

# Tema 2. Fonaments matemàtics del Processament Digital del Senyal

J.L. Lisani (UIB)

## Contents

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Anàlisi de Fourier</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Sèries de Fourier   | 1         |
| 1.1.1    | Convergència puntual i fenòmen de Gibbs   | 3         |
| 1.2      | Anàlisi de Fourier de funcions no periòdiques. Transformades de Fourier               | 5         |
| 1.2.1    | Transformada de Fourier   | 6         |
| 1.2.2    | Exemples  | 10        |
| 1.2.3    | Transformada de Fourier en 2D   | 11        |
| 1.3      | Inconvenients de les transformades de Fourier. Ondetes                                | 11        |
| <b>2</b> | <b>Discretització de senyals continus</b>   | <b>12</b> |
| 2.1      | Convolució de funcions  | 13        |
| 2.2      | Distribucions   | 14        |
| 2.3      | Mostreig de funcions. Teorema de Shannon.   | 19        |
| 2.3.1    | Representació de funcions discretes.  | 19        |
| 2.3.2    | Reconstrucció d'un senyal continu a partir de les seves mostres. Teorema de mostreig. | 21        |
| 2.3.3    | Aliasing  | 22        |
| <b>3</b> | <b>Transformada Discreta de Fourier</b>   | <b>23</b> |
| 3.1      | Transformada ràpida de Fourier (FFT)  | 26        |
| 3.2      | Transformada Discreta de Fourier en 2D  | 27        |
| 3.2.1    | DFT bidimensional   | 27        |

## 1 Anàlisi de Fourier

### 1.1 Sèries de Fourier

Com ja s'ha comentat en el tema 1 l'anàlisi de Fourier és una eina bàsica per al processament de senyals. Les sèries de Fourier apareixen de manera natural en estudiar les funcions periòdiques de quadrat integrable en un període. El conjunt d'aquestes funcions es denota  $L_P^2(0, a)$ , on  $a$  és el període.

$$L_P^2(0, a) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \text{ de període } a \text{ i } \int_0^a |f(t)|^2 dt < +\infty\}$$

$L_P^2(0, a)$  és un espai de Hilbert dotat del producte escalar  $\langle f, g \rangle = \int_0^a f(t)\bar{g}(t)dt$  i de la norma  $\|f(t)\|_2 = (\int_0^a |f(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ .

La sinusoide  $e_n(t) = e^{i2\pi n \frac{t}{a}}$  és un element de  $L_P^2(0, a)$  i el conjunt dels polinomis trigonomètrics de grau menor o igual a  $N$  (denotat  $\mathcal{T}_N$ ) és un subespai vectorial de  $L_P^2(0, a)$ .

$$\mathcal{T}_N = \{p(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{i2\pi n \frac{t}{a}}, \quad c_n \in \mathbb{C}\}$$

Volem respondre a la qüestió de si és possible representar qualsevol element de  $L_P^2(0, a)$  com una suma de sinusoides  $e_n(t) = e^{i2\pi n \frac{t}{a}}$ , és a dir, donat un  $N$  enter fixat, podem trobar uns coeficients  $x_n$  tals que  $\|f - \sum_{n=-N}^N x_n e_n\|_2$  és mínim? Una vegada resposta aquesta pregunta ens demanarem què passa quan  $N \rightarrow +\infty$ .

Si consideram el problema des d'un punt de vista geomètric, es tracta de trobar l'element  $f_N$  del subespai  $\mathcal{T}_N$  que es troba a distància mínima de  $f$ . Quan aquest element existeix es diu que és la *millor aproximació* de  $f$  dins  $\mathcal{T}_N$ . El següent teorema ens confirma que aquest polinomi existeix i és únic.

**Teorema 1.** *Existeix un únic polinomi trigonomètric  $f_N$  dins  $\mathcal{T}_N$  tal que  $\|f - f_N\|_2 = \min\{\|f - p\|_2, p \in \mathcal{T}_N\}$ . Aquest polinomi és:*

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i2\pi n \frac{t}{a}} \quad (1)$$

on

$$c_n = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) e^{-i2\pi n \frac{t}{a}} dt \quad (2)$$

La distància entre aquest polinomi i  $f$  és

$$\|f - f_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 - a \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \quad (3)$$

Per demostrar aquest teorema necessitam el següent resultat:

**Proposició 1.** *Els polinomis  $e_n(t) = e^{i2\pi n \frac{t}{a}}, n \in \mathbb{Z}$  són ortogonals, és a dir:  $\langle e_n, e_m \rangle = 0$  si  $m \neq n$  i  $\|e_n\|_2 = \sqrt{a}$ .*

Dem. Teorema 1.

La distància de  $f$  a un polinomi qualsevol de  $p \in \mathcal{T}_N$  es calcula com

$$\|f - p\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\langle f, p \rangle + \|p\|_2^2$$

$\|p\|_2^2$  es calcula fàcilment amb l'ajut de la Proposició 1 i resulta que

$$\|p\|_2^2 = a \sum_{n=-N}^N |x_n|^2$$

A més a més,

$$\langle f, p \rangle = \sum_{n=-N}^N \bar{x}_n \langle f, e_n \rangle$$

si definim  $c_n = c_n(f) = \frac{1}{a} \langle f, e_n \rangle$   
llavors

$$\begin{aligned}
\|f - p\|_2^2 &= \|f\|_2^2 + \sum_{n=-N}^N (-2a \operatorname{Re}[\bar{x}_n c_n] + a x_n \bar{x}_n) = \\
&= \|f\|_2^2 + a \sum_{n=-N}^N (-2 \frac{\bar{x}_n c_n + x_n \bar{c}_n}{2} + x_n \bar{x}_n) = \\
&= \|f\|_2^2 + a \sum_{n=-N}^N (|c_n - x_n|^2 - |x_n|^2)
\end{aligned}$$

d'aquí deduïm que el mínim de l'expressió anterior s'assoleix únicament quan  $x_n = c_n$  i per a aquest valor tenim l'equació (3).

□

La següent proposició se dedueix immediatament de (3).

**Proposició 2 (Desigualtat de Bessel).**

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(t)|^2 dt$$

**Corol·lari.** Per a qualsevol  $f \in L_P^2(0, a)$  tenim que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \leq +\infty$$

i per tant  $c_n(f) \rightarrow 0$  quan  $|n| \rightarrow +\infty$ .

**Teorema 2.** Si  $f \in L_P^2(0, a)$ , el polinomi trigonomètric  $f_N(t)$  definit per l'equació (1) tendeix cap a  $f$  dins  $L_P^2(0, a)$  quan  $N \rightarrow +\infty$ , és a dir:

$$\int_0^a |f(t) - f_N(t)|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{quan} \quad N \rightarrow +\infty$$

La sèrie  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n \frac{t}{a}}$  s'anomena **sèrie de Fourier** de  $f$  i els  $c_n$  definits per l'equació (2) són els **coeficients de Fourier**.

Una conseqüència immediata del teorema anterior i de la desigualtat (3) és la **igualtat de Parseval**:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{a} \int_0^a |f(t)|^2 dt \quad (4)$$

**Proposició 3. Velocitat de convergència de la sèrie de Fourier.** Com més regular és  $f$  més ràpidament els coeficients  $c_n(f)$  tendeixen cap a zero.

### 1.1.1 Convergència puntual i fenòmen de Gibbs

És important remarcar que la convergència de la sèrie de Fourier és respecte a la norma  $L^2(0, a)$ , és a dir, el resultat de la sèrie i la funció són iguals gairebé per tots els punts (g.p.t), però no necessàriament tenim convergència puntual. El següent exemple il·lustra aquest comentari.

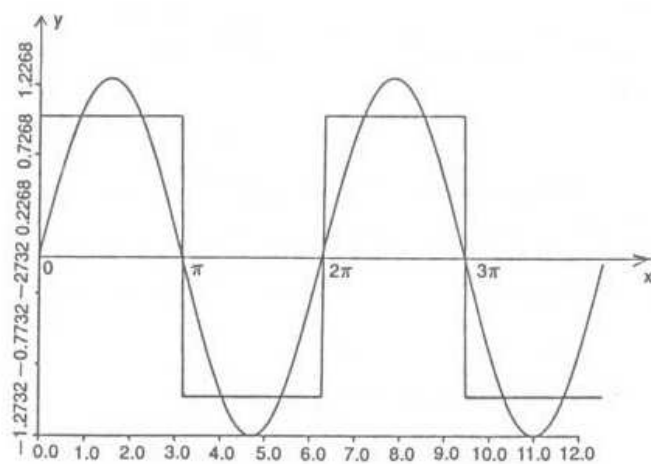


Figure 1: [Gasquet-Witomski]. Funció  $f$  i  $f_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin t$

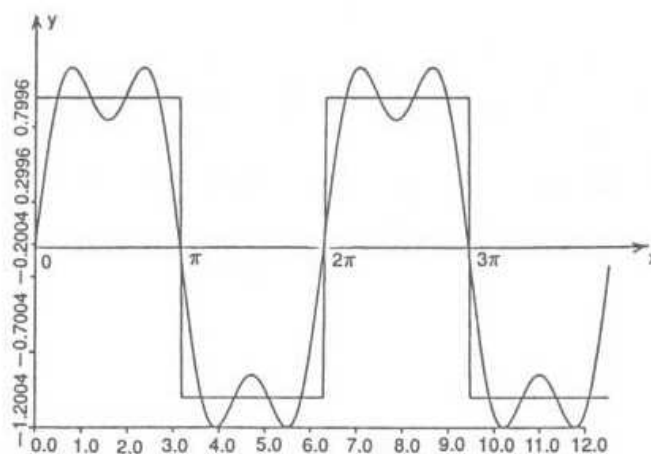


Figure 2: [Gasquet-Witomski]. Funció  $f$  i  $f_3(t) = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t)$

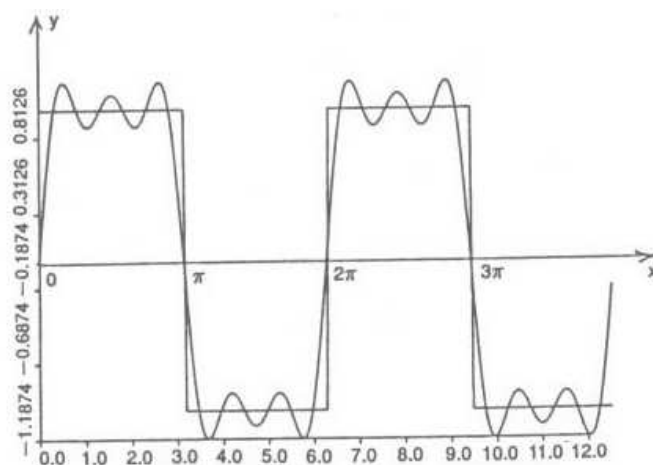


Figure 3: [Gasquet-Witomski]. Funció  $f$  i  $f_5(t) = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t)$

**Exemple.** Sigui  $f(t)$  una funció periòdica de període  $2\pi$  definida de la següent manera:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ -1 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

En aquest exemple observam com  $f_N(\pi) = 0 \quad \forall N$ , en canvi  $f(\pi) = -1$ .

El teorema següent dóna un resultat referent a la convergència puntual de les sèries de Fourier.

**Teorema de Dirichlet o de la convergència local.** *Sigui  $f \in L_P^1(0, a)$ . Si en un punt  $t_0$  els límits  $f(t_0+)$  i  $f(t_0-)$  existeixen, així com les derivades a dreta i esquerra en  $t_0$ , llavors*

$$f_N(t) \longrightarrow \frac{1}{2}(f(t_0+) + f(t_0-)) \quad \text{quan} \quad N \rightarrow +\infty$$

(per tant  $f_N(t_0) \rightarrow f(t_0)$  si  $f$  és contínua en  $t_0$ ).

**Observació.** El resultat també és vàlid per a  $f \in L_P^2(0, a)$ , ja que  $L_P^2(0, a) \subseteq L_P^1(0, a)$ .

Podem comprovar que el teorema de Dirichlet es compleix per a la funció de l'exemple anterior.

Un altre fenomen que es produeix sempre en fer un desenvolupament en sèrie de Fourier d'un senyal discontinu és el **fenòmen de Gibbs**. Aquest fenomen s'observa en les figures de l'exemple anterior: la suma de sinusoides tendeix cap al valor de la funció en els punts en què aquesta és contínua, no obstant, als voltants dels punts de discontinuïtat, la diferència entre el màxim i el mínim de la sèrie és major que la magnitud de la discontinuïtat i aquesta tendència es manté quan  $N \rightarrow +\infty$  (l'amplada dels "pics" tendeix cap a zero, però no la seva alçada i en el límit s'aproximen a una recta vertical més llarga que el bot de discontinuïtat). Podem observar el fenomen de Gibbs en les figures de l'exemple anterior i també per a una aproximació de la funció de l'exemple (amb 75 termes) en la figura següent.

## 1.2 Anàlisi de Fourier de funcions no periòdiques. Transformades de Fourier

L'anàlisi de Fourier basat en desenvolupament en sèrie té un camp d'aplicació molt restringit i en general no es pot emprar per estudiar els senyals obtinguts del món físic:

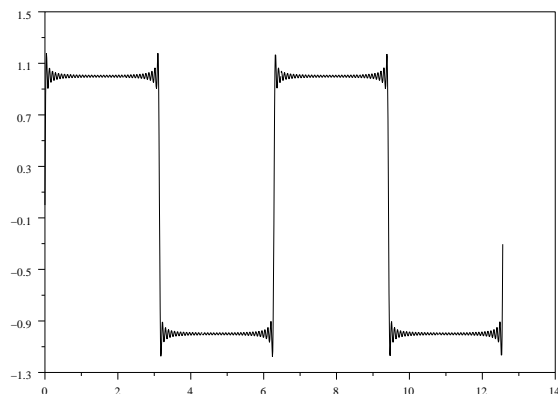


Figure 4: Aproximació de la funció de l'exemple amb 75 termes de la sèrie de Fourier. Observar el fenomen de Gibbs

- els senyals tenen un suport afinitat i no s'extenen des de  $-\infty$  fins a  $+\infty$
- en general els senyals són no periòdics

La única hipòtesi que es pot fer respecte a les propietats dels senyals és que tenen una **energia finita**. Si definim l'energia d'un senyal  $f(f)$  com

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2 \quad (5)$$

la hipòtesi implica que  $E < +\infty$  i per tant  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

Una manera d'obtenir una funció periòdica i infinita a partir d'una funció qualsevol amb suport afinitat és mitjançant la **periodització**. La Figura 5 mostra tres maneres possibles de fer aquesta periodització. En qualsevol dels tres casos el resultat és una funció que es pot desenvolupar en sèrie de Fourier.

**Observació.** La funció periòdica obtinguda en fer una simetrització imparell de la funció original és una funció imparell i és fàcil de demostrar que la sèrie de Fourier només conté termes en sinus. Si la periodització es fa després d'una simetrització parell la sèrie estarà composta per cosinus. Cal destacar que en aquest cas s'aconsegueix una funció més regular (sense discontinuïtats de bot) i la sèrie de Fourier convergeix més ràpidament que en els casos anteriors.

### 1.2.1 Transformada de Fourier

L'extensió del desenvolupament en sèrie de Fourier a funcions no periòdiques dona lloc a les Transformades (integrals) de Fourier. La idea intuïtiva del procés que permet passar de les sèries a les integrals de Fourier s'esboça en els següents passos:

1. partim una funció  $f$  amb suport afinitat entre  $-\frac{a}{2}$  i  $\frac{a}{2}$ .
2. consideram la funció periòdica  $f_P$ , de període  $a$  que coincideix amb  $f$  en l'interval  $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ .

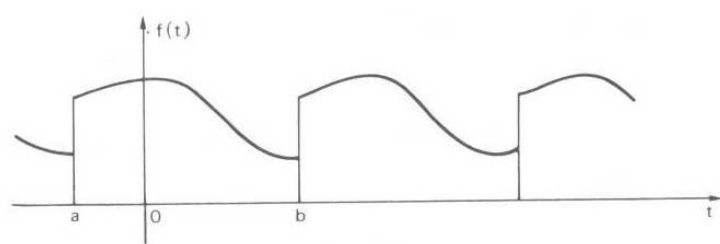


Figure 5: Tres maneres de perioditzar una funció amb suport afitat. Dalt, periodització directa. Mig, simetrització parell + periodització. Baix, simetrització imparell + periodització.

3. desenvolupam  $f_P$  en sèrie de Fourier:

$$f_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi \frac{n}{a} t}$$

$$c_n = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f_P(t) e^{-i2\pi \frac{n}{a} t} dt$$

4. ara feim tendir  $a$  cap a  $+\infty$ . De manera immediata tenim que  $\lim_{a \rightarrow +\infty} f_P(t) = f(t)$ .

5. si denotam  $\xi_n = \frac{n}{a}$ , llavors  $\Delta\xi = \xi_{n+1} - \xi_n = \frac{n+1}{a} - \frac{n}{a} = \frac{1}{a}$ . Per tant quan  $a \rightarrow +\infty$ ,  $\Delta\xi \rightarrow d\xi$  i el conjunt de valors discrets  $\xi_n$  tendeix cap a un conjunt de valors continus ( $\xi_n \rightarrow \xi$ ).

6. a partir de l'expressió dels coeficients de fourier podem escriure

$$ac_n = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f_P(t) e^{-i2\pi \xi_n t} dt$$

quan  $a \rightarrow +\infty$ , el segon membre d'aquesta igualtat tendeix cap a la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi \xi t} dt$$

si aquesta integral és finita (això passarà si  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$ , és a dir, si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ), tindrem que  $\lim_{a \rightarrow +\infty} ac_n < +\infty$ . Al valor d'aquest límit se l'anomena **transformada de Fourier** de  $f$ , i se denota  $\hat{f}(\xi)$ .

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi \xi t} dt \quad (6)$$

7. el desenvolupament en sèrie de Fourier de  $f_P$  el podem reescriure com

$$f_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (ac_n) e^{i2\pi \xi_n t} \frac{1}{a} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (ac_n) e^{i2\pi \xi_n t} \Delta\xi$$

quan  $a \rightarrow +\infty$  tenim que  $ac_n \rightarrow \hat{f}(\xi)$ ,  $\xi_n \rightarrow \xi$ ,  $\Delta\xi \rightarrow d\xi$  i  $\sum \rightarrow \int$ , per tant:

$$f(t) = \lim_{a \rightarrow +\infty} f_P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i2\pi \xi t} d\xi \quad (7)$$

Aquesta equació es coneix com **transformada inversa de Fourier**. (Cal assenyalar que aquesta no és una demostració formal de l'equació).

### Observacions.

- Notació. La transformada de Fourier d'una funció  $f$  se denota indistintament com  $\hat{f}$  o  $\mathcal{F}f$ . La transformada inversa se denota com  $\mathcal{F}^{-1}$ .
- Com ja s'ha comentat més amunt, la transformada de Fourier només pot calcular-se, en principi, per a funcions  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . De la mateixa manera, la integral (7) només es pot calcular quan  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . No obstant això, és possible estendre les definició de transformada de Fourier i de transformada inversa de Fourier a les funcions de  $L^2(\mathbb{R})$  mitjançant arguments de densitat.



- Per a funcions de  $L^2(\mathbb{R})$  se compleix que  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$  g.p.t., en canvi aixó no és cert en general si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , ja que  $\hat{f}$  pot no pertànyer a  $L^1(\mathbb{R})$ .

A continuació se presenten alguns importants resultats relatius a les transformades de Fourier.

**Teorema (Riemann-Lebesgue).** Donada una funció  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , es compleix:

- $\hat{f}$  és una funció contínua i afitada en  $\mathbb{R}$ .
- $\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \leq \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$
- $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$

**Corol·lari.** Si  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  llavors  $f$  és contínua i afitada.

**Proposició (Igualtat de Plancherel-Parseval).** Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  llavors:

i)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{h}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \bar{\hat{h}}(\xi) d\xi \quad (8)$$

ii)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad (9)$$

Aquesta darrera igualtat implica que l'energia d'un senyal es pot calcular bé directament a partir del senyal, bé a partir de la seva transformada de Fourier. A més a més ens diu que per a una funció de  $L^2(\mathbb{R})$   $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < +\infty$ .

La següent taula resumeix les propietats més importants de les transformades de Fourier (les propietats són vàlides si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  o  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ).

| Propietat              | Funció                | Transformada de Fourier              |
|------------------------|-----------------------|--------------------------------------|
|                        | $f(t)$                | $\hat{f}(\xi)$                       |
| Inversa                | $\hat{f}(t)$          | $f(-\xi)$                            |
| Translació             | $f(t - u)$            | $e^{-i2\pi\xi u} \hat{f}(\xi)$       |
| Modulació              | $e^{i2\pi ut} f(t)$   | $\hat{f}(\xi - u)$                   |
| Canvi d'escala         | $f(t/s)$              | $ s  \hat{f}(s\xi)$                  |
| Derivades temporals    | $f^{(k)}(t)$          | $(i2\pi\xi)^k \hat{f}(\xi)$          |
| Derivades freqüencials | $(-i2\pi t)^k f(t)$   | $\hat{f}^{(k)}(\xi)$                 |
| Complex conjugat       | $\bar{f} * (t)$       | $\bar{\hat{f}}(-\xi)$                |
| Simetria hermitiana    | $f(t) \in \mathbb{R}$ | $\hat{f}(-\xi) = \bar{\hat{f}}(\xi)$ |
|                        | parell                | parell                               |
|                        | imparell              | imparell                             |
|                        | real parell           | real parell                          |
|                        | real imparell         | imaginària imparell                  |

**Teorema. Principi d'incertesa.** Sigui  $f$  una funció de  $L^2(\mathbb{R})$ . Si definim la dispersió o varianca d'energia d'una funció en temps ( $\sigma_t$ ) i en freqüència ( $\sigma_\xi$ ) mitjançant les equacions (11) i (12) respectivament, resulta que

$$\sigma_t \sigma_\xi \geq \frac{1}{4\pi} \quad (10)$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|f(t)\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 dt \quad (11)$$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{1}{\|f(t)\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad (12)$$

$t_0$  i  $\xi_0$  són els valors mitjos de la funció en temps i freqüència:

$$t_0 = \frac{1}{\|f(t)\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt$$

$$\xi_0 = \frac{1}{\|f(t)\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

El que ens diu el principi d'incertesa és que és impossible tenir una funció amb suport petit en temps i freqüència simultàniament. Una funció limitada en temps tindrà una amplada d'espectre (suport de la seva transformada de Fourier) gran. I recíprocament, una funció amb un espectre petit tindrà una duració gran. El mínim de la desigualtat (8) s'aconsegueix per a la funció gaussiana.

A continuació es presenten tres exemples clàssics del càlcul de la Transformada de Fourier.

### 1.2.2 Exemples

Exemple 1  $f(t) = \mathcal{X}_{[-a,a]}$  (funció indicatriu)

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^a e^{-i2\pi\xi t} dt = \frac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}$$

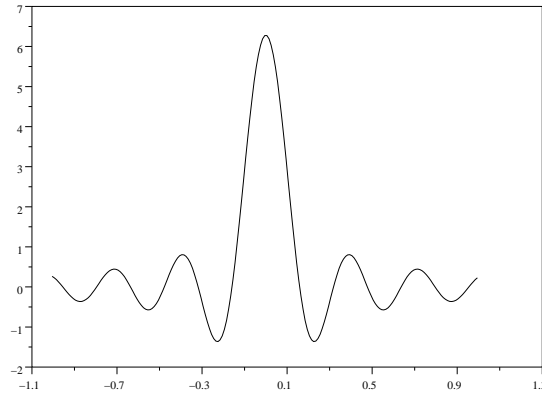


Figure 6: Funció  $\frac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}$ , amb  $a = \pi$ .

Exemple 2  $\hat{f}(\xi) = \mathcal{X}_{[-\xi_0,\xi_0]}$  (filtre passa baix ideal)

$$f(t) = \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{i2\pi\xi t} d\xi = \frac{\sin(2\pi\xi_0 t)}{\pi t}$$

Exemple 3  $f(t) = e^{-at^2}$ ,  $a > 0$  (gaussiana)

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a} \xi^2}$$

### 1.2.3 Transformada de Fourier en 2D

Les fòrmules per al càlcul de les transformades directa i inversa de Fourier s'extenen directament a 2 dimensions.

La transformada de Fourier d'una funció integrable  $f(x, y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$  de dues variables és

$$\hat{f}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx dy \quad (13)$$

Si  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ , la transformada inversa se calcula com

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi_1, \xi_2) e^{i2\pi(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (14)$$

**Propietats.**

- **Convolució.** Si definim

$$g(x, y) = (f * h)(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) h(x - u, y - v) du dv$$

llavors  $\hat{g}(\xi_1, \xi_2) = \hat{f}(\xi_1, \xi_2) \hat{h}(\xi_1, \xi_2)$ .

- **Igualtat de Plancherel.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2$$

- **Rotació.** Si s'aplica a  $f(x, y)$  una rotació amb un angle  $\theta$  en el pla  $x - y$ :

$$f_\theta(x, y) = f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

llavors la seva transformada de Fourier també queda sotmesa a una rotació amb el mateix angle:

$$\hat{f}_\theta(\xi_1, \xi_2) = \hat{f}(\xi_1 \cos \theta - \xi_2 \sin \theta, \xi_1 \sin \theta + \xi_2 \cos \theta)$$

## 1.3 Inconvenients de les transformades de Fourier. Ondetes

El principal inconvenient pràctic de l'anàlisi de Fourier és que ens proporciona una informació *global* del comportament dels senyals. Això significa que, si per exemple un senyal té una discontinuïtat brusca en un moment determinat, l'anàlisi de Fourier ens dirà que existeixen coeficients per a freqüències altes, però no ens informarà de en quin moment s'han produït aquestes altes freqüències. Només la reconstrucció del senyal original a partir dels coeficients de Fourier ens proporcionarà aquesta informació.

En els darrers anys s'ha desenvolupat i popularitzat una nova eina d'anàlisi de les funcions que ens permet localitzar la informació del seu comportament ent temps i freqüència. Estem parlant de l'anàlisi amb **ondetes** o *wavelets*.

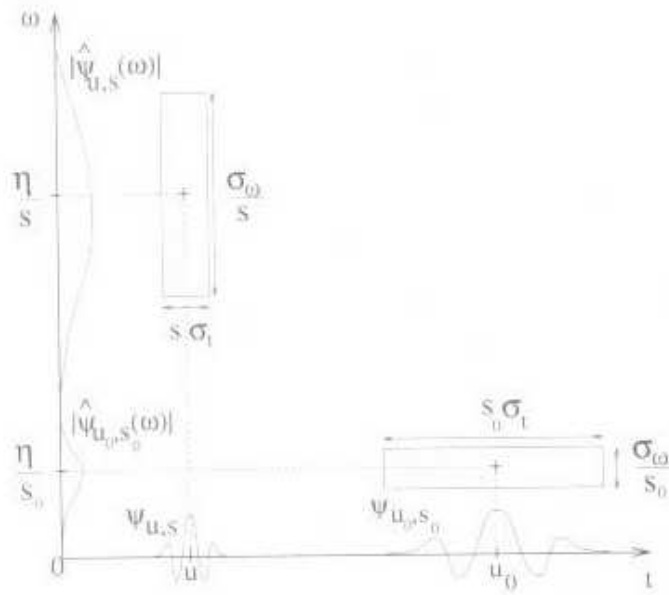


Figure 7: [Mallat]. Anàlisi en temps i freqüència mitjançant les ondets.

## 2 Discretització de senyals continus

La discretització d'una funció contínua implica agafar un conjunt finit de valors o mostres del recorregut de la funció. Aquest procés s'anomena **discretització** i el conjunt de valors resultant conformen una **funció discreta**.

Una manera de definir les funcions discretes és enumerant la seqüència de valors que pren cada una de les mostres obtingudes de la funció contínua original. Per exemple:

$$f[0] = 2, \quad f[1] = 3, \quad f[2] = 7, \quad \dots$$

La notació  $f[i]$  representa el valor de la  $i$ -èssima mostra de la funció.

La següent figura mostra la manera habitual de representar gràficament les funcions discretes.

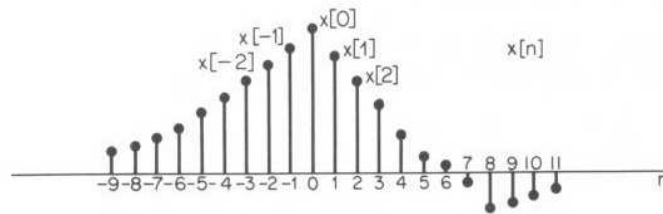


Figure 8: [Oppenheim]. Representació gràfica d'una funció discreta

Habitualment la distància (en el domini de la funció) entre les mostres consecutives es manté constant

durant tot el procés de discretització i reb el nom de **període de mostreig**. En aquests casos les funcions discretes es poden definir fàcilment a partir de les funcions originals:

$$f[n] = f(nT) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

on  $T$  és el període de mostreig.

Una tercera manera de definir una funció discreta, més útil per a l'estudi de les seves propietats, és a partir de la interacció de la funció contínua original amb unes “funcions” anomenades “deltas de Dirac”. Aquesta interacció es realitza, a nivell freqüencial, mitjançant una operació de convolució.

En la següent secció es defineix l'operació de convolució entre funcions i a continuació s'estudien les propietats de les deltes de Dirac, les quals es definiran com un cas particular d'uns operadors de funcions anomenats **distribucions**.

## 2.1 Convolució de funcions

**Definició.** Donades dues funcions de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$ , anomenam **convolució** de  $f$  i  $g$  la funció  $f * g$ , si existeix, definida com:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du$$

**Exemple.** Anam a calcular la convolució de les funcions  $f(x) = g(x) = \mathcal{X}_{[0,1]}$ .

$$f * g(x) = \int_0^1 \mathcal{X}_{[0,1]}(x-t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

La Figura 2.1 mostra les funcions inicials i el resultat de la convolució.

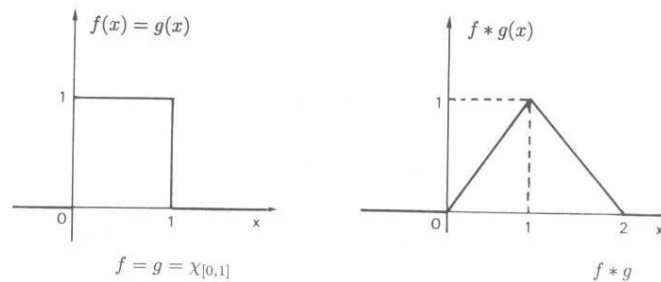


Figure 9: [Gasquet-Witomski]. Funció  $f(x) = g(x) = \mathcal{X}_{[0,1]}$  i resultat de  $f * g$ .

En aquest senzill exemple podem apreciar dues importants propietats de la convolució:

- la convolució de dues funcions discontinues és contínua
- el suport de la convolució de  $f * g$  està contingut en la suma dels suports de les funcions  $f$  i  $g$

En general podem dir que la convolució és una operació que *regularitza* i extén el domini de les funcions amb les quals opera.

La següent taula resum els resultats relatius a la convolució de diferents tipus de funcions:

$$\begin{array}{lll}
L^1 * L^1 & \longrightarrow & L^1 \\
L^1 * L^\infty & \longrightarrow & L^\infty \cap \mathcal{C}^0 \\
L^2 * L^2 & \longrightarrow & L^\infty \cap \mathcal{C}^0 \\
L^2 * L^1 & \longrightarrow & L^2 \\
\mathcal{C}_c^0 * \mathcal{C}_c^0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_c^0
\end{array}$$

On  $L^1 = L^1(\mathbb{R})$ ,  $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ ,  $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R})$  i  $\mathcal{C}_c^0$  fa referència a les funcions contínues amb suport afinitat

La següent proposició és molt important perquè relaciona la convolució de funcions amb la transformada de Fourier.

**Proposició.** Donades dues funcions  $f$  i  $g$  de  $L^1(\mathbb{R})$ , tenim que

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) \cdot \mathcal{F}g(\xi)$$

si a més  $\hat{f}$  i  $\hat{g}$  són de  $L^1(\mathbb{R})$ , llavors:

$$\mathcal{F}(f \cdot g)(\xi) = \widehat{f \cdot g}(\xi) = \hat{f}(\xi) * \hat{g}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) * \mathcal{F}g(\xi)$$

Aquestes propietats es poden estendre per a funcions de  $L^2(\mathbb{R})$ , emprant arguments relatius a la densitat de les funcions de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  en  $L^2(\mathbb{R})$ .

## 2.2 Distribucions

L'any 1930, en el seu famós llibre *Principis de la mecànica quàntica*, el físic Paul Dirac va posar de relleu la importància de la “funció”  $\delta$  (anomenada **delta de Dirac**), la qual va definir mitjançant les següents propietats:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Aquesta definició té l'origen en l'estudi de certs fenòmens físics on una magnitud experimenta una variació brusca en un interval de temps molt petit (per exemple, l'espai recorregut per un objecte quan se li dóna un cop sobtat). El model idealitzat per a aquest tipus de comportament és la funció de Heaviside o funció esglaó unitari (Figura 10). Ens alguns casos interessarà també calcular les derivades d'aquestes funcions (com per exemple per calcular la velocitat de l'objecte en moviment). El problema que se presenta és que, si bé és perfectament possible calcular les derivades de les funcions que representen un canvi brusca de la magnitud (Figura 11), això no és possible per al model idealitzat (l'esglaó unitari).

En efecte, la derivada d'aquesta funció no existeix per a  $x = 0$  i per a la resta de valors val 0. A més aquest resultat no és correspon amb el que esperam trobar com a comportament límit de la derivada de les funcions aproximades. La “funció”  $\delta$  va ésser un invent dels físics per solucionar aquest problema i les seves propietats es deriven de les propietats de les funcions de les quals és límit:

- en el límit el valor de la derivada de l'esglaó unitari es concentra en el punt  $x = 0$
- la integral, entre  $-\infty$  i  $+\infty$ , de la derivada d'una funció esglaó real (Figura 10) val sempre 1, per tant, la integral de  $\delta(x)$  ha de valer 1

Una altra propietat important de  $\delta(x)$  que és dedueix de les anteriors és la següent:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$$

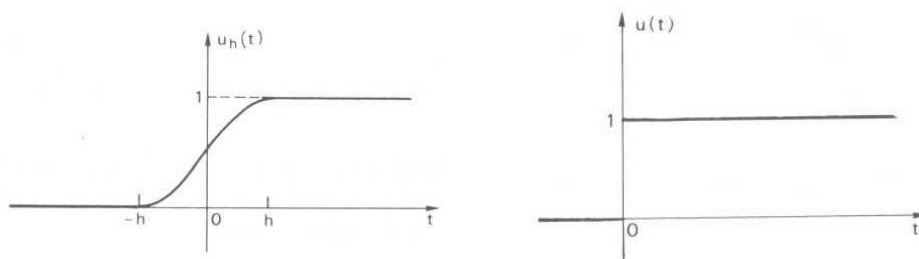


Figure 10: [Gasquet-Witomski]. Esquerra, funció esglaó real. Dreta, idealització de la funció anterior (funció esglaó unitari o de Heaviside).

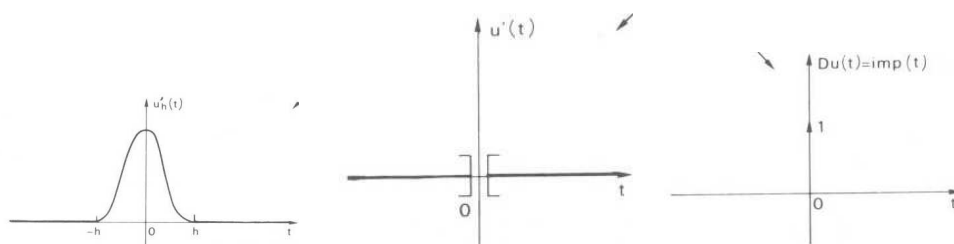


Figure 11: [Gasquet-Witomski]. Esquerra, derivada d'una funció esglaó real. Centre, derivada de la funció esglaó ideal. Dreta, idealització de la derivada de l'esglaó real (delta de Dirac o impulsió).

i a més  $\delta(t - a) = \delta(a - t)$ .

La propietat  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$  contradiu la definició d'integral utilitzada pels matemàtics (la integral de Lebesgue de  $\delta(x)$  és nula), per tant la "funció"  $\delta$  no té sentit des d'un punt de vista matemàtic, malgrat la seva gran utilitat pràctica. Vàren haver de passar 20 anys fins que els matemàtics (especialment L. Schwartz i S.L. Sobolev) donassin sentit a la  $\delta$  de Dirac, en el marc d'una teoria més àmplia anomenada **Teoria de les Distribucions**. Actualment les distribucions són indispensables en l'anàlisi matemàtica i les matemàtiques aplicades.

**Definició.** Sigui  $\mathcal{D}$  l'espai de les funcions  $\mathcal{C}^\infty$  que s'anul·len fóra d'un cert interval ( $\mathcal{D}$  és conegut com l'**espai de les funcions test o prova**). Una **distribució**  $T$  és una transformació lineal i contínua  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ . La continuïtat de  $T$  significa que si  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  uniformement en conjunts afitats, totes les derivades de  $\varphi_n$  convergeixen uniformement a les derivades de  $\varphi$  en conjunts afitats i totes les funcions  $\varphi_n$  s'anul·len fora d'un conjunt compacte fixe, llavors  $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$ .

La variable d'una distribució és per tant una funció test i el seu valor una nombre complex. La valor de  $T$  en  $\varphi$  es denotarà de manera indiferent com a  $T(\varphi)$  o  $\langle T, \varphi \rangle$ .

### Exemples.

**Exemple 1.** Distribució delta de Dirac. Donat un nombre real  $a$  definim l'aplicació  $\delta_a : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  com  $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ . Es pot demostrar que aquesta és una aplicació lineal i contínua. Per a  $a = 0$  la denotam simplement com  $\delta$ .

Podem observar com hem definit la distribució delta a partir d'una de les seves propietats: la que defineix la seva interacció amb altres funcions.

**Exemple 2.** Pinta de Dirac. Aquesta distribució es denota com  $T = \Delta_a = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{na}$  i es defineix de la

següent manera:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad T(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(na)$$

**Les distribucions com a funcions generalitzades.** La majoria de les funcions es poden considerar com distribucions mitjançant la identificació que resulta del següent teorema:

**Teorema.** Si  $f$  és una funció localment integrable ( $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ), llavors l'aplicació  $T_f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  definida com

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (15)$$

és una distribució.

El teorema precedent implica que a qualsevol funció de  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  li podem assignar una distribució. A més, és possible demostrar que aquesta assignació és única:

$$T_f = T_g \iff f = g \quad \text{g.p.t} \quad (16)$$

De manera que podem identificar  $f$  amb la seva distribució associada.

**Derivació de distribucions.** Aquesta definició ha d'ésser consistent amb la definició de derivada d'una funció, tenint en compte que una distribució es pot considerar com una generalització del concepte de funció. Una manera de generalitzar la definició de derivada és a partir de l'equació (15) i la fórmula de la derivació per parts:

$$\begin{aligned} \langle T_{f'}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \left\{ \begin{array}{ll} du = f'(x)dx & \rightarrow u = f(x) \\ v = \varphi(x) & \rightarrow dv = \varphi'(x)dx \end{array} \right\} = \\ &= (f(x)\varphi(x))_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \\ &= -\langle T_f, \varphi' \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

la penúltima igualtat és deguda a que  $\varphi(x)$  té suport afinitat i per tant  $\varphi(-\infty) = \varphi(+\infty) = 0$ .

En general s'extén aquesta definició per a qualsevol distribució diguent que la derivada  $T'$  de la distribució  $T$  compleix:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

### Exemples.

Exemple 1. Derivada de  $\delta_a$ .

$$\delta'_a(\varphi) = \langle \delta'_a, \varphi \rangle = -\langle \delta_a, \varphi' \rangle = -\varphi'(a)$$

Exemple 2. Derivada de l'esglaó unitari. Recordem que

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$$

llavors

$$\begin{aligned} \langle T'_u, \varphi \rangle &= -\langle T_u, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \\ &= -(\varphi(+\infty) - \varphi(0)) = -(0 - \varphi(0)) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

per tant la derivada de la funció esglaó unitari és la  $\delta$  de Dirac, la qual cosa coincideix amb la noció intuïtiva de  $\delta(x)$  que s'ha comentat al començament d'aquesta secció.



**Derivació de funcions amb discontinuïtats.** L'expressió per a la derivada d'una distribució deduïda en (17) només té sentit si  $f'(x)$  està definida per a tots els valors de  $\mathbb{R}$ . Per a una funció  $f$  discontinua la  $f'(x)$  no està definida en els punts de discontinuïtat. No obstant, si la funció és derivable entre els punts de discontinuïtat i en aquests punts el límit de la funció a esquerra i a dreta és finit, la derivada en el sentit de les distribucions es pot calcular.

Considerem una funció contínuament derivable en els intervals  $(-\infty, a)$ ,  $(a, b)$  i  $(b, +\infty)$ , amb límits laterals següents en els punts de discontinuïtat:  $f(a-)$ ,  $f(a+)$ ,  $f(b-)$ ,  $f(b+)$ . Llavors la derivada en el sentit de les distribucions de  $f$  és

$$T'_f = T_{f'} + (f(a+) - f(a-))\delta_a + (f(b+) - f(b-))\delta_b$$

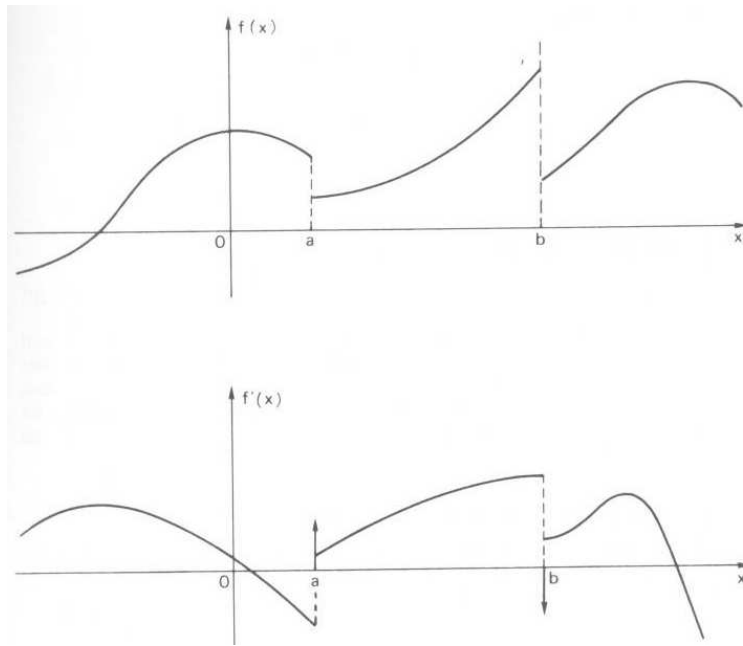


Figure 12: Derivada, en el sentit de les distribucions d'una funció discontinua.

En general, per a un nombre  $m$  de discontinuïtats apareixeran  $m$  distribucions puntuals  $\delta$  situades en els punts de discontinuïtat i afectades per un coeficient igual a la magnitud del bot de discontinuïtat.

**Exemple.** La derivada en el sentit de les distribucions de la funció periòdica definida en  $(0, a)$   $f(x) = \frac{x}{a}$  és  $f' = \frac{1}{a} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{na}$

**Teorema. Derivada terme a terme d'una sèrie.** Sigui  $((u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  una successió de funcions absolutament contínues sobre tot interval afinitat tal que la sèrie  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  convergeix en el sentit de les distribucions cap a una funció  $f$  localment integrable. Llavors la sèrie derivada  $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$  convergeix en el sentit de les distribucions cap a la derivada  $f'$  de  $f$ .

**Propietat.** Direm que dues distribucions  $T_1$  i  $T_2$  són iguals si  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ ,  $\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$ .

La següent expressió s'empLEARÀ més endavant en aquest tema.

**Fòrmula de Poisson.**

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - na) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi n \frac{x}{a}} \quad (18)$$

**Transformada de Fourier de distribucions.** Seguint el mateix raonament que ens ha permès trobar una expressió per a la derivada d'una distribució compatible amb la noció habitual de derivada, ara volem trobar una expressió per a la transformada de Fourier d'una distribució compatible amb la definició clàssica. Novament partim de l'equació (15) i en aquest cas aplicam el Teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}\langle \hat{f}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx \right) \varphi(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\xi x} \varphi(\xi) d\xi dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{\varphi}(x) dx = \langle f, \hat{\varphi} \rangle\end{aligned}$$

per tant

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad (19)$$

Evidentment el raonament anterior no té sentit si  $\hat{\varphi}$  no pertany a l'espai de les funcions test. El problema és que si  $\varphi \in \mathcal{D}$  llavors  $\hat{\varphi}$  no estarà dins  $\mathcal{D}$ . Això ens porta a considerar un nou espai de funcions test, denotat  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  i que representa les funcions amb decreixement ràpid (una funció  $f$  és de decreixement ràpid si  $\forall p \in \mathbb{N} \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^p f(x)| = 0$ ). Aquest espai de funcions és estable per transformacions de Fourier i ens defineix un nou tipus de distribucions anomenades **distribucions temperades**. Les distribucions temperades formen un subespai de l'espai de distribucions habituals. L'equació (19) té sentit quan ens referim a les distribucions temperades.

### Exemples.

Exemple 1. Delta de Dirac.

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

De la mateixa manera

$$\langle \hat{\delta}_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi a \lambda} \varphi(\lambda) d\lambda$$

i per tant  $\hat{\delta}_a(\xi) = e^{-i2\pi a \xi}$ .

Exemple 2. Pinta de Dirac.

$$\widehat{\Delta}_a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{\delta}_{na} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi n a \xi} = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{\frac{n}{a}} = \frac{1}{a} \Delta_{\frac{1}{a}}$$

la darrera igualtat s'obté a partir de la fórmula de Poisson.

**Utilització pràctica de la distribució delta.** De la mateixa manera que a una funció  $f$  li assignam la distribució  $T_f$  definida per l'equació (15), en la pràctica associam la distribució  $\delta$  a una “funció”  $\delta(t)$  tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Aquesta  $\delta(t)$  és la clàssica delta de Dirac.

De manera anàloga, la distribució pinta de Dirac  $\Delta_a$  s'associa a la “funció”

$$\Delta_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - na)$$

En els càlculs que desenvoluparem en els següents apartats treballarem amb aquestes “funcions”.

Arribats a aquest punt ja disposam de totes les eines necessàries per estudiar, des d'un punt de vista matemàtic, el procés de discretització.

## 2.3 Mostreig de funcions. Teorema de Shannon.

### 2.3.1 Representació de funcions discretes.

Com ja s'ha comentat al principi d'aquesta secció una manera de descriure una funció discreta és mitjançant la notació

$$f[n] = f(nT), \quad n \in \mathbb{Z}$$

on  $f(t)$  és la funció contínua original i  $T$  el període de mostreig.

No obstant aquesta representació no és útil si volem, per exemple, calcular la transformada de Fourier de la funció discreta. En aquest cas és necessari disposar d'una representació en funció de la variable  $t$ . Una possibilitat és definir la versió discreta de  $f(t)$  com

$$f_d(t) = \begin{cases} f(nT) & \text{si } t = nT, \quad n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$$

El problema d'aquesta representació és que  $f_d(t)$  només pren valors no nuls en un conjunt discret de punts, els quals tenen mesura zero i per tant qualsevol calcul integral que intentem (per exemple una transformada de Fourier) valdrà zero.

Una manera d'evitar aquest inconvenient és definint  $f_d$  com una distribució. En particular, definim  $f_d$  com la distribució que té associada la “funció”

$$f_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT) \quad (20)$$

Gràficament aquesta funció és representa com en la Figura 13.

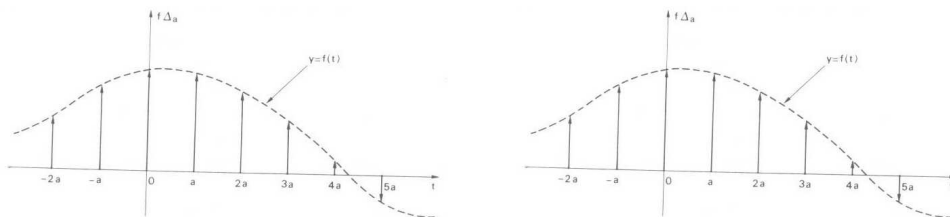


Figure 13: [Oppenheim] Esquerra, funció mostrejada amb una pinta de Dirac o tren d'impulsos. Dreta, funció discreta.

Com que  $f_d$  és una distribució i s'escriu com una suma ponderada de deltes, podem calcular la seva transformada de Fourier aplicant els resultats que hem vist a la secció anterior:

$$\hat{f}_d(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\widehat{\delta(t - nT)}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)e^{-i2\pi nT\xi} \quad (21)$$

És possible arribar a aquest resultat raonant d'una altra manera i sense recórrer a la teoria de les distribucions.

Consideram una funció  $\tilde{f}_d(t)$  que aproxima la funció discretitzada.

$$\tilde{f}_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) D_\epsilon(t - nT)$$

on  $D_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} \chi_{[-\epsilon, +\epsilon]}$ . Podem considerar aquesta funció com una aproximació de la funció  $\delta(t)$ . A més  $\int_{\mathbb{R}} D_\epsilon(t) dt = 1$ .

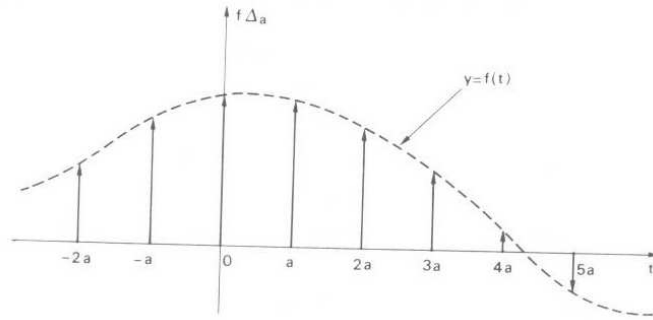


Figure 14: Representació aproximada d'una funció discreta

Definida d'aquesta manera la funció  $\tilde{f}(t)$  pren els valors

$$\tilde{f}_d(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} f(nT) & \text{si } t \in [nT - \frac{\epsilon}{2}, nT + \frac{\epsilon}{2}], \quad n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$$

Si calculam la transformada de Fourier d'aquesta funció obtenim el següent resultat

$$\begin{aligned} \hat{f}_d(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) e^{-i2\pi\xi t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\epsilon} f(nT) \int_{nT-\frac{\epsilon}{2}}^{nT+\frac{\epsilon}{2}} e^{-i2\pi\xi t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) e^{-i2\pi\xi nT} \frac{\sin(\pi\xi\epsilon)}{\pi\xi\epsilon} \end{aligned}$$

Si ara fem  $\epsilon$  tendir cap a zero  $\tilde{f}_d$  tendeix cap a  $f_d$  i la seva transformada tendeix cap a  $\hat{f}_d$

$$\hat{f}_d(\xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{\tilde{f}}_d(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) e^{-i2\pi\xi nT} \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\xi\epsilon)}{\pi\xi\epsilon} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) e^{-i2\pi\xi nT}$$

on el límit s'ha calculat utilitzant la regla de l'Hôpital.

Podem observar com aquesta és la mateixa expressió a la qual arribàvem emprant en raonament bassat en les deltes de Dirac.

La següent proposició relaciona les transformades de Fourier de  $f_d$  i  $f$ .

**Proposició.** La transformada de Fourier d'un senyal discret  $f_d$  obtingut per mostreig de  $f$  a intervals  $T$  val

$$\hat{f}_d(\xi) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\xi - \frac{n}{T}\right) \quad (22)$$

Dem. Com que  $\delta(t - nT)$  és nul fora de  $t = nT$  podem dir que

$$f(nT)\delta(t - nT) = f(t)\delta(t - nT)$$

de manera que podem reescriure l'expressió (20) com

$$f_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - nT) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = f(t)\Delta_T(t)$$

La transformada de Fourier de  $f_d(t)$  serà per tant

$$\begin{aligned}\hat{f}_d(\xi) &= \widehat{f(\xi) * \Delta_T}(\xi) = \hat{f}(\xi) * \frac{1}{T}\Delta_{\frac{1}{T}}(\xi) = \\ &= \frac{1}{T}\hat{f}(\xi) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - \frac{n}{T}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) * \delta(\xi - \frac{n}{T}) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi - \frac{n}{T})\end{aligned}$$

□

La proposició anterior mostra que el mostreig de  $f$  a intervals  $T$  fa la seva transformada de Fourier  $\frac{1}{T}$ -periòdica, degut a la suma de les versions transladades  $\hat{f}(\xi - \frac{n}{T})$ . La següent figura mostra un exemple de la transformada de Fourier d'una funció i de la seva versió discreta.

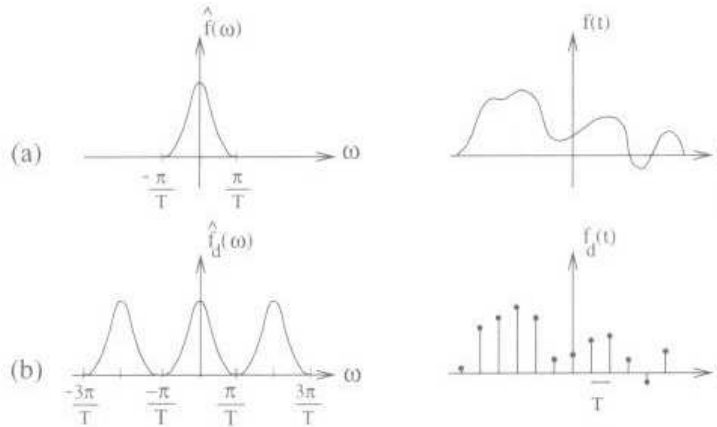


Figure 15: [Mallat]. (a) Senyal  $f$  i la seva Transformada de Fourier  $\hat{f}$ . (b) Un mostreig uniforme de  $f$  fa la seva transformada de Fourier periòdica.

### 2.3.2 Reconstrucció d'un senyal continu a partir de les seves mostres. Teorema de mostreig.

El següent teorema ens diu quines condicions s'han de complir per poder reconstruir un senyal continu a partir de les seves mostres i també ens dóna una fórmula per a la reconstrucció.

**Teorema de mostreig (Shannon-Whitaker).** Si el suport de  $\hat{f}$  està inclòs dins  $[-\frac{1}{2T}, +\frac{1}{2T}]$  llavors

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)h_T(t - nT) \quad (23)$$

on

$$h_T(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

Dem. Com que  $\hat{f}(\xi) = 0$  quan  $|\xi| > \frac{1}{2T}$  el suport de  $\hat{f}(\xi)$  i el de  $\hat{f}(\xi - \frac{n}{T})$  tenen intersecció nul·la per a  $n \neq 0$ , per tant

$$\hat{f}_d(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{T} \quad \text{si} \quad |\xi| < \frac{1}{2T} \quad (24)$$

Com el suport de  $\hat{f}$  està dins  $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$  podem escriure que

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} T\hat{f}_d(\xi) & \text{si} \quad |\xi| < \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{resta} \end{cases} = T\hat{f}_d(\xi)\mathcal{X}_{[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]}$$

Ara bé, la transformada de Fourier de  $h_T$  val  $T\mathcal{X}_{[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]}$  per tant

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_d(\xi)\hat{h}_T(\xi)$$

i en conseqüència (emprant la igualtat (20))

$$\begin{aligned} f(t) = f_d(t) * h_T(t) &= h_T(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)(h_T(t) * \delta(t - nT)) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)h_T(t - nT) \end{aligned}$$

□

La condició de que el suport de  $\hat{f}$  estigui limitat a un cert rang de freqüències s'interpreta intuitivament com una exigència a la funció  $f$  perquè no varii de manera brusca entre dues mostres consecutives, de manera que la interpol·lació entre els valors de les mostres sigui possible.

El valor  $\frac{1}{2T}$ , que defineix el suport màxim de  $\hat{f}$  que assegura la reconstrucció de  $f$ , reb el nom de **freqüència de Nyquist**.

### 2.3.3 Aliasing

Fins ara hem considerat el problema del mostreig des del punt de vista de les condicions que ha de complir el senyal mostrejat per poder reconstruir el senyal original a partir de les mostres. Un plantejament diferent del problema és considerar que el senyal continu ens ve donat i volem saber quina és la millor manera de mostrejar-lo. Això equival a trobar el valor de  $T$  que ens permet tenir el mínim nombre de mostres a partir de les quals reconstruir el senyal original.

En primer lloc és evident que el nombre de mostres serà més petit com major sigui  $T$ . Per altra banda, si el suport freqüencial del senyal continu es troba en l'interval  $[-\xi_{\max}, +\xi_{\max}]$ , s'haurà de complir que  $\frac{1}{2T} \geq \xi_{\max}$ . Per tant el valor òptim del període de mostreig és  $T_{\max} = \frac{1}{2\xi_{\max}}$ . Si el senyal presenta ràpides oscil·lacions ( $\xi_{\max}$  gran) el període de mostreig haurà d'ésser petit; en canvi, si el senyal varia lentament  $T$  podrà ésser major. Això coincideix amb la intuïció: quan un senyal varia molt s'hauran de prendre més mostres que quan el senyal varia poc.

Quan el període de mostreig és superior al límit imposat pel teorema de Shannon, el nombre de mostres és insuficient per reconstruir el senyal original. A nivell freqüencial això implica que els espectres repetits del senyal original es solapen. Aquest fenomen es coneix amb el nom d'**aliasing**.

La següent figura mostra el procés de reconstrucció d'un senyal mostrejat complint els requisits del teorema de mostreig. La figura 17 mostra l'efecte de l'aliasing.

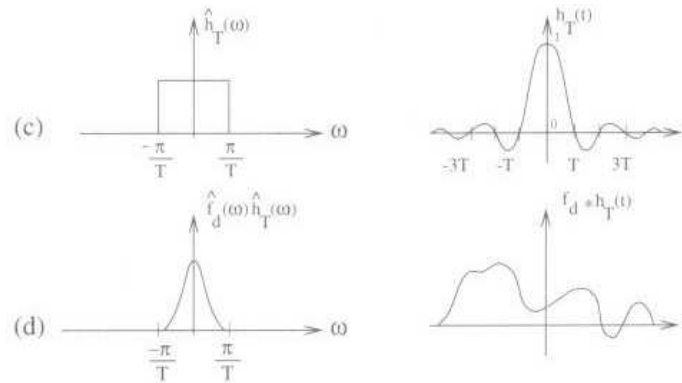


Figure 16: [Mallat]. Reconstrucció del senyal de la figura 15 a partir de les seves mostres. (c) Funció de reconstrucció en el domini temporal i freqüencial. (d) Resultat del producte de les transformades de  $h_T$  i de  $\hat{f}$  i senyal reconstruïda. Observar com el senyal reconstruït coincideix amb el senyal original.

### 3 Transformada Discreta de Fourier

Ens plantejam en aquesta secció el problema de calcular la transformada de Fourier d'un senyal discret  $x[n]$  format per  $N$  mostres del senyal continu  $x(t)$ . Com ja s'ha raonat a la secció 2.3, la transformada de Fourier d'una funció discreta  $x_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta(t - nT)$ , vé donada per l'expressió

$$\hat{x}_d(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-i2\pi\xi nT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{x}\left(\xi - \frac{n}{T}\right)$$

on  $T$  és el període de mostreig,  $x[n] = x(nT)$  i  $\hat{x}(\xi)$  la transformada de Fourier del senyal continu original.  $\hat{x}_d(\xi)$  és una funció periòdica de període  $\frac{1}{T}$ .

Si consideram que el suport del senyal continu original está comprés entre 0 i  $a$ , i que les  $N$  mostres s'han agafat equiespaiades, tndrem que el període de mostreig és  $T = \frac{a}{N}$  i l'equació anterior es pot escriure de la següent manera:

$$\hat{x}_d(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i2\pi\xi n \frac{a}{N}}$$

a més el període de  $\hat{x}_d(\xi)$  serà  $\frac{N}{a}$ , és a dir, la funció queda totalment determinada pels valors que pren entre 0 i  $\frac{N}{a}$ . Si en aquest interval prenim  $N$  mostres equiespaiades obtenim una nova funció discreta:

$$\hat{x}[k] = \hat{x}_d\left(\frac{k}{a}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (25)$$

$\hat{x}[k]$  és per tant una versió discreta de  $\hat{x}_d(\xi)$ , on les mostres s'han agafat per a valors de  $\xi \in \{0, \frac{1}{a}, \dots, \frac{N-1}{a}\}$ . Aquesta funció rep el nom de **Transformada Discreta de Fourier** (o **DFT**) de  $x[n]$ .

Ens plantejam ara el problema invers a l'anterior: volem calcular la transformada inversa de Fourier a partir de  $N$  mostres d'una funció  $\hat{x}(\xi)$ . El problema és molt similar a l'anterior i podem fer el mateix raonament.

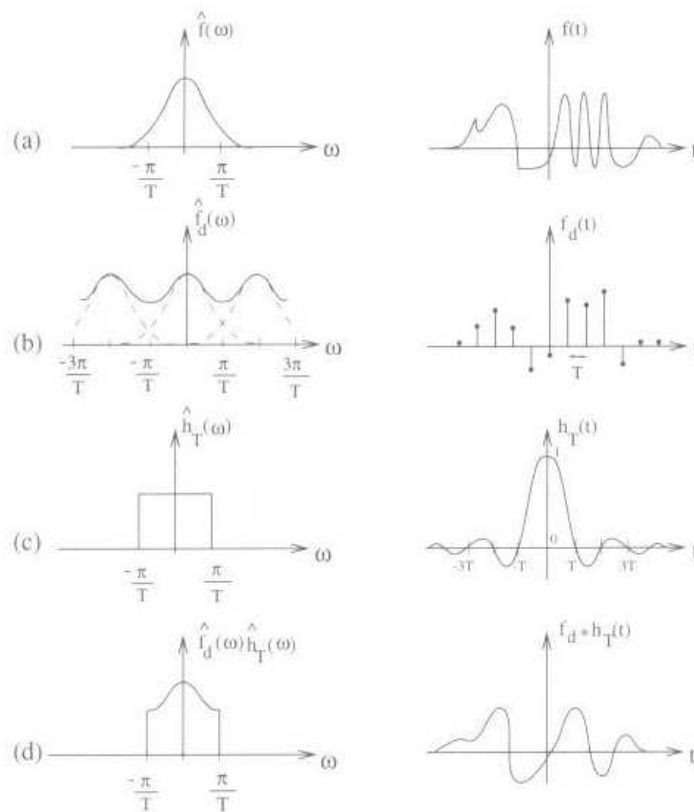


Figure 17: [Mallat]. (a) Senyal original i la seva transformada de Fourier. (b) Senyal discret obtingut amb un període de mostreig que no verifica les condicions del Teorema de Shannon. Observar el solapament de funcions a nivell freqüencial (aliasing). (c) Funció de reconstrucció en el domini temporal i freqüencial. (d) Resultat del producte de les transformades de  $h_T$  i de  $\hat{f}$  i senyal reconstruïda. Observar com el senyal reconstruït no coincideix amb el senyal original: les variacions ràpides han estat eliminades.



Consideram la funció discreta en freqüència  $\hat{x}'_d(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{x}'[k]\delta(\xi - kT_\xi)$ , on  $T_\xi$  és el període de mostreig en freqüència. Volem calcular la seva transformada de Fourier inversa. Fent un càlcul molt similar al de la secció 2.3 obtenim les següents expressions:

$$x'_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{x}'[k]e^{i2\pi tkT_\xi} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x'(t - \frac{k}{T_\xi})$$

on  $\hat{x}'[k] = \hat{x}'(kT_\xi)$  i  $x'(t)$  és la transformada inversa de Fourier del senyal continu  $\hat{x}'(\xi)$ .  $x'_d(t)$  és una funció periòdica en temps, amb període  $\frac{1}{T_\xi}$ .

Si consideram que el suport de la funció  $\hat{x}'(\xi)$  està comprès entre les freqüències  $-\frac{\xi_M}{2}$  i  $\frac{\xi_M}{2}$  i que les  $N$  mostres s'han pres equiespaiades, llavors  $T_\xi = \frac{\xi_M}{N}$  i les expressions anteriors s'escriuen com

$$x'_d(t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} \hat{x}'[k]e^{i2\pi tk\frac{\xi_M}{N}} \quad (26)$$

Aquesta és una funció periòdica que podem mostrejar amb  $N$  valors equiespaiats en el seu període principal (entre 0 i  $\frac{\xi_M}{N}$ ). Obtenim la funció discreta següent:

$$x'[n] = x'_d(\frac{n}{\xi_M}) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} \hat{x}'[k]e^{i2\pi k\frac{n}{N}} \quad n = 0, \dots, N-1$$

Podem reescriure aquesta equació si fem les següents consideracions: suposam que les mostres de  $\hat{x}'(\xi)$  s'han guardat en un vector amb indexos positius tal que les mostres corresponents a freqüències negatives ocupen les posicions  $\frac{N}{2}$  (el valor  $\hat{x}'_d(-\frac{N}{2}T_\xi)$ ),  $\frac{N}{2} + 1$  (el valor  $\hat{x}'_d((-\frac{N}{2} + 1)T_\xi)$ ), i així successivament fins a la posició  $N - 1$  per al valor  $\hat{x}'_d(-1)$ . A més, tenim que  $e^{i2\pi k\frac{n}{N}}$  és una funció periòdica de període  $N$ . De manera que la fórmula anterior es pot escriure com:

$$x'[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}'[k]e^{i2\pi k\frac{n}{N}}$$

Anomenam **Transformada Inversa Discreta de Fourier** (o **IDFT**) de  $\hat{x}'[k]$  a l'expressió anterior multiplicada per un factor constant  $\frac{1}{N}$ :

$$x'[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}'[k]e^{i2\pi k\frac{n}{N}} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (27)$$

Per acabar aquesta secció estudiar la relació entre les equacions (25) i (27). És a dir, podem afirmar que  $\text{IDFT}\{\text{DFT}\{x[n]\}\} = x[n]$ ?

I que  $\text{DFT}\{\text{IDFT}\{\hat{x}[k]\}\} = \hat{x}[k]$ ?

Respecte a la primera pregunta, si consideram que el mostreig de  $x[n]$  s'ha fet respectant les condicions del teorema de Shannon, llavors la DFT, com a versió mostrejada de la transformada de Fourier del senyal discret, no presenta aliasing. Per tant, la DFT és igual a una versió discreta de la transformada de Fourier del senyal original i el resultat d'aplicar-li la IDFT serà un senyal idèntic a l'original.

Però què passa si el mostreig de  $x[n]$  no compleix les condicions de Shannon? En aquest cas, el senyal continu obtingut en aplicar l'equació (26) als valors de la DFT és diferent del senyal continu  $x(t)$  original.

No obstant això, la següent proposició ens diu que en els punts de discretització ambdós senyals prenen els mateixos valors.

**Proposició.** Per a qualsevol senyal discret  $x[n]$  es compleix  $x[n] = \text{IDFT}\{\text{DFT}\{x[n]\}\}$ .

*Dem.* Sigui  $\hat{x}[k] = \text{DFT}x[n]$  i  $x'[n] = \text{IDFT}\hat{x}[k]$ . Hem de demostrar que  $x'[n] = x[n]$ ,  $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$ . Tenim que

$$\begin{aligned} x'[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] e^{i2\pi k \frac{n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} \right) e^{i2\pi k \frac{n}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \left( \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi k \frac{n-m}{N}} \right) \end{aligned}$$

el sumatori entre parèntesi val  $N$  quan  $m = n$  i 0 per a la resta de valors de  $m$ , per tant  $x'[n] = \frac{1}{N} x[n] N = x[n]$ .

□

Seguint un raonament similar podem demostrar que també es compleix la igualtat  $\text{DFT}\{\text{IDFT}\{\hat{x}[k]\}\} = \hat{x}[k]$ .

### Observacions.

- Les funcions discretes obtingudes del càlcul de la DFT o la IDFT són sempre funcions periòdiques, de període  $N$ .
- Si definim  $D_N$  com el conjunt de les funcions discretes periòdiques, de període  $N$ , formades per  $N$  mostres equiespaiades, llavors la família de funcions  $e_k[n] = e^{i2\pi \frac{k}{N} n}$  són base de  $D_N$ . Podem interpretar la IDFT com l'expressió de  $x[n]$  en aquesta base, de manera que les components de  $x[n]$  en la base són la DFT.

## 3.1 Transformada ràpida de Fourier (FFT)

El càlcul de la DFT per a senyals formats per moltes mostres és lent, de l'ordre de  $N^2$  operacions (entre sumes i multiplicacions) per a un senyal de  $N$  mostres. Per exemple, si  $N = 262144$  (nombre de mostres que correspon a una imatge de tamany mitjà, de  $512 \times 512$  píxels), llavors el càlcul de la DFT necessita més de  $6.87 \times 10^{10}$  operacions. Fa uns anys, quan els ordinadors més ràpids tenien processadors de 1 MHz, el temps de càlcul hauria estat del voltant de  $6.87 \times 10^{10} \times 10^{-6} \approx 19$  hores!!

Actualment els ordinadors són més ràpids i poden tardar alguns minuts en calcular la DFT. No obstant, el processament digital d'imatges no s'hagués desenvolupat fins al punt que l'ha fet si en 1965 J.W.Cooley i J.W.Tuckey no haguessin inventat un algoritme ràpid per al càlcul de la DFT, l'anomenat FFT (Fast Fourier Transform). Podem dir sense cap mena de dubte que la revolució digital de les darreres dècades deu molt a aquest algoritme.

La FFT permet calcular la transformada discreta de Fourier d'un senyal de  $N$  mostres emprant  $N \log_2 N$  operacions. Per a l'exemple anterior amb  $N = 262144$  això implica unes 4718592 operacions que es poden realitzar en 4.7 segons amb un ordinador amb processador de 1 MHz (comparat amb les 19 hores de l'algoritme original!!).

Una versió senzilla de la FFT, que serveix quan  $N$  és una potència de 2 ( $N = 2^m$ ), és la següent:

Per a les freqüències parells s'agrupen els termes  $n$  i  $n + \frac{N}{2}$ :

$$\hat{x}[2k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (x[n] + x[n + \frac{N}{2}]) e^{-i2\pi \frac{kn}{N/2}} \quad (28)$$

per a les freqüències imparells també agrupam els termes  $n$  i  $n + \frac{N}{2}$ :

$$\hat{x}[2k+1] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-i2\pi \frac{n}{N}} (x[n] - x[n + \frac{N}{2}]) e^{-i2\pi \frac{kn}{N/2}} \quad (29)$$

Ara bé, (28) és la DFT del senyal periòdic  $x[n] + x[n + \frac{N}{2}]$  i (29) és la DFT de  $e^{-i2\pi \frac{n}{N}} (x[n] - x[n + \frac{N}{2}])$ . De manera que la DFT de  $x[n]$  se calcula com 2 DFT de senyals amb la meitat de mostres. Repetint el procés de divisió del senyal en senyals de tamany cada vegada més petit arribam a un algoritme de càlcul amb  $N \log_2 N$  operacions.

### 3.2 Transformada Discreta de Fourier en 2D

Una part molt important del tractament del senyal està orientada al tractament d'imatges, és necessari per tant adaptar l'anàlisi del senyal discret al cas bidimensional.

En l'apartat 1.2.3 hem vist les expressions de les transformades de Fourier directa i inversa en el cas bidimensional. Anam ara a estudiar la discretització d'aquestes expressions.

Sigui  $f_d(x, y)$  la versió discreta de  $f(x, y)$ :

$$f_d(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } x = nT_1 \text{ i } y = mT_2 \quad n, m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrement} \end{cases}$$

llavors podem escriure  $f_d$  en funció de les deltes de Dirac com

$$f_d(x, y) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} f(nT_1, mT_2) \delta(x - nT_1) \delta(y - mT_2)$$

i podem aplicar el mateix anàlisi fet en una dimensió per obtenir:

$$\hat{f}_d(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi_1 - \frac{k_1}{T_1}, \xi_2 - \frac{k_2}{T_2})$$

És a dir, hi ha una periodització de l'espectre de  $\hat{f}$  en les direccions  $\xi_1$  i  $\xi_2$ .

En el cas bidimensional, per evitar l'aliasing, el suport de  $\hat{f}$  ha d'estar contingut en  $[-\frac{1}{2T_1}, \frac{1}{2T_1}] \times [-\frac{1}{2T_2}, \frac{1}{2T_2}]$  (**condició de Shannon per a senyals bidimensionals**).

#### 3.2.1 DFT bidimensional

Sigui  $f[n, m]$  un senyal bidimensional format per  $N$  mostres en la direcció  $x$  i  $M$  mostres en la direcció  $y$ . La transformada discreta de Fourier de  $f$  és

$$\hat{f}[k_1, k_2] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f[n, m] e^{-i2\pi(k_1 \frac{n}{N} + k_2 \frac{m}{M})} \quad (30)$$

La transformada inversa se calcula com

$$f[n, m] = \frac{1}{N} \frac{1}{M} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{M-1} \hat{f}[k_1, k_2] e^{i2\pi(k_1 \frac{n}{N} + k_2 \frac{m}{M})} \quad (31)$$

**Propietat.** És possible calcular la DFT (resp. IDFT) bidimensional a partir de la DFT (resp. IDFT) en una dimensió.

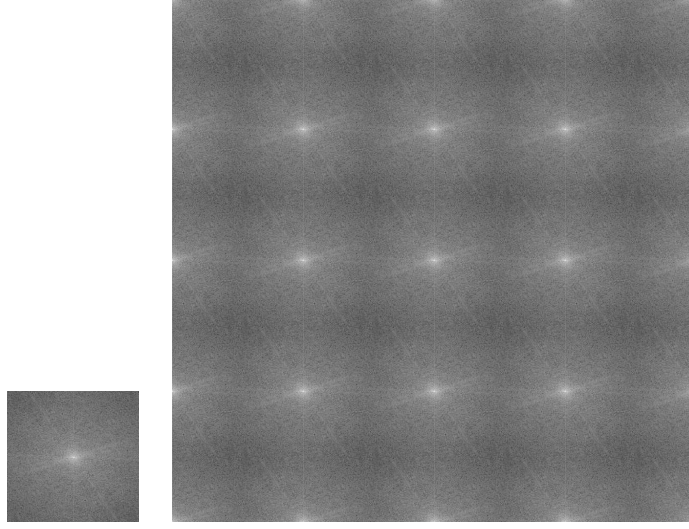


Figure 18: Esquerra, mòdul de la transformada de Fourier d'un senyal continu bidimensional. Dreta, mòdul de la transformada de Fourier d'un senyal discret bidimensional.

*Dem.* Podem descomposar l'equació (30) de la següent manera:

$$\hat{f}[k_1, k_2] = \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{m=0}^{M-1} f[n, m] e^{-i2\pi k_2 \frac{m}{M}} \right) e^{-i2\pi k_1 \frac{n}{N}}$$

L'expressió entre parèntesi és la DFT unidimensional de  $f$  quan  $n$  està fixat. Si anomenam a aquesta expressió  $f'[n, k_2]$ , llavors

$$\hat{f}[k_1, k_2] = \sum_{n=0}^{N-1} f'[n, k_2] e^{-i2\pi k_1 \frac{n}{N}}$$

què és la DFT unidimensional de  $f'[n, k_2]$ , per a cada valor de  $n$ .

□

La propietat anterior implica que el càlcul de la DFT en dues dimensions es pot fer aplicant els mateixos algorismes explicats en els apartats anteriors. En particular, es pot emprar l'algoritme de la FFT.