Classe pràctica 1. Enunciat

Prob 1 A través d'una antena intentam rebre senyals d'una determinada longitud d'ona. El nombre de senyals que rebem, d'aquest tipus, en una hora, segueix una distribució de Poisson de mitjana 50.

1. Calculau la probabilitat de rebre més de 20 senyals. **1.25 pt.**
2. Si acabam de rebre una senyal, calculau la probabilitat de rebre la següent passats 3 minuts. **1.25 pt.**
3. Després de rebre una senyal, es processa la informació a través d'un sistema informàtic. Ara bé, aquest sistema es bloqueja si es reben més de a senyals en una hora. Quin hauria de ser aquest valor de a per a que el sistema no es bloquejas amb una probabilitat no inferior a 0.9. **1.25 pt.**
4. Suposem ara que no sabem quina distribució segueixen les senyals esmentades. Però mitjantçant la observació d'aquestes sabem que el nombre de senyals rebudes per hora tenen una mitjana i una variància igual a la corresponent a la distribució de Poisson enunciada. Resoleu l'apartat 3) amb aquestes condicions (Aplicau la desigualtat de Txebixef) **1.25 pt.**

(Telemàtica, juny 2008)

Prob 2 Considerem la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = kx \sin x \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

a) Trobau k per a que f sigui una funció de densitat d'una determinada variable aleatòria X. **1.5 pt.**

b) Calculau la funció de distribució de X **1.5 pt.**

c) Sigui $Y = \frac{X}{2}$. Trobau la funció de distribució i de densitat de Y. **2 pt.**

(Telemàtica, juny 2008)

Classe pràctica 1. Solució

Prob 1 A través d'una antena intentam rebre senyals d'una determinada longitud d'ona. El nombre de senyals que rebem, d'aquest tipus, en una hora, segueix una distribució de Poisson de mitjana 50.

1. Calculau la probabilitat de rebre més de 20 senyals. **1.25 pt.**
2. Si acabam de rebre una senyal, calculau la probabilitat de rebre la següent passats 3 minuts. **1.25 pt.**
3. Desprès de rebre una senyal, es processa la informació a través d'un sistema informàtic. Ara bé, aquest sistema es bloqueja si es reben més de a senyals en una hora. Quin hauria de ser aquest valor de a per a que el sistema no es bloquejas amb una probabilitat no inferior a 0.9. **1.25 pt.**
4. Suposem ara que no sabem quina distribució segueixen les senyals esmentades. Però mitjantçant la observació d'aquestes sabem que el nombre de senyals rebudes per hora tenen una mitjana i una variància igual a la corresponent a la distribució de Poisson enunciada. Resoleu l'apartat 3) amb aquestes condicions (Aplicau la desigualtat de Txebixef) **1.25 pt.**

(Telemàtica, juny 2008)

Solució:

1) Sigui X la variable aleatòria discreta que ens dóna el nombre de senyals rebudes. Aquesta variable aleatòria segueix una distribució de Poisson $Po(50)$ i ens demanen $P(X > 20)$. Per fer els càlculs, donat que la mitjana és major que 5, podem aproximar aquesta distribució de Poisson a una normal $U \sim N(50, (\sqrt{50})^2)$, per tant,

$$P(X > 20) = P(U > 20.5) = P(Z > \frac{20.5 - 50}{\sqrt{50}} = P(Z > -4.1719) = P(Z < 4.1719) = 1$$

2) Sigui Y la variable aleatòria que ens dóna el temps que hi ha entre dues recepcions de senyals consecutives. Segons s'ha explicat a teoria, si X segueix una distribució de Poisson, Y segueix una distribució exponencial de 50 senyals per hora, és a dir de mitjana $\frac{1}{50}$ hores entre dues senyals, la qual cosa ens diu que el paràmetre és 50. La seva funció de densitat serà

$$f_Y(y) = 50e^{-50y} \qquad y \geq 0$$

d'aquí tenim que com 3 minuts són 0.05 hores,

$$P(Y > 0.05) = \int_{0.05}^{+\infty} 50e^{-50y}\, dy = -e^{-50y}\Big]_{0.05}^{+\infty} = e^{-50\cdot 0.05} = 0.082$$

3) Per a que no es bloquegi hem de rebre menys de a senyals. Aleshors ens demanen que calculem a de forma que $P(X < a) > 0.9$. és a dir, tenint en compte que U és la variable aleatòria corresponent a la aproximació a una distribució normal (vista a l'apartat 2)

$$P(X \leq a) = P(U < a + 0.5) = P\Big(Z < \frac{a + 0.5 - 50}{\sqrt{50}}\Big) = 0.9$$

mirant les taules tenim

$$\frac{a + 0.5 - 50}{\sqrt{50}} = 1.28, \qquad a = 58.55$$

com estam parlant de senyals agafarem $a = 59$, ja que $P(X \leq 58) \not\geq 0.9$

4) Aplicant la desigualtat de Txebixef tenim

$$P(50 - b < X < 50 + b) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{b^2} = 1 - \frac{50}{b^2} = 0.9, \qquad b^2 = 500, \qquad b = 22.36$$

Per tant $22.64 < X < 72.56$, és a dir, a hauria de ser 73 senyals sense bloquejar-se

Prob 2 Considerem la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = kx \sin x \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

a) Trobau k per a que f sigui una funció de densitat d'una determinada variable aleatòria X. **1.5 pt.**

b) Calculau la funció de distribució de X **1.5 pt.**

c) Sigui $Y = \frac{X}{2}$. Trobau la funció de distribució i de densitat de Y. **2 pt.**

(Telemàtica, juny 2008)

Solució:

a) Per que sigui una funció de densitat ha de complir $\int_0^{\frac{\pi}{2}} kx \sin x \, dx = 1$. Aleshores

$$\left.\begin{array}{l} \int kx \sin x \, dx \\ u = kx \quad du = k\,dx \\ dv = \sin x \, dx \quad v = -\cos x \end{array}\right\} = -kx \cos x + \int k \cos x \, dx = -kx \cos x + k \sin x$$

Per tant,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} kx \sin x \, dx = -kx \cos x + k \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = k = 1$$

Aleshores $k = 1$

b) Per a calcular la funció de distribució tenim

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int_0^x t \sin t \, dt = -t \cos t + \sin t]_0^x = -x \cos x + \sin x$$

per tant,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -x \cos x + \sin x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

c) Calculem primer la funció de distribució de Y.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\Big(\frac{X}{2} < y\Big) = P(X < 2y) = F_X(2y) = -2y \cos 2y + \sin 2y$$

Com els valors de X estan entre 0 i $\frac{\pi}{2}$, els valors de Y estan entre 0 i $\frac{\pi}{4}$. Per tant,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ -2y \cos 2y + \sin 2y & 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

i derivant obtindrem la funció de densitat,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y \sin 2y & 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$