Fonaments Matemátiques II

Probabilitat

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears

Manuel Moyà Quintero

Índex

Capítol 3

Variable aleatòria discreta

3.1 Distribució de probabilitat discreta

Definició 3.1 *Donat un experiment aleatori d'espai mostral E anomenam* **variable aleatòria** *a una aplicació $X : E \to \mathbb{R}$.*

Exemple 1: Considerem l'espai mostral corresponent al llançament de dues monedes:

$$E = \{(x,x),(x,c),(c,x),(c,c)\}$$

i ens interessa tenir en compte el total de cares que ens surten a efectes del càlcul de probabilitats. Per a això definim la variable aleatòria

$$\begin{array}{rccc} X: & E & \to & \mathbb{R} \\ & (x,x) & \mapsto & 0 \\ & (x,c) & \mapsto & 1 \\ & (c,x) & \mapsto & 1 \\ & (c,c) & \mapsto & 2 \end{array}$$

Exemple 2: Si una bateria d'ordinador té un voltatge que està fora de certs límits, aquesta bateria es caracteritza com una fallada (F); si la bateria té un voltatge dins dels límits prescrits, és un èxit (V). Realitzam un experiment aleatori consistent en provar les bateries en la línia de muntatge fins que en trobam una fallada. L'espai mostra és:

$$E = \{F,\ VF,\ VVF,\ VVVF, \ldots\}$$

ens interessa tenir en compte el nombre proves efectuades fins a obtenir una fallada. Per això definim la següent variable aleatòria:

$$\begin{array}{rccc} X: & E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & F & \mapsto & 1 \\ & VF & \mapsto & 2 \\ & VVF & \mapsto & 3 \\ & VVVF & \mapsto & 4 \\ & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Exemple 3: Considerem l'experiment aleatori de llançar un dard a una diana circular de 30 cm de radi, sense comptar les errades totals (aquelles que no donen en la diana). Ens interessa saber la distància a que queda els dard del centre de la diana. L'espai mostral està format pel conjunt de punts on pot donar el dard a la diana i la variable aleatòria serà una funció

$$\begin{array}{rccc} X: & E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & d(P,O) \end{array}$$

on P és un punt mostral, O és el centre de la diana, i $d(P,O)$ la distància de P a O. Notem que el recorregut d'aquesta funció és $[0,30]$.

Definició 3.2 *Anomenam* **espai mostral discret** *aquell que consta d'un nombre finit o numerable d'elements. Una* **variable aleatòria discreta** *és aquella que està definida sobre un espai mostral discret.*

Exemple: La variable aleatòria que ens dóna el nombre de cares quan llancem dues monedes és discreta.

Definició 3.3 *Sigui X una variable aleatòria discreta. La funció*

$$\begin{array}{rccc} f_X: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & P(X^{-1}(x)) \end{array}$$

l'anomenarem **funció de probabilitat** *o* **funció de densitat discreta** *d'una variable aleatòria discreta.*

Exemple 1: Considerant l'exemple de la definició 3.1 en el que llençàvem dues monedes a l'aire. L'espai mostral és

$$E = \{(x,x),(x,c),(c,x),(c,c)\}$$

i la variable aleatòria que definíem és

$$\begin{array}{rccl} X: & E & \to & \mathbb{R} \\ & (x,x) & \mapsto & 0 \\ & (x,c) & \mapsto & 1 \\ & (c,x) & \mapsto & 1 \\ & (c,c) & \mapsto & 2 \end{array}$$

La funció de probabilitat d'aquesta variable aleatòria és

$$\begin{array}{rccc} f_X: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & 0 & \mapsto & P(X^{-1}(0)) = \frac{1}{4} \\ & 1 & \mapsto & P(X^{-1}(1)) = \frac{1}{2} \\ & 2 & \mapsto & P(X^{-1}(2)) = \frac{1}{4} \\ & \text{Altrament} & \mapsto & 0 \end{array}$$

Al conjunt $X^{-1}(x)$ el representarem per $\{X = x\}$, per tant,

$$f_X(x) = P(X^{-1}(x)) = P(X = x).$$

Igualment per indicar que $x \in X(E)$ el representarem per $x \in X$.

i a l'exemple anterior tendríem que la funció de probabilitat seria

$$\begin{array}{rccc} f_X: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & 0 & \mapsto & P(X = 0) = \frac{1}{4} \\ & 1 & \mapsto & P(X = 1) = \frac{1}{2} \\ & 2 & \mapsto & P(X = 2) = \frac{1}{4} \\ & \text{Altrament} & \mapsto & 0 \end{array}$$

Que es representa gràficament com indica la figura 3.1

Exemple 2: Sigui $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ l'espai mostral d'un experiment aleatori, on cada succés elemental té la mateixa probabilitat. Definim la variable aleatòria

$$\begin{array}{rccc} X: & E & \to & \mathbb{R} \\ & a & \mapsto & 0 \\ & b & \mapsto & 0 \\ & c & \mapsto & 1.5 \\ & d & \mapsto & 1.5 \\ & e & \mapsto & 2 \\ & f & \mapsto & 3 \end{array}$$

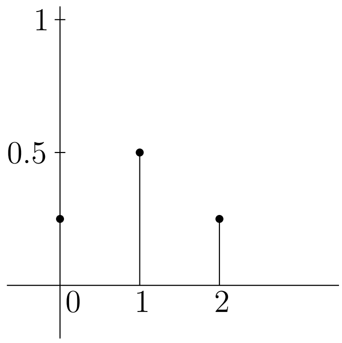


Figura 3.1: Funció de probabilitat

a) Trobem la funció de probabilitat.

$$\begin{array}{rccl} f_X : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & 0 & \mapsto & P(X=0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ & 1.5 & \mapsto & P(X=1.5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ & 2 & \mapsto & P(X=2) = \frac{1}{6} \\ & 3 & \mapsto & P(X=3) = \frac{1}{6} \\ & \text{Altrament} & \mapsto & 0 \end{array}$$

b) $P(X = 1.5) = \frac{1}{3}$

c) $P(0.5 < X < 2,7) = P(X = 1.5) + P(X = 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

d) $P(X > 3) = 0$

e) $P(0 <= X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1.5) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

f) $P(X = 0 \ o \ X = 2) = P(X = 0) + P(X = 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Proposició 3.4 *Sigui X una variable aleatòria discreta amb funció de probabilitat f_X. Aleshores,*

$$\sum_{x \in X} f_X(x) = 1; \qquad f_X(x) = 0 \ \text{si} \ x \notin X.$$

Definició 3.5 *Sigui X una variable aleatòria discreta, anomenem* **funció de distribució** *de la variable aleatòria X o* **funció de probabilitat acumulada** *a $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ tal que,*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} f_X(k)$$

Exemple 1: Tenint en compte l'exemple 1 de la definició 3.3 tenim que la funció de distribució ve donada per

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

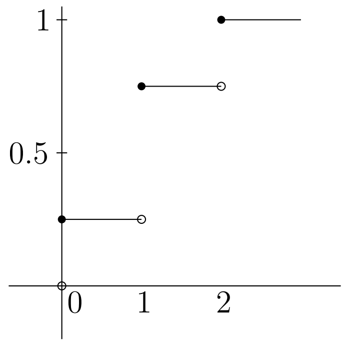


Figura 3.2: Funció de distribució

Exemple 2: Tenint en compte l'exemple 2 de la definició 3.3 tenim que la funció de distribució ve donada per

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x < 1,5 \\ \frac{2}{3} & 1,5 \leq x < 2 \\ \frac{5}{6} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

Proposició 3.6 *Sigui F una funció de distribució d'una variable aleatòria X i $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a < b$, aleshores*

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

DEMOSTRACIÓ:

$$\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$$

com els successos de la dreta són incompatibles, aplicant l'axioma 3 de la definició 2.7 tenim

$$P(\{X \leq b\}) = P(\{X \leq a\}) + P(a < X \leq b)$$

o el que és igual

$$F_X(b) = F_X(a) + P(a < X \leq b)$$

i aïllant,

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Proposició 3.7 *Sigui X és una variable aleatòria discreta,*

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$$

i f_X i F_X les respectives funcions de probabilitat i distribució, aleshores:

a) $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x)$.

b) $f_X(x_1) = F_X(x_1)$ *i* $f_X(x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$ *per a* $k = 2, 3, \ldots$

Demostració:

a) Designem per $x_1, x_2, \ldots, x_k$ els valors de la variable aleatòria X tals que $x_i \leq x$ per a $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\{X \leq x\} = \{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \ldots \cup \{X = x_k\}$$

que són successos incompatibles dos a dos, i per l'axioma 3 de la definició 2.7 tenim

$$P(X \leq x) = F_X(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_k) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x)$$

b) $\{X \leq x_1\} = \{X = x_1\}$, per tant,

$$P(X \leq x_1) = P(X = x_1); \qquad f_X(x_1) = F_X(x_1)$$

per altra part,

$$\{X \leq x_k\} = \{X \leq x_{k-1}\} \cup \{X = x_k\}$$

que és unió de successos incompatibles, per tant, per l'axioma 3 de la definició 2.7

$$P(X \leq x_k) = P(X \leq x_{k-1}) + P(X = x_k);$$

que aïllant tenim

$$f_X(x_k) = P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$$

Exemple: Donada la funció de distribució d'una variable aleatòria $X = \{-1, 0, 1, 2\}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0,2 & -1 \leq x < 0 \\ 0,6 & 0 \leq x < 1 \\ 0,8 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

calculem la funció de probabilitat,

$$f_X(-1) = F_X(-1) = 0.2; \qquad f_X(0) = F_X(0) - F_X(-1) = 0.6 - 0.2 = 0.4;$$
$$f_X(1) = F_X(1) - F_X(0) = 0.8 - 0.6 = 0.2; \qquad f_X(2) = F_X(2) - F_X(1) = 1 - 0.8 = 0.2$$

i la funció de probabilitat corresponent és:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2 & x = -1 \\ 0.4 & x = 0 \\ 0.2 & x = 1 \\ 0.2 & x = 2 \end{cases}$$

Si volguéssim calcular $P(0.2 < X \leq 2)$, tendríem

$$P(0,2 < X \leq 2) = F(2) - F(0.2) = 1 - 0.6 = 0.4$$

3.2 Valor esperat

Definició 3.8 *Sigui $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ una variable aleatòria discreta amb la funció de probabilitat f_X, anomenam* **esperança matemàtica**, **valor esperat** *o* **mitjana** *d'una variable aleatòria X, i la representarem per $E(X)$ o μ_X, a:*

$$\mu_X = E(X) = \sum_i x_i f_X(x_i) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Sigui X és una variable aleatòria corresponent a un determinat experiment aleatori, si efectuam aquest experiment moltes vegades ens aniran sortint una successió d'elements de X, un resum d'aquest conjunt de valors seria la mitjana. Aquest valor mitjà el podem obtenir de la forma indicada en la definició.

Exemple 1: Considerem un joc en el qual llencem a l'aire tres monedes normals i rebem un euro per a cada cara que surti. Quant doblers hem d'esperar obtenir si se'ns permet jugar una vegada?.

Si X la variable aleatòria discreta que ens determina el nombre de cares que poden sortir quan llencem a l'aire tres monedes. Aleshores $X = \{0, 1, 2, 3\}$ i les probabilitats respectives són:

$$P(X = 0) = \frac{1}{VR_{2,3}} = \frac{1}{8} \qquad P(X = 1) = \frac{PR_3^2}{VR_{2,3}} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = \frac{PR_3^2}{VR_{2,3}} = \frac{3}{8} \qquad P(X = 3) = \frac{1}{VR_{2,3}} = \frac{1}{8}$$

Intuïtivament esperam aconseguir 0 EUR $\frac{1}{8}$ de vegada, 1 Eur $\frac{3}{8}$ de vegada, 2 Eur $\frac{3}{8}$ de vegada i 3 EUR $\frac{1}{8}$ de vegada si juguéssim un gran nombre de vegades. Per tant, hauríem d'esperar obtenir per terme mitjà la quantitat de

$$0.\frac{1}{8} + 1.\frac{3}{8} + 2.\frac{3}{8} + 3.\frac{1}{8} = 1,5EUR$$

que serà el valor esperat.

Definició 3.9 *Sigui* $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ *una variable aleatòria discreta de mitjana* $E(X)$. *Anomenam* **variància** *de* X *i la denotarem per* σ_X^2 *o* $V(X)$ *a:*

$$\sigma_X^2 = V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 f_X(x_i) = E[(X - E(X))^2]$$

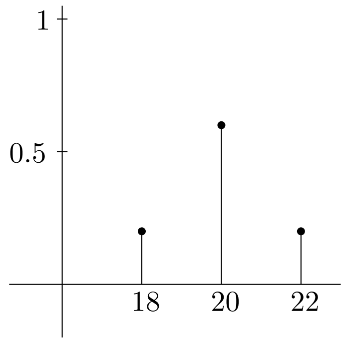
Anomenam **desviació estàndard** *de* X *a* σ_X

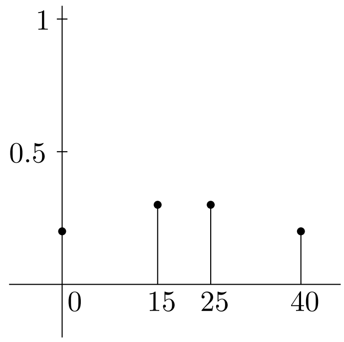
Exemple 1: Considerem les variables aleatòries X i Y, les funcions de probabilitat de les quals (en forma de taula) són:

x	18	20	22
$f_X(x)$	0.2	0.6	0.2

y	0	15	25	40
$f_Y(y)$	0.2	0.3	0.3	0.2

Representant gràficament les funcions de probabilitat tenim:





Els valors esperats de cada variable aleatòria és:

$$E(X) = 18 \cdot 0.2 + 20 \cdot 0.6 + 22 \cdot 0.2 = 20$$
$$E(Y) = 0 \cdot 0.2 + 15 \cdot 0.3 + 25 \cdot 0.3 + 40 \cdot 0.2 = 20$$

Malgrat X i Y tenen els mateixos valors esperats, la distribució de Y presenta una major dispersió que la distribució de X. Els valors de Y difereixen d'$E(Y)$ molt més que els valors de X ho fan de $E(X)$. Es fa servir la variància per avaluar la dispersió en la distribució de les variables aleatòries.

$$\sigma_X^2(x) = (18-20)^2 \cdot 0.2 + (20-20)^2 \cdot 0.6 + (22-20)^2 \cdot 0.2 = 1.6$$
$$\sigma_Y^2(y) = (0-20)^2 \cdot 0.2 + (15-20)^2 \cdot 0.3 + (25-20)^2 \cdot 0.3 + (40-20)^2 \cdot 0.2 = 175$$

3.3 Distribució uniforme

Definició 3.10 *Direm que una variable aleatòria discreta finita* X *segueix una* **distribució uniforme** *si cada valor de la variable aleatòria té la mateixa probabilitat*

Exemple: El darrer dígit d'un DNI pot ser un qualsevol dels nombres $0, 1, \ldots, 9$ i la probabilitat de que sigui un d'ells és la mateixa per a qualsevol. Agafem una persona a l'atzar i designem per X la variable aleatòria que ens dóna el darrer dígit del seu DNI.

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

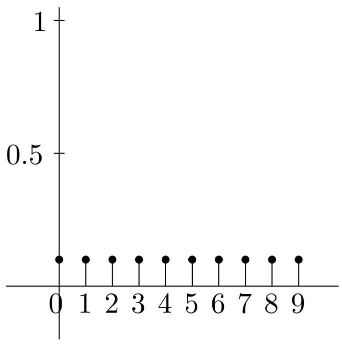
La seva funció de probabilitat serà

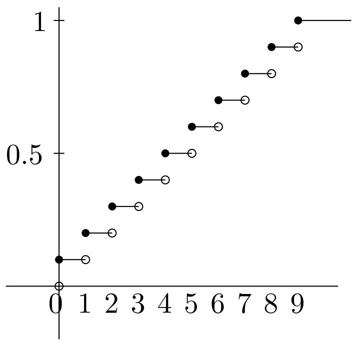
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & si\ x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\ 0 & Altres \end{cases}$$

i la funció de distribució és

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{10} & si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{10} & si\ 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{10} & si\ 2 \leq x < 3 \\ \frac{4}{10} & si\ 3 \leq x < 4 \\ \frac{5}{10} & si\ 4 \leq x < 5 \\ \frac{6}{10} & si\ 5 \leq x < 6 \\ \frac{7}{10} & si\ 6 \leq x < 7 \\ \frac{8}{10} & si\ 7 \leq x < 8 \\ \frac{9}{10} & si\ 8 \leq x < 9 \\ 1 & si\ x \geq 9 \end{cases}$$

I les seves gràfiques respectives són





Calculem el valor esperat i la variància:

$$\mu_X = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.1 + 5 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.1 + 7 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.1 + 9 \cdot 0.1 =$$
$$= 4.5$$
$$\sigma_X^2 = (0 - 4.5)^2 \cdot 0.1 + (1 - 4.5)^2 \cdot 0.1 + (2 - 4.5)^2 \cdot 0.1 + (3 - 4.5)^2 \cdot 0.1 + (4 - 4.5)^2 \cdot 0.1 +$$
$$+(5 - 4.5)^2 \cdot 0.1 + (6 - 4.5)^2 \cdot 0.1 + (7 - 4.5)^2 \cdot 0.1 + (8 - 4.5)^2 \cdot 0.1 + (9 - 4.5)^2 \cdot 0.1 =$$
$$= 8.25$$

3.4 Distribució binomial

Definició 3.11 *Considerem un experiment aleatori amb dos possibles resultats, èxit (e) i fracàs (f) essent les seves respectives probabilitats $P(e) = p$ i $P(f) = q = 1 - p$.*

L'espai mostral el podem representar per $E = \{e, f\}$ i considerem la variable aleatòria

$$\begin{array}{rccc} X: & E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & e & \mapsto & 1 \\ & f & \mapsto & 0 \end{array}$$

és a dir, $X = \{0, 1\}$ on 0 indica fracàs i 1 èxit.

La seva funció de probabilitat seria

$$\begin{array}{rccc} f_X: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & 0 & \mapsto & P(X = 0) = q \\ & 1 & \mapsto & P(X = 1) = p \\ & Altrament & \mapsto & 0 \end{array}$$

Amb aquestes condicions, direm que X segueix una **distribució de Bernoulli** *de paràmetre p i la representarem per $Ber(p)$ o $B(1, p)$. Als experiments d'aquest tipus els anomenarem* **experiment de Bernoulli**.

Exemple 1: Tiram una moneda trucada on la probabilitat de treure cara és $p = \frac{2}{3}$. Considerem *èxit="treure cara"*, per tant, *fracàs="treure creu"* i sigui X la variable aleatòria que ens dóna el nombre èxits obtinguts:

$$X = \{0, 1\}$$

la seva funció de probabilitat és

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & si\ x = 0 \\ \frac{2}{3} & si\ x = 1 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

i la funció de distribució

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

Definició 3.12 *Considerem un experiment aleatori consistent en la realització de n* assajos *repetits de forma que:*

(1) Els assajos són independents.

(2) Cada assaig té dos resultats possibles, que anomenarem èxit *i* fracàs.

*(3) La probabilitat d'*èxit *a cada assaig és sempre la mateixa i la denotarem per p. La probabilitat de* fracàs *la representarem per q ($q = 1 - p$).*

*La variable aleatòria X que ens dóna el nombre d'*èxits*, és a dir, el nombre d'assajos on el resultat és un* èxit*, direm que segueix una* **distribució binomial** *de paràmetres p i n.*

$$X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Una distribució binomial la representarem per $B(n, p)$.

Exemple: Per un canal de transmissió digital, la probabilitat de rebre un bit erroni és 0.1. Suposem que els assajos de transmissió són independents i que s'emetem quatre bits. Dessignem per X el nombre de bits rebuts de forma errònia (dels 4 emessos).

Ens trobam amb una distribució binomial, de variable aleatòria

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Considerem com a fracàs obtenir un bit correcte (Atenció, teniu en compte que el concepte d'èxit i fracàs no té perquè coincidir amb les accepcions d'èxit com a cosa bona i fracàs com a cosa dolenta). Representarem el succés elemental obtenir un èxit com a E i obtenir un fracàs com a F, i les probabilitats d'aquests successos elementals són $P(E) = p = 0.1$ i $P(F) = 1 - p = 0.9$

Cerquem la funció de probabilitat:

1. $X = 0$ quan tenim 0 èxits, és a dir, quan tot són fracasos. El succés seria $FFFF$ i

$$P(X = 0) = P(FFFF) \overset{(1)}{=} P(F)P(F)P(F)P(F) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 =$$
$$= 0.9^4 = 0.6561$$

   Aquest resultat el podríem expressar en la forma

$$P(X = 0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} 0.1^0 \cdot 0.9^{4-0}$$

2. $X = 1$ quan tenim un èxit. Els successos que ho complirien són

$$\{EFFF, FEFF, FFEF, FFFE\}$$

   el nombre d'aquests successos és $PR_4^3 = \dfrac{4!}{3!} = 4$. La probabilitat d'un d'ells seria:

$$P(EFFF) \overset{(1)}{=} P(E)P(F)P(F)P(F) = 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 0.1 \cdot 0.9^3 = 0.0729$$

que és la mateixa per als altres. Per tant,

$$P(EFFF \cup FEFF \cup FFEF \cup FFFE) \stackrel{(2)}{=}$$
$$= P(EFFF) + P(FEFF) + P(FFEF) + P(FFFE) = 4 \cdot 0.1 \cdot 0.9^3 = 0.2916$$

Aquest resultat el podríem expressar en la forma

$$P(X=1) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} 0.1^1 \cdot 0.9^{4-1} = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \right) 0.1^1 \cdot 0.9^{4-1}$$

3. $X = 2$ quan tenim dos èxits. Els successos que ho complirien són

$$\{EEFF, EFEF, EFFE, FEEF, FEFE, FFEE\}$$

el nombre d'aquests successos és $PR_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$. La probabilitat d'un d'ells seria:

$$P(EEFF) \stackrel{(1)}{=} P(E)P(E)P(F)P(F) = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 0.1^2 \cdot 0.9^2 = 0.0081$$

que és la mateixa per als altres. Per tant,

$$P(EEFF \cup EFEF \cup EFFE \cup FEEF \cup FEFE \cup FFEE) \stackrel{(2)}{=}$$
$$= P(EEFF) + P(EFEF) + P(EFFE) + P(FEEF) + P(FEFE) +$$
$$+ P(FFEE) = 6 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^2 = 0.0486$$

Aquest resultat el podríem expressar en la forma

$$P(X=2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} 0.1^2 \cdot 0.9^{4-2} = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right) 0.1^2 \cdot 0.9^{4-2}$$

4. $X = 3$ quan tenim tres èxit. Els successos que ho complirien són

$$\{EEEF, EEFE, EFEE, FEEE\}$$

el nombre d'aquests successos és $PR_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4$. La probabilitat d'un d'ells seria:

$$P(EEEF) \stackrel{(1)}{=} P(E)P(E)P(E)P(F) = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 0.1^3 \cdot 0.9 = 0.0009$$

que és la mateixa per als altres. Per tant,

$$P(EEEF \cup EEFE \cup EFEE \cup FEEE) \stackrel{(2)}{=}$$
$$= P(EEEF) + P(EEFE) + P(EFEE) + P(FEEE) = 4 \cdot 0.1^3 \cdot 0.9 = 0.0036$$

Aquest resultat el podríem expressar en la forma

$$P(X=3) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} 0.1^3 \cdot 0.9^{4-3} = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right) 0.1^3 \cdot 0.9^{4-3}$$

5. $X = 4$ quan tenim 4 èxits. El succés seria $EEEE$ i

$$P(X = 4) = P(EEEE) \stackrel{(1)}{=} P(E)P(E)P(E)P(E) = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 =$$

$$= 0.1^4 = 0.0001$$

Aquest resultat el podríem expressar en la forma

$$P(X = 4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} 0.1^4 \cdot 0.9^{4-4}$$

(1) Ja que aquests successos són independents. (2) Ja que són incompatibles dos a dos. La funció de probabilitat serà

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.6561 & si\ x = 0 \\ 0.2916 & si\ x = 1 \\ 0.0486 & si\ x = 2 \\ 0.0036 & si\ x = 3 \\ 0.0001 & si\ x = 4 \\ 0 & altres \end{cases}$$

que també la podem expressar de la forma

$$f_X(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 4 \\ x \end{pmatrix} 0.1^x \cdot 0.9^{4-x} & x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & altres \end{cases}$$

La funció de distribució seria

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 0.6561 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 0.9477 & si\ 1 \leq x < 2 \\ 0.9963 & si\ 2 \leq x < 3 \\ 0.9999 & si\ 3 \leq x < 4 \\ 1 & si\ x \geq 4 \end{cases}$$

Ens podria interessar saber $P(1 < X \leq 3)$. Aleshores

$$P(1 < X \leq 3) = F_X(3) - F_x(1) = 0.9999 - 0.9477 = 0.0522$$

també haguéssim pogut fer

$$P(1 < X \leq 3) = P(X = 2) + P(x = 3) = 0.0486 + 0.0036 = 0.0522$$

Proposició 3.13 *Sigui X una variable aleatòria corresponent a una distribució binomial $B(n,p)$. La funció de probabilitat de X és*

$$f_X(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x \cdot q^{n-x} & si\ x = 0,1,2,\ldots,n \\ \\ 0 & altres \end{cases}$$

on $q = 1 - p$

Demostració:

Calculem $P(X = k)$

La probabilitat d'obtenir k èxits seguits de $n-k$ fracassos és

$$\overbrace{p.p\ldots p}^{k}.\overbrace{q.q\ldots q}^{n-k} = p^k q^{n-k}$$

i per calcular la probabilitat d'obtenir exactament k èxits i $n-k$ fracasos en qualsevol ordre, hauríem de multiplicar la quantitat anterior per les permutacions amb repetició

$$PR_n^{k,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

és a dir,

$$P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}.$$

Nota: El terme de distribució binomial procedeix de la relació que hi ha entre l'expressió de la funció de probabilitat i el desenvolupament binomial:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$$

Exemple 1: Si llancem 5 vegades un dau, calculem

a) Quina és la probabilitat que surtin exactament dos uns.

b) Quina és la probabilitat de treure com a màxim dos uns.

c) La funció de distribució.

és una distribució binomial on $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$ i $n = 5$. Per tant,

a)

$$f_X(2) = P(X = 2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,16$$

b)

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 +$$

$$\left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,40 + 0,40 + 0,16 = 0,96$$

c)

$$\begin{aligned}
f_X(0) = P(X=0) &= \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array}\right) \left(\tfrac{1}{6}\right)^0 \left(\tfrac{5}{6}\right)^5 = 0.4019 \\
f_X(1) = P(X=1) &= \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array}\right) \left(\tfrac{1}{6}\right)^1 \left(\tfrac{5}{6}\right)^4 = 0.4019 \\
f_X(2) = P(X=2) &= \left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array}\right) \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \left(\tfrac{5}{6}\right)^3 = 0.1607 \\
f_X(3) = P(X=3) &= \left(\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array}\right) \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 = 0.0322 \\
f_X(4) = P(X=4) &= \left(\begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array}\right) \left(\tfrac{1}{6}\right)^4 \left(\tfrac{5}{6}\right)^1 = 0.0032 \\
f_X(5) = P(X=5) &= \left(\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array}\right) \left(\tfrac{1}{6}\right)^5 \left(\tfrac{5}{6}\right)^0 = 0.0001
\end{aligned}$$

i la funció de distribució seria:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,4019 & 0 \leq x < 1 \\ 0,8038 & 1 \leq x < 2 \\ 0,9645 & 2 \leq x < 3 \\ 0.9967 & 3 \leq x < 4 \\ 0.9999 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & 5 \leq x \end{cases}$$

Exemple 2: Llançam 20 vegades un dard a una diana. La probabilitat de fer blanc és $\frac{1}{10}$. Calculem

a) La probabilitat de fer almenys dues dianes.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) =$$

$$1 - \left(\begin{array}{c} 20 \\ 0 \end{array}\right) \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^{20} - \left(\begin{array}{c} 20 \\ 1 \end{array}\right) \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(\frac{9}{10}\right)^{19} = 1 - 0,122 - 0,270 = 0,608.$$

b) Utilitzant les taules, la probabilitat de fer almenys set dianes.

Volem trobar la probabilitat $P(X \geq 7)$, però com les taules ens donen la funció de distribució $F_X(k) = P(X \leq k)$, aleshores hem d'expressar la probabilitat cercada en aquests termes,

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X < 7) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F_X(6)$$

Anam a la taula i cercam les files on la primera columna, que ens dóna n, és igual a 20; a continuació cercam la fila on la segona columna, que ens dóna k, és igual a 6; les altres columnes ens donen els valors corresponents a la probabilitat segons la probabilitat d'èxit, p, per tant, cercaríem, en la fila anterior, la columna que correspon a $p = 0.1$ i obtenim $F_X(6) = 0.9976$, per tant

$$P(X \geq 7) = 1 - F_X(6) = 1 - 0.9976 = 0.0024$$

c) Utilitzant les taules, la probabilitat de fer entre 4 i 8 dianes sis dianes, ambdues incloses.

$$P(4 \leq X \leq 8) = P(3 < X \leq 8) = F_X(8) - F_X(3)$$

Cercam $F_X(8)$, per a això cercam la fila corresponent a $n = 20$, $k = 8$ i $p = 0.1$ i ens dóna 0.9999. A continuació cercam la fila corresponent a $n = 20$, $k = 3$ i $p = 0.1$ i ens dóna 0.8670; per tant,

$$P(4 \leq X \leq 8) = F_X(8) - F_X(3) = 0.9999 - 0.8670 = 0.1329$$

Proposició 3.14 *Si X és una variable aleatòria que segueix una distribució binomial $B(n, p)$, el valor esperat i la variància són:*

$$\mu_X = E(X) = np \qquad \sigma_X^2 = V(X) = np(1-p)$$

DEMOSTRACIÓ:

La demostració surt dels objectius d'aquesta assignatura. Es pot trobar a [1]

Exemple: Una màquina obsoleta fabrica perns, dels quals un 2% són defectuosos. Si tenim una mostra de 50 perns, volem saber quin seria el valor esperat i la variància de perns defectuosos.

Considerem la variable aleatòria X que ens dóna el nombre de perns defectuosos en una mostra de 50. X segueix una distribució Binomial $B(50, 0.02)$. Per tant, el valor esperat i la variància seran,

$$E(X) = 50 \cdot 0.02 = 1; \qquad V(X) = 50 \cdot 0.02 \cdot 0.98 = 0.98$$

3.5 Distribució binomial negativa i geomètrica

Definició 3.15 *Considerem un experiment aleatori consistent en la realització d'assajos de Bernoulli independents, fins obtenir r èxits. La variable aleatòria X que ens dóna el nombre d'assajos efectuats fins a obtenir r èxits direm que segueix una* **distribució binomial negativa**, *i*

$$X = \{r, r+1, r+2, \ldots\}$$

Una distribució binomial negativa la representarem per $BN(p, r)$ on p és la probabilitat d'èxit.

Exemple: Per un canal de transmissió digital, la probabilitat de rebre un bit erroni és 0.1. Suposem que els assajos de transmissió són independents i que s'emetem bits fins a rebre quatre bits erronis. Dessignem per X el nombre de bits rebuts fins a obtenir el quart bit erroni.

Ens trobam amb una distribució binomial negativa, de variable aleatòria

$$X = \{4, 5, 6, \ldots\}$$

Considerem com a fracàs obtenir un bit correcte. Representarem el succés elemental obtenir un èxit com a E i obtenir un fracàs com a F, i les probabilitats d'aquests successos elementals són $P(E) = p = 0.1$ i $P(F) = 1 - p = 0.9$

Cerquem la probabilitat de que $X = 6$, és a dir, el quart bit erroni que rebem és el sisè.

Els successos que ho complirien són

$$\{FFEEEE, FEFEEE, FEEFEE, FEEEFE, \ldots\}$$

hem de tenir en compte que el darrer succés sempre ha de ser èxit, és el que farà el 4t èxit i s'aturaran els assajos.

El nombre d'aquests successos és

$$PR_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = 10$$

Per altra part, la probabilitat d'un d'ells seria:

$$P(FFEEEE) \overset{(1)}{=} P(F)P(F)P(E)P(E)P(E)P(E) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 =$$

$$0.9^2 \cdot 0.1^4 = 8.1 \cdot 10^{-5}$$

que és la mateixa per als altres. Per tant,

$$P(FFEEEE \cup FEFEEE \cup FEEFEE \cup FEEEFE \cup \ldots) \overset{(2)}{=}$$

$$= P(FFEEEE) + P(FEFEEE) + P(FEEFEE) + P(FEEEFE) + \ldots =$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} 0.9^2 \cdot 0.1^4 = 0.00081$$

Aquest resultat el podríem expressar en la forma

$$P(X = 6) = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} 0.9^{6-4} \cdot 0.1^4 = 0.00081$$

(1) Ja que aquests successos són independents. (2) Ja que són incompatibles dos a dos.

Proposició 3.16 *Sigui X una variable aleatòria corresponent a una distribució binomial negativa $BN(p, r)$. La funció de probabilitat de X és*

$$f_X(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} q^{x-r} p^r & \text{si } x = r, r+1, \ldots \\ \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

on $q = 1 - p$

Demostració:

Calculem $P(X = k)$

Una forma d'obtenir l'èxit r-èssim a l'assaig k són, designant E per èxit i F per fracàs

$$\overbrace{FF\ldots F}^{k-r}\overbrace{EE\ldots E}^{r}$$

totes les altres són les que es puguin obtenir d'aquesta permutant F i E, de forma que el darrer sempre ha de ser E, ja que correspondria a l'èxit r-èssim.

Aleshores, el total de possibilitats d'obtenir l'èxit r-èssim a l'assaig k és:

$$PR_{k-1}^{k-r, r-1} = \frac{(k-1)!}{(k-r)!(r-1)!} = \begin{pmatrix} k-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$$

Cerquem la probabilitat

$$P(\overbrace{FF\ldots F}^{k-r}\overbrace{EE\ldots E}^{r}) = \overbrace{P(F)P(F)\ldots P(F)}^{k-r}\overbrace{P(E)P(E)\ldots P(E)}^{r} = q^{k-r}p^r$$

Com la probabilitat de cada un d'aquests successos elementals és la mateixa, la probabilitat d'obtenir l'èxit r-èssim a l'assaig k és la suma de totes les probabilitats de tots successos elementals, que com hem vist abans és

$$\begin{pmatrix} k-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$P(X = k) = \begin{pmatrix} k-1 \\ r-1 \end{pmatrix} q^{k-r}p^r$$

Exemple 1: Una emissora de ràdio vol fer un debat sobre un determinat tema, en que participin quatre contertulians. Per aconseguir aquestes quatre persones va al parlament i de forma aleatòria els demana als diputats si hi volen participar. La probabilitat que un diputat vulgui participar és del 60% i és independent de la voluntat de participar dels altres diputats.

1. Cerquem la probabilitat que l'emissora hagi de demanar la participació a nou diputats per a obtenir els quatre contertulians.

Ens trobam amb una distribució binomial negativa on la probabilitat d'èxit (de que hi vulgui participar) és $p = 0.6$ i s'acaba la cerca al quart èxit: $B(0.6, 4)$. Ens demanen

$$P(X=9) = \left(\begin{array}{c} 9-1 \\ 4-1 \end{array} \right) 0.4^{9-4} 0.6^4 = \left(\begin{array}{c} 8 \\ 3 \end{array} \right) 0.4^5 0.6^4 = 0.0743$$

2. Cerquem la probabilitat que l'emissora hagi de demanar la participació com a màxim a nou diputats.

   A l'igual que el cas anterior ens trobam amb la distribució binomial negativa $B(0.6, 4)$. Ens demanen

$$\begin{gathered} P(X \leq 9) = \\ = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) = \\ = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right) 0.4^0 0.6^4 + \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right) 0.4^1 0.6^4 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right) 0.4^2 0.6^4 + \left(\begin{array}{c} 6 \\ 3 \end{array} \right) 0.4^3 0.6^4 + \\ + \left(\begin{array}{c} 7 \\ 3 \end{array} \right) 0.4^4 0.6^4 + \left(\begin{array}{c} 8 \\ 3 \end{array} \right) 0.4^5 0.6^4 = \\ = 0.1296 + 0.20736 + 0.20736 + 0.165888 + 0.1161216 + 0.074317824 = \\ = 0.900647424 \end{gathered}$$

Definició 3.17 *A una distribució binomial negativa considerarem el cas particular en que el nombre d'èxits sigui 1 ($r = 1$). En aquest cas*

$$X = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Aquest distribució es diu **distribució geomètrica** *i es representa per $Ge(p)$.*

Proposició 3.18 *Sigui X una variable aleatòria corresponent a una distribució geomètrica $Ge(p)$. La funció de probabilitat de X és*

$$f_X(x) = \begin{cases} q^{x-1}p & si\ x = 1, 2, 3, \ldots \\ \\ 0 & altres \end{cases}$$

on $q = 1 - p$

Demostració:

és conseqüència immediata de la proposició 3.16, ja que $Ge(p) = BN(p, 1)$. Aleshores,

$$P(X=k) = \left(\begin{array}{c} k-1 \\ 1-1 \end{array} \right) q^{k-1} p = q^{k-1} p$$

Exemple: En un procés de producció, una màquina fabrica xips d'ordinadors. La probabilitat que fabriqui un xip defectuós és 0.001. Una persona comprova cada un dels xips fabricats i quan en troba un ha d'aturar les màquines i comprovar el motiu de la fallada. Calculem

1. La probabilitat que hagi d'aturar les màquines al desè xip comprovat.

   Dessignem per X la variable aleatòria que ens dóna el nombre de xips comprovats fins que trobem un de defectuós. Es tracta d'una distribució geomètrica $X \sim Ge(0.001)$ i hem de calcular
   $$P(X = 10) = 0.999^9 \cdot 0.001 = 9.91036 \cdot 10^{-4}$$

2. La probabilitat que hagi d'aturar les màquines abans de la comprovació del sisè xip.

   En aquest cas hem de cercar
   $$P(X < 6) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$
   $$= 0.001 + 0.999 \cdot 0.001 + 0.999^2 \cdot 0.001 + 0.999^3 \cdot 0.001 + 0.999^4 \cdot 0.001 =$$
   $$= 0.001 + 9.99 \cdot 10^{-4} + 9.98 \cdot 10^{-4} + 9.97 \cdot 10^{-4} + 9.96 \cdot 10^{-4} = 0.00499$$

Proposició 3.19 *Si X és una variable aleatòria binomial negativa $BN(p, r)$, el valor esperat i la variància són:*
$$\mu_X = E(X) = \frac{r}{p} \qquad \sigma_X^2 = V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

DEMOSTRACIÓ:

La demostració surt dels objectius d'aquesta assignatura

Exemple 1: De l'exemple 1 de la proposició 3.16 tenim que el nombre esperat de diputats als quals s'haurà de sol·licitar la seva participació de contertulià per a obtenir els quatre desitjats és
$$\mu_X = \frac{4}{0.6} = 6.67$$
i la variància és
$$\sigma_X^2 = \frac{4 \cdot 0.4}{0.6^2} = 4.44$$

Corol·lari 3.20 *Si X és una variable aleatòria geomètrica $Ge(p)$, l'esperança matemàtica i la variància són:*
$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{p} \qquad \sigma_X^2 = V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

DEMOSTRACIÓ:

Tenint en compte que una distribució geomètrica és una distribució binomial negativa, per a nombre d'èxits $r = 1$, aplicant la proposició 3.19 per a $r = 1$ ho tenim demostrat.

Exemple 1: De l'exemple de la proposició 3.18 tenim que el nombre esperat de xips que comprovarem abans d'aturar les màquines és

$$\mu_X = \frac{1}{0.001} = 1000$$

i la variància és

$$\sigma_X^2 = \frac{0.999}{0.001^2} = 999\,000$$

Proposició 3.21 (Propietat de la falta de memòria) *Una distribució geomètrica satisfà la propietat de la* falta de memòria*, és a dir,*[1]*:*

$$P(X \geq k+j|X > j) = P(X \geq k), \qquad \textit{per a tot } j,k > 1$$

Demostració:

Sabem que

$$P(X \geq k+j|X > j) = \frac{P((X \geq k+j) \cap (X > j))}{P(X > j)}$$

Per tant,

$$P(X \geq k+j|X > j) = \frac{P(X \geq k+j)}{P(X > j)} =$$

$$= \frac{P(X = k+j) + P(X = k+j+1) + P(X = k+j+2) + P(X = k+j+3) + \ldots}{P(X = j+1) + P(X = j+2) + P(X = j+3) + P(X = j+4) + \ldots} =$$

$$= \frac{q^{k+j-1}p + q^{k+j}p + q^{k+j+1}p + q^{k+j+2}p + \ldots}{q^j p + q^{j+1}p + q^{j+2}p + q^{j+3}p + \ldots} = \frac{q^{k+j-1}p(1+q+q^2+q^3+\ldots)}{q^j p(1+q+q^2+q^3+\ldots)} = q^{k-1}$$

Per altra part,

$$P(X \geq k) = P(X = k) + P(X = k+1) + P(X = k+2) + P(X = k+3) + \ldots =$$

$$= q^{k-1}p + q^k p + q^{k+1}p + q^{k+2}p + \ldots = q^{k-1}p(1+q+q^2+q^3+\ldots) \stackrel{(1)}{=}$$

$$= q^{k-1}p\frac{1}{1-q} \stackrel{(2)}{=} q^{k-1}p\frac{1}{p} = q^{k-1}$$

(1) Suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de raó $q < 1$. (2) Ja que $q = 1 - p$.

Per tant,

$$P(X \geq k+j|X > j) = P(X \geq k), \qquad \text{per a tot } j,k > 1$$

Això ens diu que tenint en compte que els assajos són independents, el nombre d'aquests fins a obtenir el primer èxit pot començar a qualsevol assaig sense canviar la distribució de probabilitat de la variable aleatòria.

Per exemple, si ja s'han efectuat 100 proves, la probabilitat d'obtenir èxit en la prova 106 es la mateixa que la d'obtenir èxit en la prova 6: q^5p.

[1]També es compleix la recíproca, és a dir, una distribució geomètrica és la única distribució corresponent a una variable aleatòria discreta que satisfà la propietat de la falta de memòria

3.6 Distribució hipergeomètrica

Definició 3.22 *Considerem un conjunt amb N objectes. K objectes els consideram èxits i $N-K$ fracassos.*

Prenem, a l'atzar, una mostra de grandària n sense reemplaçament d'entre els N objectes, on $K \leq N$ i $n \leq N$.

Si X és la variable aleatòria que ens dóna el nombre èxits en la mostra, direm que X segueix una **distribució hipergeomètrica**.

Una distribució hipergeomètrica la representarem per $H(n, N, K)$ on p és la probabilitat d'èxit.

Exemple 1: Considerem una ma de bridge formada per 13 cartes escollides d'un joc de cartes ordinària de 52 cartes. Quina és la probabilitat que en aquest ma n'hi hagi exactament set espases?.

Ens trobam amb una distribució geomètrica, on $N = 52$ cartes, $K = 12$ espases i $n = 13$ cartes, i ens demanen $P(X = 7)$

Calculem la probabilitat demanada, per a això cercarem els casos possibles i els favorables:

CP: $C_{52,13} = \left(\begin{array}{c} 52 \\ 13 \end{array} \right)$.

CF: Els casos favorables serien les formes de obtenir un grup de 7 espases i 6 no espases, com per exemple, eaeeaaaeeeeaa, on e representa una espasa i a una altra carta. Per tant els casos favorables serien les formes de tenir un grup de 7 espases de les 13 que n'hi ha, multiplicat pel nombre de forme de tenir un grup de 6 cartes que no siguin espases d'un grup de 39 cartes,

$$C_{13,7}.C_{39,6} = \left(\begin{array}{c} 13 \\ 7 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 39 \\ 6 \end{array} \right)$$

Per tant la probabilitat seria,

$$P(X = 7) = \frac{\left(\begin{array}{c} 13 \\ 7 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 39 \\ 6 \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} 52 \\ 13 \end{array} \right)} = 0.0088$$

Proposició 3.23 *Sigui X una variable aleatòria corresponent a una distribució hiperge-*

omètrica $H(n,N,K)$. La funció de probabilitat de X és

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\begin{pmatrix} K \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-K \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} & \textit{si } x = 0,1,2,\ldots,\textit{mín}(K,n) \\ \\ 0 & \textit{altres} \end{cases}$$

Demostració:

Calculem $P(X=r)$

Tenim N objectes on, d'aquests, K són èxits. Agafam una mostra de n elements, i voles calcular la probabilitat d'agafar-ne r d'aquests n.

CP: $C_{N,n}$
CF: Els casos favorables serien les formes de obtenir un grup de r èxits i $n-r$ fracasos:

$$\overbrace{EE\ldots E}^{r}\overbrace{FF\ldots F}^{n-r}$$

on E representa una espasa i F. Per tant els casos favorables serien les formes de tenir un grup de r èxits, multiplicat pel nombre de grups de $n-r$ fracasos: $C_{K,r}\cdot C_{N-K,n-r}$.

Per tant,

$$P(X=r) = \frac{C_{K,r}\cdot C_{N-K,n-r}}{C_{N,n}} = \frac{\begin{pmatrix} K \\ r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-K \\ n-r \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}$$

Exemple: En una població composta de 100 individus, el 10 per cent tenen una pressió sanguínia elevada. Si en triem 10 a l'atzar, calculeu la probabilitat d'aconseguir-ne com a màxim 2 amb la pressió sanguínia alta.

és una distribució hipergeomètrica on $N=100$, $n=10$ i $K=100.\frac{10}{100}=10$, per tant,

$$P(X\leq 2) = \sum_{k=0}^{2} f_X(k) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 90 \\ 10-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 100 \\ 10 \end{pmatrix}} = 0,93.$$

Proposició 3.24 *Si X és una variable aleatòria que segueix una distribució hipergeomètrica, el valor esperat i la variància són:*

$$\mu_X = E(X) = np \qquad \sigma_X^2 = V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

on $p = \frac{K}{N}$

DEMOSTRACIÓ:

La demostració surt dels objectius d'aquesta assignatura. Es pot trobar a [1]

Exemple: De l'exemple de la definició 3.22 tenim:

$$E(X) = 13 \cdot \frac{13}{52} = 3.25; \qquad V(X) = 13 \cdot \frac{13}{52}\left(1 - \frac{13}{52}\right)\frac{52-13}{52-1} = 1.864$$

3.7 Distribució de Poisson

En aquesta cas, no posarem un exemple per indicar la distribució de Poisson, sinó que la definirem segons el valor de la funció de probabilitat.

Definició 3.25 *Direm que una variable aleatòria discreta* X*, amb* $X = \mathbb{N}$*, segueix una* **distribució de Poisson** *de paràmetre* $\mu > 0$ *i la representarem per* $Po(\mu)$ *si la seva funció de probabilitat és*

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} & si\ x = 0, 1, 2, \ldots \\ \\ 0 & altres. \end{cases}$$

Exemple: En un determinat lloc es posa una trampa per capturar determinat tipus de peixos. Sigui X la variable aleatòria que ens dóna el nombre de peixos capturats durant un dia i suposem que X segueix una distribució de Poisson de paràmetre $\mu = 6$. Calculem la probabilitat que un determinat dia la trampa contengui

a) Exactament 8 peixos.

$$P(X = 8) = \frac{e^{-6} \cdot 6^8}{8!} = 0.1032577$$

b) Com a màxim 5 peixos.

$$P(X \leq 5) = \sum_{i=0}^{5} P(X = i) = 0.44568$$

(Mirant les taules tendríem $P(X \leq 5) = 0.4457$)

Proposició 3.26 *Si la probabilitat* p *d'èxit d'una única prova tendeix a zero, mentre que el nombre de proves* n *tendeix a infinit de forma tal que* np *es manté constant, la distribució binomial s'aproxima a una distribució de Poisson de paràmetre* $\mu = np$*. és a dir, si* $\mu = np$,

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x q^{n-x} = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}.$$

DEMOSTRACIÓ:

La demostració surt dels objectius de l'assignatura. La podeu trobar a [1]

Tenint en compta això, si p és petita i n suficientment gran, podem aproximar una distribució binomial $B(n, p)$ a una distribució de Poisson $Po(np)$.

A la pregunta de per a quins valors de n i p és pot aproximar tenim diferents respostes: P.G. Hoel, a [3] proposa $n \geq 100$ i $p \leq 0,05$; Sixto Rios, a [4] proposa $p < 0,1$ i $np < 5$; G.C. Canavos a [1] proposa $n \geq 100$, $p \leq 0.01$ i $np \leq 20, \ldots$.

Exemple 1: Calculem la probabilitat de trobar-ne, com a màxim, cinc fusibles defectuosos, en una capsa de 200, si l'experiència ens mostra que el 2 per cent d'aquests són defectuosos.

Sigui X la variable aleatòria que ens dóna el nombre de fusibles defectuosos. X segueix una distribució binomial amb $p = 0,02$ i $n = 200$, ara bé com $p = 0,02$, $n = 200$ i $n \cdot p = 0,02.200 = 4$ la podem aproximar a una distribució de Poisson i tendríem:

$$P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} P(X = x) = \sum_{x=0}^{5} f_X(x) = \sum_{x=0}^{5} \frac{e^{-4}4^x}{x!} =$$

$$= e^{-4}(1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6} + \frac{4^4}{24} + \frac{4^5}{120}) = 0,785.$$

(Mirant les taules tendríem $P(X \leq 5) = 0.7851$)

Proposició 3.27 *Si X és una variable aleatòria de Poisson $Po(\mu)$, el valor esperat i la variància són:*

$$\mu_X = E(X) = \mu \qquad \sigma_X^2 = V(X) = \mu$$

DEMOSTRACIÓ:

La demostració surt dels objectius de l'assignatura. La podeu trobar a [1]

La distribució de Poisson té altres utilitats com es mostra en el següent exemple.

Els defectes superficials d'un fil ferro prim de coure es presenten de forma aleatòria. Sigui X la variable aleatòria que compte el nombre de defectes superficials d'un fil ferro de coure de longitud L mil·límetres i suposem que el nombre mitjà de defectes en L mil·límetres és μ.

Per resoldre aquest exercici dividirem el fil ferro en n subintervals de longitud més petita, per exemple en un micrómetre cada un. Si el subinterval seleccionat és suficientment petit, aleshores la probabilitat de que en ell hi hagi més d'un defecte és insignificant. Per altra part, la hipòtesi de que els defectes es presenten de forma aleatòria es pot interpretar com que qualsevol subinterval té la mateixa probabilitat p de tenir un defecte. Finalment, si suposem que la probabilitat de que un interval tengui un defecte és independent de la dels altres subintervals, aleshores la distribució d'X es pot considerar de forma aproximada com la d'una variable aleatòria binomial on X ens donaria el nombre de subintervals amb defectes. Tenint en compte que

$$E(X) = \mu = np$$

la probabilitat corresponent a aquesta distribució binomial és $p = \frac{\mu}{n}$.

Amb subintervals suficientment petits, n és molt gran i p molt petit. Aplicant la proposició 3.26 tenim que podem considerar la variable aleatòria X com la corresponent a una distribució de Poisson $Po(\mu)$.

Aquest exemple es pot generalitzar incloent una àmplia gamma d'experiments aleatoris. L'interval que hem dividit a l'exemple anterior era de longitud, però el mateix raonament es pot fer amb qualsevol interval: de temps, d'àrea, de volum, etc.

De l'exemple anterior deduïm la proposició següent:

Proposició 3.28 *Donat un interval de nombres reals, si el còmput de determinats esdeveniments que es produeixen en un interval (de temps, d'espais, etc.) es pot dividir en subintervals suficientment petits tals que:*

(1) La probabilitat que es produeixin dos o més esdeveniments en un subinterval és negligible.

(2) La probabilitat que un esdeveniment es produeixi en un subinterval és la mateixa per a tots els subintervals, i és proporcional a la longitud d'aquests.

(3) El còmput d'esdeveniments en cada subinterval és independent dels altres subintervals.

aleshores l'experiment aleatori correspon a una distribució de Poisson de paràmetre μ, on μ és el nombre mitjà d'esdeveniments a l'interval.

Exemple: L'experiència demostra que la xifra mitjana de cridades telefòniques que arriben a una central durant un minut és 5. Si la central pot manejar un màxim de 8 cridades per minut, quina és la probabilitat de que sigui incapaç de manejar totes les cridades que li arriben durant un període d'un minut?

és una distribució de Poisson de mitjana $\mu = 5$, i serà incapaç de manejar totes les cridades si aquestes són més de 8. Per tant,

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - \sum_{x=0}^{8} f_X(x) = 1 - \sum_{x=0}^{8} \frac{e^{-5}5^x}{x!} =$$

$$= 1 - 0,932 = 0,068.$$

Per a problemes d'aquest tipus és pot triar qualsevol amplitud que es vulgui per a l'interval del temps, o d'espai, i calcular la probabilitat dels esdeveniments per a aquest interval mitjançant la distribució de Poisson amb μ ajustada a aquest interval.

Exemple: L'experiència demostra que la xifra mitjana de cridades telefòniques que arriben a una central durant un minut és 5. Si la central pot manejar un màxim de 8 cridades per minut, calculem la probabilitat de que es rebin 6 cridades com a màxim durant un període de 2 minuts.

Com es demanen durant un període de 2 minuts tenim que $\mu = 10$ i hem de calcular:

$$P(X \leq 6) = \sum_{x=0}^{6} f_X(x) = \sum_{x=0}^{6} \frac{e^{-10} 10^x}{x!} = 0,13.$$

(Mirant les taules tendríem $P(X \leq 6) = 0.1301$)

Índex alfabètic