

Tema 1. Variables aleatòries vectorials

Recordatori:

una **variable aleatòria** (v.a.) és una funció que associa un número a cada un dels successos elementals d'un experiment aleatori.

Exemple 1:

Experiment=llançar 2 monedes, X =nombre de cares

En aquest tema:

estudiarem les relacions entre 2 o més v.a. associades a un mateix experiment.

Exemple 2:

Experiment=llançar 2 monedes, X =nombre de cares, Y =nombre de creus

Cas discret

Donades dues v.a. discretes X i Y anomenem **vector aleatori** al parell (X, Y) . El conjunt de valors possibles de (X, Y) es denota Ω_{XY} . Definim la **funció de probabilitat conjunta** de (X, Y) com:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x \cap Y = y) \quad \forall (x, y) \in \Omega_{XY}$$

(Notació alternativa: $f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$)

Propietats

- $\sum \sum_{(x,y) \in \Omega_{XY}} P(X = x, Y = y) = 1$
- $P(X = x) = \sum_{y \in \Omega_Y} P(X = x, Y = y)$ (funció de probabilitat marginal de X)
- $P(Y = y) = \sum_{x \in \Omega_X} P(X = x, Y = y)$ (funció de probabilitat marginal de Y)
- si X i Y són v.a. independents: $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$
- Donat un conjunt A : $P((X, Y) \in A) = \sum \sum_{(x,y) \in A \cap \Omega_{XY}} P(X = x, Y = y)$

Funció de distribució conjunta: $F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

Exemple 3:

La funció de probabilitat conjunta de dues v.a. discretes X i Y es mostra en la taula següent:

| $Y \setminus X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | $k/35$ | $1/35$ | $1/35$ | $1/35$ | 0 | 0 | 0 |
| 2 | $1/35$ | $2/35$ | $2/35$ | $1/35$ | $1/35$ | 0 | 0 |
| 3 | 0 | $1/35$ | $2/35$ | $2/35$ | $2/35$ | $1/35$ | 0 |
| 4 | 0 | 0 | $1/35$ | $2/35$ | $2/35$ | $1/35$ | $1/35$ |
| 5 | 0 | 0 | $1/35$ | $1/35$ | $2/35$ | $2/35$ | $2/35$ |

Dibuixau el suport de la funció, calculeu k , les funcions de probabilitat marginals i $P(3 < X + Y \leq 5)$. Són independents les variables X i Y ?

Exemple 4:

(Exercici 11a) Llançam a l'aire un dau equilibrat. Considerem dues variables aleatòries X i Y definides com:

$$X = \begin{cases} -1 & \text{si el resultat és imparell} \\ 1 & \text{si el resultat és parell} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -1 & \text{si el resultat és 1, 2 o 3} \\ 0 & \text{si el resultat és 4} \\ 1 & \text{si el resultat és 5 o 6} \end{cases}$$

Trobeu la llei conjunta i la funció de distribució de X i Y .

Exercicis proposats: 1, 14a, 17a, 6