^{-2}\right) = X(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$

$Y(z) - \frac{7}{12}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{12}z^{-2}Y(z) = X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}X(z)$

Aplicant propietats de la transformada Z:

$y[n] - \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$

$y[n] = \frac{7}{12}y[n-1] - \frac{1}{12}y[n-2] + x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$

d) A partir del resultat del pas 3 de l'apartat a):

$H(z) = \frac{z(z-\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{4})}$

Els zeros de $H(z)$ són les arrels del numerador, i els pols les arrels del denominador. Per tant:

zeros: $z_1 = 0$, $z_2 = 1/2$

pols: $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/4$

Com que el sistema és causal (ho diu l'enunciat) i $|p_1| < 1$ i $|p_2| < 1$, llavors el sistema és **estable**.

15.

Pas 1: $y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] = x[n]$

Pas 2: aplicam propietats de la transformada Z:

$Y(z) + a_1z^{-1}Y(z) + a_2z^{-2}Y(z) = X(z)$

Pas 3:

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2+a_1z+a_2} = \frac{z^2}{(z-p_1)(z-p_2)}$

on

$p_1 = \frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_2}}{2}$

$p_2 = \frac{-a_1-\sqrt{a_1^2-4a_2}}{2}$

Pas 4: el sistema és causal (ho diu l'enunciat), per ésser estable els pols han d'estar a l'interior del cercle unitat ($|p_1| < 1$, $|p_2| < 1$).

Possibilitats:

1. p_1 i p_2 són reals i iguals:
   Això passa si $a_1^2 - 4a_2 = 0$, és a dir: $a_2 = a_1^2/4$.
   En aquest cas $p_1 = p_2 = \frac{a_1}{2}$.
   Per tenir $|p_1| = |p_2| < 1$ haurà de passar $|\frac{a_1}{2}| < 1$, i per tant $|a_1| < 2$.
2. p_1 i p_2 són valors complexes conjugats:
   Això passa si $a_1^2 - 4a_2 < 0$, és a dir: $a_2 > a_1^2/4$.
   En aquest cas:
   $p_1 = \dfrac{-a_1 + i\sqrt{-a_1^2 + 4a_2}}{2} = -\frac{a_1}{2} + i\frac{\sqrt{-a_1^2+4a_2}}{2}$
   $p_1 = \dfrac{-a_1 - i\sqrt{-a_1^2 + 4a_2}}{2} = -\frac{a_1}{2} - i\frac{\sqrt{-a_1^2+4a_2}}{2}$
   $|p_1| = |p_2| = \sqrt{\left(\dfrac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{-a_1^2 + 4a_2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a_2}$
   Per tenir $|p_1| = |p_2| < 1$ haurà de passar $\sqrt{a_2} < 1$, i per tant $a_2 < 1$.
3. p_1 i p_2 són reals i diferents: no estudiam aquest cas