Processos aleatoris estacionaris

Molts processos tenen la propietat de no canviar el seu comportament aleatori al llarg del temps. És a dir, una observació del procés en un interval (t_0, t_k) mostra el mateix tipus de comportament aleatori que una observació en l'interval $(t_0 + \nu, t_k + \nu)$. De manera que podem dir que, per a aquest tipus de procés, les probabilitats associades als temps $t_1, t_2, \ldots, t_k$ són les mateixes que les associades als temps $t_1 + \nu, t_2 + \nu, \ldots, t_k + \nu$.

Un procés aleatori $X(t)$ (ja sigui en temps discret o continu) es diu **estacionari** si:

$$F_{X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = F_{X(t_1+\nu)X(t_2+\nu),\ldots,X(t_k+\nu)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \qquad \forall t_1, \ldots, t_k, \nu \qquad (1)$$

on

$$F_{X(t_1)\cdots X(t_k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P(X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_k) \leq x_k)$$

i

$$F_{X(t_1+\nu)\cdots X(t_k+\nu)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P(X(t_1 + \nu) \leq x_1, \ldots, X(t_k + \nu) \leq x_k)$$

Propietats dels processos estacionaris

1. Com a conseqüència de (1):

$$F_{X(t_1)}(x_1) = F_{X(t_1+\nu)}(x_1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad P(X(t_1) \leq x_1) = P(X(t_1 + \nu) \leq x_1)$$

   llavors:

   a) $m_X(t) = E(X(t)) = m \qquad \forall t \qquad$ (l'esperança és constant).

   b) $Var(X(t)) = E((X(t) - m)^2) = \sigma^2 \qquad \forall t \qquad$ (la variància és constant).

2. Com a conseqüència de (1):

$$F_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) = F_{X(t_1+\nu)X(t_2+\nu)}(x_1, x_2) \qquad \forall t_1, t_2, \nu$$

   en particular, si $\nu = -t_1$ tenim:

$$F_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) = F_{X(0)X(t_2-t_1)}(x_1, x_2) \qquad \forall t_1, t_2$$

   de manera que:

   a) $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau) \qquad \forall t_1, t_2 \qquad$ (on $\tau = t_2 - t_1$).

   b) $C_X(t_1, t_2) = C_X(t_2 - t_1) = C_X(\tau) \qquad \forall t_1, t_2 \qquad$ (on $\tau = t_2 - t_1$).

Un procés aleatori que verifica les propietats

i) $m_X(t) = m \qquad$ (constant)

ii) $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) \qquad$ (o bé $C_X(t_1, t_2) = C_X(t_2 - t_1)$), $\quad \forall t_1, t_2$

es diu **procés estacionari en sentit ampli**.

Propietat. Si $X(t)$ és un procés estacionari, llavors $X(t)$ és estacionari en sentit ampli. La implicació contrària no és certa en general.

Propietat. Si $X(t)$ és un procés gaussià, llavors: $X(t)$ estacionari $\Longleftrightarrow$ $X(t)$ estacionari en sentit ampli.

Exemple 12:

(Febrer 2005). Definim el procés aleatori en temps continu $X(t)$ com

$$X(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

on A i B són v.a. iid amb mitjana zero. Demostrau que $X(t)$ és estacionari en sentit ampli. (Nota: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.)

Exemple 13:

(Setembre 2005). Siguin $X(t)$ i $Y(t)$ dos processos aleatoris independents i estacionaris en sentit ampli. Es defineix el nou procés $Z(t) = aX(t) + bY(t)$, on a i b són constants. És $Z(t)$ estacionari en sentit ampli? Justificau la resposta.

Exemple 14:

(Setembre 2007). Consideram el procés aleatori $Z(t) = t^2 + X$, on X és una v.a. uniforme en l'interval $[-0.5, 0.5]$.

a) *Calculau la probabilitat que $Z(t)$ sigui major que 1 per a valors de t positius.*
b) *Calculau la mitjana i l'autocovariància del procés. Es tracta d'un procés estacionari?.*
c) *Consideram el procés $W(t) = 3Y + t$, on Y és una v.a. exponencial de paràmetre $\frac{1}{2}$. Si X i Y són v.a. independents, estan incorrelats els processos?. Justificau la resposta.*

Mitjanes en temps i mitjanes estadístiques. Processos ergòdics.

L'esperança de la variable aleatòria associada a un procés $X(t, \Omega) = X(t)$ en un instant de temps t_i es calcula com (cas continu):

$$E(X(t_i)) = m_X(t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X(t_i)}(x)\, dx$$

$m_X(t)$ rep el nom de mitjana estocàstica, estadística o probabilística i no coincideix, en principi, amb la mitjana temporal de cada una de les realitzacions del procés:

$$\bar{X}(t, \omega_i) = \langle X(t, \omega_i) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t, \omega_i)\, dt$$

No obstant, per a un tipus molt especial de processos, aquestes mitjanes són iguals. Són els anomenats **processos ergòdics**. Per a un procés ergòdic es té:

- $\langle X(t, \omega_i) \rangle = E(X(t)) \qquad \forall \omega_i$
- $\langle X^2(t, \omega_i) \rangle = E(X^2(t)) \qquad \forall \omega_i$
- $\langle X(t, \omega_i) X(t-\tau, \omega_i) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t, \omega_i) X(t-\tau, \omega_i)\, dt = E(X(t)X(t-\tau)) = R_X(t, t-\tau) = R_X(\tau) \qquad \forall \omega_i$

Propietats.

1. Si un procés és ergòdic, llavors és estrictament estacionari. L'implicació contrària no és certa en general.
2. Si $X(t)$ és un procés gaussià, llavors: $X(t)$ ergodic $\iff$ $X(t)$ estrictament estacionari $\iff$ $X(t)$ estacionari.
3. En un procés ergòdic, una realització del procés és representativa de tot el procés. Aquesta propietat és molt útil ja que simplifica l'estudi d'aquests processos.