Fonaments Matemàtics II. Telemàtica
Control 5. Espais euclidians. Curs 09/10

Definim el següent producte escalar sobre $\mathbb{R}^3$

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

a) Demostrau que és un producte escalar. **2 punt**

b) Trobau la matriu associada al producte escalar respecte a la base canònica. **1 punt**

c) Sigui $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 3z = 0\}$. Trobau una base ortonormal de S. **2 punt**

d) Trobau una base de $S^{\perp}$. **2 punt**

e) Calculau la projecció ortogonal sobre S del vector (-1,3,2). **2 punt**

f) Trobau l'angle que forma el vector (-1,3,2) amb l'espai vectorial S. **1 punt**

Solució:

a) Efectivament,

- $$f[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 = 2y_1x_1 + y_2x_2 + 2y_3x_3 = f[(y_1, y_2, y_3), (x_1, x_2, x_3)]$$

- $$f[(x_1, x_2, x_3) + (x_1', x_2', x_3'), (y_1, y_2, y_3)] = f[(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3'), (y_1, y_2, y_3)] =$$
$$= 2(x_1 + x_1')y_1 + (x_2 + x_2')y_2 + 2(x_3 + x_3')y_3 = 2x_1y_1 + 2x_1'y_1 + x_2y_2 + x_2'y_2 + 2x_3y_3 + 2x_3'y_3 =$$
$$= (2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3) + (2x_1'y_1 + x_2'y_2 + 2x_3'y_3) = f[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] + f[(x_1', x_2', x_3'), (y_1, y_2, y_3)]$$

- $$f[t(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = f[(tx_1, tx_2, tx_3), (y_1, y_2, y_3)] =$$
$$= 2tx_1y_1 + tx_2y_2 + 2tx_3y_3 = t(2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3) = tf[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)]$$

- Suposem $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$
$$f[(x, y, z), (x, y, z)] = 2x^2 + y^2 + 2z^2 > 0$$
Suposem ara que $f[(x, y, z), (x, y, z)] = 0$, això és equivalent a $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 0$ i per tant, $x = y = z = 0$

  Anàlogament si $x = y = z = 0$, es compleix $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 0$ i per tant $f[(x, y, z), (x, y, z)] = 0$

Per tant és un producte escalar.

b)
$$\begin{pmatrix} <(1,0,0),(1,0,0)> & <(1,0,0),(0,1,0)> & <(1,0,0),(0,0,1)> \\ <(0,1,0),(1,0,0)> & <(0,1,0),(0,1,0)> & <(0,1,0),(0,0,1)> \\ <(0,0,1),(1,0,0)> & <(0,0,1),(0,1,0)> & <(0,0,1),(0,0,1)> \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Els elements de S compleixen que $x = -y + 3z$, per tant són de la forma

$$(-y + 3z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(3, 0, 1)$$

aleshores $\{(-1, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ és un sistema generador de S, i com són linealment independents ja que el menor de 2n ordre $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ tenim que forman una base de S.

Aplique el mètode de Gram-Schmidt per cercar una base ortonormal.

$$e_1' = (-1, 1, 0), \qquad \|e_1'\| = \sqrt{2 \cdot (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$e_2' = (3,0,1) - \frac{\langle (3,0,1),(-1,1,0)\rangle}{\|((-1,1,0)\|^2}(-1,1,0) = (3,0,1) - \frac{-6}{3}(-1,1,0) = (1,2,1)$$

$$\|e_2'\| = \sqrt{2\cdot 1^2 + 2^2 + 2\cdot 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Per tant, una base ortogonal és $\{(-1,1,0),(1,2,1)\}$ i una base ortonormal és

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,0), \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,2,1)\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right\}$$

d) Hem vist a l'apartat anterior que $\{(-1,1,0),(3,0,1)\}$ és una base d'S. Per cercar els elements de $S^\perp$ hem de cercar els elements (x,y,z) tal que:

$$\langle (x,y,z),(-1,1,0)\rangle = -2x + y = 0$$

$$\langle (x,y,z),(3,0,1)\rangle = 6x + 2z = 0$$

resolent el sistema tenim $y = 2x$, $z = -3x$. Per tant, els elements de $S^\perp$ són de la forma

$$(x,2x,-3x) = x(1,2,-3)$$

Aleshores una base de $S^\perp$ és $\{(1,2,-3)\}$

e) Per a això posarem el vector $(-1,3,2)$ com a suma d'un element d'S i d'un element d'$S^\perp$

$$(-1,3,2) = x(-1,1,0) + y(3,0,1) + z(1,2,-3) = (-x+3y+z, x+2z, y-3z)$$

que resolent tenim $x = \frac{11}{3},\ y = 1,\ z = -\frac{1}{3}$; i la projecció de $(-1,3,2)$ sobre S serà

$$P_S(-1,3,2) = \frac{11}{3}(-1,1,0) + (3,0,1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, 1\right)$$

f) L'angle que forma el vector (-1,3,2) amb l'espai vectorial S és l'angle que forma el vector indicat amb la projecció ortogonal d'aquest sobre S que hem vist a l'apartat anterior

$$\cos\alpha = \frac{\langle (-1,3,2), P_S(-1,3,2)\rangle}{\|(-1,3,2)\|\|P_S(-1,3,2)\|} = \frac{\left\langle (-1,3,2), \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, 1\right)\right\rangle}{\|(-1,3,2)\|\left\|\left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, 1\right)\right\|} = \frac{\frac{49}{3}}{\sqrt{19}\sqrt{\frac{49}{3}}} = 0.92717$$

que correspondria a un angle $\arccos 0.92717$