# Tema 3. Filtratge del Senyal

J.L. Lisani (UIB)

## Contents



## 1 Introducció

Un **filtre** o **sistema** és qualsevol procés que modifica un senyal, anomenat senyal d'entrada, per donar lloc a un nou senyal o senyal de sortida.

Esquemàticament els sistemes es representen amb diagrames de blocs:

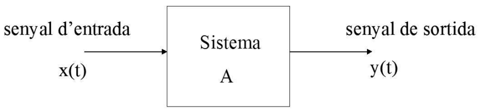


Figure 1: Representació esquemàtica d'un sistema o filtre

Matemàticament un filtre es modela com un operador entre dos espais de funcions:

$$\begin{array}{rccl} A: & X & \longrightarrow & Y \\ & x(t) & \longrightarrow & y(t) = A(x(t)) \end{array}$$

## 2 Propietats dels filtres

Els filtres es classifiquen pel seu comportament respecte als senyals d'entrada. Entre les propietats que poden tenir els filtres destaquen les següents:



- **Linealitat**. Un filtre $A : X \to Y$ és lineal si

  $$\begin{array}{ll} \text{i) } \forall u, v \in X & A(u+v) = A(u) + A(v) \\ \text{ii)} \forall u \in X, \forall \lambda \in \mathbb{C} & A(\lambda u) = \lambda A(u) \end{array}$$

- **Causalitat**. Un filtre $A : X \to Y$ és causal (o realitzable) si

  $$\forall t < t_0 \qquad x_1(t) = x_2(t) \Longrightarrow A(x_1(t)) = A(x_2(t)) \qquad \forall t < t_0$$

  Aquesta propietat expressa la propietat física de que la resposta d'un sistema fins a un temps $t_0$ no depèn més que del passat anterior a $t_0$. En particular aixó implica que la resposta del sistema no intervé en la entrada. La causalitat és una condició necessària perquè el filtre sigui realitzable.

- **Invariància**. Un filtre $A : X \to Y$ és invariant o estacionari si

  $$\forall x \in X, \forall a \in \mathbb{R} \qquad A(x(t-a)) = (Ax)(t-a) = y(t-a)$$

  Aquesta propietat implica que si l'entrada al sistema està retardada un temps $a$, la sortida també està retardada el mateix temps $a$.

Les operacions clàssiques de tractament de senyal s'efectuen amb filtres causals, lineals i invariants.

## 3 Caracterització dels filtres lineals i invariants. Resposta impulsional

Si un filtre $A$ és lineal i invariant és possible relacionar els senyals d'entrada i sortida mitjançant una operació de convolució.

Sigui $x(t)$ el senyal d'entrada del filtre. En el tema anterior hem vist com qualsevol funció se pot escriure de la següent manera:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\delta(t-u)du$$

Per tant, per la linealitat del filtre, el senyal de sortida es pot calcular com

$$y(t) = A(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)A(\delta(t-u))du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)(A\delta)(t-u)du$$

on la darrera igualtat s'obté per la invariància del filtre.

$A\delta$ representa la resposta del filtre a una delta de Dirac i s'anomena **resposta impulsional del filtre**. La denotam com $h(t) = A\delta(t)$. Per tant

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = x(t) * h(t) \tag{1}$$

**Propietat**. Si $A$ és causal llavors $h(t) = 0, \forall t < 0$.
*Dem.* Podem descomposar la integral (1) en dues parts:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{t} x(u)h(t-u)du + \int_{t}^{+\infty} x(u)h(t-u)du$$

Si el filtre és causal la seva sortida a l'instant $t$ no pot dependre dels valors de $x(u)$ si $u > t$, per tant la segona de les integrals en la suma anterior ha d'ésser nul.la per a qualsevol $x(u)$, $u \geq t$. En conseqüència $h(t-u) = 0$ si $u > t$, o equivalentment, $h(s) = 0$ si $s < 0$.

$\square$

**Definició i Propietat**. Es diu que un filtre és **estable** si la seva sortida està afitada quan l'entrada ho està.

Podem afitar la sortida d'un filtre de la següent manera:

$$\begin{aligned} |y(t)| = |(Ax)(t)| &= |\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(u)||h(t-u)|du \leq \\ &\leq \sup_{u\in\mathbb{R}} |x(u)| \int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)|du \end{aligned}$$

En conseqüència, l'estabilitat es verificarà només si $\int_{-infty}^{+\infty} |h(u)|du < +\infty$, és a dir, el filtre serà estable només si $h(t)$ és integrable.

# 4 Funcions de transferència

Donat un filtre $A : X \to Y$ lineal i invariant, consideram la seva resposta davant una exponencial complexe: $x(t) = e^{i2\pi\xi t}$.

$$\begin{aligned} y(t) = A(x(t)) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)du = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{i2\pi\xi(t-u)}du = e^{i2\pi\xi t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{-i2\pi\xi u}du = \\ &= e^{i2\pi\xi t}\hat{h}(\xi) \end{aligned}$$

Aquest resultat implica que $e^{i2\pi\xi t}$ és un vector propi de $A$ i que $\hat{h}(\xi)$ (la transformada de Fourier de $h$ a la freqüència $\xi$) és el seu valor propi associat. $\hat{h}(\xi)$ s'anomena **funció de transferència** del filtre.

Per la linealitat de $A$, si podem descomposar $x(t)$ en una suma d'exponencials complexes (per exemple, mitjançant la transformada inversa de Fourier), podrem escriure:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\xi)e^{i2\pi\xi t}d\xi$$

$$y(t) = A(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\xi)A(e^{i2\pi\xi t})d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\xi)\hat{h}(\xi)e^{i2\pi\xi t}d\xi$$

La darrera integral és l'antitransformada de Fourier del producte de $\hat{x}(\xi)$ per $\hat{h}(\xi)$. Com que $y(t) = x(t)*h(t)$, l'anterior equació expressa la coneguda propietat $\widehat{x*h} = \hat{x}\hat{h}$.

# 5 Classificació freqüencial dels filtres

Recordem del tema 2 que la transformada de Fourier de la delta de dirac és igual a 1, un valor constant per a totes les freqüències. Això siginifica que la delta de Dirac és un senyal que té components espectrals en totes les freqüències.

Per tant $h(t)$, com a resposta d'un sistema a una delta de Dirac, representa la resposta del sistema a totes les freqüències possibles i $\hat{h}(\xi)$ $\forall\xi$ representa tots els valors propis possibles del filtre.

En funció de la distribució d'aquests valors propis (és a dir, en funció de $\hat{h}(\xi)$), els filtres es classifiquen en:



- **Filtres passa-baix**. Són aquells per als quals la funció de transferència s'anul.la a partir d'una determinada freqüència $\xi_T$ anomenada freqüència de tall ($\hat{(}\xi) = 0\ \forall|\xi| > \xi_T$). El filtre passa-baix ideal es modelitza com una funció indicatriu en freqüència: $\hat{h}(\xi) = \mathcal{X}_{[\xi_T,\xi_T]}$. No obstant, l'antitransformada de Fourier d'aquesta funció té un suport infinit i és per tant irrealitzable. En la pràctica, els filtres passa-baix mostren una decaiguda ràpida dels valors de $\hat{h}(\xi)$ a partir d'una certa freqüència que és la que se considera freqüència de tall del filtre (veure la Figura 2). Aquests filtres tenen la propietat d'eliminar les altes freqüències dels senyals d'entrada.

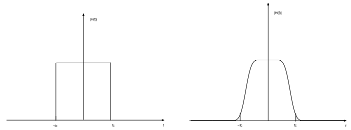

Figure 2: Filtre passa-baix ideal i real (mòdul de la funció de transferència del filtre).

- **Filtres passa-alt**. La funció de transferència d'aquests filtres val zero per davall de la freqüència de tall ($\hat{h}(\xi) = 0\ \forall|\xi| < \xi_T$). Igual que en el cas dels filtres passa-baix, els filtres passa-alt ideals són irrealitzables (veure la Figura 3). Aquests filtres eliminen les baixes freqüències dels senyals s'entrada.

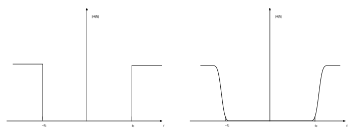

Figure 3: Filtre passa-alt ideal i real (mòdul de la funció de transferència del filtre).

- **Filtres passa-banda**. En aquest cas la funció de transferència s'anul.la en un cert rang de freqüències (Figura 4). S'utilitzen per filtrar determinades components freqüencials del senyals d'entrada.

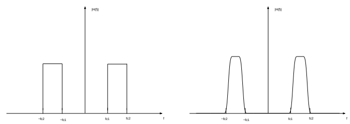

Figure 4: Filtre passa-banda ideal i real (mòdul de la funció de transferència del filtre).

## 5.1 Filtres anti-aliasing

Un cas particular de filtres passa-baix són els filtres anti-aliasing. Recordem que l'aliasing es produeix quan l'espectre d'un senyal conté valors no nuls en freqüències fora de l'interval $[-\frac{1}{2T}, +\frac{1}{2T}]$, on $T$ és el període de mostreig del senyal (secció 2.3.3 del Tema 2).

Una manera d'evitar l'aliasing és filtrar, abans del mostreig, el senyal original amb un filtre passa-baix amb freqüència de tall $\xi_T = \frac{1}{2T}$. Aquest filtre s'anomena filtre anti-aliasing.

Cal observar que l'aplicació del filtre anti-aliasing pot tenir com a efecte no desitjat l'aparició del fenòmen de Gibbs, motivat pel fet de reconstruir un senyal a partir d'una versió truncada del seu espectre (Figura 6).

La figura següent ilustra l'efecte d'un filtre anti-aliasing en el sub-mostreig d'una imatge.

# 6 Filtres discrets

Els filtres discrets es defineixen i classifiquen de manera anàloga als continus o analògics. Si denotam per $X_D$ i $Y_D$ dos espais de funcions discretes, un filtre discret $A$ és un operador entre ambdós espais. En particular, el filtre discret $A : X_D \to Y_D$ és lineal i invariant si

i) $A(\lambda_1 x_1[n] + \lambda_2 x_2[n]) = \lambda_1 A(x_1[n]) + \lambda_2 A(x_2[n])$

ii) $A(x[n - n_0]) = (Ax)[n - n0]$

De la mateixa manera que per senyals continus podiem escriure un senyal $x(t)$ com $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\delta(t-u)du$, per senyals discrets poder dir que

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m]$$

on $\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$ és la **delta de Dirac discreta**.

Si el filtre $A$ és lineal i invariant llavors $A(x[n]) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m](A\delta)[n-m]$. Si definim $h[n] = (A\delta)[n]$, llavors

$$y[n] = A(x[n]) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]h[n-m] \tag{2}$$

aquesta darrera expressió defineix la **convolució discreta** de $x[n]$ i $h[n]$, i es denota $x[n] * h[n]$. $h[n]$ rep el nom de **resposta impulsional** del filtre discret.

Si $h[n]$ té suport finit la suma (2) es realitzarà en un nombre finit d'iteracions. Els filtres amb $h[n]$ amb suport finit reben el nom de **filtres amb resposta impulsional finita** o filtres **FIR**.

**Definició i Propietat**. Un filtre discret és causal si $A(x[n])$ no depèn dels valors de $x[m]$ quan $m > n$. Un filtre discret lineal i invariant és causal si i només si $h[n] = 0$ quan $n < 0$.
*Dem.* La demostració és anàloga a la de la propietat equivalent per a filtres continus.

## 6.1 Funció de transferència

Al igual que per als filtres analògics, en el cas dels filtres discrets lineal i invariants es cumpleix:

$$\begin{aligned} A(e^{i2\pi\xi n}) &= e^{i2\pi\xi n} * h[n] = \textstyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\xi m} h[n-m] = \\ &= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\xi(n-k)} h[k] = e^{i2\pi\xi n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-i2\pi\xi k} \end{aligned}$$

per tant $e^{i2\pi\xi n}$ és un vector propi del filtre i

$$h_T(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-i2\pi\xi k}$$



Figure 5: Imatge original (a dalt) i dues versions sub-mostrejades (a baix) (s'ha prés un pixel de cada quatre). El sub-mostreig equival a utilitzar un període de mostreig 4 vegades superior a l'original. La conseqüència és l'aliasing que es pot observar en la imatge de inferior esquerra. L'aplicació d'un filtre anti-aliasing evita aquest fenòmen (imatge inferior dreta).

Figure 6: Resultat d'aplicar el filtre anti-aliasing a la imatge original de la Figura anterior. Observar l'efecte de Gibbs. El sub-mostreig d'aquesta imatge ens dóna la imatge inferior dreta de la Figura anterior.



és el valor propi corresponent. $h_T(\xi)$ és la **funció de transferència del filtre discret**. Cal observar que aquesta és una funció contínua.

Consideram ara l'efecte d'aplicar un filtre discret FIR amb $N$ mostres damunt un senyal finit $x[n]$ format per $N$ mostres.

## 6.2 Convolució circular

En una situació pràctica es treballa amb senyals mostrejats amb un nombre finit ($N$) de mostres. Donats dos senyals discrets finits $x[n]$ i $y[n]$ formats per $N$ mostres i perioditzats, definim la **convolució circular** de $x$ i $y$ com:

$$\begin{aligned}(x \circledast y)[n] &= x[n] \circledast y[n] = \textstyle\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[n-m] = \\ &= \textstyle\sum_{m=0}^{N-1} x[n-m]y[m] \qquad\qquad n = 0, \cdots, N-1\end{aligned} \tag{3}$$

Per la periodicitat de $x$ i $y$, $(x \circledast y)$ és també periòdica de període $N$ i l'equació anterior defineix els seus valors en un període.

**Propietat 6.2** . $x[n] \circledast y[n] = IDFT(\hat{x}[k]\hat{y}[k])$.
*Dem.* Consideram primer la convolució d'un senyal $y[n]$ amb $N$ mostres d'una exponencial complexa:

$$\begin{aligned}y[n] \circledast e^{i2\pi\frac{k}{N}n} &= e^{i2\pi\frac{k}{N}n} \circ y[n] = \textstyle\sum_{m=0}^{N-1} y[m]e^{i2\pi\frac{k}{N}(n-m)} = \\ &= e^{i2\pi\frac{k}{N}n}\textstyle\sum_{m=0}^{N-1} y[m]e^{-i2\pi\frac{k}{N}m} = \\ &= e^{i2\pi\frac{k}{N}n}\hat{y}[k]\end{aligned}$$

La fòrmula de la IDFT del senyal $\hat{x}[k]$ ens permet expressar $x[n]$ com una suma de exponencials, de manera que

$$\begin{aligned}x[n] \circledast y[n] &= (\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{k=0}^{N-1}\hat{x}[k]e^{i2\pi\frac{k}{N}n}) \circledast y[n] = \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{N-1}\hat{x}[k](e^{i2\pi\frac{k}{N}n} \circledast y[n]) = \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{k=0}^{N-1}\hat{x}[k]\hat{y}[k]e^{i2\pi\frac{k}{N}n}\end{aligned}$$

i aquesta darrera expressió és la IDFT del producte de $\hat{x}[k]$ per $\hat{y}[k]$.

□

**Propietat 6.2** . **Relació entre la convolució convencional i la convolució circular**. Siguin $x[n]$ i $y[n]$ dos senyals discrets finits amb $N$ i $M$ mostres respectivament. Consideram els nous senyals $x'[n]$ i $y'[n]$, periòdics, de període $N+M-1$, definits, en el seu període principal, afegint zeros a les mostres de $x[n]$ i $y[n]$:

$$x'[n] = \begin{cases} x[n] & \text{si} \quad n = 0, \cdots, N-1 \\ 0 & \text{si} \quad n = N, \cdots, N+M-1 \end{cases}$$

$$y'[n] = \begin{cases} y[n] & \text{si} \quad n = 0, \cdots, M-1 \\ 0 & \text{si} \quad n = N, \cdots, N+M-1 \end{cases}$$

Llavors

$$x[n] * y[n] = \begin{cases} x'[n] \circledast y'[n] & \text{si} \quad n = 0, \cdots, N+M-1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

**Propietat 6.2 . Relació entre la sortida d'un filtre discret FIR i la DFT**. La combinació de les dues propietats anteriors ens permet trobar una relació entre la sortida d'un filtre discret FIR amb $M$ mostres amb la DFT de la seva resposta impulsional i de la del senyal d'entrada.

L'equació (2) ens defineix la sortida d'un filtre amb resposta impulsional $h[n]$ com $y[n] = x[n] * h[n]$. Si $h[n]$ está format per $M$ mostres i $x[n]$ per $N$ mostres el senyals de sortida estará format per $N + M - 1$ mostres i, per la propietat 6.2:

$$y[n] = x'[n] \circledast h'[n]$$

on $x'[n]$ i $y'[n]$ són les funcions definides més amunt. Si ara aplicam la propietat 6.2:

$$y[n] = IDFT\{\widehat{x'}[k]\widehat{h'}[k]\} \qquad n = 0, \cdots, N + M - 1 \tag{4}$$

on $\widehat{x'}[k]$ i $\widehat{h'}[k]$ són les DFT de $x'[n]$ i $h'[n]$ respectivament.

A més, podem interpretar $\widehat{h'}[k]$ com una versió discretitzada de la funció de transferència del filtre FIR: $\widehat{h'}[k] = h_T(\frac{k}{N+M-1})$.