Final de Fonaments Matemàtics II. Telemàtica (juny 2007)
ÀLGEBRA

P1.- Sigui $f : V \to V$ un endomorfisme. Demostrau que

a) A tot vector propi $v \neq 0$ de f li correspon un valor propi únic t anomenat valor propi associat a v.

b) A tot valor propi t de f li correspon un subespai vectorial $V(t)$ de V, descrit pels vectors $v \in V$ que verifiquen $f(v) = tv$.

Solució:

Vegeu apunts

P2.- Considerem l'espai vectorial $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de les matrius d'ordre 2×2 sobre $\mathbb{R}$, i sigui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

a) Aplicant el concepte de subespai vectorial i la seva caracterització, demostrau que

$$V = \{aA + bA^2 + cA^3 | a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ **2 pt.**

b) Trobau una base de V

c) Trobau un espai vectorial W tal que $V \bigoplus W = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

d) Completa la base trobada a l'apartat b) fins a obtenir una base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ i troba les coordenades de la matriu B respecte a aquesta base,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

Solució:

a) V serà un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2,2}$ si compleix

- Donats $u, v \in V$, aleshores $u + v \in V$. Efectivament, si $u \in V$ existeixen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $u = aA + bA^2 + cA^3$; anàlogament com $v \in V$ existeixen $a', b', c' \in V$ tal que $v = a'A + b'A^2 + c'A^3$

$$u + v = aA + bA^2 + cA^3 + a'A + b'A^2 + c'A^3 = (a + a')A + (b + b')A^2 + (c + c')A^3 \in V$$

- Donat $t \in \mathbb{R}$ i $u \in V$, aleshores $tu = V$. Com $u \in V$ existeixen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $u = aA + bA^2 + cA^3$

$$tu = t(aA + bA^2 + cA^3) = t(aA) + t(bA^2) + t(cA^3) = (ta)A + (tb)A^2 + (tc)A^3 \in V$$

Per tant, V és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2,2}$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Per tant, un element qualsevol de V serà

$$a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

aleshores

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\right\}$$

és un sistema generador de V. Vegem si són linealment independents.

Sabem per teoria que $\mathcal{M}_{2,2}$ és isomorf a $\mathbb{R}^4$, on l'isomorfisme ve donat per

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto (x,y,z,t)$$

Vegem, per tant, la dependència o independència lineal dels elements de $\mathbb{R}^4$

$$\{(1,-1,2,1),(-1,-2,4,-1),(-5,-1,2,-5)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & -1 \\ -5 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant una base de V és

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right\}; \quad \text{o be} \quad \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

c) L'espai vectorial W estarà format per matrius linealment independents entre si i de les matrius que formen la base de V. Per tant, una base de W pot ser

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

d) Completant la base de V tenim que la base de $\mathcal{M}_{2,2}$ és, segons hem vist a l'apartat c)

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Posem la matriu B en combinació lineal dels lements de la base

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'aquí obtenim

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a-b \\ 2a+2b+c & a+d \end{pmatrix}$$

per tant $a=-1$, $b=-2$, $c=4$ i $d=2$. És a dir, les coordenades en la base esmentada són $(-1,-2,4,5)$

P3.- Considerem l'espai vectorial $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de les matrius d'ordre 2×2 sobre $\mathbb{R}$. Definim l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a+b, a-b+c, c+d) \end{array}$$

a) Demostrau que és una aplicació lineal.

b) Calculau la seva matriu associada respecte a la base canònica de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ i a la base $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$

c) Trobau una base de $Ker\ f$.

d) Indicau si és injectiva i/o exhaustiva i perquè.

Solució:

a) Vegem que compleix les condicions d'aplicació lineal:

- Si $A,B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, aleshores $f(A+B)=f(A)+f(B)$. Efectivament, sigui $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$,

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right] = f\left[\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}\right] = (a+a'+b+b', a+a'-b-b'+c+c', c+c'+d+d') =$$

$$= (a+b, a-b+c, c+d) + (a'+b', a'-b'+c', c'+d') = f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] + f\left[\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right]$$

- Si $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ i $t \in \mathbb{R}$, aleshores $f(tA) = tf(A)$. Efectivament, sigui $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$f\left[t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = f\left[\begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{pmatrix}\right] = (ta+tb, ta-tb+tc, tc+td) =$$

$$= t(a+b, a-b+c, c+d) = tf\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]$$

b) Designem per $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ la base canònica de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ i cerquem les coordenades de les imatges d'aquesta base respecte a la base $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$

$$f(E_1) = f\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = (1,1,0) = x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,1,1)$$

d'aquí deduïm que $x = 1, y = 0, z = 0$

Anàlogament

$$f(E_2) = f\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = (1,-1,0) = x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,1,1)$$

d'aquí deduïm que $x = 0, y = 1, z = -1$

$$f(E_3) = f\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = (0,1,1) = x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,1,1)$$

d'aquí deduïm que $x = 0, y = 0, z = 1$

Finalment,

$$f(E_4) = f\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = (0,0,1) = x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,1,1)$$

d'aquí deduïm que $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$

Per tant, la matriu associada que se'ns demana és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Cerquem les matrius $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ tal que $f(A) = (0,0,0)$

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = (a+b, a-b+c, c+d) = (0,0,0)$$

d'aquí obtenim el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ a-b+c & = & 0 \\ c+d & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolent aquest sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tenim que el rang de la matriu dels coeficients és igual al de l'ampliada i menor que el nombre d'incògnites, per tant el sistema és compatible i indeterminat, i la solució l'obtenim resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ -2b+c & = & 0 \\ c+d & = & 0 \end{array}\right\}$$

que ens dóna $a = \frac{1}{2}d$, $b = -\frac{1}{2}d$ i $c = -d$. Aleshores els elements de $Ker\ f$ són

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}d & -\frac{1}{2}d \\ -d & d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, una base de $Ker\ f$ és

$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

d) Per saber si és injectiva o exhaustiva basta cercar el rang de f

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Com el rang de la matriu associada és 3 que coincideix amb el rang de $\mathbb{R}^3$ tenim que l'aplicació és exahustiva. I com és diferent al rang de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ no és injectiva.

P4.- Considerem el conjunt de matrius $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Definim el següent producte escalar

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (A, B) & \mapsto & \text{traça}(AB^t) \end{array}$$

Donat el subespai vectorial S de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ definit per

$$S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{pmatrix}\right\}$$

trobau una base ortonormal.
Solució:

Cerquem una base de S

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & -b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per tant, un sistema generador seria

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

A més són linealment independents, ja que si consideram una combinació lineal igualada a zero

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deduïm que $a = b = 0$. Per tant forma una base de S.

Tal com hem vist abans, el producte escalar ve definit per

$$\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

i d'aquí deduïm,

$$\|A\| = \left\|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2$$

per tant una base ortogonal serà

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aleshores la base

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

és una base ortogonal.

Per altra part

$$\|e_1\| = \left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3} \quad \text{i} \quad \|e_2\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3}$$

Aleshores una base ortonormal serà

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

PROBABILITAT

P5.- Deduïu la funció de probabilitat d'una distribució binomial negativa $BN(p,r)$
Solució:

Vegeu apunts

P6.- Triam un nombre a l'atzar entre els 1050 primers nombres naturals. Calculau la probabilitat que sigui múltiple de 2, no sigui múltiple de 7, sigui múltiple de 6 i no sigui múltiple de 5.

Solució:

Designem per A_i = ser múltiple de i. Tenim que $P(A_i) = \frac{\frac{1050}{i}}{1050} = \frac{1}{i}$

Hem de cercar

$$P(A_2 \cap A_6 \cap \bar{A}_7 \cap \bar{A}_5) = P(A_6 \cap \bar{A}_7 \cap \bar{A}_5) = P(A_6 \cap (\overline{A_7 \cup A_5})) = P(A_6 - (A_7 \cup A_5)) =$$

$$= P(A_6) - P(A_6 \cap (A_7 \cup A_5)) = P(A_6) - P((A_6 \cap A_7) \cup (A_6 \cap A_5)) = P(A_6) - P(A_{42} \cup A_{30}) =$$

$$= P(A_6) - (P(A_{42}) + P(A_{30}) - P(A_{42} \cap A_{30})) = P(A_6) - P(A_{42}) - P(A_{30}) + P(A_{210}) =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{42} - \frac{1}{30} + \frac{1}{210} = \frac{4}{35}$$

P7.- Una màquina una mica obsoleta fabrica una determinada peça per a televisor. Durant 1 dia fabrica 150 d'aquestes peces i l'experiència ens diu que 8% de les peces fabricades són defectuoses.

a) Triam a l'atzar 4 d'aquestes peces. Sigui X la variable aleatòria que ens dóna el nombre de peces defectuoses que hem agafat. De quin tipus de distribució es tracta? Determinau la funció de probabilitat i de distribució.

b) Triam una peça rera altra, a l'atzar, fins a obtenir una defectuosa. Sigui Y el nombre de peces collides. De quina distribució es tracta? Determinau la funció de probabilitat i de distribució.

Solució:

a) Es tracta d'una distribució hipergeomètrica, on tenim 150 objectes, dels quals n'hi ha 12 (8% de 150) defectuoses (èxits) i 138 bones (fracasos). D'aquí triem una mostra de 4 peces.

Sabem que en una distribució hipergeomètrica es compleix que

$$P(X = x) = \frac{\binom{12}{x}\binom{138}{4-x}}{\binom{150}{4}}$$

Per tant, i posant el resultats amb 4 decimals

$$P(X = 0) = \frac{\binom{12}{0}\binom{138}{4}}{\binom{150}{4}} = 0.7139; \quad P(X = 1) = \frac{\binom{12}{1}\binom{138}{3}}{\binom{150}{4}} = 0.2538;$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{12}{2}\binom{138}{2}}{\binom{150}{4}} = 0.0308; \quad P(X = 3) = \frac{\binom{12}{3}\binom{138}{1}}{\binom{150}{4}} = 0.0015;$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{12}{4}\binom{138}{0}}{\binom{150}{4}} = 0.00002;$$

i la funció de probabilitat és

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.7139 & \text{per a} \quad x = 0 \\ 0.2538 & \text{per a} \quad x = 1 \\ 0.0308 & \text{per a} \quad x = 2 \\ 0.0015 & \text{per a} \quad x = 3 \\ 0.0000 & \text{per a} \quad x = 4 \\ 0 & \qquad \text{Altrament} \end{cases}$$

i la funció de distribució és

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per a} \quad x < 0 \\ 0.7139 & \text{per a} \quad 0 \le x < 1 \\ 0.9677 & \text{per a} \quad 1 \le x < 2 \\ 0.9985 & \text{per a} \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{per a} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

b) **Atenció!** En aquest exercici es podia interpretar de dues formes diferents, suposar que les extraccions eren independents unes de les altres, és a dir, que anavem agafant d'un munt infinit (no de les fabricades durant un dia), on la probabilitat de que la peça sigui defectuosa és 0.8. Estaríem en el cas d'una variable aleatòria $Y\{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}$ que segueix una distribució geomètrica on la probabilitat d'èxit (*triar una peça defectuosa*) és $p = \frac{12}{150} = \frac{2}{25}$, és a dir, $Ge(\frac{2}{25})$

Ara bé, també es pot interpretar que consideram només les peces fabricades un dia. En aquest cas, com el 8% de les peces són defectuoses, hauria 12 peces defectuoses i 138 no defectuoses, però ara les extraccions no són independents. La variable aleatòria seria $Y = \{1,2,\ldots,138,139\}$ (el darrer valor ha de ser 139 ja que només podem treure 138 peces no defectuoses i per tant la 139 forçosament haurà de ser defectuosa). Si designam per A_i el succés de que a l'extracció i ens surti una peça defectuosa,

$$P(A_i) = \frac{138}{150}\,\frac{138-1}{150-1}\cdots\frac{138-(i-2)}{150-(i-2)}\,\frac{12}{150-(i-1)}$$

És a dir, les $i-1$ primeres no defectuoses i la que fa i defectuosa.

Qualsevol de les dues opcions s'ha considerat vàlida, però el que no es pot fer és combinar les dues, de forma que $Y = \{1,2,\ldots,138,139\}$ i a la vegada que la funció de probabilitat sigui la corresponent a una distribució geomètrica.

Noltros ho resoldrem segons la primera opció, i en aquest cas, la funció de densitat és,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{25}(1-\frac{2}{25})^{x-1} = \frac{2}{25}(\frac{23}{25})^{x-1} & si \quad y \in \mathbb{N} \\ 0 & altrament \end{cases}$$

Calculem ara la funció de distribució. Si $y \in \mathbb{N}$ tenim

$$F_Y(y) = \sum_{k=1}^{y} \frac{2}{25}\left(\frac{23}{25}\right)^{k-1} = \frac{2}{25}\sum_{k=1}^{x}\left(\frac{23}{25}\right)^{k-1} \overset{(1)}{=} \frac{2}{25}\,\frac{(\frac{23}{25})^{x-1}\frac{23}{25}-1}{\frac{23}{25}-1} = 1-\left(\frac{23}{25}\right)^{x}$$

(1) És la suma de termes d'una progressió geomètrica.

La funció de distribució és,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ 1-(\frac{23}{25})^k & si \quad k \le x < k+1 \end{cases}$$

P8.- Considerem la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = ae^{-2|x|}$$

a) Trobau a per a que f sigui una funció de densitat d'una determinada variable aleatòria X.

b) Calculau $P(|X+1| < 2)$

Solució:

a) La funció de densitat seria

$$f(x) = \begin{cases} ae^{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ ae^{-2x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Per a que sigui una funció de densitat ha de complir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-2|x|}\, dx = 1$$

Com la funció és simètrica respecte a l'eix OY bastarà cercar a que compleixi

$$\int_{-\infty}^{0} ae^{2x}\, dx = \frac{1}{2}$$

Integrant tendríem

$$\int_{-\infty}^{0} ae^{2x}\, dx = a\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} 2e^{2x}\, dx = \frac{a}{2}e^{2x}\Big]_{-\infty}^{0} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$$

per tant, $a = 1$ i la funció de densitat és

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{-2x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$P(|X+1| < 2) = P(-2 < X+1 < 2) = P(-3 < X < 1) = \int_{-3}^{1} e^{-2|x|}\, dx = \int_{-3}^{0} e^{2x}\, dx + \int_{0}^{1} e^{-2x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{0} 2e^{2x}\, dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} -2e^{-2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big]_{-3}^{0} - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-6} - \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}e^{-6} - \frac{1}{2}e^{-2}$$

Duració de l'examen 1 hores 45 minuts .