Classe pràctica de Matrius

Classe pràctica 1

Prob 1 Sigui A una matriu $n \times n$ i I_n la matriu identitat d'ordre n.

1. Si $A^2 = \mathbf{0}$, demostrau que $(I - A)^{-1} = I + A$. **1 pt.**
2. Si $A^3 = \mathbf{0}$, demostrau que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$. **1 pt.**
3. Utilitzant l'apartat anterior, trobau la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1 pt.**
4. Si $A^n = \mathbf{0}$, trobau la fórmula per a $(I - A)^{-1}$. **1 pt.**

(Control, curs 06/07)

Prob 2 Demostrau, per inducció, que **3 pt.**

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} t^n & nt^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)t^{n-2} \\ 0 & t^n & nt^{n-1} \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix}$$

(Examen, juny 2006)

Solució classe pràctica 1

Prob 1 Sigui A una matriu $n \times n$ i I_n la matriu identitat d'ordre n.

1. Si $A^2 = \mathbf{0}$, demostrau que $(I - A)^{-1} = I + A$. **1 pt.**
2. Si $A^3 = \mathbf{0}$, demostrau que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$. **1 pt.**
3. Utilitzant l'apartat anterior, trobau la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1 pt.**
4. Si $A^n = \mathbf{0}$, trobau la fórmula per a $(I - A)^{-1}$. **1 pt.**

(Control, curs 06/07)

Solució:

1.- $(I - A)^{-1} = I + A$ si $(I - A)(I + A) = I$. Efectivament:

$$(I - A)(I + A) = I + A - A - A^2 = I - A^2 = I \quad \text{anàlogament } (I + A)(I - A) = I$$

per tant, $(I - A)^{-1} = I + A$.

2.- Anàlogament a l'apartat anterior

$$(I - A)(I + A + A^2) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I - A^3 = I \qquad \text{i} \qquad (I + A + A^2)(I - A) = I$$

per tant, $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$

3.- La matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hauria de ser igual a $I - A$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - A$$

per tant, $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A més,

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant, podem aplicar l'apartat 2 i tenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.- Vegem que si $A^n = \mathbf{0}$, $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$. Efectivament,

$$(I - A)(I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}) = I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1} - A - A^2 - A^3 - \ldots - A^n = I - A^n = I$$

anàlogament, $(I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1})(I - A) = I$, per tant $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$.

Prob 2 Demostrau, per inducció, que **3 pt.**

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} t^n & nt^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)t^{n-2} \\ 0 & t^n & nt^{n-1} \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix}$$

(Examen, juny 2006)

Solució:

i) És cert per a $n = 1$, com es pot veure substituint n per 1.

ii) Suposam cert per a $n - 1$:

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} t^{n-1} & (n-1)t^{n-2} & \frac{1}{2}(n-1)(n-2)t^{n-3} \\ 0 & t^{n-1} & (n-1)t^{n-2} \\ 0 & 0 & t^{n-1} \end{pmatrix}$$

iii) Vegem que és cert per a n

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} t^{n-1} & (n-1)t^{n-2} & \frac{1}{2}(n-1)(n-2)t^{n-3} \\ 0 & t^{n-1} & (n-1)t^{n-2} \\ 0 & 0 & t^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t^n & t^{n-1} + (n-1)t^{n-1} & (n-1)t^{n-2} + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)t^{n-2} \\ 0 & t^n & t^{n-1} + (n-1)t^{n-1} \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t^n & nt^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)t^{n-2} \\ 0 & t^n & nt^{n-1} \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix}$$

(1) Per hipòtesi d'inducció.