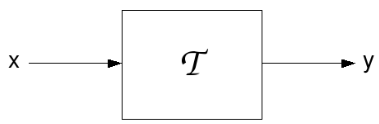
Tema 2.Sistemes

S'anomena **sistema** a qualsevol dispositiu o algoritme que modifica un senyal (entrada) per obtenir-ne un nou senyal (sortida) seguint alguna regla ben definida (és a dir, no es tracta d'una modificació aleatòria del senyal).

Notació. Per denotar que un sistema $\mathcal{T}$ transforma un senyal d'entrada x en un senyal de sortida y ho podem fer de 3 maneres:

1) 

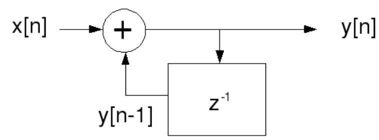
2) $x \xrightarrow{\mathcal{T}} y$ 3) $y = \mathcal{T}(x) = \mathcal{T}\,x$

(diagrama de blocs)

Exemples de sistemes:

- Acumulador

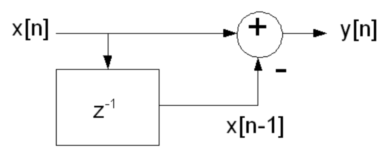
  $y[n] = y[n-1] + x[n]$

  De manera equivalent es pot escriure: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

- Diferenciador

  $y[n] = x[n-1] - x[n]$

- $y[n] = \max(x[n], x[n-1])$

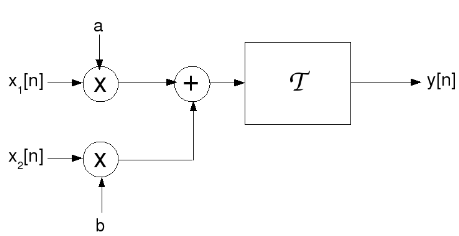
Classificació dels sistemes

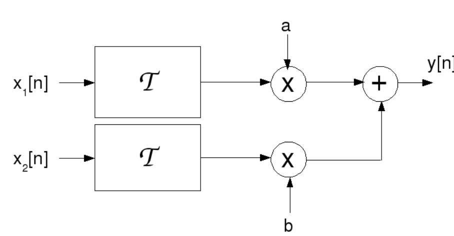
- Sistemes lineals i no lineals. Un sistema $\mathcal{T}$ es diu **lineal** si verifica que

  $$\mathcal{T}(ax_1[n] + bx_2[n]) = a\mathcal{T}(x_1[n]) + b\mathcal{T}(x_2[n])$$

  per a qualsevol parell de senyals d'entrada $x_1[n]$ i $x_2[n]$ i qualssevol escalars a i b.

  Si un sistema $\mathcal{T}$ és lineal llavors els següents diagrames de blocs són equivalents:

  Exemples:

lineals	no lineals
$y[n] = Ax[n]$	$y[n] = Ax[n] + B$
$y[n] = nx[n]$	$y[n] = nx[n] + B$
$y[n] = x[n^2]$	$y[n] = x^2[n]$
$y[n] = e^n x[n]$	$y[n] = e^{x[n]}$

Propietat dels sistemes lineals (**principi de superposició**):

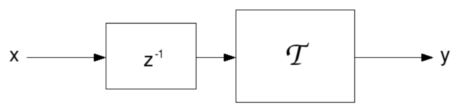
$$\mathcal{T}(\sum_{k=1}^{M} a_k x_k[n]) = \sum_{k=1}^{M} a_k y_k[n]$$

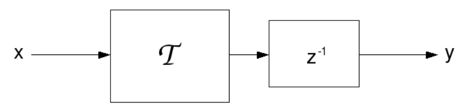
on $y_k[n] = \mathcal{T} x_k[n]$, $(k = 1, \cdots, M$.

- Sistemes variants i invariants en el temps. Un sistema es diu **invariant en el temps** si a una entrada retardada en el temps li correspon una sortida amb el mateix retard temporal. És a dir:

  $$\text{si } y[n] = \mathcal{T}(x[n]) \qquad \text{llavors} \qquad y[n-k] = \mathcal{T}(x[n-k])$$

  Si un sistema $\mathcal{T}$ és invariant en el temps llavors els següents diagrames de blocs són equivalents:

  Exemples:

invariants en temps	no invariants
$y[n] = x[n] - x[n-1]$	$y[n] = nx[n]$
$y[n] = Ax[n] + B$	$y[n] = x[-n]$

- Sistemes causals i no causals. Un sistema es diu **causal** si la seva sortida en l'instant n no depen de les entrades en els instants de temps $n+1, n+2, \cdots$.

  Exemples:

causals	no causals
$y[n] = x[n] + x[n-5]$	$y[n] = x[n] + x[n+5]$
$y[n] = ax[n]$	$y[n] = ax[-n]$
$y[n] = x^2[n]$	$y[n] = x[n^2]$
$y[n] = 3x[n]$	$y[n] = 3x[2n]$

  Observació: en sistemes que treballen en temps real (el processament es fa a mida que arriben els senyals d'entrada) no és possible conèixer els valors futurs de l'entrada, per la qual cosa aquest sistemes només poden ésser causals.

- Sistemes estables i inestables. Un sistema es diu **estable** si dóna sortides fitades a entrades fitades.

  Exemples:

estables	inestables
$y[n] = ax[n]$	$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]$
$y[n] = \max\{x[k] \mid k \leq n\}$	$y[n] = x[n] + y^2[n-1]$

- Sistemes estàtics i dinàmics. Un sistema es diu **estàtic** o **sense memòria** si la seva sortida en l'instant n no depèn de valors de l'entrada en instants anteriors ni posteriors a n.

  Exemples:

estàtics	dinàmics
$y[n] = ax[n]$	$y[n] = x[n] + 2x[n-1]$
$y[n] = 3nx[n] + ax^2[n]$	$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[n-k]$
$y[n] = 5x[n] + 2n$	$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]$

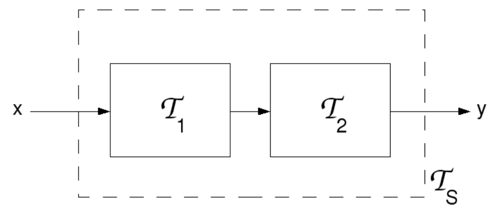
Interconnexió de sistemes

Els sistemes es poden interconnectar per a formar sistemes majors. Les dues formes bàsiques d'interconnectar dos sistemes són:

- En **sèrie** (o en **cascada**). Donats dos sistemes $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$, l'interconnexió en sèrie de $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ dóna lloc a un nou sistema $\mathcal{T}_S$ tal que $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$, és a dir:

$$\mathcal{T}_S(x[n]) = \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1(x[n]))$$

  gràficament:

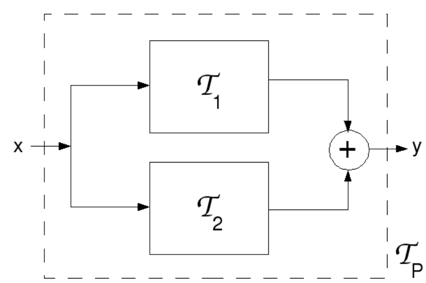


  Propietat: en general $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$.

- En **paral.lel**. Donats dos sistemes $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$, l'interconnexió en paral.lel de $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ dóna lloc a un nou sistema $\mathcal{T}_P$ tal que $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$, és a dir:

$$\mathcal{T}_P(x[n]) = \mathcal{T}_1(x[n]) + \mathcal{T}_2(x[n])$$

  gràficament:



  Propietat: $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_1$.

Anàlisi de sistemes sineals i invariants en el temps (LTI) Els sistemes que són a la vegada lineals i invariants en el temps es denoten amb les sigles LTI (*linear time-invariant*) i són especialment importants en Processament del Senyal perquè el seu funcionament es pot caracteritzar fàcilment en funció de la seva resposta a un senyal delta de Dirac.

Sigui $\mathcal{T}$ un sistema LTI i sigui $x[n]$ un senyal d'entrada qualsevol. Hem vist en el tema anterior que $x[n]$ es pot escriure en termes de la delta de Dirac d'acord amb la fòrmula $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$, de manera que la resposta del sistema a l'entrada $x[n]$ és:

$$\begin{aligned}
y[n] &= \mathcal{T}(x[n]) = \mathcal{T}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right) = \\
&= \text{(per linealitat)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\mathcal{T}(\delta[n-k]) = \\
&= \text{(per invariància en el temps)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]
\end{aligned}$$

on $h[n] = \mathcal{T}(\delta[n])$, la resposta del sistema a una delta de Dirac. $h[n]$ es coneix com **resposta impulsional del sistema**.

Si observam el resultat anterior i recordam la definició de convolució veurem que

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

És a dir, **la sortida d'un sistema LTI és igual a la convolució del senyal d'entrada per la resposta impulsional del sistema**. Per aquest motiu deim que la resposta impulsional caracteritza totalment el sistema LTI. Si coneixem $h[n]$ podrem conèixer la resposta a qualsevol senyal d'entrada.

Propietats dels sistemes LTI:

- Un sistema LTI és causal si i només si $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$.
- Un sistema LTI és estable si i només si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$.
- La interconnexió en sèrie de dos sistemes LTI és commutativa, és a dir $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$.

Classificació dels sistemes LTI segons la duraciò de la seva resposta impulsional:

- Sistemes FIR (*finite-duration impulsional response*). Són aquells en què la resposta impulsional val zero fora d'un cert interval de temps. En particular, per a un sistema FIR causal tenim que

  $$h[n] = 0 \qquad \text{si } n < 0 \quad \text{i } n \geq M$$

  per a algun valor de M finit. De manera que la sortida d'aquest tipus de sistemes es pot escriure com:

  $$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]h[k]$$

- Sistemes IIR (*infinite-duration impulsional response*). En aquest cas la resposta impulsional no s'anul.la fora de cap interval i la sortida del sistema s'escriu com un sumatori infinit de valors.

Sistemes LTI descrits per equacions en diferències finites

Els sistemes FIR són *realitzables* (es poden implementar amb un ordinador o circuit digital) ja que impliquen un nombre finit d'operacions i d'espais de memòria. En canvi, els sistemes IIR semblen irrealitzables ja que es necessiten, en principi, infinites operacions i espai de memòria. No obstant, hi ha un tipus de sistemes IIR, anomenats sistemes IIR **recursius** (o realimentats), que són realitzables si involucren un nombre finit d'operacions.

En general, un sistema recursiu realitzable és aquell en què la seva sortida es pot escriure en funció d'un nombre finit de les entrades i de les sortides anteriors:

$$y[n] = F(y[n-1], y[n-2], \cdots, y[n-N], x[n], x[n-1], \cdots, x[n-M])$$

Un sistema es diu **no recursiu** si la seva sortida només depèn de les entrades:

$$y[n] = F(x[n], x[n-1], \cdots, x[n-M])$$

Els sistemes FIR causals són sistemes no recursius.

En aquest apartat estudiam com calcular de manera explícita la sortida dels sistemes recursius descrits per equacions de la forma:

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Aquest tipus d'equació rep el nom d'**equació en diferències finites amb coeficients constants**. N s'anomena **grau** de l'equació.

La solució general d'aquesta equació es calcula de la forma següent:

1. la solució $y[n]$ s'escriu com la suma de dos termes

$$y[n] = y_H[n] + y_P[n]$$

   anomenats, respectivament, **solució homogènia** (y_H) i **solució particular** (y_P).

2. La solució homogènia és la solució de l'equació:

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

   que rep el nom d'**equació homogènia**.

   $y_H[n]$ es calcula de la seqüent manera:

   (a) escrivim l'**eqüació característica** associada a l'eqüació homogènia:

$$\lambda^N + \sum_{k=1}^{N} a_k \lambda^{N-k} = 0$$

   aquesta equació té grau N.

   (b) calculam les arrels de l'eqüació característica:

$$\lambda_1 \text{ amb multiplicitat } r_1$$

$$\lambda_2 \text{ amb multiplicitat } r_2$$

$$\cdots$$

$$\lambda_m \text{ amb multiplicitat } r_m$$

   Es verifica que $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = N$

(c) per a cada arrel λ_i amb multiplicitat r_i de l'equació característica tenim una solució parcial de l'equació homogènia:

$$C_{i1}\lambda_i^n + C_{i2}n\lambda_i^n + \cdots + C_{ir_i}n^{r_i-1}\lambda_i^n = \sum_{j=1}^{r_i} C_{ij}n^{j-1}\lambda_i^n$$

(d) la solució de l'equació homogènia s'obté sumant totes les solucions parcials

$$y_H[n] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i} C_{ij}n^{j-1}\lambda_i^n$$

(e) les constants C_{ij} es calculen a partir de les **condicions inicials** del problema.

3. La forma de la solució particular $y_P[n]$ depèn del tipus del senyal d'entrada $x[n]$:

Senyal d'entrada $x[n]$, $n \geq 0$ ($x[n] = 0$ si $n < 0$)	Solució particular $y_P[n]$, $n \geq 0$ ($y_P[n] = 0$ si $n < 0$)
$(A_0 + A_1n + \cdots + A_kn^k)\alpha^n$	$(B_0 + B_1n + \cdots + B_kn^k)n^M\alpha^n$ on M és la multiplicitat de α com a solució de l'equació característica
$A\cos(\omega_0 n)$	$B_1\cos(\omega_0 n) + B_2\sin(\omega_0 n)$
$A\sin(\omega_0 n)$	$B_1\cos(\omega_0 n) + B_2\sin(\omega_0 n)$

Les constants B_i es calculen per substitució en l'equació en diferències inicial.

Exemple: Calculau la solució del sistema recursiu descrit per l'equació següent considerant condicions inicials $y[k] = 1$ per a tot $k < 0$.

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = u[n]$$

Solució:

1. $y[n] = y_H[n] + y_P[n]$
2. $y_H[n]$:
   (a) equació homogènia: $y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 0$ (grau 2)
   (b) equació característica: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
   (c) arrels de l'equació característica: 3 i 2
   (d) $y_H[n] = C_1 3^n + C_2 2^n$
3. $y_P[n]$:
   (a) $x[n] = Au[n]$, amb $A = 1$ (polinomi de grau 0)
   (b) $y_P[n] = Bu[n]$
   (c) substituint a l'equació inicial:

$y_P[n] = Bu[n]$
$y_P[n-1] = Bu[n-1]$
$y_P[n-2] = Bu[n-2]$
$y_P[n] - 5y_P[n-1] + 6y_P[n-2] = u[n] \quad \Rightarrow Bu[n] - 5Bu[n-1] + 6Bu[n-2] = u[n]$
per a $n >= 2$ la resposta s'estabilitza i tenim: $\quad B - 5B + 6B = 1 \quad \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

(d) per tant: $y_P[n] = \frac{1}{2}u[n]$

4. Solució completa: $y[n] = C_1 3^n + C_2 2^n + \frac{1}{2}u[n]$
5. Càlcul de C_1 i C_2:

(a) de l'equació inicial i aplicant les condicions inicials ($y[k] = 1$ si $k < 0$):

$$\begin{array}{lcl} y[0] - 5y[-1] + 6y[-2] = u[0] & \longrightarrow & y[0] = 5 - 6 + 1 = 0 \\ y[1] - 5y[0] + 6y[-1] = u[1] & \longrightarrow & y[1] = 0 - 6 + 1 = -5 \end{array}$$

(b) de la solució trobada:

$$\begin{array}{lcl} y[0] = C_1 3^0 + C_2 2^0 + \frac{1}{2}u[0] & \longrightarrow & y[0] = C_1 + C_2 + \frac{1}{2} \\ y[1] = C_1 3^1 + C_2 2^1 + \frac{1}{2}u[1] & \longrightarrow & y[1] = 3C_1 + 2C_2 + \frac{1}{2} \end{array}$$

(c) resolent el sistema d'equacions que plantejen les anteriors equacions: $C_1 = -\frac{13}{2}$, $C_2 = 7$.

6. Solució final: $y[n] = -\frac{13}{2} \cdot 3^n + 7 \cdot 2^n + \frac{1}{2}u[n]$

Respostes lliure i forçada d'un sistema

La resposta total d'un sistema es pot escriure com la suma de dos termes

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

on y_{zi} s'anomena **resposta zero-input**, resposta lliure o resposta natural del sistema. És la resposta que s'obté quan l'entrada és nul.la i coincideix amb la solució homogènia de l'equació en diferències ($y_{zi}[n] = y_H[n]$).
y_{zs} rep el nom de **resposta zero-state** o resposta forçada del sistema i és la resposta que s'obté davant un senyal d'entrada quan les condicions inicials són nul.les (sistema en repòs o relaxat). Coincideix amb la solució del sistema quan les condicions inicials són nul.les ($y_{zs}[n] = y[n]$, amb $y[n] = 0$ per $n < 0$).

Resposta impulsional d'un sistema recursiu

La resposta impulsional $h[n]$ d'un sistema LTI es defineix com la resposta del sistema a un senyal delta de Dirac. En el cas d'un sistema descrit per una equació en diferències $h[n]$ coindideix amb la resposta del sistema quan $x[n] = \delta[n]$ i les condicions inicials són nul.les:

$$h[n] = y[n] \qquad \text{quan} \quad x[n] = \delta[n] \quad \text{i} \quad y[n] = 0 \text{ per } n < 0$$

a més, com $x[n] = \delta[n]$, resulta que $y_P[n] = 0$ i per tant $y[n] = y_H[n]$.

Estructures per a la realització de sistemes LTI descrits per equacions en diferències

El diagrama de blocs corresponent a l'equació en diferències

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

es mostra en la figura 1-(a). Per la propietat conmutativa de la connexió en sèrie dels sistemes LTI ($\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$), aquest diagrama és equivalent al de la figura 1-(b), que és equivalent al de la figura 1-(c). En aquest darrer diagrama el nombre d'operacions de retard és menor que en els diagrames anteriors, per la qual cosa es considera que la realització del sistema és més eficient. La realització de l'esquerra s'anomena **forma directa** del sistema mentre que la de la dreta es diu **forma canònica**.

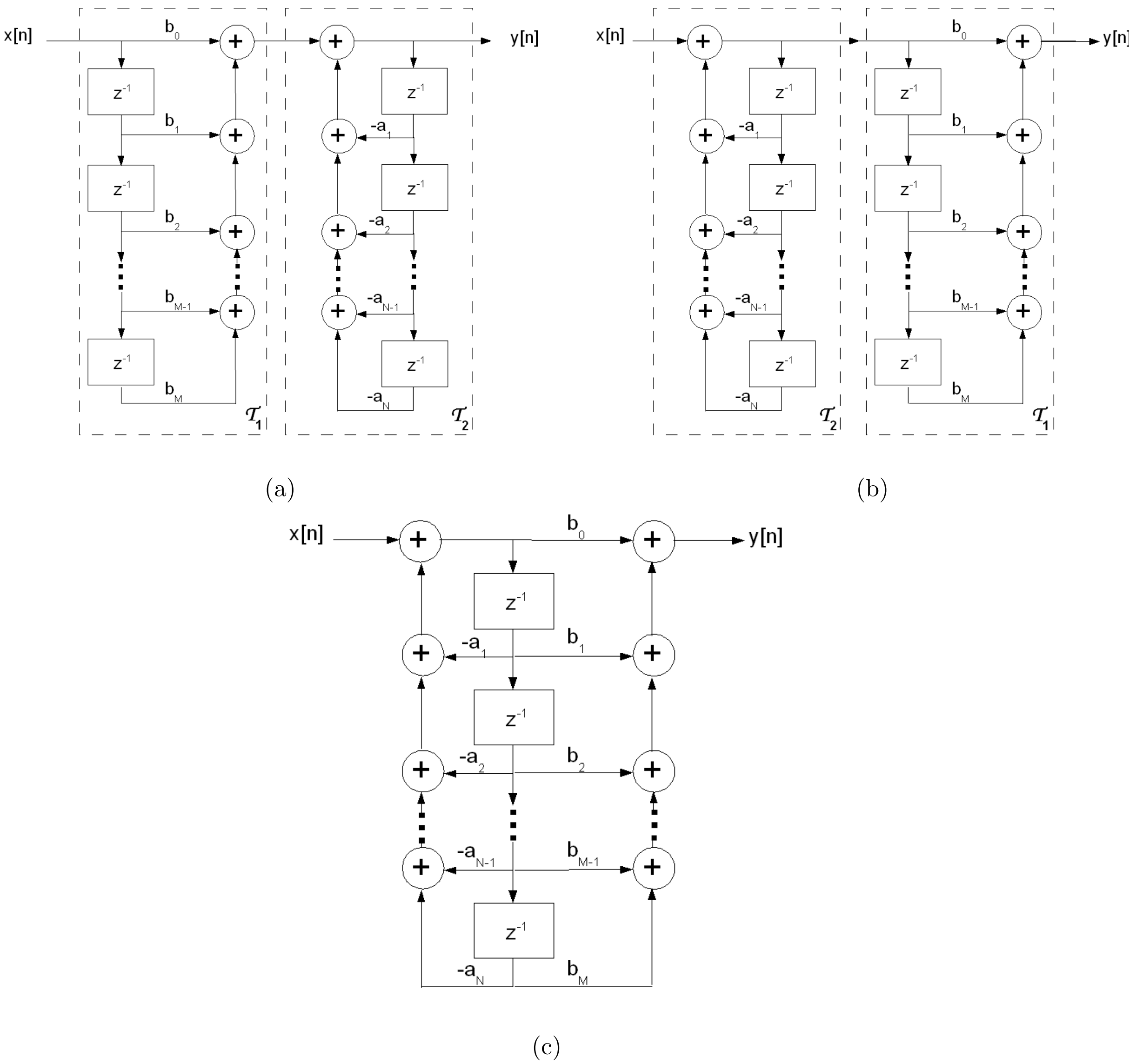


Figura 1: (a) forma directa. (b) commutació de les estructures del diagrama anterior. (c) forma canònica.