5 Introducció a les equacions en derivades parcials

En aquest capítol introduirem uns tipus d'equacions en les quals les incògnites són funcions de diverses variables. Aquestes equacions són una generalització de les equacions diferencials ordinàries.

Definició 5.0.1. *Una* ***Equació en Derivades Parcials (EDP)*** *és una equació que relaciona una funció $u : D \to \mathbb{R}$ on D és un domini de $\mathbb{R}^n$ i les seves derivades parcials, és a dir,*

$$F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, D^\alpha u) = 0. \tag{1}$$

*L'****ordre*** *m d'una EDP és l'ordre més alt de les derivades parcials que apareixen a l'equació.*

Definició 5.0.2. *Una EDP d'ordre m és* ***lineal*** *si F és lineal respecte de u i les seves derivades parcials, és a dir, és de la forma*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x).$$

Si $f(x) = 0$, llavors direm que l'EDP és ***homogènia****.*

Exemples

- L'equació en derivades parcials $u_t + u_{xx} = 0$ és lineal i de segon ordre, ja que la derivada parcial més alta que apareix és u_{xx}.
- L'equació $(1 + u_y^2)u_{xxy} - 3xyu_{xy}^3 = u_{yy}$ és una EDP de tercer ordre i no lineal.
- L'equació $(u_x)^5 + 3x^3y = 0$ és una EDP de primer ordre i no és lineal.

Definició 5.0.3. *Direm que una funció u és una* ***solució*** *de la EDP (1) a la regió D si se compleixen les següents condicions:*

- *En el domini D la funció $u(x_1, \ldots, x_n)$ té totes les derivades que apareixen en l'equació i són contínues.*
- *En substituir u i les seves derivades dins l'equació (1) s'obté una identitat respecte a les variables $x_1, \ldots, x_n$.*

Exemples

- Considerem l'equació $u_{xx} + u_{yy} = 0$, que és una EDP lineal, homogènia i de segon ordre. És fàcil comprovar que $u(x, y) = x - y$ i $u(x, y) = x^2 - y^2$ són solucions.

  Aquest exemple ens diu que una EDP pot tenir una varietat de solucions completament diferents unes de les altres.

- Considerem l'EDP $u_x = x + y$. Aquesta EDP la podem resoldre integrant directament ambdós costats de l'equació respecte de la variable x

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y).$$

  Observem que en integrar respecte de x obtenim una funció arbitrària de la variable y.

- Considerem ara l'equació $u_{xy} = 0$. Si feim el canvi $v = u_x$ l'EDP anterior queda $v_y = 0$ que, integrant respecte de y té per solució $v(x, y) = f(x)$ on f és una funció arbitrària.

  Desfent el canvi de variable obtenim $u_x = f(x)$ i integrant respecte de x obtenim la solució de l'EDP $u(x, y) = F(x) + G(y)$, on F (la primitiva de f) i G són funcions arbitràries.

  Aquesta expressió obtinguda s'anomena **solució general** de l'EDP ja que qualsevol solució de l'equació se pot obtenir de la forma anterior. Es troben solucions particulars imposant condicions addicionals.

Dels exemples anteriors podem deduir que la solució general d'una EDP d'ordre m conté m funcions arbitràries. Qualsevol solució obtinguda d'aquesta afegint condicions addicionals s'anomena **solució particular**.

Se poden donar diferents tipus de condicions addicionals a l'hora de trobar la solució particular d'una EDP per determinar-la unívocament. Si aquestes condicions ens donen l'estat inicial del procés s'anomenen **condicions inicials** i si les condicions que ha de satisfer la solució de l'EDP es troben a la frontera del domini on té lloc el procés, es diuen **condicions de frontera**.

Amb molta freqüència les EDPs sorgeixen de modelitzar fenòmens físics. Convé saber que no hi ha una teoria que resolgui les EDPs en general. De fet, la gran majoria d'elles no se saben o no es poden resoldre. El nostre objectiu serà introduir algunes de les EDPs més importants i aprendre mètodes de resolució per certs tipus de EDPs.

5.1 Equacions de primer ordre

En aquesta secció estudiarem com resoldre les EDPs més senzilles que existeixen, les de primer ordre. A més a més ho farem per a equacions de dimensió dos i utilitzarem el mètode anomenat de les característiques. Per tant, l'equació que resoldrem en aquesta secció té la forma:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \tag{2}$$

on a, b, c, f són funcions diferenciables amb les derivades parcials de primer ordre contínues.

Per resoldre l'equació (2), el que farem serà cercar un canvi de coordenades que la transformi en una altra EDP on no aparegui u_y . Amb això obtindrem una equació diferencial ordinària (EDO) lineal de primer ordre respecte a la $u(x,y)$ com a funció de x que ja sabem resoldre.

Pensam en un canvi de coordenades qualsevol:

$$w = h(x,y)\,, \quad z = g(x,y)$$

Aplicant la regla de la cadena obtenim

$$u_x = u_w w_x + u_z z_x, \qquad u_y = u_w w_y + u_z z_y.$$

Si ho substituïm en l'equació (2) ens queda

$$a(u_w w_x + u_z z_x) + b(u_w w_y + u_z z_y) + cu = f \iff (aw_x + bw_y)u_w + (az_x + bz_y)u_z + cu = f.$$

El que ens agradaria és que $aw_x + bw_y = 0$, perquè no aparegués u_w . Per aconseguir-ho considerarem el **mètode de les característiques** que presentam a continuació.

Primer s'ha de resoldre l'equació:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \tag{3}$$

que s'anomena **equació característica** de l'EDP (2) i la família de corbes solució s'anomenen **corbes característiques**. Les corbes característiques representen corbes sobre les quals la nova variable independent w és constant. Si el.legim el canvi de variables $w(x,y)$ tal que $w(x,y) = K$ sigui solució de (3) tindrem que el coeficient de u_w s'anul.la com volíem.

Observem que la variable z no ha jugat cap paper i per tant podem triar-la com vulguem. El més fàcil generalment serà triar $z = y$.

Observació Moltes vegades no serà fàcil resoldre l'EDO (3) i fins i tot en els cas en què sí puguem resoldre l'EDO no serà fàcil trobar la transformació inversa del canvi de variables. En els nostres exemples i exercicis sempre podrem fer aquests càlculs.

Pel cas en què els coeficients de l'equació (2) són constants, és a dir, $a(x,y) = a$, $b(x,y) = b$ obtenim que l'equació característica és

$$y' = \frac{b}{a} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

que te per solucions les rectes $bx - ay = K\,, \quad K \in \mathbb{R}$. Per tant les corbes característiques de l'EDP són una família de rectes paral.leles. Si feim el canvi de variables

$$\begin{cases} w = bx - ay \\ \\ z = y \end{cases}$$

que té per transformació inversa

$$\begin{cases} x = \dfrac{w + az}{b} \\ \\ y = z \end{cases}$$

obtenim que l'EDP (2) es transforma en l'EDO

$$bu_z + cu = f(w, z)$$

que només depèn de z i podem resoldre directament.

Donarem ara dos exemples en que els coeficients són constants.

Exemple 5.1.1. *Calculau la solució general de l'EDP*

$$3u_x - 2u_y + u = x$$

Resolem l'equació característica

$$y' = -\frac{2}{3}$$

que ens dona les rectes $2x + 3y = K$. Per tant el canvi de variable que hem de fer és

$$\begin{cases} w = 2x + 3y \\ \\ z = y \end{cases}$$

que té per transformació inversa

$$\begin{cases} x = \frac{w - 3z}{2} \\ \\ y = z \end{cases}$$

Utilitzant la regal de al cadena i substituint en el terme de l'esquerra de la igualtat de l'equació donada tenim:

$$3u_x - 2u_y + u = 3(u_w\ w_x + u_z\ z_x) - 2(u_w\ w_y + u_z\ z_y) + u = 3(u_w \cdot 2) - 2(u_z + v_w \cdot 3) + u = -2u_z + u$$

Per tant, l'EDP en les noves variables és

$$-2u_z + u = \frac{w - 3z}{2}$$

Que podem pensar com una EDO lineal de primer ordre respecte a la variable z.

Aplicam ara el mètode conegut per resoldre aquesta equació diferencial:

Dividim per (-2) i multiplicant pel factor integrant $e^{-z/2}$ obtenim

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{\frac{-z}{2}}u\right) = -\frac{1}{4}e^{\frac{-z}{2}}(w - 3z)$$

Integrant la igualtat anterior respecte de z, deixant w fixe, obtenim

$$\begin{aligned} e^{\frac{-z}{2}}u &= -\frac{1}{4}w\int e^{\frac{-z}{2}}\,dz + \frac{3}{4}\int ze^{\frac{-z}{2}}\,dz + C(w) = \frac{1}{2}we^{\frac{-z}{2}} + \frac{3}{4}(-4-2z)e^{\frac{-z}{2}} + C(w) = \\ &= e^{\frac{-z}{2}}\left(\frac{w-3z}{2} - 3\right) + C(w) \end{aligned}$$

on $C(w)$ és una funció arbitrària de w. Observem que podem simplificar de tots dos costats el terme exponencial i obtenim

$$u(w,z) = \left(\frac{w-3z}{2} - 3\right) + e^{\frac{z}{2}}C(w)$$

Ara hem de desfer el canvi de variables:

$$u(x,y) = \frac{2x+3y-3y}{2} - 3 + e^{\frac{y}{2}}C(2x+3y) = x - 3 + e^{\frac{y}{2}}C(2x+3y)$$

on $C(2x+3y)$ pot ser qualsevol funció de $(2x+3y)$.

Per exemple, $C(2x+3y) = (2x+3y)^2$, o bé $C(2x+3y)e^{2x+3y}$, o també $C(2x+3y) = \sin^2(2x+3y)$.

Si imposam una condició inicial podem trobar exactament quina és la funció C que la satisfà. Per exemple podem imposar $u(x,0) = 3x$. Aleshores, si substituïm a la solució general obtenim:

$$u(x,0) = x - 3 + C(2x) = 3x \;\Rightarrow\; C(2x) = 2x + 3 \;\Rightarrow\; C(s) = s + 3$$

Per tant, la solució de l'equació $3u_x - 2u_y + u = x$ amb condició inicial $u(x,0) = 3x$ és

$$u(x,y) = x - 3 + e^{\frac{y}{2}}(2x + 3y + 3)\,.$$

Exemple 5.1.2. *Anem a resoldre l'EDP* $u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}$ *amb la condició* $u(x, 3x) = 0$.

L'equació característica és $y' = 2$, per tant les corbes característiques són $2x - y = K$. D'això el canvi de variables que hem d'aplicar és

$$\begin{cases} w = 2x - y \\ \\ z = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{w+z}{2} \\ \\ y = z \end{cases}$$

Per la regla de la cadena tenim que:

$$u_x = u_w\ w_x + u_z\ z_x = 2u_w \qquad\qquad u_y = u_w\ w_y + u_z\ z_y = -u_w + u_z$$

i per tant l'equació ens queda $2u_z - 4u = e^{\frac{w+3z}{2}}$.

Si dividim per 2, multiplicam pel factor integrant e^{-2z} i integram obtenim:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-2z}u\right) = \frac{1}{2}\int e^{\frac{w-z}{2}}dz \;\Rightarrow\; e^{-2z}u = \frac{1}{2}e^{\frac{w-z}{2}}(-2) + C(w) \;\Rightarrow\; e^{-2z}u = -e^{\frac{w-z}{2}} + C(w).$$

Per tant $u(w,z) = -e^{\frac{w+3z}{2}} + C(w)\ e^{2z}$, pel que si desfem el canvi de variables resulta

$$u(x,y) = -e^{\frac{2x-y+3y}{2}} + C(2x-y)e^{2y} = -e^{x+y} + C(2x-y)e^{2y}.$$

Si imposam la condició de l'enunciat resulta

$$u(x,3x) = -e^{x+3x} + C(2x-3x)e^{6x} = -e^{4x} + C(-x)e^{6x} = 0 \;\Rightarrow\; C(-x) = e^{-2x}$$

o el que és el mateix $C(s) = e^{2s}$.

Per tant la solució de l'EDP juntament amb la condició és:

$$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{2(2x-y)}e^{2y} = -e^{x+y} + e^{4x}$$

Observació No totes les EDPs de primer ordre amb condició inicial tenen solució. Per exemple, si a l'EDP anterior ens donasin com a condició $u(x, 2x+1) = 0$, llavors en imposar-la ens donaria:

$$u(x,2x+1) = -e^{x+2x+1} + C(2x-2x-1)e^{2(2x+1)} = -e^{3x+1} + C(-1)e^{4x+2} = 0 \;\Rightarrow\; C(-1) = e^{-x-1}.$$

Però independentment de la funció C que triem resulta que $C(-1)$ és una constant mentre que e^{-x-1} és una funció depenent de x . Per tant la condició $u(x, 2x+1) = 0$ no es complirà mai i el problema no tindrà solució.

Consideram ara un exemple amb coeficients variables.

Exemple 5.1.3. *Resoleu l'EDP* $-yu_x + xu_y = 0$.

L'equació característica és $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. És una EDO de variables separades que podem resoldre directament

$$ydy = -xdx \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

Per tant les corbes característiques són $y^2 + x^2 = K$, és a dir, cercles centrats al punt $(0, 0)$ de radi $\sqrt{K}$.

Feim el canvi de variables

$$\begin{cases} w = x^2 + y^2 \\ \\ z = y \end{cases}$$

que té per inversa

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{w - z^2} \\ \\ y = z \end{cases}$$

Observem que tenim dues transformacions inverses i que només estan ben definides per a $w \geq z^2$.

$$u_x = u_w\ w_x + u_z\ z_x = 2x\ u_w \qquad\qquad u_y = u_w\ w_y + u_z\ z_y = 2y\ u_w + u_z$$

i per tant l'equació ens queda $x\ u_z = 0 \;\Leftrightarrow\; u_z = 0$

Per tant, la funció u només depèn de w i la solució de l'equació anterior és $u(w, z) = f(w)$ amb f una funció qualsevol. Si desfem el canvi obtenim

$$u(x, y) = f(x^2 + y^2)$$

Comprovem que efectivament la funció anterior és solució de la nostra EDP:

$$-yu_x + xu_y = -yf'(x^2 + y^2)2x + xf'(x^2 + y^2)2y = 0$$

5.2 Equacions de segon ordre. Exemples més importants

En aquesta secció volem introduir les EDPs més importants que modelen fenòmens físics, que són de segon ordre. Malgrat l'interès que té la deducció d'aquestes equacions, és un tema que s'escapa del contingut d'aquest curs.

En aquesta secció ens centrarem en equacions de segon ordre en dimensió dos amb coeficients constants, per tant en equacions de la forma

$$A\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\,\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + C\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\,\frac{\partial u}{\partial x} + E\,\frac{\partial u}{\partial y} + F\,u = G(x,y) \tag{4}$$

on $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$.

Podem fer una analogia amb les equacions polinomials quadràtiques

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

que representen una hipèrbola, una paràbola o una el.lipse segons el valor del discriminant $b^2 - 4ac$ sigui positiu, zero o negatiu, respectivament.

D'això podem classificar les EDPs de segon ordre de la següent manera:

- si $B^2 - 4AC > 0$ llavors l'equació (4) s'en diu **hiperbòlica**.
- si $B^2 - 4AC = 0$ llavors l'equació (4) s'en diu **parabòlica**.
- si $B^2 - 4AC < 0$ llavors l'equació (4) s'en diu **el.líptica**.

Si l'equació no és de dimensió dos sinó de dimensió superior llavors se pot fet una classificació similar.

Anem a veure els exemples més significatius de cadascun d'aquest tipus.

5.2.1 Equació de la calor

L'equació de la calor descriu la distribució de la calor (o les variacions de la temperatura) en una regió al llarg del temps. Aquesta equació s'en dedueix de la segona llei de la termodinàmica que diu essencialment que la calor flueix de regions amb alta temperatura a regions de baixa temperatura, i de la llei de conservació de l'energia. També hem de tenir en compte que la quantitat de calor d'un cos és proporcional a la seva massa i, evidentment, a la seva temperatura.

Considerem una barra homogènia que té els seus costats coberts per un material aïllant de tal manera que la calor de la barra no s'escapa a l'exterior. Si denotam per $u(x,t)$

la temperatura de la barra a l'instant t al punt x, llavors l'equació que modela aquesta temperatura és

$$u_t = c\, u_{xx}$$

on c és una constant que representa la difusivitat de la barra. A més a més, tenim una condició inicial que representa la temperatura de la barra a l'instant $t = 0$ i ve donada per $u(x, 0) = f(x)$.

Quan la barra és finita, també hem de sabre què ocorre en els seus costats laterals, si la temperatura es manté fixa o bé si hi ha aportament o pèrdua de calor; això vindrà donat per les condicions de frontera. Per exemple, si la barra té longitud L llavors les condicions de frontera seran

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad u(L, t) = \varphi_L(t),$$

essent φ_0 i φ_L funcions conegudes.

En el cas que considerem l'equació de la calor en 2 i 3 variables, llavors les equacions que s'obtenen són:

$$\begin{aligned} u_t &= c(u_{xx} + u_{yy}) \quad \text{en dimensió 2} \\ u_t &= c(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad \text{en dimensió 3} \end{aligned}$$

L'equació de la calor és el prototip d'equació parabòlica. En la següent secció estudiarem un mètode per resoldre l'equació en dimensió 1.

5.2.2 Equació d'ones

Considerem una corda elàstica ben tirant de longitud a, que està col·locada al llarg d'un segment horitzontal i assumim que els dos costats de l'elàstic estan fixos. Si corbam verticalment l'elàstic des de la seva posició original o bé si li donam una certa velocitat vertical als seus punts, l'elàstic començarà a oscil.lar. L'equació d'ones estudia la forma que adoptarà l'elàstic en cada un dels seus punts al llarg del temps, com per exemple la vibració d'una corda de violí, o la propagació d'ones com les del so o la llum. L'equació té la següent forma:

$$u_{tt} = c^2\, u_{xx}$$

on $c^2 = T/\rho$ essent T la tensió de la corda i ρ la densitat de massa constant de la corda, és a dir, la massa per unitat de longitud. Es pot demostrar que $c = \sqrt{T/\rho}$ és la velocitat a la que es mouen les ones. L'equació d'ones és el prototip d'equació hiperbòlica.

De la mateixa manera que amb l'equació de la calor, hem de dotar aquesta equació d'unes condicions inicials que descriuen l'estat de la corda al temps inicial, la seva forma inicial $u(x, 0) = f(x)$ i la seva velocitat inicial $u_t(x, 0) = g(x)$.

Com que assumim que la corda és finita i està fixa en els extrems llavors, el moviment de la corda també vindrà donat per les condicions de frontera: $u(0,t) = 0, u(a,t) = 0$.

Evidentment es podrien assumir altres hipòtesis damunt la corda, com per exemple que aquesta és infinita (si volem modelar la propagació del so a l'espai). Aleshores, les condicions de frontera canvien.

A continuació escrivim l'equació d'ones en 2 i 3 variables.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2(u_{xx} + u_{yy}) \quad \text{en dimensió 2} \\ u_{tt} &= c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad \text{en dimensió 3} \end{aligned}$$

5.2.3 Equació de Laplace

L'exemple més típic d'equació el.líptica és l'equació

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

anomenada equació de Laplace.

Observem que si a l'equació de la calor en dues dimensions x, y cercam solucions estacionàries, és a dir, independents del temps, llavors $u_t = 0$ i d'aquesta manera resulta que aquestes solucions verifiquen $u_{xx} + u_{yy} = 0$. És a dir, l'equació de Laplace pot ser interpretada com l'equació de la calor estacionària.

Com que no hi ha dependència en el temps no podem imposar condicions inicials. Ara bé, es pot imposar que les solucions de l'equació de Laplace verifiquin certes condicions de frontera. Per exemple, podem consideram el següent problema en dimensió dos en un rectangle $[0,a] \times [0,b]$ i vindrà donat per condicions del tipus:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) & u(x,b) = g(x) \\ u(0,y) = 0 & u(a,y) = 0 \end{cases}$$

5.3 Mètode de separació de variables

Un dels mètodes més utilitzats per a la resolució de equacions en derivades parcials lineals és el de separació de variables. Amb aquest mètode la resolució del problema es redueix a la resolució d'una successió de problemes de valors inicials i/o de contorn relatius a certes equacions diferencials ordinàries. Separar variables consisteix en cercar totes les possibles solucions de l'equació i de la condició de contorn (per ara no parlarem de la condició inicial) que siguin producte de dues funcions, una depenent de la variable espacial $x \in D$ i l'altra de la temporal $t \in (0, \infty)$ de la forma:

$$u(x,t) = T(t)X(x), \quad (x,t) \in D \times (0, \infty).$$

Evidentment, en tot moment estam cercant solucions que no siguin idènticament nul.les. A més a més, només consideram el cas unidimensional, és a dir $D \subseteq \mathbb{R}$.

Anem a explicar el mètode amb un exemple. Resolem l'equació de la calor amb les condicions indicades

$$\begin{cases} u_t = c\, u_{xx} \quad \text{al domini } D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < L\,,\ t > 0\} \\ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = f(x) \qquad x \in [0,L] \end{cases} \tag{5}$$

amb f una funció contínua. Seguint el mètode de separació de variables, volem trobar una solució de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

on X i T són funcions a determinar. Si substituïm la igualtat anterior a l'EDP (5) obtenim

$$X(x)T'(t) = cX''(x)T(t) \quad per\ (x,t) \in D.$$

Si suposam que $X(x) \neq 0$ per $x \in (0,L)$ i $T(t) \neq 0$ per $t > 0$, llavors la igualtat anterior queda

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{c\,T(t)}$$

En aquesta darrera igualtat el primer membre només depèn de x i el segon només de t. Perquè es produeixi la igualtat, ambdós membres han de ser constants. Denotam aquesta constant per $-\lambda$ i llavors tenim dues equacions diferencials ordinàries

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0 \tag{6}$$

$$T'(t) + c\,\lambda\, T(t) = 0 \tag{7}$$

Les condicions de frontera queden:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \qquad\qquad u(L,t) = X(L)T(t) = 0$$

i com que estam suposant que $T(t) \neq 0$, llavors les condicions de frontera són

$$X(0) = 0 \qquad X(L) = 0\,.$$

L'EDO (6) és una equació lineal de segon ordre que es resol trobant les solucions de l'equació:

$$x^2 + \lambda = 0 \iff x = \pm\sqrt{-\lambda}$$

La solució de (6) depèn del signe de λ, per tant estudiarem els tres casos segons el seu signe.

- $\lambda < 0$. En aquest cas les solucions són

  $$X(x) = Ae^{-\sqrt{-\lambda}x} + Be^{\sqrt{-\lambda}x}$$

  Si imposam les condicions de frontera,

  $$\begin{aligned} X(0) &= A + B = 0 \\ X(L) &= Ae^{-\sqrt{-\lambda}L} + Be^{\sqrt{-\lambda}L} = 0 \end{aligned}$$

  obtenim que es tracta d'un sistema lineal homogeni per a les constants A i B. Com que el determinant de la matriu del sistema és distint de zero, l'única solució és la trivial $A = B = 0$, i per tant, $X = 0$. Com que cercam solucions que no siguin idènticament nul·les, resulta que per a $\lambda < 0$ no existeixen solucions no trivials.

- $\lambda = 0$. La solució general de l'equació és

  $$X(x) = Ax + B$$

  que si imposam les condicions de frontera ens torna a donar $A = B = 0$ i per tant la solució idènticament nul.la. En aquest cas tampoc tenim solucions no trivials.

- $\lambda > 0$. La solució general de l'equació és

  $$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

  Si imposam les condicions de frontera obtenim el sistema:

  $$\begin{aligned} &A = 0 \\ &A\cos(\sqrt{\lambda}L) + B\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow B\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \end{aligned}$$

  Aquest sistema té solucions no trivials si $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$ és a dir si $\sqrt{\lambda}L = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. En aquest cas hem obtingut una família d'autovalors del problema

  $$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2,$$

  pels quals hi ha solucions no trivials $X(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$, que s'anomenen les autofuncions del problema (hem considerat $B = 1$ sense pèrdua de generalitat).

  Observem que com que a λ_k la variable k està elevada al quadrat, és suficient considerar els k positius.

Ara, per a cada autovalor λ_k encara ens falta resoldre l'equació temporal (7) que té com a solució general

$$T_k(t) = a_k e^{-c\lambda_k t} \qquad a_k \in \mathbb{R}.$$

Llavors, per a cada $k \in \mathbb{Z}^+$ la funció

$$u_k(x,t) = a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-c\lambda_k t}$$

és una solució no trivial de l'equació de la calor que s'anul.la als extrems de la barra.

Per acabar de resoldre el problema ens falta imposar la condició inicial $u(x,0) = f(x)$. Per fer això primer hem de tenir en compte que l'EDP (5) que estam considerant és lineal i per tant verifica el principi de superposició, és a dir, si u_1 i u_2 són solució llavors també ho és la seva suma $u_1 + u_2$. Per això considerarem d'una manera més general que la nostra solució de l'EDP (5) té la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{N} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-c\lambda_k t} \tag{8}$$

i satisfà les condicions de contorn.

La funció (8) també verificarà la condició inicial si

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

però en general la funció f, que és la condició inicial del problema, no tindrà aquesta forma. En aquests darrers casos s'utilitzen uns resultats que queden fora del propòsit del curs.

Considerem un exemple que sí podem resoldre.

Exemple 5.3.1. *Resoleu l'EDP* $u_t = 2u_{xx}$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$ *amb les condicions de contorn* $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$ *i condicions inicials* $u(x,0) = 5\sin(2x) - 30\sin(3x)$.

Seguint el mètode se separació de variables explicat més amunt, la solució de l'equació de la calor amb les condicions de frontera és

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{N} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-c\lambda_k t}.$$

Com que $L = \pi$ llavors, $\lambda_k = k^2$ i la solució de l'equació és

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} a_k \sin(kx)\, e^{-2k^2 t}$$

Si ara aplicam la condició inicial obtenim:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{N} a_k \sin(k\,x) = 5\sin(2x) - 30\sin(3x),$$

D'això, $N = 3\,,\ a_1 = 0\,,\ a_2 = 5\,,\ a_3 = -30\,.$

Per tant, la solució final és

$$u(x,t) = 5\sin(2x)e^{-8t} - 30\sin(3x)e^{-18t}$$

Exemple 5.3.2. *Resoleu l'equació d'ones amb les següents condicions:*

$$\begin{cases} u_{tt} = -u_{xx} \quad \text{\textit{al domini}}\ \ D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 < x < \pi\,,\ t > 0\} \\ \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad t \geq 0 \\ \\ \lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \qquad x \in [0,\pi] \\ \\ u(x,0) = 1 \qquad x \in (0,\pi) \end{cases} \tag{9}$$

Si aplicam el mètode de separació de variables imposant que la solució sigui de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ i utilitzant l'equació obtenim

$$X(x)T''(t) = -X''(x)T(t) \iff \frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)}$$

Perquè aquests dos quocients siguin iguals ha de passar que siguin constants, és a dir:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \iff X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \iff T''(t) + \lambda T(t) = 0$$

amb les condicions $X(0) = 0\,,\ X(\pi) = 0\,,\ \lim\limits_{t\to\infty} T(t) = 0\,,\ T(0) = 1\,.$

Si $\lambda = k^2 > 0$ llavors la solució de la primera equació és

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

que en imposar les condicions respecte a la funció $X(x)$ ens dona idènticament zero.

Si $\lambda = 0$ obtenim de nou la solució nul.la.

Si $\lambda = -k^2 < 0$ llavors la solució de l'equació diferencial per $X(x)$ és

$$X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

Si ara aplicam que $X(0) = 0$ obtenim $A = 0$ i si aplicam $X(\pi) = 0$ obtenim que $k \in \mathbb{Z}$.

Ara resolem l'EDO per la funció $T(t)$ coneixent ja el valor per λ i obtenim que

$$T(t) = Ce^{kt} + De^{-kt}$$

Si imposam la condició de que $\lim_{t\to\infty} T(t) = 0$ deduïm que $C = 0$. Per tant la solució a la que arribam és

$$u(x,t) = X(x)T(t) = E\ e^{-kt}\sin(kx) \quad k \in \mathbb{Z}^+ \tag{10}$$

Ens falta encara imposar la condició de frontera $u(x,0) = 1$, o equivalentment

$E\ \sin(kx) = 1$, per tot $x \in (0,\pi)$.

Evidentment això és impossible, per tant no existeix una solució de la forma anterior (10) que satisfaci la condició de frontera.

Aplicant el principi de superposició i les sèries de Fourier podem considerar solucions de la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k e^{-kt}\sin(kx),$$

que satisfà les tres primeres condicions del problema i considerant la darrera condició $u(x,0) = 1$ es pot demostrar que la solució del problema (9) és

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} e^{-(2n+1)t}\sin((2n+1)x) = \\ &= \frac{4}{\pi}\left(e^{-t}\sin(x) + \frac{1}{3}e^{-3t}\sin(3x) + \frac{1}{5}e^{-5t}\sin(5x) + \dots\right) \end{aligned}$$