Tema1. Variables aleatòries vectorials
Problemes proposats

1) Es llancen a l'aire dos daus de diferent color, un blanc i l'altre vermell. Sigui X la variable aleatòria "nombre de punts obtinguts amb el dau blanc", i Y la variable aleatòria "nombre més gran dels punts obtinguts amb els dos daus".

a) Determinau la llei conjunta.

b) Obteniu les lleis marginals.

c) Són independents? (**No**)

2) La funció de densitat conjunta de dues variables aleatòries absolutament contínues és:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+xy) & \text{si } (x,y) \in (0,1)^2 \\ 0 & \text{en tot altre cas} \end{cases}$$

a) Determinau k. (**4/3**)

b) Trobau les funcions de densitat marginals.

c) Són independents? (**Sí**)

3) Dues persones A i B esperen trobar-se en un cert lloc entre les 5 i les 6. Cap d'elles esperarà l'altra més de 10 minuts. Si suposam que arriben independentment, calculau la probabilitat que se trobin en cada un dels dos casos següents:

a) Si la persona A arriba a les 5.30. (**1/3**)

b) Si A i B arriben en qualsevol moment, a l'atzar. (**11/36**)

4) Les variables aleatòries X_1i X_2 són independents i amb densitat comú

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

a) Determinau la densitat de $Y = X_1 + X_2$.

b) Determinau la densitat de $Z = X_1 - X_2$.

5) Obteniu la funció de distribució conjunta de les variables aleatòries X i Y la funció de densitat conjunta de les quals és:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2) & \text{si } x,y \in (0,1) \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

6) Si X_1 i X_2 són dues variables aleatòries amb distribució de Poisson, independents i amb mitjanes respectives α i β, provau que $Y = X_1 + X_2$ també és una variable aleatòria Poisson (amb mitjana $\alpha + \beta$). (Nota: Una variable aleatòria que té aquesta propietat és diu que és *estable*)

7) Durant un període T, el nombre X de cridades arribades a una centraleta és una variable aleatòria Poisson amb mitjana $\lambda \cdot T$, i el nombre Y de cridades que surten de la centraleta és una altra variable aleatòria Poisson amb mitjana $\mu \cdot T$. Suposant que Xi Y són independents, determinau la distribució condicional de Xdonat que $X + Y = n$. ($\mathbf{B}\left(\mathbf{n}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$)

8) Un proveïdor de serveis informàtics té una quantitat X de cents d'unitats d'un cert producte al principi de cada mes. Durant el mes es venen Y cents d'unitats del producte. Suposem que X i Y tenen una densitat conjunta donada per

$$f(x,y) = \begin{cases} 2/9 & \text{si } 0 < y < x < 3 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

a) Comprovau que f és una densitat.

b) Determinau $F_{X,Y}$.

c) Calculau la probabilitat que a final de mes s'hagi venut com a mínim la meitat de les unitats que hi havia inicialment. (**1/2**)

d) Si s'han venut 100 unitats, quina és la probabilitat que n'hi haguessin com a mínim 200 a principi de mes? (**1/2**)

9) Siguin X i Y dues variables aleatòries conjuntament absolutament contínues. Suposem que

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

i que

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \frac{2y}{x^2} & \text{si } 0 < y < x \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

a) Determinau $f_{X,Y}$.

b) Obteniu la distribució de Y.

c) Trobau $f_X(x|y)$.

10) En l'exercici 1,

a) Obteniu la distribució de X condicionada a $Y = 4$.

b) Quina és l'esperança de X condicionada a $Y = 4$? (**22/7**)

c) I la variància de X condicionada a $Y = 4$? (**62/49**)

11) Llançam a l'aire un dau equilibrat. Considerem dues variables aleatòries X i Y definides com

$$X = \begin{cases} -1 & \text{si el resultat és imparell} \\ 1 & \text{si el resultat és parell} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} -1 & \text{si el resultat és 1, 2 o 3} \\ 0 & \text{si el resultat és 4} \\ 1 & \text{si el resultat és 5 o 6} \end{cases}$$

a) Trobau la llei conjunta i la funció de distribució de XiY.

b) Calculau $P(X + Y = 0|Y \leq 0)$ (**1/4**) i $P(X = 1|X + Y = 2)$ (**1**).

12) El nombre d'errors X per pàgina que comet un determinat escriptor és una variable aleatòria amb llei

$$P(X = x) = e^{-2} \cdot \frac{2^x}{x\,!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

Si una pàgina té x errors, el nombre de minuts Y que un revisor tarda en revisar i corregir cada pàgina és una variable aleatòria amb distribució:

$$P(Y=y|X=x)=\begin{cases} 1/5 & \text{si } y=1+x \\ 3/5 & \text{si } y=2+x \\ 1/5 & \text{si } y=3+x \end{cases}$$

a) Trobau la probabilitat que es necessitin 4 minuts per revisar i corregir una pàgina elegida a l'atzar. (**0.253**)

b) Si s'han utilitzat 4 minuts en la revisió i correcció d'una pàgina, quina és la probabilitat que hi hagués 3 errors? (**1/7**)

13) Suposem que la variable aleatòria X es selecciona a l'atzar de l'interval unitat, i aleshores la variable aleatòria Y es selecciona a l'atzar de l'interval $(0, X)$. Determinau la distribució de Y.

14) Un auditor selecciona a l'atzar un cert nombre X de factures d'un arxivador; X és un nombre a l'atzar entre 5 i 8. Sigui Y el temps en minuts que tarda en revisar-les. Suposem que (X, Y) té una llei conjunta donada per

$$P(X=x,Y=y)=\begin{cases} \frac{1}{4}\cdot\frac{10-x}{x}\cdot\left(\frac{x}{10}\right)^y & \text{si } x=5,6,7,8,\ y=1,2,\ldots \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

a) Trobau la distribució marginal de Y.

b) Trobau la distribució condicional de X donat que $Y=y$.

c) Calculau la probabilitat que hagi triat 6 factures sabent que ha tardat més de 3 minuts en revisar-les. (**0.18**)

15) Una diana consisteix en 3 cercles concèntrics amb radis respectius 1 cm, 2 cm i 3 cm. En una competició de tir, la distribució dels impactes en la diana i els voltants és tal que les desviacions horitzontal i vertical respecte del centre de la diana són independents i les dues segueixen una distribució normal N(0, 1 cm.). Determinau la proporció d'impactes dins cada anell de la diana. (Ind.: Utilitzau les coordenades polars) ($\mathbf{0.393, 0.471, 0.124}$)

16) Siguin X i Y dues variables aleatòries amb densitat conjunta

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0\le y\le x\le 1 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

a) Calculau $f_X(x)$.

b) Calculau $f_Y(y|x)$.

c) Calculau $E(Y)$. (**1/4**)

d) Calculau $E(Y|X)$, la raó de correlación $\eta_{Y|X}$ i ECM. ($\boldsymbol{\eta^2_{Y|X} = 3/7, \mathrm{ECM} = 1/36}$)

e) Calculau $E(E(Y|X))$ i comprovau que coincideix amb $E(Y)$.

f) Estimeu Y si sabem que $X=0.75$.(**3/8**)

17) Considerem un experiment amb tres possibles resultats E_1, E_2 i E_3 amb probabilitats respectives p, q i r tals que $p+q+r=1$. En una seqüència de n proves independents de l'experiment, denotem per X el nombre de vegades que ocorr E_1, i per Y el nombre de vegades que ocorr E_2. Es sap que el vector (X, Y) té una distribució anomenada **trinomial** que ve donada per:

$$P(X=i,Y=j)=\frac{n!}{i!\,j!\,k!}\,p^i\,q^j\,r^k\,,\quad k=n-i-j$$

a) Provau que les distribucions marginals són binomials.

b) Determinau el vector mitjana i la matriu de covariàncies de (X, Y).

c) Provau que les distribucions condicionals són binomials.

d) Obteniu l'expressió de $E(Y|X = i)$ $\forall i = 0, \ldots, n$.

e) Comprovau que el coeficient de correlació entre $E(Y|X)$ i X és igual a -1 i, per tant, $E(Y|X)$ és una funció lineal de X, $E(Y|X) = aX + b$, amb $a < 0$.

f) Determinau els coeficients a i b a partir de l'expressió obtinguda a l'apartat (d).

18) En l'exercici 1,

a) Determinau $E(X|Y)$. $\left(\mathbf{\frac{3Y^2 - Y}{2(2Y-1)}}\right)$

b) Calculau $E(E(X|Y))$, i comprovau que coincideix amb $E(X)$. $(\mathbf{21/6})$

19) Siguin X i Y dues variables aleatòries conjuntament gaussianes, amb funció de densitat conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - r^2}}\, e^{-(x^2+y^2-2rxy)/2(1-r^2)} \quad \text{per a } -\infty < x, y < \infty$$

Provau que el coeficient de correlació entre X i Y és r.

20) Es llança un dau sense biaix. Sigui X la variable aleatòria "nombre de punts obtinguts", i Y la variable aleatòria que val 0 si s'obté un 1, un 2 o un 3, i val 1 si s'obté 4, 5 o 6. Calculau la covariància $(\mathbf{3/4})$ i el coeficient de correlació $(\mathbf{0.878})$ entre X i Y.

21) La funció de densitat conjunta de dues variables aleatòries contínues X i Y és:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2) & \text{si } x, y \in (0, 1) \\ 0 & \text{en tot altre cas.} \end{cases}$$

Calculau les mitjanes $(\mathbf{5/8, 5/8})$, les variàncies $(\mathbf{73/960, 73/960})$, la covariància $(\mathbf{-1/64})$ i el coeficient de correlació $(\mathbf{-15/73})$.

22) Es llancen a l'aire dos daus sense biaix. Siguin N_1 i N_2 els valors obtinguts en els dos daus. Posem $X = N_1 + N_2$ i $Y = |\ N_1 - N_2\ |$. Obteniu la distribució conjunta de X i Y i comprovau que X i Y estan incorrelacionades. Són independents? (**No**)

23) El nombre de clients que arriben a una estació de servei durant un temps t és una variable aleatòria de Poisson amb paràmetre $\beta \cdot t$. El temps necessari per servir cada client és una variable aleatòria exponencial amb paràmetre α. Determinau la llei de la variable aleatòria que dóna el nombre de clients que arriben durant el temps de servei T d'un determinat client. Es suposa que les arribades de clients són independents del temps de servei dels clients. (Nota: $\displaystyle\int_o^\infty r^k\, e^{-r}\, dr = \Gamma(k+1) = k!$) $\left(\mathbf{Geom}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\right)$

24) $E(Y|X)$ és la funció $g(X)$ que "millor"aproxima Y on "millor" indica que l'error quadràtic mitjà $E\left((Y - g(X))^2\right)$ és mínim. Aquesta funció de X s'anomena la **corba de regressió de la mitjana de Y sobre X**. Anàlogament tenim la corba de regressió de la mitjana de X sobre Y. Determinau les corbes de regressió de les mitjanes i les rectes de regressió lineal si (X, Y) està distribuït uniformement en el triangle de vèrtexs (0,0), (1,0) i (1,2).

25) Una persona contreu el virus d'una certa malaltia que requereix hospitalització. Sigui X la variable aleatòria que dóna el temps, en setmanes, que tarda en manifestar-se la malaltia. Sigui Y la variable aleatòria que expressa el temps total, també en setmanes, des de que el virus s'ha contret fins que el pacient és donat d'alta. Se suposa que en el moment que apareixen els símptomes el malalt és hospitalitzat. Se sap que X i Y tenen una densitat conjunta donada per:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot e^{-y} & \text{si } 0 \leq x \leq y < +\infty \\ 0 & \text{en cas contrari.} \end{cases}$$

a) Trobau les corbes i les rectes de regressió i estudiau la bondat dels ajustaments.

b) Calculau la probabilitat que un pacient estigui hospitalitzat menys d'una setmana. ($\mathbf{1 - e^{-1}}$)

c) Suposant que el pacient és donat d'alta avui després de 5 dies hospitalitzat, quina és la probabilitat que contragués el virus fa menys de dues setmanes? (**Ind.**: Fes un canvi de les variables (X,Y) a les noves variables $(\mathcal{U},\mathcal{V}) = (Y-X,Y)$.) ($\mathbf{1 - \frac{16}{7}e^{-\frac{9}{7}} = 0.37}$)

26) Siguin X i Y dues v.a. discretes amb funció de probabilitat conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \frac{6}{37}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \quad \text{si } x = 1,2,3; y = 2,3$$

Trobau la funció de probabilitat de $U = XY$ i de $V = X+Y$. Trobau el vector de mitjanes, la matriu de covariàncies i el coeficient de correlació de (U,V). ($\mathbf{E(U) = 4.37838}$; $\mathbf{E(V) = 4.24324}$; $\mathbf{Cov(U,V) = 2.01607}$; $\mathbf{Var(U) = 4.82980}$; $\mathbf{Var(V) = 0.88678}$).

27) Sigui (X,Y) una v.a. continua amb funció de densitat:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{2-x-y}{8} & -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

Comprovau si X, Y són independents. Calculau la funció de densitat de (X^2,Y^2); comprovau si són independents.

28) Siguin X_1, X_2 variables aleatòries independents tals que

$$P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 2) \text{ si } i = 1,2$$

Sigui Y_k la v.a. que designa el nombre de variables X_i iguals a k amb $k = 1,2$. Trobau la distribució conjunta de (Y_1,Y_2) i el seu vector de mitjanes i la seva matriu de covariàncies.

29) Sigui (X,Y) un vector aleatori que té distribució uniforme a $(0,1)\times(0,1)$. Calculau la distribució conjunta i les marginals de (U,V) on $U = \max(X,Y)$ i $V = \min(X,Y)$.

30) Sigui (X,Y) un vector aleatori distribuït uniformement al cercle unitat. Siguin les variables aleatòries $U = \sqrt{X^2+Y^2}$ i $V = \arctan\frac{Y}{X}$.

a) Demostrau que U i V són v.a. independents.

b) Siguin R i Θ dues variables aleatòries independents amb distribució uniforme a l'interval unitat i a l'interval $(0,2\pi)$ respectivament. El vector aleatori (R,Θ) té la mateixa distribució que el (U,V)? (**No**)

31) Siguin X i Y dues v.a. exponencials independents. Trobau la funció de densitat de $Z = |X-Y|$.

32) El temps de vida X de un dispositiu és una v.a. exponencial amb mitjana $\frac{1}{R}$. Suposem que a causa d'irregularitats en el procés de producció, el paràmetre R és una v.a. amb distribució gamma [1].

[1] Una v.a. segueix una distribució gamma si la seva funció de densitat és $f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$, si $x > 0$, amb $\alpha > 0$ i $\lambda > 0$. A més, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ i verifica la propietat: $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

a) Trobau la funció de densitat conjunta de (X, R).

b) Trobau la funció de densitat de X.