Classe pràctica de Sistemes d'Equacions

Classe pràctica 1

Prob 1 Discutiu i resoleu el sistema

$$\left.\begin{array}{llllc} x & +3y & -az & = & 4 \\ -ax & +y & +az & = & 0 \\ -x & +2ay & & = & a+2 \\ 2x & -y & -2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

(Control, curs 07/08)

Prob 2 Un parc d'atraccions cobra 7 euros als adults, 2 euros als joves i 0.5 euros als nins. Si 150 persones han pagat un total de 100 euros, quants adults, joves i nins hi ha al parc?

Solució classe pràctica 1

Prob 1 Discutiu i resoleu el sistema

$$\left.\begin{array}{llllll} x & +3y & -az & = & 4 \\ -ax & +y & +az & = & 0 \\ -x & +2ay & & = & a+2 \\ 2x & -y & -2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

(Control, curs 07/08)

Solució:

Diguem M a la matriu dels coeficients i A a la matriu ampliada. Cerquem el determinant de la matriu A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ -a & 1 & a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & a+2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 7 & 3 & -a-6 & 4 \\ 2-a & 1 & a-2 & 0 \\ 4a-1 & 2a & -4a & a+2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -a-6 & 4 \\ 2-a & a-2 & 0 \\ 4a-1 & -4a & a+2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -a+1 & -a-6 & 4 \\ 0 & a-2 & 0 \\ -1 & -4a & a+2 \end{vmatrix} = (a-2) \begin{vmatrix} -a+1 & 4 \\ -1 & a+2 \end{vmatrix} = (a-2)(-a^2-a+6)$$

que es fa 0 quan $a=2$ i $a=-3$.

Nota:
(1) Substituïm la columna C_1 per C_1+2C_2, C_3 per C_3-2C_2.
(2) Substituïm la columna C_1 per C_1+C_2.

1) Si $a \neq 2$ i $a \neq -3$, $|A| \neq 0$, per tant, el seu rang és 4. Ara bé, com el rang d'M és menor que 4 (ja que té 3 columnes) tenim que els rangs d'aquestes matrius són diferents. Per tant, el sistema és incompatible.

2) Per $a=2$. Ho resoldrem per Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, el *rang* M = *rang* $A = 2 <$n.incògnites. Aleshores el sistema és compatible i indeterminat. Resolent el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl} x+3y-2z & = & 4 \\ 7y-2z & = & 8 \end{array}\right\}$$

tenim

$$x = \frac{4+8z}{7}, \quad y = \frac{8+2z}{7}$$

3) Per $a=-3$ tenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -12 & -12 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -12 & -12 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -8 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -12 & -12 \\ 0 & -7 & -8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -20 & -20 \\ 0 & 0 & -15 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -20 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenim que $rang\ M = rang\ A = n$ =n.incògnites. Per tant el sistema és compatible i determinat i les solucions les obtenim del sistema

$$\left.\begin{aligned} x+3y+3z &= 4 \\ -y+z &= 1 \\ -20z &= -20 \end{aligned}\right\}$$

que resolent-lo ens queda $x = 1,\ y = 0,\ z = 1$.

Prob 2 Un parc d'atraccions cobra 7 euros als adults, 2 euros als joves i 0.5 euros als nins. Si 150 persones han pagat un total de 100 euros, quants adults, joves i nins hi ha al parc?

Solució:

Designem per A, J i N el nombre d'adults, joves i nins. El sistema seria el següent:

$$\left.\begin{aligned} A+J+N &= 150 \\ 7A+2J+0,5N &= 100 \end{aligned}\right\}$$

Resolent per Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 7 & 2 & 0,5 & 100 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 14 & 4 & 1 & 200 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & -10 & -13 & -1900 \end{pmatrix}$$

i el sistema resultant és

$$\left.\begin{aligned} A+J+N &= 150 \\ -10J-13N &= -1900 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} J &= 190 - \tfrac{13N}{10} \\ A &= \tfrac{3N}{10} - 40 \end{aligned}$$

Com J i A han de ser enters, N ha de ser un múltiple de 10. Ara bé com J ha de ser positiu, $190 - \frac{13N}{10} \geq 0$, és a dir, $N \leq 146$. Per altra part $A \geq 0$ per tant $\frac{3N}{10} - 40 \geq 0$ i aïllant $N \geq 134$. Com l'únic múltiple de 10 tal que $134 \leq N \leq 146$ és 140 tenim: $N = 140$, $A = 2$ i $J = 8$.