Moments de variables aleatòries

Recordatori:

Donada una v.a. X definim:

- **Esperança de** X:
  - Cas discret: $E(X) = \mu_X = \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot P(X = x)$
  - Cas continu: $E(X) = \mu_X = \int_{\Omega_X} x \cdot f_X(x)\, dx$
- **Variància de** X: $\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \sigma_{XX} = E((X - E(X)^2) = E(X^2) - E(X)^2$, on
  - Cas discret: $E(X^2) = \sum_{x \in \Omega_X} x^2 \cdot P(X = x)$
  - Cas continu: $E(X^2) = \int_{\Omega_X} x^2 \cdot f_X(x)\, dx$
- **Desviació típica de** X: $\sigma_X = +\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Propietats:

- si X i Y són v.a. i a i b són constants:
  - $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
  - $\mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X)$
  - si X i Y són independents: $\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2 \mathrm{Var}(X) + b^2 \mathrm{Var}(Y)$
- si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
  - Cas discret: $E(g(X)) = \sum_{x \in \Omega_X} g(x) \cdot P(X = x)$
  - Cas continu: $E(g(X)) = \int_{\Omega_X} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$
- interpretació de l'esperança: valor mitjà dels valors de la variable
- interpretació de la variància: dispersió dels valors de la variable

En aquest tema:

donades dues variables aleatòries X i Y distribuïdes conjuntament, definim:

- **Esperances condicionades**:

		Cas discret	Cas continu
Esperança de Y condicionada per X	$E(Y\|X = x)$	$\sum_{y \in \Omega_Y} y \cdot P(Y = y\|X = x)$	$\int_{\Omega_Y} y \cdot f_{Y\|X}(y\|x)\, dy$
Esperança de X condicionada per Y	$E(X\|Y = y)$	$\sum_{x \in \Omega_X} x \cdot P(X = x\|Y = y)$	$\int_{\Omega_X} x \cdot f_{X\|Y}(x\|y)\, dx$

- **Correlació de** X **i** Y:
  - Cas discret: $E(XY) = \sum_{x \in \Omega_X} \sum_{y \in \Omega_Y} xy \cdot P(X = x, Y = y)$
  - Cas continu: $E(XY) = \iint_{(x,y) \in \Omega_{XY}} xy \cdot f_{XY}(x, y)\, dxdy$

- **Covariància de X i Y:**
  $\operatorname{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = \sigma_{YX} = E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y)) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- **Coeficient de correlació de X i Y:** $\rho_{XY} = \dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\cdot\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}$
- **Matriu de covariàncies**: $K = \begin{pmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_{YY} \end{pmatrix}$

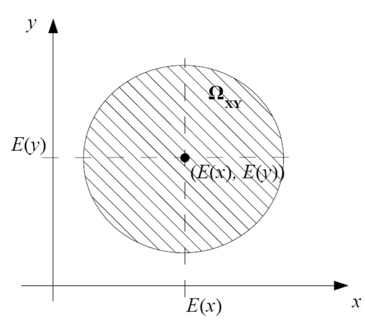
Propietats:

- $E(Y|X)$ és una funció de x i $E(X|Y)$ és una funció de y
- $E(E(Y|X)) = E(Y)$ i $E(E(X|Y)) = E(X)$
- si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
  - Cas discret: $E(g(X,Y)) = \displaystyle\sum_{x\in\Omega_X}\sum_{y\in\Omega_Y} g(x,y)\cdot P(X=x, Y=y)$
  - Cas continu: $E(g(X,Y)) = \displaystyle\iint_{(x,y)\in\Omega_{XY}} g(x,y)\cdot f_{XY}(x,y)\,dxdy$
- si X i Y són v.a. i a i b són constants: $\operatorname{Var}(aX+bY) = a^2\operatorname{Var}(X) + b^2\operatorname{Var}(Y) + 2ab\operatorname{Cov}(X,Y)$
- si X i Y són independents:
  - $E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$
  - $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$
  - $\rho_{XY} = 0$
  - $\operatorname{Var}(aX+bY) = a^2\operatorname{Var}(X) + b^2\operatorname{Var}(Y)$
- les variables X i Y són **ortogonals** si $E(XY) = 0$
- les variables X i Y són **incorrelades** si $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \rho_{XY} = 0$

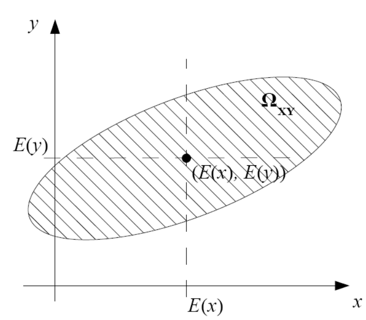
$$X, Y \quad \text{independents} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad \text{incorrelades}$$

- $-1 \le \rho_{XY} \le 1$

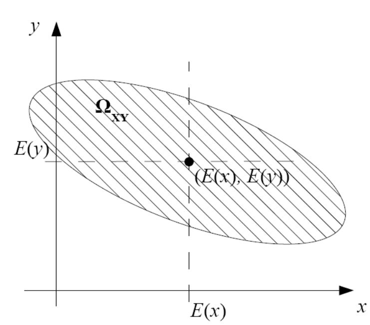
Interpretació de la covariància: distribució dels valors (X,Y) en el plà (forma de Ω_{XY})



$\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$
$\rho_{XY} = 0$



$\operatorname{Cov}(X,Y) > 0$
$\rho_{XY} > 0$



$\operatorname{Cov}(X,Y) < 0$
$\rho_{XY} < 0$

Exemple 19:

(Exercici 10). La funció de probabilitat conjunta de dues v.a. X i Y és

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36
5	0	0	0	0	5/36	1/36
6	0	0	0	0	0	6/36

a) Obteniu la funció de probabilitat de X condicionada a $Y = 4$.

b) Quina és l'esperança de X condicionada a $Y = 4$?

c) I la variància de X condicionada a $Y = 4$?

Exemple 20:

(Exercici 16cde). Siguin X i Y dues variables aleatòries amb densitat conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & en\ cas\ contrari \end{cases}$$

a) Calculau $E(Y)$

b) Calculau $E(Y|X)$

c) Calculau $E(E(Y|X))$ i comprovau que coincideix amb $E(Y)$.

Exemple 21:

*(Exercici 17bd) Considerem un experiment amb tres possibles resultats E_1, E_2 i E_3 amb probabilitats respectives p, q i r tals que $p+q+r = 1$. En una seqüència de n proves independents de l'experiment, denotem per X el nombre de vegades que ocorr E_1, i per Y el nombre de vegades que ocorr E_2. Es sap que el vector (X, Y) té una distribució anomenada **trinomial** que ve donada per:*

$$P(X = i, Y = j) = \frac{n!}{i!\, j!\, k!}\, p^i\, q^j\, r^k\,, \quad k = n - i - j$$

a) Determinau el vector mitjana i la matriu de covariàncies de (X, Y).

b) Obteniu l'expressió de $E(Y|X = i)\ \ \forall i = 0, \ldots, n$.

Exemple 22:

(Exercici 20). Es llança un dau sense biaix. Sigui X la variable aleatòria "nombre de punts obtinguts", i Y la variable aleatòria que val 0 si s'obté un 1, un 2 o un 3, i val 1 si s'obté 4, 5 o 6. Calculau la covariància i el coeficient de correlació entre X i Y.

Exemple 23:

(Exercici 21) La funció de densitat conjunta de dues variables aleatòries contínues X i Y és:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2) & si\ x, y \in (0,1) \\ 0 & en\ tot\ altre\ cas \end{cases}$$

Calculau les mitjanes, les variàncies , la covariància i el coeficient de correlació.

Exercicis proposats: 18, 28, 22, 26