Variables aleatòries n-dimensionals

Donades n variables aleatòries $X_1, X_2, \cdots, X_n$, es defineix la **funció de distribució conjunta del vector aleatori n-dimensional** $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ com:

$$F_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n)$$

Si les variables $X_1, X_2, \cdots, X_n$ són **discretes** llavors es pot definir una funció $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n)$ anomenada **funció de probabilitat conjunta del vector aleatori n-dimensional**, tal que:

$$F_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{x'_1 \leq x_1} \cdots \sum_{x'_n \leq x_n} P(X_1 = x'_1, X_2 = x'_2, \cdots, X_n = x'_n)$$

i la probabilitat d'un succés A es pot calcular com:

$$P(A) = \sum \cdots \sum\nolimits_{(x'_1, \cdots, x'_n) \in A} P(X_1 = x'_1, X_2 = x'_2, \cdots, X_n = x'_n)$$

Si les variables $X_1, X_2, \cdots, X_n$ són **contínues** llavors es pot definir una funció $f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ anomenada **funció de densitat conjunta del vector aleatori n-dimensional**, tal que:

$$F_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} f_{X_1X_2\cdots X_n}(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)\, dx'_1 dx'_2 \cdots dx'_n$$

i la probabilitat d'un succés A es pot calcular com:

$$P(A) = \int \cdots \int_{(x'_1, \cdots, x'_n) \in A} f_{X_1X_2\cdots X_n}(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)\, dx'_1 dx'_2 \cdots dx'_n$$

Donat un vector aleatori n-dimensional discret $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, la **funció de probabilitat marginal** de la variable X_j es defineix com:

$$P(X_j = x_j) = \sum_{x'_1} \cdots \sum_{x'_{j-1}} \sum_{x'_{j+1}} \cdots \sum_{x'_n} P(X_1 = x'_1, \cdots, X_{j-1} = x'_{j-1}, X_j = x_j, X_{j+1} = x'_{j+1}, X_n = x'_n)$$

i la **funció de probabilitat marginal conjunta** de $(X_1, \cdots, X_m)$ $(1 \leq m < n)$:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_m = x_m) = \sum_{x'_{m+1}} \cdots \sum_{x'_n} P(X_1 = x_1, \cdots, X_m = x_m, X_{m+1} = x'_{m+1}, \cdots, X_n = x'_n)$$

Donat un vector aleatori n-dimensional continu $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, la **funció de densitat marginal** de la variable X_j es defineix com:

$$f_{X_j}(x_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1X_2\cdots X_n}(x'_1, \cdots, x'_{j-1}, x_j, x'_{j+1}, x'_n)\, d_{x'_1} \cdots d_{x'_{j-1}} d_{x'_{j+1}} \cdots d_{x'_n}$$

i la **funció de densitat marginal conjunta** de $(X_1, \cdots, X_m)$ $(1 \leq m < n)$:

$$f_{X_1\cdots X_m}(x_1, \cdots, x_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1, \cdots, x_m, x'_{m+1}, \cdots, x'_n)\, d_{x'_{m+1}} \cdots d_{x'_n}$$

Donat un vector aleatori n-dimensional discret $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, es defineix la **funció de probabilitat condicional** de X_{m+1} condicionat per $X_1, \cdots, X_m$ $(1 \leq m < n)$ com:

$$P(X_{m+1} = x_{m+1}|_{X_1 = x_1, \cdots, X_m = x_m}) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_{m+1} = x_{m+1})}{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_m = x_m)}$$

Es pot demostrar que

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \;& P(X_n = x_n|_{X_1 = x_1, \cdots, X_{n-1} = x_{n-1}}) \times \\ & \times P(X_{n-1} = x_{n-1}|_{X_1 = x_1, \cdots, X_{n-2} = x_{n-2}}) \cdots P(X_2 = x_2|_{X_1 = x_1}) \cdot P(X_1 = x_1) \end{aligned}$$

Donat un vector aleatori n-dimensional continu $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, es defineix la **funció de densitat condicional** de X_{m+1} condicionat per $X_1, \cdots, X_m$ $(1 \leq m < n)$ com:

$$f_{X_{m+1}|X_1X_2\cdots X_m}(x_{m+1}|_{x_1x_2\cdots x_m}) = \frac{f_{X_1X_2\cdots X_{m+1}}(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})}{f_{X_1X_2\cdots X_m}(x_1, x_2, \cdots, x_m)}$$

Es pot demostrar que:

$$\begin{aligned} f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \quad & f_{X_n|X_1X_2\cdots X_{n-1}}(x_n|_{x_1x_2\cdots x_{n-1}}) \times \\ & \times f_{X_{n-1}|X_1X_2\cdots X_{n-2}}(x_{n-1}|_{x_1x_2\cdots x_{n-2}}) \cdots f_{X_1|X_2}(x_1|_{x_2}) \cdot f_{X_1}(x_1) \end{aligned}$$

n v.a. discretes $X_1, X_2, \cdots, X_n$ són **independents** si:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

n v.a. contínues $X_1, X_2, \cdots, X_n$ són **independents** si:

$$f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

Variable aleatòria Gaussiana n-dimensional

n v.a. contínues $X_1, X_2, \cdots, X_n$ són **conjuntament Gaussianes** si la seva funció de densitat conjunta és de la forma:

$$f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(K)}}\, e^{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 - \mu_{X_1} & \cdots & x_n - \mu_{X_n} \end{pmatrix} K^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_{X_1} \\ \vdots \\ x_n - \mu_{X_n} \end{pmatrix}}$$

on K és la matriu de covariàncies de $X_1, X_2, \cdots, X_n$:

$$K = \begin{pmatrix} \sigma^2_{X_1} & \sigma_{X_1X_2} & \cdots & \sigma_{X_1X_n} \\ \sigma_{X_1X_2} & \sigma^2_{X_2} & \cdots & \sigma_{X_2X_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{X_1X_n} & \sigma_{X_2X_n} & \cdots & \sigma^2_{X_n} \end{pmatrix}$$

Propietats:

- Si $(X_1, \cdots, X_n)$ són conjuntament Gaussianes, llavors les funcions de densitat marginals són també Gaussianes.
- Si $(X_1, \cdots, X_n)$ són conjuntament Gaussianes, llavors les funcions de densitat condicionals són també Gaussianes.
- Si $(X_1, \cdots, X_n)$ són conjuntament Gaussianes i $\begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, amb $\det(A) \neq 0$, llavors $(U_1, \cdots, U_n)$ són conjuntament Gaussianes.
- Si $(X_1, \cdots, X_n)$ són conjuntament Gaussianes, llavors $Z = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$ és una v.a. Gaussiana per a qualsevol valor de les constants $a_1, a_2, \cdots, a_n$.