Fonaments Matemàtics IU. TelemàTica
Control 9. Moments i funcions d'una variable aleatòria. Curs 09/10

P1.- Un industrial produeix un determinat component electrònic. Sabem que el temps de vida, en anys, d'aquests components segueix una distribució de probabilitat de funció de densitat

$$f_X(x) = \begin{cases} k(6-2x) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{Altres} \end{cases}$$

de la qual desconeixem el valor de k

a) Quin seria el valor d'aquesta k. **1 pt.**

b) Calculau la funció de distribució d'X. **1 pt.**

c) Calculau el valor esperat i la variància. **1 pt.**

d) L'industrial voldria donar un temps de garantia per a aquests components, de forma que si un component es romp, entri en garantia com a mínim el 80% dels casos. Quan de temps de garantia, en mesos sencers, hauríem de donar? **1 pt.**

e) Suposem ara que l'industrial desconeix el tipus de distribució que segueix el temps de vida dels components que fabrica, però sap que el temps de vida mitja és d'un any. Resol l'apartat d) en aquest cas. **1.5 pt.**

f) Suposem ara que l'industrial desconeix el tipus de distribució que segueix el temps de vida dels components que fabrica, però sap que el temps de vida mitja és d'un any i la variància és $\frac{1}{2}$. Resol l'apartat d) en aquest cas. **1.5 pt.**

g) Si $Y = \ln X$ trobau la funció de densitat i de distribució de la variable aleatòria Y. **3 pt.**

Solució:

a) S'ha de complir $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$. Per tant,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^3 k(6-2x)\,dx = k\int_0^3 (6-2x)\,dx = k\Big[6x - x^2\Big]_0^3 = 9k = 1$$

per tant, $k = \frac{1}{9}$ i la funció de densitat seria

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(6-2x) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{Altres} \end{cases}$$

b) La funció de distribució és

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{9}(6-2t)\,dt = \frac{1}{9}\Big[6t - t^2\Big]_0^x = \frac{1}{9}(6x - x^2)$$

Per tant,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{9}(6x - x^2) & 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

c) Calculem el valor esperat:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^3 x\frac{1}{9}(6-2x)\,dx = \int_0^3 \Big(\frac{2x}{3} - \frac{2x^2}{9}\Big)\,dx = \frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27}\Big]_0^3 = 1$$

La variància és $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Aleshores cercarem $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^3 x^2\frac{1}{9}(6-2x)\,dx = \int_0^3 \Big(\frac{2x^2}{3} - \frac{2x^3}{9}\Big)\,dx = \frac{2x^3}{9} - \frac{2x^4}{36}\Big]_0^3 = \frac{3}{2}$$

Aleshores

$$Var(X) = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

d) El període de garantia és un temps a de forma que si el temps de vida d'un component electrònic és inferior a a aquest component entra en garantia i l'empresa es fa responsable de la seva reparació.

La variable aleatòria X ens dóna el temps de vida d'un component electrònic, per tant, aquest component entrarà en garantia si el seu temps de vida es inferior a a: $X < a$ (inferior o inferior o igual, ja que és una variable contínua).

A nosaltres ens interessa que passi això, $X < a$, com a mínim, el 80% dels casos, és a dir, ens demanen que calculem a de forma que $P(X < a) \geq 0.8$ i aquest raonament ens servirà també per als propers 2 apartats.

$$P(X < a) = F_X(a) = \frac{1}{9}(6x - x^2) = 0.8$$

resolent l'equació ens surt que $x = 4.34164$ i $x = 1.65836$. Ara be, la funció de distribució indicada és per a $0 \leq x \leq 3$. Per tant la única solució vàlida seria $x = 1.65836$ anys, és a dir $1.65836 * 12 = 19.9$ mesos. Com ha d'entrar en garantia com a mínim el 80% dels casos, el temps de garantia seria de 20 mesos.

e) Ens demanen que cerquem el valor d'a de forma que $P(X < a) \geq 0.8$. Per a això aplicarem la desigualtat de Markov

$$P(X < a) = 1 - P(X \geq a) \geq 0.8; \qquad P(X \geq a) \leq 0.2 = \frac{1}{a}.$$

aïllant tenim $a = 5$ anys i per tant 60 mesos

f) Per a resoldre aquest apartat farem servir la desigualtat de Txebixef

$$P(1 - b \leq X \leq 1 + b) \geq 1 - \frac{\frac{1}{2}}{b^2} = 0.8$$

aïllant b tenim $b = 1.58114$, per tant el temps de garantia hauria de ser $1 + 1.58114 = 2.58114$ que passat a mesos seria 30.9 i com ens demanen mesos sencers serien 31 mesos.

g) Cerquem primer la funció de distribució de Y

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^y) = F_X(e^y) = \frac{1}{9}(6e^y - e^{2y})$$

Però això seria quan $0 \leq X \leq 3$, per tant, $-\infty \leq \ln X \leq \ln 3$. Aleshores la funció de distribució seria

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{9}(6e^y - e^{2y}) & y \leq \ln 3 \\ 1 & y > \ln 3 \end{cases}$$

A continuació cercarem la funció de densitat

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{9}(6e^y - 2e^{2y})$$

i la funció de densitat seria

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{9}(6e^y - 2e^{2y}) & y \leq \ln 3 \\ 0 & y > \ln 3 \end{cases}$$