1 Classes Pràctiques d'Aplicacions Lineals

Classe pràctica 1

Prob 1 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal que té per matriu associada respecte a les bases canòniques del conjunt inicial i final

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Trobau l'aplicació lineal f donant $f(x, y, z)$. **2.5 pt.**

b) Trobau una base de $Ker\, f$. **2.5 pt.**

c) Trobau una base de $Im\, f$. **2.5 pt.**

d) Tenint en compte només el rang de la matriu A indicau si l'aplicació és injectiva, exhaustiva o bijectiva. En el cas que sigui bijectiva calculau A^{-1} i utilitzau aquesta matriu per trobar f^{-1} (donau $f^{-1}(x, y, z)$). **3 pt.**

(Control, curs 2007/08)

Solució classe pràctica 1

Prob 1 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal que té per matriu associada respecte a les bases canòniques del conjunt inicial i final

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Trobau l'aplicació lineal f donant $f(x, y, z)$. **2.5 pt.**

b) Trobau una base de $Ker\, f$. **2.5 pt.**

c) Trobau una base de $Im\, f$. **2 pt.**

d) Tenint en compte només el rang de la matriu A indicau si l'aplicació és injectiva, exhaustiva o bijectiva. En el cas que sigui bijectiva calculau A^{-1} i utilitzau aquesta matriu per trobar f^{-1} (donau $f^{-1}(x, y, z)$). **3 pt.**

Solució:

1) Tenint en compte l'equació matricial d'una aplicació lineal (vegeu apunts), i que si es refereix a la base canònica les coordenades de l'element de $\mathbb{R}^n$ coincideix amb l'element, tenim

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + 4z \\ x + y + 2z \\ 4x + 2y + 3z \end{pmatrix}$$

on x', y' i z' són les coordenades respecte a la base canònica. Per tant,

$$f(x, y, z) = (2x + y + 4z, x + y + 2z, 4x + 2y + 3z)$$

2) El nucli està format pels elements $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x, y, z) = (2x + y + 4z, x + y + 2z, 4x + 2y + 3z) = (0, 0, 0)$$

és a dir, tots els elements que satisfan el següent sistema homogeni:

$$\begin{aligned} 2x + y + 4z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \\ 4x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Resolent el sistema tenim $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$. Per tant, el nucli és $Ker\, f = \{(0, 0, 0)\}$

3) Cerquem ara $Im\, f$. Un sistema generador de $Im\, f$ és

$$\{f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\} = \{(2, 1, 4), (1, 1, 2), (4, 2, 3)\}$$

que formen base, ja que són linealment independents:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

4) El rang de la matriu A és 3 ja que com hem vist a l'apartat anterior, el seu determinant és diferent de zero. Per tant, com el rang és igual a la dimensió de l'espai vectorial inicial ($\mathbb{R}^3$) l'aplicació és injectiva. Com també és igual al rang de l'espai vectorial final ($\mathbb{R}^3$) l'aplicació és exhaustiva i per tant bijectiva.

Cerquem f^{-1}. Tal com hem vist a teoria, la matriu associada a f^{-1} és la matriu inversa de f

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 & \frac{2}{5} \\ -1 & 2 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

per tant, tal com hem vist a l'apartat 1, l'equació matricial de f^{-1} és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 & \frac{2}{5} \\ -1 & 2 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x - y + \frac{2}{5}z \\ -x + 2y \\ \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}z \end{pmatrix}$$

on x', y' i z' són les coordenades respecte a la base canònica. Per tant,

$$f^{-1}(x, y, z) = \Big(\frac{1}{5}x - y + \frac{2}{5}z, -x + 2y, \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}z\Big)$$