Fonaments Matemátiques II

Probabilitat

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears

Manuel Moyà Quintero

Índex

Capítol 1

Combinatòria

Definició 1.1 *Donats m elements, anomenam* **variació n-ària** *(ordinària o sense repetició) o* **d'ordre n** *d'aquests elements, a tot conjunt ordenat format per n dels m elements de manera que considerarem com a diferents dos variacions si defereixen en algun element o en el seu ordre de col·locació.*

El nombre de variacions n-àries o de m elements agafats de n en n es representa per $V_{m,n}$ o per V_m^n.

Exemple: Les variacions binàries dels elements $\{a, b, c\}$ són:

$$ab, \ ac, \ ba, \ bc, \ ca, \ cb.$$

Proposició 1.2 *El nombre de variacions ordinàries (o sense repetició) de m elements agafats de n en n és:*

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$$

Demostració:

Suposem que tenim m elements i que tenim totes les variacions d'ordre $n-1$. Cada una d'aquestes variacions està formada per $n-1$ elements. Si volem una variació d'ordre n hem de considerar una d'ordre $n-1$ i afegir un altre element. Per cada variació d'ordre $n-1$ podrem afegir darrera un element qualsevol dels que no té, en total un element dels $m-(n-1) = m-n+1$ restants.

Per tant tendríem

$$V_{m,n} = V_{m,n-1}(m-n+1)$$

Vegem a continuació, per inducció que

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots (m-n+3) \cdot (m-n+2) \cdot (m-n+1)$$

a) Per a $n = 1$ tenim que cada un dels m elements representa una variació d'ordre 1, per tant, $V_{m,1} = m$.

b) Suposem cert per a $n-1$:

$$V_{m,n-1} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots (m-n+3) \cdot (m-n+2)$$

c) Vegem que és cert per a n. Hem vist que $V_{m,n} = V_{m,n-1}(m-n+1)$ i per hipòtesi d'inducció tenim

$$V_{m,n} = V_{m,n-1}(m-n+1) =$$
$$= m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots (m-n+3) \cdot (m-n+2) \cdot (m-n+1)$$

Exemple 1: $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$

Exemple 2: La bandera d'un país està formada per tres franges horitzontals de la mateixa amplada i diferent color. Quantes banderes diferents diferents es poden formar amb els set colors de l'arc de Sant Martí?.

Són $V_{7,3} = 7.6.5 = 210$

Definició 1.3 *Donats m elements, anomenam* **variació n-ària amb repetició** *o* **d'ordre n amb repetició** *d'aquests elements, a tot conjunt ordenat format per n dels m elements, iguals o diferents, de manera que considerarem com a diferents dos variacions amb repetició si defereixen en algun element o en el seu ordre de col·locació.*

El nombre de variacions n-àries amb repetició o de m elements agafats de n en n amb repetició es representa per $VR_{m,n}$ o per VR_m^n.

Exemple: Les variacions binàries dels elements $\{a, b, c\}$ són:

$$aa,\ ab,\ ac,\ ba,\ bb,\ bc,\ ca,\ cb,\ cc.$$

Proposició 1.4 *El nombre de variacions amb repetició de m elements agafats de n en n és:*

$$VR_{m,n} = m^n.$$

Demostració:

El desenvolupament de la demostració és semblant a la de la proposició 1.2. Per a obtenir una variació amb repetició d'ordre n, hem d'agafar una d'ordre $n-1$ i afegir-li un altra element, però ara com es poden repetir, li podem afegir m elements, per tant,

$$VR_{m,n} = V_{m,n-1} \cdot m$$

Fent un procés semblant al de la proposició esmentada (proposició 1.2) es demostra que

$$VR_{m,n} = m^n$$

Exemple 1: $VR_{7,3} = 7^3 = 343$

Exemple 2: A l'alfabet Morse s'utilitzen dos símbols: el punt i la ratlla. Quants caràcters diferents es poden obtenir en aquest alfabet agafant 1, 2, 3 o 4 d'aquests símbols?

- Amb un sol símbol: $VR_{2,1} = 2^1 = 2$.
- Amb dos símbols: $VR_{2,2} = 2^2 = 4$.
- Amb tres símbols: $VR_{2,3} = 2^3 = 8$.
- Amb quatre símbols: $VR_{2,4} = 2^4 = 16$.

En total tendríem 2+4+8+16=32 caràcters.

Definició 1.5 *Si tenim m elements, les variacions ordinàries d'ordre m reben el nom de* **permutacions**.

El nombre de permutacions dels m elements es representa per P_m.

Exemple: Si tenim el conjunt $\{a, b, c\}$ les permutacions d'aquests elements són:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

En el cas que tinguem m elements en cercle i per tant no puguem considerar un primer o darrer element, cada forma de col·locar aquests m elements l'anomenarem **permutació circular**.

El nombre de permutacions circulars de m elements es representa per PC_m.

Exemple: Si tenim tres persones $\{a, b, c\}$ situades al voltant d'una taula, les formes de col·locarles són:

$$abc,\ acb.$$

Proposició 1.6 *El nombre de permutacions de m elements és:*

$$P_m = m(m-1)(m-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = m!, \qquad PC_m = (m-1)!.$$

DEMOSTRACIÓ:

Vegem primer el cas de permutacions ordinàries.

Com $P_m = V_{m,m}$ tenim

$$P_m = m\cdot(m-1)\dots(m-m+1) = m\cdot(m-1)\dots 1 = m!$$

Vegem ara el cas de permutacions circulars. Per contemplar tots els casos hem de tenir en compte que, per exemple, la permutació circular *abc* i *bca* és la mateixa. Per tant el que farem serà deixar fix un element i permutar els altres, aleshores

$$PC_m = P_{m-1} = (m-1)!$$

Exemple 1: $P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ i $PC_4 = 3! = 6$.

Exemple 2: Quants nombres de 5 xifres diferents es poden fer amb les xifres 1, 2, 3, 4, 5?

$P_5 = 5! = 120$.

Exemple 3: De quantes formes es poden seure 8 persones en una taula circular?

$PC_8 = 7! = 5040$

Definició 1.7 *En el cas de les permutacions ordinàries hem considerat que els m elements eren diferents. Si aquests elements es poden repetir, aleshores cada grup d'elements és una* **permutació amb repetició**.

El nombre de permutacions amb repetició que es poden formar amb m elements, dels quals un es repeteix α_1 vegades, altre α_2 vegades, i així successivament, fins el darrer que es repeteix α_n vegades es representa per $PR_m^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}$.

Exemple 1: Amb les lletres de la paraula *mama*, les permutacions amb repetició que es poden formar són:

$$mama,\ maam,\ mmaa,\ amam,\ amma,\ aamm.$$

Exemple 2: Amb els dígits 1,2 quants nombres de 4 xifres existeixen amb dos uns i dos dosos?.

Seran 1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211

Proposició 1.8 *El nombre de permutacions de m elements dels quals un es repeteix α_1 vegades, altre α_2, ... i altre α_n vegades és:*

$$PR_m^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{m!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \ldots \alpha_n!}.$$

DEMOSTRACIÓ:

Suposem que tenim m elements diferents. El total de permutacions ordinàries d'aquests m elements és $P_m = m!$. Ara bé, suposem que en aquests m elements tenim α_1 elements $a_1, a_2, \ldots, a_{\alpha_1}$ iguals.

Per cada permutació dels m elements:

$$...a_1...a_2...a_{\alpha_1}...$$

tendríem el total de permutacions d'aquests a_i que serien la mateixa permutació. Per tant, el total de permutacions diferents seria

$$\frac{m!}{\alpha_1!}$$

Si tenguéssim α_2 elements $b_1, b_2, \ldots, b_{\alpha_2}$ elements iguals, per cada una de les permutacions anteriors de m elements hauria el total de les permutacions dels b_i que serien la mateixa permutació. Per tant, el total de permutacions diferents seria

$$\frac{\frac{m!}{\alpha_1!}}{\alpha_2!} = \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!}$$

Seguint aquest procés tenim la tesis de l'enunciat.

Exemple 1: $PR_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6.$

Exemple 2: Amb les xifres del número 1122233, quant nombres diferents es poden escriure?

$$PR_7^{2,3,2} = \frac{7!}{2!3!2!} = 210$$

Definició 1.9 *Donats m elements, anomenam* **combinació n-ària** *(ordinària o sense repetició) o* **d'ordre n** *d'aquests elements, a tot subconjunt format per n dels m elements de manera que considerarem com a diferents dos combinacions si defereixen en algun element.*

El nombre de combinacions n-àries o de m elements agafats de n en n es representa per $C_{m,n}$ o per C_m^n.

Exemple: Les combinacions binàries dels elements $\{a, b, c\}$ són:

$$ab, \; ac, \; bc.$$

Proposició 1.10 *El nombre de combinacions ordinàries (o sense repetició) de m elements agafats de n en n és:*

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

DEMOSTRACIÓ:

Si tenim m elements, cada combinació n-ària dóna lloc a P_n variacions n-àries. Per tant, $V_{m,n} = C_{m,n} \cdot P_n$. Aïllant,

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} =$$
$$= \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(m-n)!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Exemple 1: $C_{3,2} = \frac{3.2}{2!} = 3$

Exemple 2: De dotze estudiants hem de formar un grup de tres per fer un determinat treball. Quants grups diferents es poden formar?

$$C_{12,3} = \frac{12.11.10}{3!} = 220$$

Definició 1.11 *Donats m elements, anomenam* **combinació n-ària amb repetició** *o* **d'ordre n amb repetició** *d'aquests elements, a tot grup format per n elements, iguals o diferents, dels m donats de manera que considerarem com a iguals dos combinacions formades pels mateixos elements repetits igual nombre de vegades.*

El nombre de combinacions n-àries amb repetició o de m elements agafats de n en n es representa per $CR_{m,n}$ *o per* CR_m^n.

Exemple: Les combinacions binàries dels elements $\{a, b, c\}$ són:

$$aa,\ ab,\ ac,\ bb,\ bc,\ cc.$$

Proposició 1.12 *El nombre de combinacions ordinàries (o sense repetició) de m elements agafats de n en n és:*

$$CR_{m,n} = C_{m+n-1,n}$$

Demostració:

Suposem que tenim m elements diferents, i volem triar grups de n elements, iguals o repetits, sense tenir en compte l'ordre de col·locació d'aquests. La selecció es faria de la següent forma: Formaríem n columnes, una per a cada objecte; cada vegada que seleccionam un element posam una x a la columna a la columna corresponent. Per exemple, si tenim 4 elements diferents a_1, a_2, a_3, a_4 i volem formar grups de 5 elements els podríem posar de la següent forma:

Element 1	*Element* 2	*Element* 3	*Element* 4
xx /	/	x /	xx

Això ens indica que triam dos elements a_1, cap a_2, un a_3 i dos a_4. El total seria la forma de col·locar les tres "/" dins 8 posicions: $C_{8,3}$. Per exemple:

$$/ - -// - --$$

indica que agafam cap element a_1, dos elements a_2, cap a_3 i tres a_4;

$$-/ - / - -/-$$

significa un element a_1, un a_2, dos a_3 i un a_4; etc

Per tant, en el cas general, el total seria

$$CR_{m,n} = C_{n+m-1,m-1} = \frac{(n+m-1)!}{(m-1)![(n+m-1)-(m-1)]!} =$$

$$\frac{(n+m-1)!}{(m-1)!n!} = C_{n+m-1,n}$$

Exemple 1: $CR_{3,2} = C_{4,2} = \frac{4.3}{2!} = 6$.

Exemple 2: En una classe d'informàtica de 15 alumnes, s'han de realitzar tres tipus de treballs (programes informàtics): un joc, una calculadora, i un programa de biblioteca. Tots els alumnes hi participen i a l'autor del millor treball de cada tipus se li regalarà un ordinador portàtil (els tres ordinadors són idèntics). Si un mateix alumne pot tenir més d'un premi, de quantes formes diferents es poden distribuir els premis?

$$CR_{15,3} = C_{15+3-1,3} = C_{17,3} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{3!} = 680$$

Definició 1.13 *Als nombres de la forma* $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ *els anomenarem* **nombres combinatoris** *i els representarem amb la notació d'Euler* $\binom{m}{n}$ *que es llegeix m sobre n. Al nombre m l'anomenarem* **numerador** *i a n* **ordre** *.*

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Pel que hem vist a la proposició 1.10, $C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

Proposició 1.14 *Propietats:*

a) $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$

b) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$.

c) $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$.

DEMOSTRACIÓ:

a)

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!(m-0)!} \overset{(1)}{=} \frac{m!}{m!} = 1; \qquad \binom{m}{m} = \frac{m!}{m!(m-m)!} \overset{(1)}{=} \frac{m!}{m!} = 1$$

(1) Ja que $0! = 1$

b)

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$$

c)

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \frac{m!}{n!(m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)!(m-n-1)!} =$$

$$= \frac{m!(n+1)}{(n+1)!(m-n)!} + \frac{m!(m-n)}{(n+1)!(m-n)!} = \frac{m!(n+1) + m!(m-n)}{(n+1)!(m-n)!} =$$

$$= \frac{m!n + m! + m!m - m!n}{(n+1)!(m-n)!} = \frac{m!(m+1)}{(n+1)!(m-n)!} = \frac{(m+1)!}{(n+1)!(m-n)!} = \binom{m+1}{n+1}$$

Índex alfabètic