Fonaments Matemàtics II. Telemàtica
Control 4. Vectors i valors propis. Curs 08/09

P1.- Considerem les següents successions recurrents

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 4b_{n-1} + 6c_{n-1} \\ b_n &= 3a_{n-1} - 4b_{n-1} + 6c_{n-1} \\ c_n &= a_{n-1} - 2b_{n-1} + 3c_{n-1} \end{aligned}$$

on $a_0 = 2$, $b_0 = -2$ i $c_0 = 1$.

a) Trobau la matriu A tal que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$ **1 pt.**

b) Calculau els valors propis d'A **2 pt.**

c) Trobau els espais vectorials associats a cada valor propi. **3 pt.**

d) Indicau si la matriu A és diagonalitzable i perquè. **1 pt.**

e) Calculau les successions a_n, b_n i c_n. **2 pt.**

f) Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ és una aplicació lineal tal que $f(x, y, z) = (x, y, -2x - 4y - z)$ indicau si $(0, 0, \sqrt{5})$ és un vector propi. En cas afirmatiu indicau el valor propi corresponent **1 pt.**

Solució:

a)

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

b) Cerquem el polinomi característic i igualem-lo a 0

$$\begin{vmatrix} 4-x & -4 & 6 \\ 3 & -4-x & 6 \\ 1 & -2 & 3-x \end{vmatrix} = -t^3 + 3t^2 - 2t =$$

D'aquí tenim les arrels $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$ que són els valors propis.

c) Cerquem $V(0)$ que està format per tots els vectors (x, y, z) que verifiquen l'equació:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolent el sistema tenim les solucions: $x = 0$, $y = \frac{3}{2}z$. Aleshores els elements de $V(0)$ seran de la forma

$$\left(0, \frac{3}{2}z, z\right) = z\left(0, \frac{3}{2}, 1\right)$$

Aleshores $V(0) = \langle (0, \frac{3}{2}, 1) \rangle = \langle (0, 3, 2) \rangle$.

Anàlogament cercarem $V(1)$, que està format per tots els vectors (x, y, z) que verifiquen l'equació:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolent el sistema tenim les solucions: $x = -2z$, $y = 0$. Aleshores els elements de $V(1)$ seran de la forma

$$(-2z, 0, z) = z(-2, 0, 1)$$

Aleshores $V(1) = \langle(-2,0,1)\rangle$.

Finalment $V(2)$ està format per tots els vectors (x,y,z) que verifiquen l'equació:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolent el sistema tenim les solucions: $x = 2y$, $z = 0$. Aleshores els elements de $V(2)$ seran de la forma

$$(2y, y, 0) = y(2,1,0)$$

Aleshores $V(2) = \langle(2,1,0)\rangle$.

d) És diagonalitzable, perquè

- La suma de les multiplicitats de totes les arrels és igual a l'ordre de la matriu.
- La dimensió de l'espai vectorial associat a cada valor propi és igual a la multiplicitat de l'arrel.

e) Per calcular a_n, b_n i c_n tenim que

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \\ c_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, hem de calcular A^n. Per a això cercarem la matriu diagonal i la matriu del canvi de bases

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aleshores

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ \frac{3}{2} & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ \frac{3}{2} & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ \frac{3}{2} & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3\cdot 2^n & 4-4\cdot 2^n & -6+6\cdot 2^n \\ \frac{3}{2}2^n & -2\cdot 2^n & 3\cdot 2^n \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalment

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3\cdot 2^n & 4-4\cdot 2^n & -6+6\cdot 2^n \\ \frac{3}{2}2^n & -2\cdot 2^n & 3\cdot 2^n \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -18+5\cdot 2^{n+2} \\ 5\cdot 2^{n+1} \\ 9 \end{pmatrix}$$

D'aquí deduïm

$$\begin{aligned} a_n &= -18+5\cdot 2^{n+2} \\ b_n &= 5\cdot 2^{n+1} \\ c_n &= 9 \end{aligned}$$

f) Cerquem $f(0,0,\sqrt{5})$

$$f(0,0,\sqrt{5}) = (0,0,-\sqrt{5}) = -1\cdot(0,0,\sqrt{5})$$

Per tant, $(0,0,\sqrt{5})$ és un vector propi de valor propi -1.