Tema 4.Anàlisi de Fourier i mostreig de senyals

Anàlisi de Fourier

Per anàlisi de Fourier ens referim a un conjunt de tècniques matemàtiques, inspirades en els treballs de Joseph Fourier a principis del segle XIX, que permeten descomposar qualsevol senyal en una suma de senyals sinusoïdals de diferents freqüències.

Aquesta descomposició és única, de manera que es pot caracteritzar qualsevol senyal pel conjunt de freqüències de les sinusoides que el composen. Per aquest motiu l'anàlisi de Fourier rep també el nom d'**anàlisi freqüencial**.

En funció del tipus de senyal a analitzar les eines matemàtiques per a l'anàlisi freqüencial varien i reben diferents noms (veure resum en la figura 5):

Cas 1. x senyal analògic (temps continu) periòdic, de periode T:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \qquad \textbf{(sèrie de Fourier)}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j\frac{2\pi k}{T}t}\,dt$$

Propietats:

- Anàlisi freqüencial: freqüències múltiples de $\frac{1}{T}$.
- La definició de sèrie de Fourier només té sentit si el sumatori $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$ convergeix per a tot valor de t. Les *condicions de Dirichlet* garanteixen que la sèrie existeix per a tots els valors de t:

  i) $x(t)$ té un nombre finit de discontinuïtats en cada periode

  ii) $x(t)$ conté un nombre finit de màxims i mínims en cada periode

  iii) $x(t)$ és absolutament integrable en un periode: $\int_T |x(t)|\,dt < \infty$

  Si un senyal no és absolutament integrable però verifica que $\int_T |x(t)|^2\,dt < \infty$ (senyal d'energia finita), llavors $x(t)$ i la seva sèrie de Fourier poden ésser diferents per a alguns valors de t.

  En general, tots els senyals periòdics d'interés satisfan les condicions de Dirichlet.
- Si $x(t)$ és un senyal real:

$$x(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\cos(\frac{2\pi k}{T}t + \theta_k)$$

  on $c_k = |c_k|e^{j\theta_k}$. $|c_0|$ representa el valor mitjà del senyal en un periode.

  Si $x(t)$ és real i parell $x(-t) = x(t)$ llavors els coeficients c_k són reals. Si $x(t)$ és real i imparell $x(-t) = -x(t)$ llavors els coeficients c_k són imaginaris purs.
- La potència del senyal x es pot calcular a partir dels coeficients de la seva sèrie de Fourier (fòrmula de Parseval). (Recordem que l'energia dels senyals periòdics és infinita):

$$P = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

  La representació dels valors de $|c_k|^2$ per a cada valor de freqüència $\frac{k}{T}$ rep el nom d'**espectre de potència** o **densitat espectral de potència**. Si el senyal és real llavors l'espectre de potència és simètric respecte a l'eix vertical, ja que $|c_{-k}| = |c_k|$.

Exemple: sèrie de Fourier d'un pols rectangular periòdic

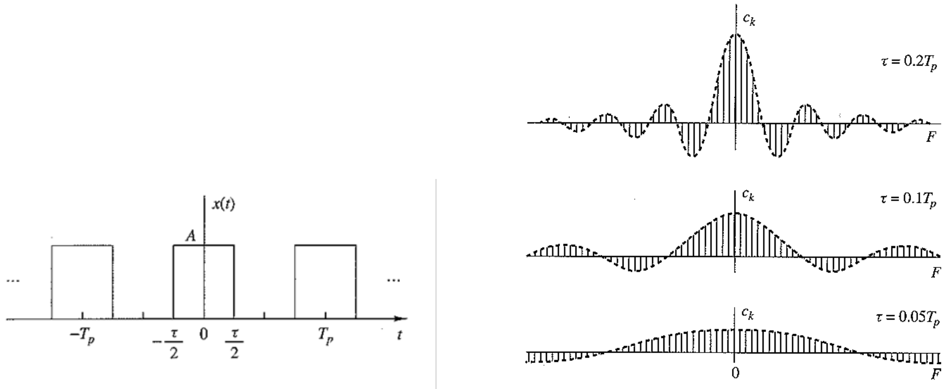


Figura 1: Senyal continu periòdic (pols rectangular d'amplada τ) de periode T_p i coeficients de la seva sèrie de Fourier per a diferents valors de τ amb T_P fixat.

Cas 2. x senyal analògic (temps continu) no periòdic:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t}\, df$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt \quad \textbf{(transformada de Fourier)}$$

Alternativament, aquestes expressions es poden escriure en termes de la freqüència angular $\omega = 2\pi f$:

$$x(t) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt \qquad \textbf{(transformada de Fourier)}$$

$X(f)$ rep el nom d'**espectre del senyal** i també es denota com $\mathcal{F}(x(t))$. La transformada inversa de Fourier es denota $\mathcal{F}^{-1}(X(f)) = x(t)$.

Propietats:

- Anàlisi freqüencial: totes les freqüències.
- La definició de transformada de Fourier només té sentit si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt$ convergeix per a tot valor de t. Les *condicions de Dirichlet* garanteixen que la transformada existeix per a tots els valors de t:
  i) $x(t)$ té un nombre finit de discontinuïtats finites
  ii) $x(t)$ conté un nombre finit de màxims i mínims
  iii) $x(t)$ és absolutament integrable: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$

  Si un senyal no és absolutament integrable però verifica que $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty$ (senyal d'energia finita), llavors també existeix la seva transformada de Fourier. En aquest cas, a més, es pot assegurar que també existeix la transformada inversa i que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}x(t) = x(t)$.

  En la pràctica, per a tots els senyals que trobarem en el "mon real" podrem calcular les seves transformades i transformades inverses de Fourier.
- L'energia del senyal x es pot calcular a partir dels coeficients de la seva transformada de Fourier (fòrmula de Parseval):
  $$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$$
  S'anomena **densitat espectral d'energia** a la funció $S_{XX}(f) = |X(f)|^2$.

- si $x(t)$ és un senyal real llavors $|X(-f)| = |X(f)|$ (espectre simètric respecte a l'eix vertical) i $S_{XX}(-f) = S_{XX}(f)$.

Exemple: transformada de Fourier d'un pols rectangular

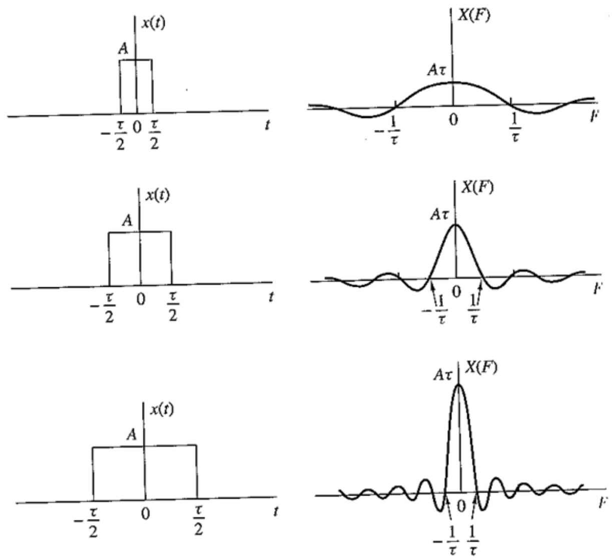


Figura 2: Senyal continu no periòdic (pols rectangular d'amplada τ) i la seva transformada de Fourier per a diferents valors de τ.

Cas 3. x senyal digital (temps discret) periòdic de periode N:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \qquad n = 0, \cdots, N-1 \qquad \textbf{(sèrie discreta de Fourier)}$$

$$c_k = X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} \qquad k = 0, \cdots, N-1 \quad \textbf{(transformada discreta de Fourier (DFT))}$$

Propietats

- Anàlisi freqüencial: N freqüències múltiples de $\frac{1}{N}$ (de $f = 0$ fins a $f = \frac{N-1}{N}$).
- La sèrie discreta de Fourier sempre es pot calcular.
- Els coeficients c_k formen una seqüència periòdica de periode N, ja que $c_k = c_{k+N}$.
- La representació dels coeficients c_k per a cada valor de k rep el nom d'**espectre** del senyal.
- La potència del senyal x es pot calcular a partir dels coeficients de la seva sèrie de Fourier (fòrmula de Parseval):

$$P = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

  La representació dels valors de $|c_k|^2$ per a cada valor de freqüència $\frac{k}{N}$ rep el nom d'**espectre de potència** o **densitat espectral de potència**. Si el senyal és real llavors l'espectre de potència és simètric respecte a l'eix vertical, ja que $|c_{-k}| = |c_k|$.

Exemple: sèrie de Fourier d'un pols rectangular discret periòdic

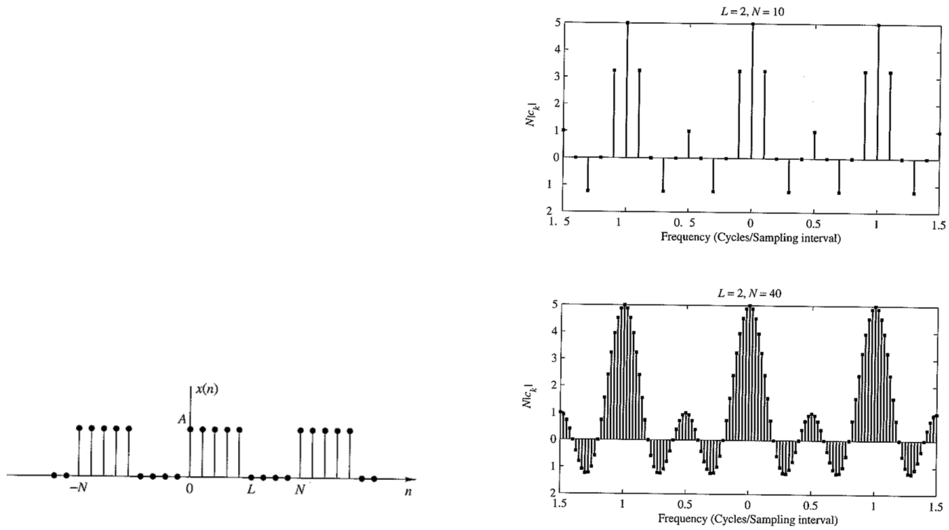


Figura 3: Senyal discret periòdic (pols rectangular d'amplada L) de periode N i coeficients de la seva sèrie de Fourier (transformada de Fourier discreta) per a diferents valors de N amb L fixat. Notem que la transformada discreta és també periòdica amb periode N. En la figura de la dreta l'eix horitzontal representa els valors de freqüència $f = k/N$.

Cas 4. x senyal digital (temps discret) no periòdic:

$$x[n] = \int_0^1 X(f)e^{j2\pi fn}\, df$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn} \quad \textbf{Transformada de Fourier en temps discret}$$

Alternativament, aquestes expressions es poden escriure en termes de la freqüència angular $\omega = 2\pi f$:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \qquad \textbf{Transformada de Fourier en temps discret}$$

Propietats

- Anàlisi freqüencial: totes les freqüències entre 0 i 1 (o, de manera equivalent, $\omega \in (0, 2\pi)$).
- $X(\omega)$ és periòdica amb periode 2π: $X(\omega + 2\pi k) = X(\omega)$, per a tot k
- La transformada de Fourier en temps discret existeix si $x(t)$ és absolutament sumable ($\sum_n |x[n]| < \infty$) o bé si és d'energia finita ($\sum_n |x[n]|^2 < \infty$).
- L'energia del senyal x es pot calcular a partir dels coeficients de la seva transformada de Fourier en temps discret (fòrmula de Parseval):

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2\, d\omega$$

  S'anomena **densitat espectral d'energia** a la funció $S_{XX}(\omega) = |X(\omega)|^2$.
- si $x[n]$ és un senyal real llavors $|X(-\omega)| = |X(\omega)|$ (espectre simètric respecte a l'eix vertical) i $S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega)$.

Exemple: transformada de Fourier d'un pols rectangular discret no periòdic

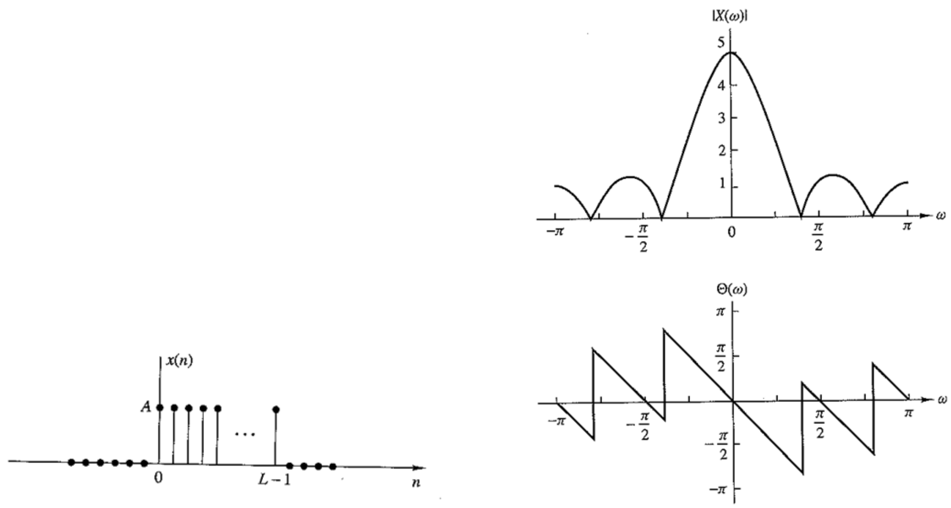


Figura 4: Senyal discret no periòdic (pols rectangular d'amplada L) i la seva transformada de Fourier (mòdul i fase). Notem que la transformada de Fourier $X(\omega)$ és periòdica amb periode 2π.

Relació entre la transformada de Fourier en temps discret i la transformada Z

Comparant les definicions de la transformada Z i la transformada de Fourier d'un senyal discret podem trobar la següent relació:

$$X(\omega) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Per a que aquesta relació sigui certa s'han de cumplir que la transformada Z estigui definida per a $z = e^{j\omega}$, és a dir $z = e^{j\omega}$ ha de pertànyer a la ROC de $X(z)$, la qual cosa equival a dir que la ROC de $X(z)$ conté el cercle unitat.

Propietats de simetria de la transformada de Fourier en temps discret

TABLE 4.4 Symmetry Properties of the Discrete-Time Fourier Transform

Sequence	DTFT
$x(n)$	$X(\omega)$
$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
$x^*(-n)$	$X^*(\omega)$
$x_R(n)$	$X_e(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) + X^*(-\omega)]$
$jx_I(n)$	$X_o(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) - X^*(-\omega)]$
$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$	$X_R(\omega)$
$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$	$jX_I(\omega)$
Real Signals	
	$X(\omega) = X^*(-\omega)$
Any real signal	$X_R(\omega) = X_R(-\omega)$
$x(n)$	$X_I(\omega) = -X_I(-\omega)$
	$\lvert X(\omega)\rvert = \lvert X(-\omega)\rvert$
	$\measuredangle X(\omega) = -\measuredangle X(-\omega)$
$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$	$X_R(\omega)$
(real and even)	(real and even)
$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$	$jX_I(\omega)$
(real and odd)	(imaginary and odd)

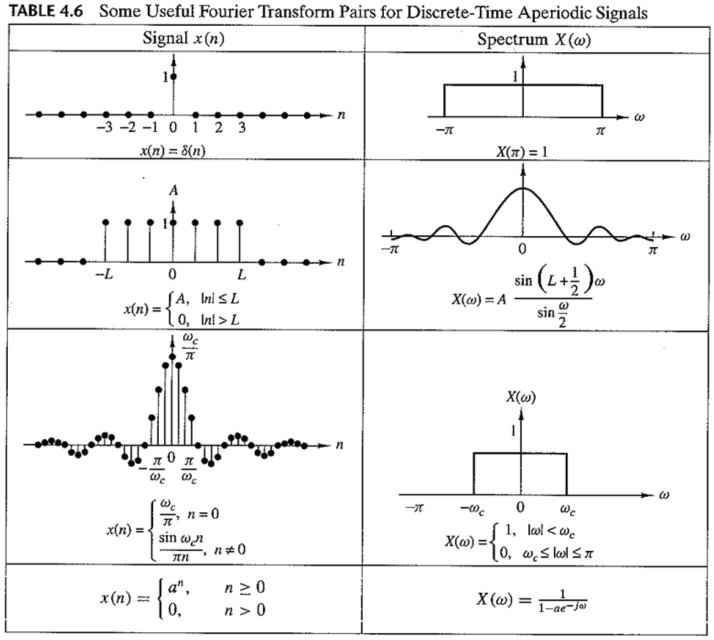
Altres propietats de la transformada de Fourier en temps discret

TABLE 4.5 Properties of the Fourier Transform for Discrete-Time Signals

Property	Time Domain	Frequency Domain
Notation	$x(n)$	$X(\omega)$
	$x_1(n)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(n)$	$X_2(\omega)$
Linearity	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Time shifting	$x(n-k)$	$e^{-j\omega k}X(\omega)$
Time reversal	$x(-n)$	$X(-\omega)$
Convolution	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Correlation	$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(-\omega)$
		$= X_1(\omega)X_2^*(\omega)$
		[if $x_2(n)$ is real]
Wiener–Khintchine theorem	$r_{xx}(l)$	$S_{xx}(\omega)$
Frequency shifting	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(\omega - \omega_0)$
Modulation	$x(n)\cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}X(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)$
Multiplication	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda$
Differentiation in		
the frequency domain	$nx(n)$	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Conjugation	$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
Parseval's theorem	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$	

Parells transformats habituals per a senyals discrets aperiòdics

TABLE 4.6 Some Useful Fourier Transform Pairs for Discrete-Time Aperiodic Signals



Relació entre la Transformada Discreta de Fourier i la Transformada de Fourier en temps discret

Consideram un senyal discret finit $x[n]$ que pren valors entre $n = 0$ i $n = N-1$. Com es tracta d'un senyal no periòdic podem calcular la seva Transformada de Fourier en temps discret:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$$

D'altra banda podem considerar l'extensió periòdica d'aquest senyal:

$$x_P[n] = x[n] \qquad \text{si } n = 0, \cdots, N-1 \qquad\qquad x_P[n+N] = x_P[n] \quad \text{per a tot } n$$

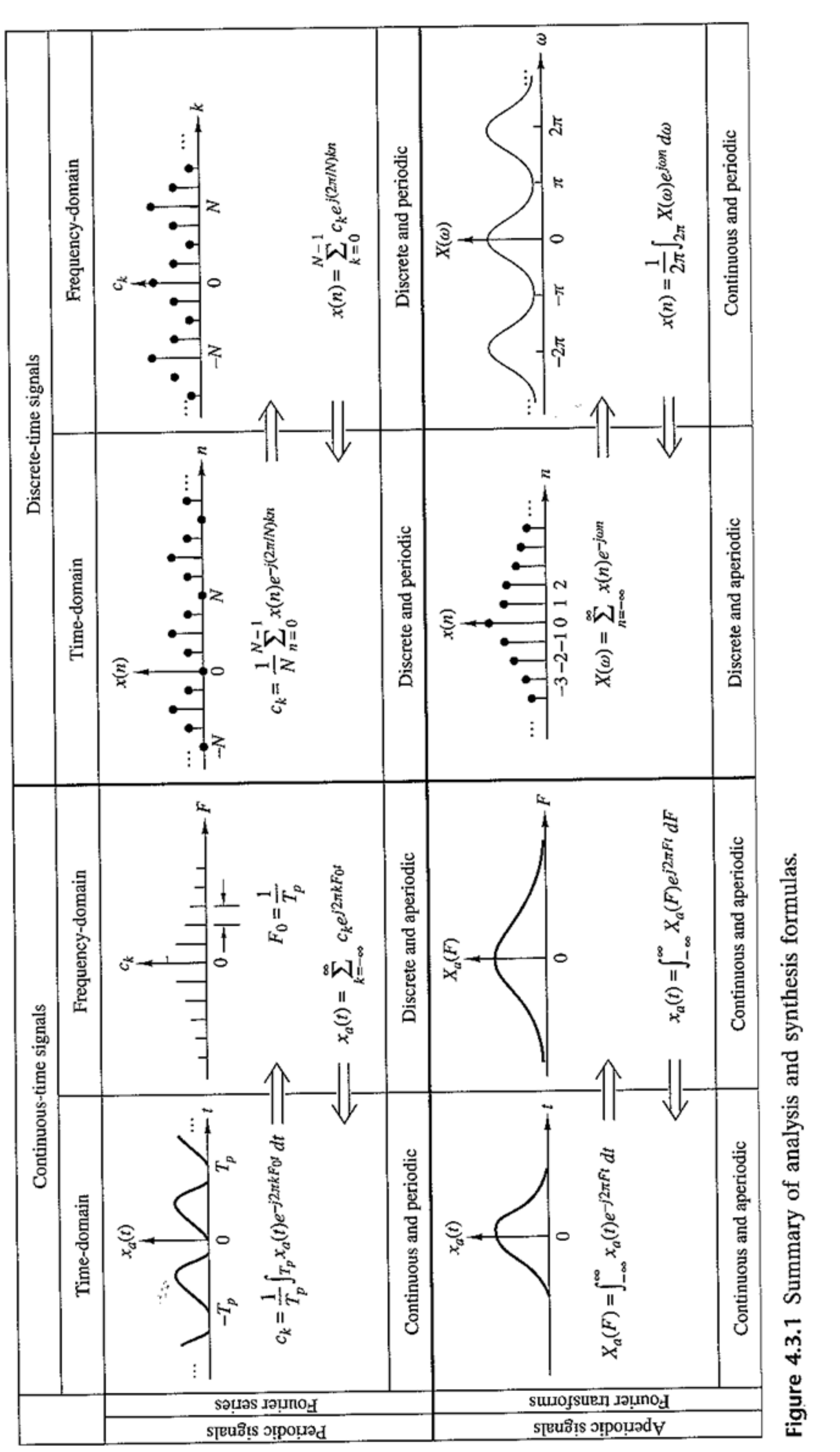


Figura 5: Font: Digital Signal Processing, J. Proakis, D. Manolakis, Pearson Prentice Hall, 2007

Observem que per a valors de n entre 0 i $N-1$ ambdós senyals són idèntics.

Aquest nou senyal és periòdic i per tant podem calcular la seva Transformada Discreta de Fourier:

$$X_P[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_P[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

Ens demanam per la relació entre aquestes dues transformades. Comparant les expressions obtingudes observam que:

$$X_P[k] = \frac{1}{N} X(\frac{2\pi k}{N})$$

és a dir, la DFT és una versió discreta i reescalada de la Transformada de Fourier del senyal discret.

La conclusió del raonament anterior és que és possible conèixer, de manera aproximada, la transformada de Fourier d'un senyal discret a partir de la DFT de la seva versió periodtizada. En la pràctica és molt més fàcil calcular la DFT que la transformada de Fourier, ja que existeixen algoritmes ràpids de càlcul (anomenats FFT: *Fast Fourier Transform*), amb la ventatja que el resultat és un senyal discret que pot ésser enmagatzemat en l'ordinador. Per aquest motiu normalment es calcula la DFT i a partir d'ella es dedueixen propietats de la Transformada de Fourier del senyal.

Exemple: comparació de la transformada de Fourier de $x[n] = a^n u[n]$ (amb $a = 0.8$) i la seva transformada discreta de Fourier (figures 6 i 7).

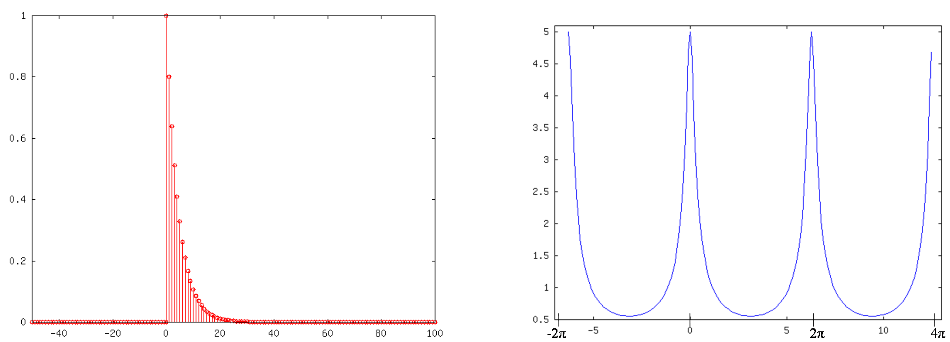


Figura 6: Senyal discret no periòdic i la seva transformada de Fourier . Notem que la transformada de Fourier $X(\omega)$ és periòdica amb periode 2π.

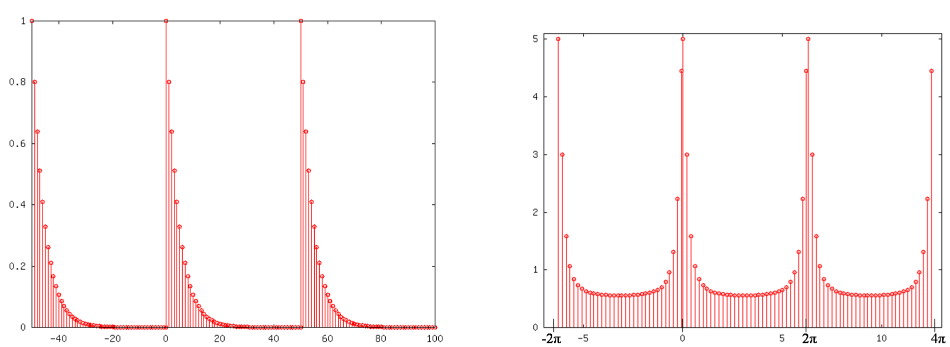


Figura 7: Senyal discret periodtizat (periode $N = 50$) i coeficients de la seva sèrie de Fourier (transformada discreta de Fourier). Notem que la DFT és un versió discreta de la transformada de Fourier del senyal no periòdic. La distància entre les mostres és $\frac{2\pi}{N}$.

Mostreig de senyals

En aquesta secció estudiam el procés de mostreig de senyals. L'objectiu del mostreig és representar amb un nombre discret de valors (*mostres*) un senyal analògic (temps continu) o bé representar amb un nombre menor de mostres un senyal digital (temps discret). Estudiarem el procés de mostreig tant des del punt de vista temporal com des del punt de vista freqüencial i establirem quines condicions ha de verificar el procés per fer possible la recuperació del senyal mostrejat original a partir de les seves mostres.

Mostreig de senyals analògics

La figura 8 il.lustra el procés de mostreig d'un senyal analògic. El senyal discret obtingut $x[n]$ és igual al senyal original $x_a(t)$ per als valors de $t = nT$, on T rep el nom de **periode de mostreig**: $x[n] = x_a(nT)$.

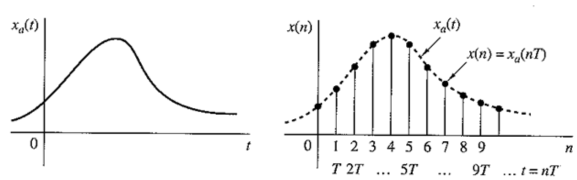


Figura 8: Mostreig d'un senyal continu amb un periode de mostreig T.

Freqüències de senyals continus i de senyals discrets

Per a estudiar el procés de mostreig des del punt de vista freqüencial calcularem les transformades de Fourier de $x_a(t)$ i $x[n]$ aplicant les fòrmules estudiades en les seccions anteriors (casos 2 i 4, respectivament), però cal tenir en compte que les "freqüències" a les quals fan referència les fòrmules representen magnituds diferents en el cas continu i en el cas discret.

En el cas continu la freqüència representa el *nombre de cicles per segon* o *hertz* (Hz) (veure la Figura 9-esquerra).

En el cas continu la freqüència representa el *nombre de cicles per mostra* (veure la Figura 9-dreta).

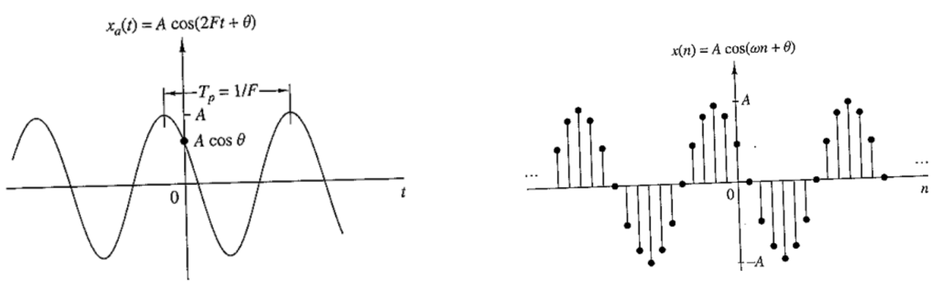


Figura 9: Diferència entre la freqüència d'un senyal continu (esquerra) i la d'un senyal discret (dreta).

Per distingir ambdues magnituds, a partir d'ara utilitzarem la lletra F per denotar la freqüència d'un senyal continu i f per denotar la d'un senyal discret [1]. La relació entre ambues freqüències és $F = \frac{f}{T}$.

Amb aquesta nova notació les fòrmules per al càlcul de les transformades de Fourier de $x_a(t)$ i $x[n]$ són:

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(_aF)e^{j2\pi Ft}\,dF \qquad X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j2\pi Ft}\,dt$$

$$x[n] = \int_0^1 X(f)e^{j2\pi fn}\,df \qquad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn}$$

On s'ha de tenir en compte que si $F = \frac{f}{T}$, llavors $X(f) = X(FT)$.

[1] També utilitzarem la notació Ω i ω per distingir entre freqüència angular dels senyals continus i dels senyals discrets, respectivament

Relació entre els espectres de $x_a(t)$ i $x[n]$ La relació entre les transformades X_a i X vé donada per la següent expressió:

$$X(FT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F + \frac{k}{T})$$

És a dir, la transformada del senyal discret s'obté com la superposició de transformades del senyal continu desplaçades en freqüència a intervals regulars $\frac{1}{T}$. La figura 10 il.lustra l'efecte del mostreig en l'espectre d'un senyal.

La relació entre X_a i X es pot deduir a partir de les fòrmules de les transformades descrites en les seccions anteriors (casos 2 i 4, respectivament). Alternativament, es pot obtenir la relació entre aquestes transformades fent us de la versió continua $\hat{x}(t)$ del senyal discret $x[n] = x_a(nT)$, que es defineix com:

$$\hat{x}(t) = x_a(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

on el sumatori $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ rep del nom de **tren de deltes**. $\delta(t)$ es defineix de manera que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\, dt = f(t_0)$ per a qualsevol funció $f(t)$. Amb aquesta definició es verifica que $\hat{X}(F) = X(FT)$. A més es pot comprovar que $\hat{X}(F) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F + \frac{k}{T})$.

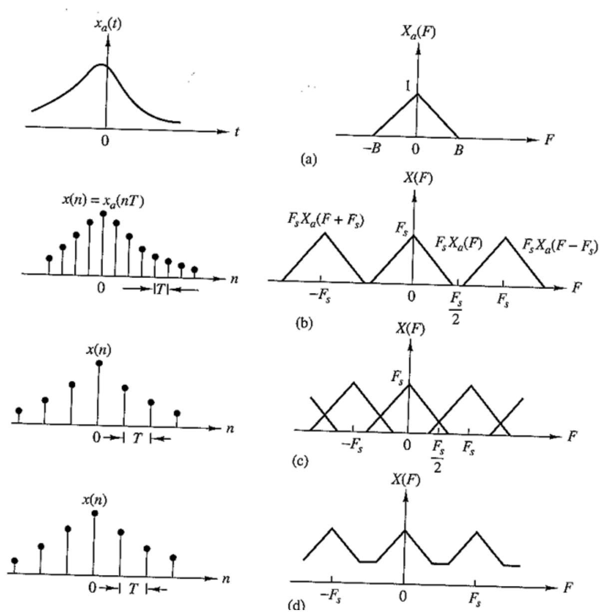


Figura 10: (a) Senyal original i el seu espectre. Notem que el senyal té amplada de banda limitada i que l'espectre s'anul.la quan $|F| > B$. (b) Senyal mostrejat amb un periode de mostreig T tal que $T < \frac{1}{2B}$ i el seu espectre. (c) Senyal mostrejat amb un periode de mostreig T tal que $T > \frac{1}{2B}$ i procés de formació del seu espectre. (d) Senyal mostrejat amb un periode de mostreig T tal que $T > \frac{1}{2B}$ i el seu espectre.

Teorema del mostreig (teorema de Shannon-Whitaker)

Ens demanam en aquesta secció si és possible recuperar el senyal continu original a partir de la seva versió mostrejada. La resposta és sí, sempre que la relació entre l'amplada de banda del senyal original i la freqüència de mostreig sigui l'adequada. Observant la figura 10 podem deduir quina és aquesta condició:

- Si T és massa gros (és a dir, la freqüència de mostreig $F_m = \frac{1}{T}$ és massa petita) les repeticions de l'espectre original es solapen (aquest fenòmen rep el nom d'**aliasing**) (veure (c)) i és impossible identificar l'espectre original en l'espectre resultant (veure (d)).
- En canvi, si T és suficientment petit (és a dir, F_m és suficientment gros), llavors sí es possible identificar l'espectre original en l'espectre resultant (veure (b)).

La condició que ha de cumplir la freqüència de mostreig per a poder recuperar el senyal original a partir del mostrejat s'anomena **condició de Nyquist**, i la freqüència mínima de mostreig rep el nom de **freqüència de Nyquist** (F_N):

$$F_m > 2B \qquad \text{per tant} \qquad F_N = 2B$$

En cas que un senyal hagi estat mostrejat satisfent la condició de Nyquist, el **teorema del mostreig** ens diu com obtenir el senyal original a partir del mostrejat:

- Definim $X_\Pi(F) = X(FT) \cdot \Pi(\frac{F}{F_m/2})$, on $\Pi(\frac{F}{F_m/2}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |F| \leq F_m/2 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$
- Si es verifica la condició de Nyquist llavors $X_\Pi(F) = \frac{1}{T} \cdot X_a(F)$
- Calculam $x_a(t)$ com la transformada inversa de $T \cdot X_\Pi(F)$:

$$x_a(t) = T \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X_\Pi(F) e^{j2\pi Ft}\, dF$$

- El resultat del càlcul dóna:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\frac{\pi(t-nT)}{T})}{\frac{\pi(t-nT)}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \text{sinc}(\frac{\pi(t-nT)}{T})$$

on $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

El procés de reconstrucció del senyal original a partir de les seves mostres s'il.lustra a les figures 11 i 12. En cas que el senyal mostrejat no satisfaci les condicions de Nyquist el senyal reconstruït és diferent de l'original (figura 13).

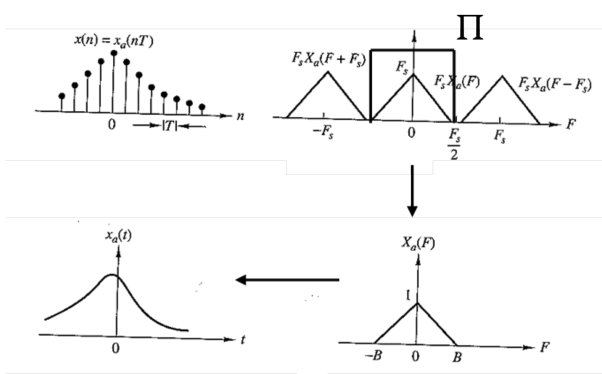


Figura 11: Reconstrucció del senyal analògic a partir d'un senyal digital mostrejat correctament

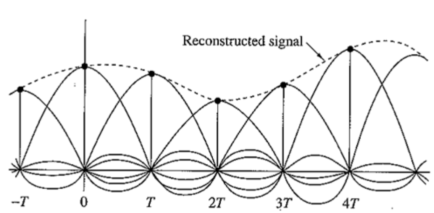


Figura 12: Il.lustració del procés de reconstrucció del senyal analògic a partir de les seves mostres utilitzant la fòrmula del teorema del mostreig.

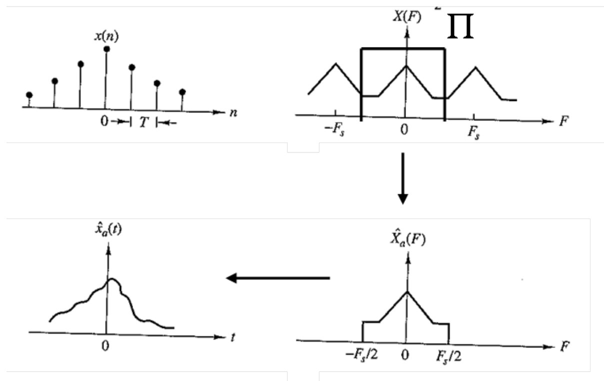


Figura 13: Dalt, senyal mostrejat sense cumplir la condició de Nyquist i el seu espectre. Baix, a la dreta, $X_\Pi(F)$ corresponent al senyal anterior. Esquerra, reconstrucció del senyal a partir de $X_\Pi(F)$. Comparau amb la figura 11.

Mostreig de senyals discrets (delmat)

Volem estudiar el senyal $x_M[n] = x[Mn]$, on M és un enter positiu (veure exemple a la figura 14). El resultat del mostreig és un nou senyal discret equivalent a mostrejar el senyal analògic original amb un periode de mostreig MT (T és el periode de mostreig original). A nivell freqüencial, es pot calcular l'espectre de $x_M[n]$ a partir del de $x[n]$:

$$X_M(f) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{f}{M} - \frac{k}{M}\right)$$

Observam que el resultat del mostreig és un apropament de les repeticions de l'espectre del senyal analògic original. Si M és massa gros s'arriba a produir aliasing.

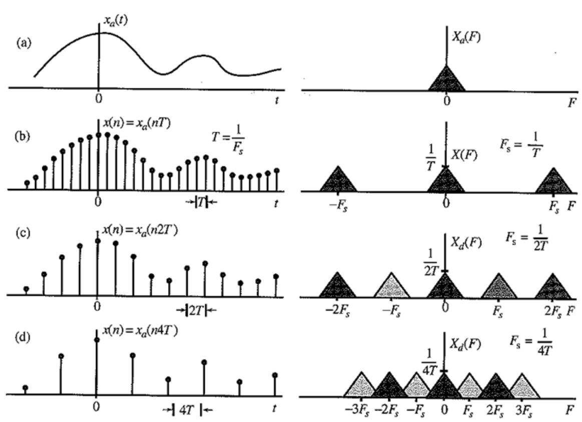
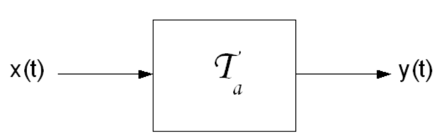


Figura 14: Exemples de delmat d'un senyal discret

Processament digital de senyals analògics

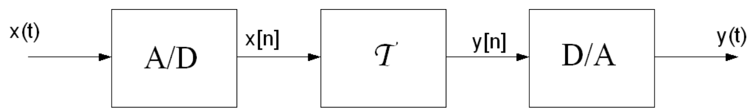
Considerem un senyal analògic $x_a(t)$ que es processa amb un sistema $\mathcal{T}_a$ per donar com a sortida el senyal $y_a(t)$.



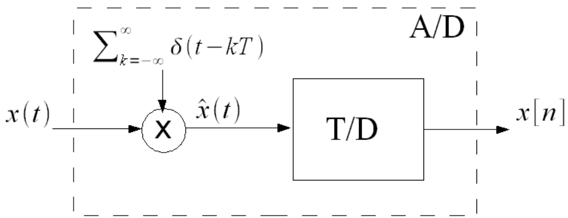
Considerem ara la versió discreta del senyal: $x[n] = x_a(nT)$.

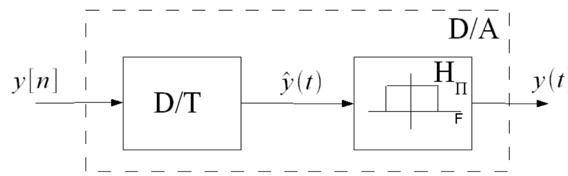
Propietat:
Si $\mathcal{T}_a$ és un sistema LTI i T és un periode de mostreig que satisfà la condició de Nyquist llavors es pot trobar un sistema digital $\mathcal{T}$ LTI amb funció de transferència $H(f)$ tal que la seva sortida $y[n]$ és la versió discreta del senyal $y_a(t)$. Es diu en aquest cas que els sistemes $\mathcal{T}_a$ i $\mathcal{T}$ són equivalents.

La relació entre $\mathcal{T}_a$ i $\mathcal{T}$ es pot representar amb el següent diagrama de blocs:



on els blocs **A/D** i **D/A** representen els processos de conversió d'*analògic a digital* i de *digital a analògic*, respectivament. En la seva versió més simple aquest processos es poden representar gràficament amb els següents diagrames de blocs:

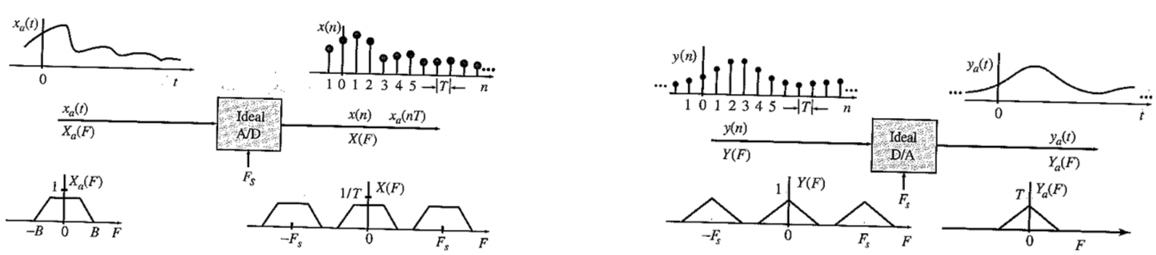




El procés de conversió d'analògic a digital es pot descriure, de manera ideal, en dues etapes: el producte del senyal analògic per un tren de deltes i la conversió del resultat (bloc **T/D**) en la seva versió discreta. Processos com la quantificació i codificació dels valors del senyal no es tenen en compte.

El procés de conversió de digital a analògic es pot descriure, de manera ideal, en dues etapes: el pas a la versió contínua del senyal discret, expressat com a tren de deltes (bloc **D/T**) i eliminació de les repeticions de la transformada (bloc *filtre passa-baix*, amb funció de transferència $H_\Pi(F)$).

La següent figura mostra dos exemples de conversió D/A i A/D:



La transformada de Fourier del senyal de sortida $Y_a(F)$ es pot escriure en funció de tots els blocs del sistema de la següent manera:

$$Y_a(F) = H_\Pi(f) \cdot H(FT) \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - \frac{k}{T}) = H(FT) \cdot X_a(F)$$

Nota: la majoria de figures d'aquest capítol s'han tret de Digital Signal Processing, J. Proakis, D. Manolakis, Pearson Prentice Hall, 2007.