Relació entre els processos aleatoris i les variables aleatòries

Si representam varies realitzacions d'un procés aleatori i consideram els valors de cada realització per a un valor constant de t_i, obtenim un conjunt de nombres aleatoris. Cadascun d'aquests nombres està associat a un únic resultat de l'experiment aleatori.

$$\begin{array}{llcl} X(t_i): & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega_1 & \rightarrow & X(\omega_1, t_i) \\ & \omega_2 & \rightarrow & X(\omega_2, t_i) \\ & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Recordem que una variable aleatòria es definia com un conjunt de nombres, cada un d'ells associats a un resultat d'un experiment aleatori. De manera que $X(t_i)$ **és una variable aleatòria, associada a l'instant de temps t_i d'un procés aleatori**.

Per a cada instant de temps (també anomenat índex) que considerem tendrem una nova variable aleatòria, per aquest motiu es diu que **un procés aleatori és una col.lecció indexada de variables aleatòries**.

Notació. Hi ha vàries maneres de denotar els processos aleatoris. $X(t)$ o X_t s'utilitza per a denotar la v.a. associada al temps t en el cas continu. En el cas discret és més freqüent utilitzar la notació X_i, que representa la v.a. associada a l'instant de temps t_i.

Observació. Les v.a. associades a un procés aleatori discret no són necessàriament discretes ni les associades a un procés continu són contínues.

Caracterització dels processos aleatoris

Com que un procés aleatori és una colecció de variables aleatòries, una forma de caracteritzar-lo (definir les seves propietats) és mitjançant la funció de probabilitat (v.a. discretes) o de densitat (v.a. contínues) conjunta de totes aquestes variables:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots) \quad \text{(cas discret)}$$

$$f_{X_1 X_2 \cdots}(x_1, x_2, \cdots) \quad \text{(cas continu)}$$

En general és impossible calcular la funció de probabilitat o densitat conjunta d'un procés que pot estar definit per una infinitat de v.a. Per aquest motiu és més habitual calcular altres característiques d'aquestes v.a. com ara els seus moments (esperança i variància) i els seus moments conjunts (autocorrelació i autocovariància).

Donat un procés aleatori $X(t)$, definim:

- **Mitjana** o **esperança** de $X(t)$: $m_X(t) = E(X(t))$
- **Autocorrelacó** de $X(t)$: $R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot X(t_2))$
- **Autocovariància** de $X(t)$: $C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) \cdot m_X(t_2)$
- **Variància** de $X(t)$: $\mathrm{Var}(X(t)) = C_X(t, t)$
- **Coeficient de correlació** de $X(t)$: $\rho_X(t_1, t_2) = \dfrac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{C_X(t_1, t_1)}\sqrt{C_X(t_2, t_2)}}$
- Propietats:
  $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2, t_1)$
  $C_X(t_1, t_2) = C_X(t_2, t_1)$

Donat dos processos aleatoris $X(t)$ i $Y(t)$, definim:

- **Correlació creuada** de $X(t)$ i $Y(t)$: $R_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot Y(t_2))$
- **Covariància creuada** de $X(t)$ i $Y(t)$: $C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1) \cdot m_Y(t_2)$

- Els processos es diuen **ortogonals** si $R_{XY}(t_1, t_2) = 0$, $\forall t_1, t_2$
- Els processos es diuen **incorrelats** si $C_{XY}(t_1, t_2) = 0$, $\forall t_1, t_2$
- Els processos es diuen **independents** si els vectors aleatoris $(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_k))$ i $(Y(t'_1), Y(t'_2), \cdots, Y(t'_j))$ són independents per a tot k i j i qualsevol elecció de $t_1, \cdots, t_k$ i $t'_1, \cdots, t'_j$.

Exemple 3:

(Exercici 2).Considerem el procés aleatori en temps discret $X(n)$ definit a continuació. Es llança una moneda a l'aire; si surt cara $X(n) = (-1)^n$ i $X(n) = (-1)^{n+1}$ si surt creu, per a tot n.

a) Dibuixau alguns camins de mostra del procés.

b) Calculau la funció de probabilitat de $X(n)$.

c) Calculau la funció de probabilitat conjunta de $X(n)$ i $X(n+k)$.

d) Calculau $\mu_X(n)$ y $C_X(n, m)$.

Exemple 4:

(Exercici 3).Sigui $g(t)$ un pols rectangular a l'interval $(0, 1)$, és a dir $g(t) = 1$ si $t \in (0, 1)$ i zero a la resta de casos. Considerem el procés aleatori definit per $X(t) = Ag(t)$ on $A = \pm 1$ amb la mateixa probabilitat.

a) Calculau la funció de probabilitat de $X(t)$.

b) Calculau $\mu_X(t)$

c) Calculau la funció de probabilitat conjunta de $X(t)$ i $X(t + d)$, amb $d > 0$.

d) Calculau $C_X(t, t + d)$ amb $d > 0$.

Exemple 5:

(Exercici 6).Sigui $Z(t) = At + B$ on A i B són v.a. independents.

a) Calculau la funció de densitat de $Z(t)$.

b) Trobau $\mu_Z(t)$ i $C_Z(t_1, t_2)$.

Exemple 6:

Calculau $C_{XY}(t_1, t_2)$ per als processos $X(t) = \cos(\omega t + \Theta)$ i $Y(t) = \sin(\omega t + \Theta)$, on $\Theta \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$.

Exercicis proposats: 1, 4, 5, 7, 8