Tema 7. CONTRAST D'HIPÒTESIS

En aquest tema estudiam la validesa de les suposicions (hipòtesis) referents als paràmetres poblacionals, contrastant-les amb les dades mostrals

Exemple:

Considerem la següent situació:

Dues persones A i B juguen a llançar una moneda.
La persona A guanya si surt cara i B guanya si surt creu.

Després de 100 llançaments han sortit 65 cares i el segon jugador sospita que la moneda està trucada.

Com pot confirmar de manera rigorosa les seves sospites?

Hi ha dues maneres de respondre a la pregunta:

1) Utilitzant intervals de confiança:

A partir del valor de $\hat{p}_{mostra}$ obtingut ($\hat{p}_{mostra} = \frac{65}{100} = 0{,}65$) es pot calcular l'interval de confiança on es troba, amb probabilitat alta (p.ex. 95%), la proporció poblacional (probabilitat de cara) :

$$0{,}65 \pm z_{0{,}025} \cdot \sqrt{\frac{0{,}65 \cdot (1 - 0{,}65)}{100}} = 0{,}65 \pm 0{,}0935 = (0{,}56\,,\,0{,}74)$$

Com que la probabilitat de cara és, amb una probabilitat molt alta, diferent de 0,5, llavors podem concloure que la moneda està trucada.

2) Fent un **contrast d'hipòtesis:**

Suposam que la moneda **no** està **trucada** (p = 0,5) i calculam si és *raonable o no* obtenir un valor mostral com el que hem trobat ($\hat{p}_{mostra} = 0{,}65$).

Per *no raonable* s'entén que la probabilitat de $\hat{p}_X \geq 0{,}65$ quan p = 0,5 és molt petita (per exemple, inferior al 5%).

A la suposició inicial sobre el paràmetre poblacional (en aquest cas p=0,5) se l'anomena **hipòtesi nul.la** (**H_0**). $H_0 : p = 0{,}5$

A la probabilitat màxima permesa de que el paràmetre mostral prengui un valor *no raonable* quan es verifica la hipòtesi nul.la se l'anomena **nivell de significació** o **error de tipus I** (α). En el nostre exemple α =0,05.

El nivell de significació defineix un rang de valors *no raonables* (**regió crítica**) formada pels valors mostrals que tener menor probabilitat de passar quan es verifica la hipòtesi nul.la:

valor mostral $\hat{\theta}_{mostra}$ *no raonable* si $P(\hat{\theta}=\{\hat{\theta}_{mostra}\, o\ pitjor\}|H_0)\leq\alpha$

es cumpleix que $P(Regio\ Critica)=\alpha$

El conjunt de valor raonables defineixen l'anomenada **regió d'acceptació**.

Si el valor mostral (en el nostre exemple $\hat{p}_{mostra}=0{,}65$) cau dins la regió crítica, llavors la hipòtesi nul.la es rebutjarà (es considerarà falsa) en favor d'una altra hipòtesi, anomenada **hipòtesi alternativa** (**H$_1$**).

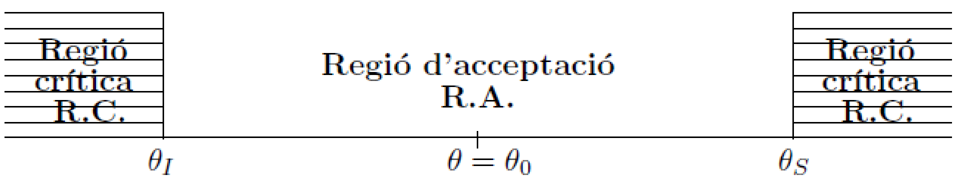
$$\hat{\theta}_{mostra}\in\ R.C.\Rightarrow rebutjam\, H_0\ \ (acceptam\, H_1)$$

$$\hat{\theta}_{mostra}\in\ R.A.\Rightarrow acceptam\, H_0\ \ (rebutjam\, H_1)$$

La manera de calcular $P(Regio\,Critica)$ depèn de la hipòtesi alternativa considerada.

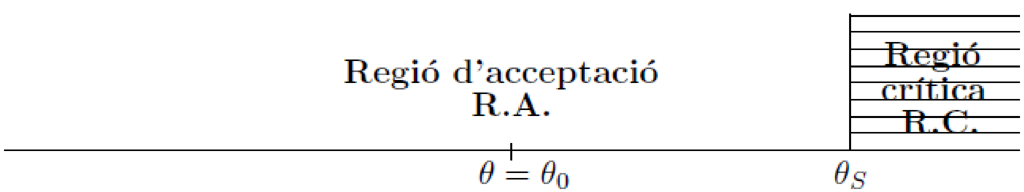
Si la hipòtesi nul.la és de la forma H_0: $\theta = \theta_0$ (en el nostre cas H_0: p =0,5) llavors tenim 3 possibilitats:

1) H_1: $\theta \neq \theta_0$ (**contrast bilateral**) i la regió crítica té la forma:



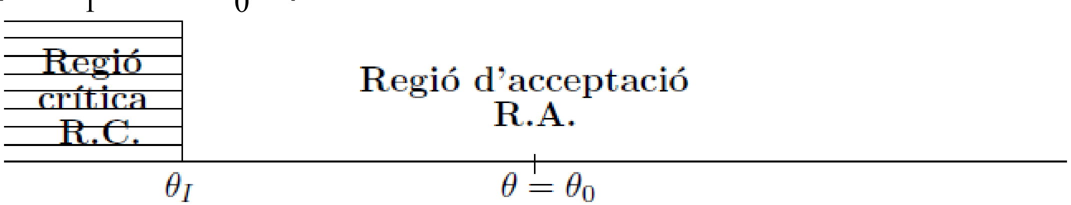
$$\alpha = P(R.C.) = P(\theta < \theta_I) + P(\theta > \theta_S)$$
$$P(\theta < \theta_I) = P(\theta > \theta_S) \Rightarrow$$
$$P(\theta < \theta_I) = P(\theta > \theta_S) = \frac{\alpha}{2}$$

2) H_1: $\theta > \theta_0$ (**contrast unilateral per la dreta**) i la regió crítica té la forma:



$$\alpha = P(R.C.) = P(\theta > \theta_S)$$

3) H_1: $\theta < \theta_0$ (**contrast unilateral per l'esquerra**) i la regió crítica té la forma:

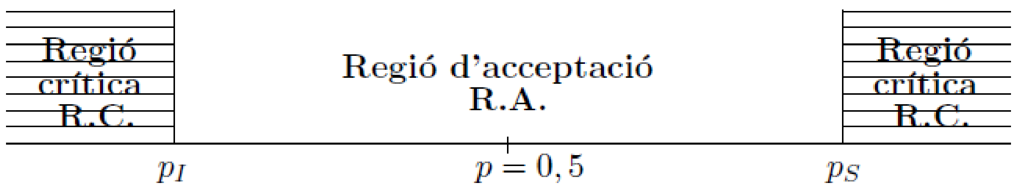


$$\alpha = P(R.C.) = P(\theta < \theta_I)$$

En el nostre exemple:

$$H_0: p=0{,}5 \qquad n=100 \qquad \hat{p}_{mostra}=0{,}65 \qquad \alpha=0{,}05 \qquad \hat{p}_X \sim N\left(p\,,\,\frac{p(1-p)}{n}\right)=N(0{,}5\,,\,0{,}05^2)$$

1) H_1: $p \neq 0{,}5$ (**contrast bilateral**):

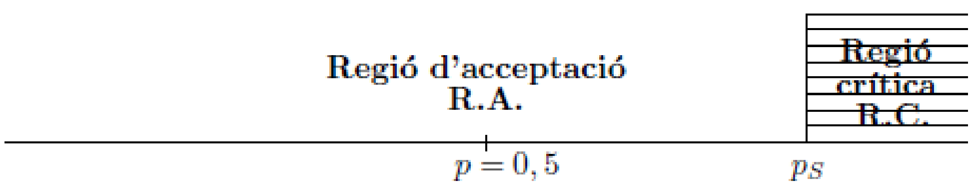


$$0{,}025=P(\hat{p}_X<\hat{p}_I)=F_{\hat{p}_X}(\hat{p}_I)=F_Z\left(\frac{\hat{p}_I-0{,}5}{0{,}05}\right)$$

$$(taula)\quad \hat{p}_I=0{,}402 \Rightarrow \ (simetria)\,\hat{p}_S=0{,}598$$

$$\hat{p}_{mostra}=0{,}65 \ \in \ R.C. \ \Rightarrow rebutjam\, H_0$$

2) H_1: $p > 0{,}5$ (**contrast unilateral per la dreta**):

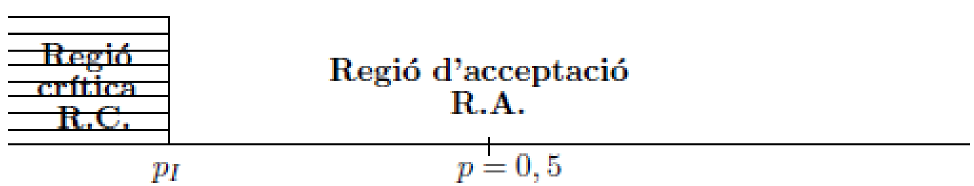


$$0{,}05=P(\hat{p}_X>\hat{p}_S)=1-F_{\hat{p}_X}(\hat{p}_S)=1-F_Z\left(\frac{\hat{p}_S-0{,}5}{0{,}05}\right)$$

$$(taula)\quad \hat{p}_S=0{,}582$$

$$\hat{p}_{mostra}=0{,}65 \ \in \ R.C. \ \Rightarrow rebutjam\, H_0$$

3) H_1: $p < 0{,}5$ (**contrast unilateral per l'esquerra**):



$$0{,}05=P(\hat{p}_X<\hat{p}_I)=F_{\hat{p}_X}(\hat{p}_I)=F_Z\left(\frac{\hat{p}_I-0{,}5}{0{,}05}\right)$$

$$(taula)\quad \hat{p}_I=0{,}418$$

$$\hat{p}_{mostra}=0{,}65 \ \in \ R.A. \ \Rightarrow acceptam\, H_0$$

Per decidir quina és la millor hipòtesi alternativa H_1 ens hem de fixar en el valor de la mostra $\hat{\theta}_{mostra}$:

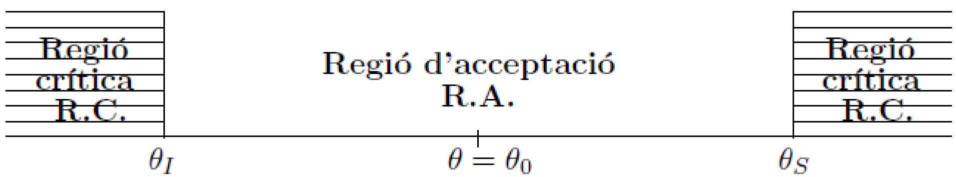
- si $\hat{\theta}_{mostra} > \theta_0$ llavors triam $H_1: \theta > \theta_0$ (o $H_1: \theta \neq \theta_0$)
- si $\hat{\theta}_{mostra} < \theta_0$ llavors triam $H_1: \theta < \theta_0$ (o $H_1: \theta \neq \theta_0$)

p-valor

És el nivell de significació màxim, per davall del qual rebutjariem la hipòtesi nul.la, quan el valor de la mostra és $\hat{\theta}_{mostra}$

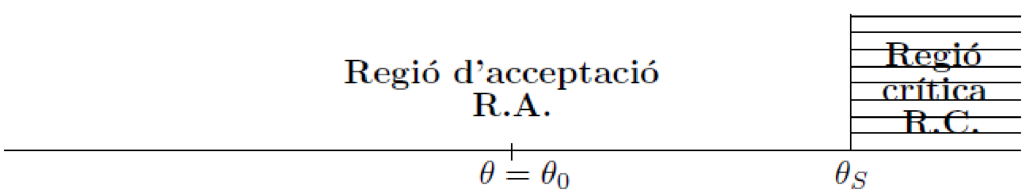
Càlcul del p-valor:

1) $H_1: \theta \neq \theta_0$ (**contrast bilateral**):



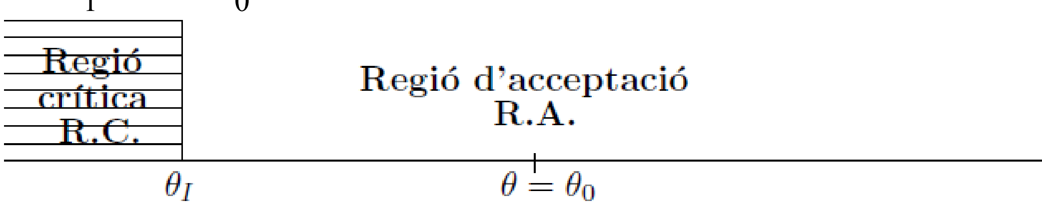
$$si\ \hat{\theta}_{mostra} > \theta_0 \ \Rightarrow\ \theta_S = \hat{\theta}_{mostra}$$
$$p-valor = 2 \cdot P(\hat{\theta} > \hat{\theta}_{mostra})$$
$$si\ \hat{\theta}_{mostra} < \theta_0 \ \Rightarrow\ \theta_I = \hat{\theta}_{mostra}$$
$$p-valor = 2 \cdot P(\hat{\theta} < \hat{\theta}_{mostra})$$

2) $H_1: \theta > \theta_0$ (**contrast unilateral per la dreta**):



$$si\ \hat{\theta}_{mostra} > \theta_0 \ \Rightarrow\ \theta_S = \hat{\theta}_{mostra}$$
$$p-valor = P(\hat{\theta} > \hat{\theta}_{mostra})$$
$$si\ \hat{\theta}_{mostra} < \theta_0 \ \Rightarrow\ no\ té\ sentit\ el\ p-valor$$

3) $H_1: \theta < \theta_0$ (**contrast unilateral per l'esquerra**):



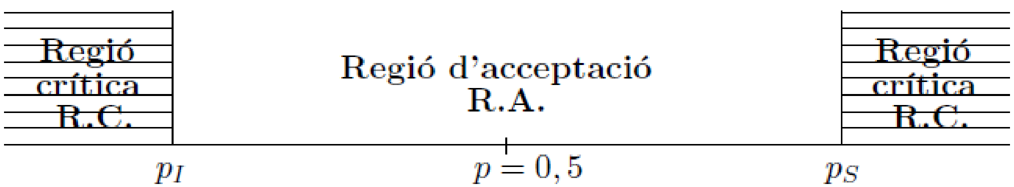
$$si\ \hat{\theta}_{mostra} > \theta_0 \ \Rightarrow\ no\ té\ sentit\ el\ p-valor$$
$$si\ \hat{\theta}_{mostra} < \theta_0 \ \Rightarrow\ \theta_I = \hat{\theta}_{mostra}$$
$$p-valor = P(\hat{\theta} < \hat{\theta}_{mostra})$$

p-valor

En el nostre exemple:

$$H_0: p=0{,}5 \qquad n=100 \qquad \hat{p}_{mostra}=0{,}65 \qquad \alpha=0{,}05 \qquad \hat{p}_X \sim N\left(p\,,\,\frac{p(1-p)}{n}\right)=N(0{,}5\,,\,0{,}05^2)$$

1) H_1: p ≠ 0,5 (**contrast bilateral**):

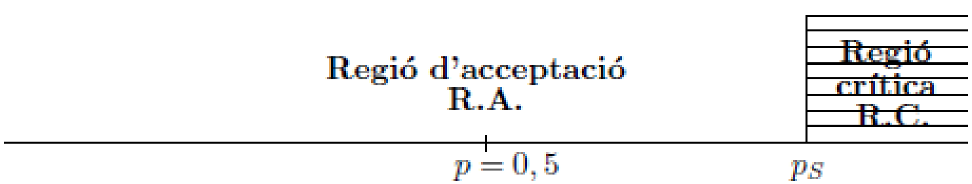


$$0{,}65>0{,}5 \;\Rightarrow$$

$$p-valor=2\cdot P(\hat{p}_X>0{,}65)=2\cdot\left(1-F_{\hat{p}_X}(0{,}65)\right)=$$

$$=2\cdot\left(1-F_Z\left(\frac{\hat{p}_S-0{,}5}{0{,}05}\right)\right)=0{,}026=2{,}6\,\%$$

2) H_1: p > 0,5 (**contrast unilateral per la dreta**):



$$p-valor=P(\hat{p}_X>0{,}65)=\left(1-F_{\hat{p}_X}(0{,}65)\right)=$$

$$=\left(1-F_Z\left(\frac{\hat{p}_S-0{,}5}{0{,}05}\right)\right)=0{,}013=1{,}3\,\%$$

Tipus d'errors en un contrast d'hipòtesis

- Error tipus I:

$$\alpha = P(\hat{\theta} \in R.C. \mid H_0)$$ (nivell de significació)

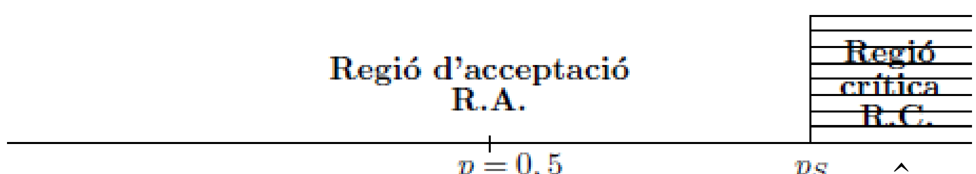
- Error tipus II:

$$\beta = P(\hat{\theta} \in R.A. \mid H_1)$$

En el nostre exemple:

$$H_0: p = 0{,}5 \qquad n = 100 \qquad \hat{p}_{mostra} = 0{,}65 \qquad \alpha = 0{,}05$$

Si H_1: p > 0,5



$$\hat{p}_S = 0{,}582$$

Si realment p=0,6 > 0,5, llavors $\hat{p}_X \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) = N(0{,}6\,,\,0{,}049^2)$

$$\beta = P(\hat{p}_X < 0{,}582) = \left(1 - F_{\hat{p}_X}(0{,}582)\right) = 1 - F_Z\left(\frac{0{,}582 - 0{,}6}{0{,}049}\right) = 0{,}6443$$

Contrast d'hipòtesi de mitjana, variància i proporció

Els contrasts d'hipòtesis de mitjana, variància i proporció es fan tenint en compte que els paràmetres mostrals corresponents són v.a. amb les següents distribucions de probabilitat:

Paràmetre mostral (estadístic)	Esperança	Variància	Distribució de probabilitat	
$\bar{X}$	$E(\bar{X}) = \mu$	$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$	$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$	població normal, σ conegut
			$\frac{\bar{X}-\mu}{\hat{s}_X/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	població normal, σ desconegut, $n \leq 30$
			$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\hat{s}_X^2}{n})$	σ desconegut, $n > 30$
$\hat{s}_X^2$	$E(\hat{s}_X^2) = \sigma^2$	$\mathrm{Var}(\hat{s}_X^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$	$\frac{n-1}{\sigma^2}\hat{s}_X^2 \sim \chi^2_{n-1}$	població normal
$\hat{p}_X$	$E(\hat{p}_X) = p$	$\mathrm{Var}(\hat{p}_X) = \frac{p(1-p)}{n}$	$\hat{p}_X \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$	$n > 30$
			$\hat{p}_X \sim t_{n-1}$	població normal, $n \leq 30$

Contrast d'hipòtesi de diferència de mitjanes i diferència de proporcions

Si les dades provenen de dues mostres <u>independents</u>, les distribucions de probabilitat de les v.a. *Diferència de Mitjanes* i *Diferència de Proporcions* són:

Paràmetre mostral	Distribució de probabilitat	
Diferència de mitjanes	$\bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_X-\mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m})$	si poblacions normals i variàncies conegudes
	$\frac{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}}{\sqrt{\frac{n\hat{s}_X^2+m\hat{s}_Y^2}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2}$	si poblacions normals i variàncies desconegudes però iguals i $n \leq 30$
	$\bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_X-\mu_Y, (\frac{n\hat{s}_X^2+m\hat{s}_Y^2}{n+m-2})(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}))$	si poblacions normals i variàncies desconegudes però iguals i $n > 30$
	$\bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_X-\mu_Y, \frac{\hat{s}_X^2}{n}+\frac{\hat{s}_Y^2}{m})$	si poblacions normals i variàncies desconegudes i diferents
Diferència de proporcions	$\hat{p}_X-\hat{p}_Y \sim N(p_X-p_Y, \frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n}+\frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{m})$	n gran

Contrast d'hipòtesi de diferència de mitjanes i diferència de proporcions

Si les dades provenen de dues mostres dependents (per a cada element de la mostra es prenen dos valors), es calculen les diferències entre els valors corresponents a cada un dels elements i es fa un *contrast de la mitjana* d'aquestes diferències.

Bondat d'ajustament

Conegudes les freqüencies absolutes dels valors d'una mostra, ens demanam si aquestes freqüències es troben distribuïdes seguint alguna llei *típica* L (binomial, Poisson, normal, …)

Es fa el següent contrast d'hipòtesi:

H_0: la distribució de valors segueix la llei L

H_1: la distribució de valors no segueix la llei L

Bondat d'ajustament

Es calcula el següent estadístic:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{r} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

on

r és el nombre de valors o intervals de la mostra

o_i és la freqüència absoluta *observada* de l'interval i

e_i és la freqüència absoluta *esperada* de l'interval i

$$e_i = n \cdot p_i$$

$$p_i = P(interval\, i \ \mid H_0)$$

n és el tamany de la mostra

(Nota: els valors mostrals s'han d'agrupar de manera que $e_i \geq 5$ per a tots els intervals)

ε és una v.a amb distribució $\chi^2_{r-(k+1)}$

on r és el nombre de valors o intervals de la mostra

i k és el nombre de paràmetres desconeguts de la llei L

Per a un nivell de significació α la hipòtesi nul.la s'accepta si $\varepsilon \leq \chi^2_{r-(k+1),\, 1-\alpha}$