

## Classe pràctica 1. Enunciat

**Prob 1** Una determinada companyia de televisió per cable ofereix als seus clients diferents possibilitats per pagar la quota anual. Seleccionam un client a l'atzar i sigui  $X$  la variable aleatòria que ens determina el número de mesos en que es vol efectuar el pagament. La funció de distribució de  $X$  és

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.40 & 1 \leq x < 3 \\ 0.65 & 3 \leq x < 4 \\ 0.80 & 4 \leq x < 6 \\ 0.90 & 6 \leq x < 12 \\ 1 & 12 \leq x \end{cases}$$

- 1) Calculau  $X$  **1 pt.**
- 2) Indica quina és la funció de probabilitat. **1 pt.**
- 3) Calculau  $P(3 \leq X \leq 6)$ . **1 pt.**
- 4) Calculau el valor esperat i la desviació típica. **1 pt.**

(Control, curs 07/08)

**Prob 2** Es vol resoldre un greu problema de comunicació entre satèl·lits d'una determinada empresa aeronàutica, i per a això es crida a 12 coneguts enginyers en telecomunicacions que, de forma individual, han de cercar una solució.

- 1) En els assajos que es fan a nivell de laboratori vuit d'ells arriben a solucions errònies i quatre a una de correcta (que no necessàriament ha de ser la mateixa). Si els enginyers surten de forma aleatòria, i el conseller delegat de la companyia aeronàutica vol parlar amb els 5 primers que surtin, **2 pt.**
  - a) Indica la variable aleatòria  $X$  que ens dóna el nombre d'enginyers que han resolt el problema, entre els entrevistats.
  - b) Si volem calcular la funció de probabilitat, de quin tipus de distribució es tracta?
  - c) Calculau  $P(X = 3)$
- 2) Si la probabilitat de que qualsevol dels enginyers trobi una solució al problema és de 0.7, ens interessa estudiar el nombre d'enginyers que trobaran una solució. **2 pt.**
  - a) Indica la variable aleatòria  $X$  que ens resol el problema.
  - b) Si volem calcular la funció de probabilitat, de quin tipus de distribució es tracta?
  - c) Calculau  $P(4 \leq X \leq 6)$
  - d) Indica el nombre esperat d'enginyers que solucionaran el problema
- 3) En les mateixes condicions de l'apartat anterior (la probabilitat de que qualsevol dels enginyers trobi una solució al problema és de 0.7), el conseller delegat de l'empresa vol entrevistar als dos primer enginyers que surtin i hagin trobat una solució. Si aquest parla amb cada un quan surt, fins trobar els dos esmentats, **2 pt.**
  - a) Indica la variable aleatòria  $X$  que ens resol el problema referent al nombre d'enginyers amb els quals parla.
  - b) Si volem calcular la funció de probabilitat, de quin tipus de distribució es tracta?
  - c) Calculau  $P(3 \leq X < 5)$

(Control, curs 07/08)

## Classe pràctica 1. Solució

**Prob 1** Una determinada companyia de televisió per cable ofereix als seus clients diferents possibilitats per pagar la quota anual. Seleccionem un client a l'atzar i sigui  $X$  la variable aleatòria que ens determina el número de mesos en que es vol efectuar el pagament. La funció de distribució de  $X$  és

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.40 & 1 \leq x < 3 \\ 0.65 & 3 \leq x < 4 \\ 0.80 & 4 \leq x < 6 \\ 0.90 & 6 \leq x < 12 \\ 1 & 12 \leq x \end{cases}$$

- 1) Calculau  $X$  1 pt.
- 2) Indica quina és la funció de probabilitat. 1 pt.
- 3) Calculau  $P(3 \leq X \leq 6)$ . 1 pt.
- 4) Calculau el valor esperat i la desviació típica. 1 pt.

### Solució:

a)  $X$  no pot tenir cap valor inferior a 1, ja que  $F(x) = P(X \leq x) = 0$ , ara bé,  $F(1) = 0.40$ , per tant,  $f(1) = 0.40 \neq 0$  i aleshores  $1 \in X$ . Continuant amb el raonament tenim

$$X = \{1, 3, 4, 6, 12\}$$

b)  $f(1) = F(1) = 0.40$ ,  $f(3) = F(3) - F(1) = 0.25$ ,  $f(4) = F(4) - F(3) = 0.15$ ,  $f(6) = F(6) - F(4) = 0.10$  i  $f(12) = F(12) - F(6) = 0.10$ . Aleshores

$$f(x) = \begin{cases} 0.40 & x = 1 \\ 0.25 & x = 3 \\ 0.15 & x = 4 \\ 0.10 & x = 6 \\ 0.10 & x = 12 \\ 0 & \text{Altament} \end{cases}$$

c)

$$P(3 \leq X \leq 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 6) = 0.25 + 0.15 + 0.10 = 0.50$$

d)

$$E(X) = 1 \cdot 0.40 + 3 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.15 + 6 \cdot 0.10 + 12 \cdot 0.10 = 3.55$$

$$\sigma^2 = (1 - 3.55)^2 \cdot 0.40 + (3 - 3.55)^2 \cdot 0.25 + (4 - 3.55)^2 \cdot 0.15 + (6 - 3.55)^2 \cdot 0.10 + (12 - 3.55)^2 \cdot 0.10 = 10.4476$$

per tant,  $\sigma = \sqrt{10.4476} = 3.2323$

**Prob 2** Es vol resoldre un greu problema de comunicació entre satèl·lits d'una determinada empresa aeronàutica, i per a això es crida a 12 coneguts enginyers en telecomunicacions que, de forma individual, han de cercar una solució.

- 1) En els assajos que es fan a nivell de laboratori vuit d'ells arriben a solucions errònies i quatre a una de correcta (que no necessàriament ha de ser la mateixa). Si els enginyers surten de forma aleatòria, i el conseller delegat de la companyia aeronàutica vol parlar amb els 5 primers que surtin, 2 pt.
  - a) Indica la variable aleatòria  $X$  que ens dona el nombre d'enginyers que han resolt el problema, entre els entrevistats.
  - b) Si volem calcular la funció de probabilitat, de quin tipus de distribució es tracta?

- c) Calculau  $P(X = 3)$
- 2) Si la probabilitat de que qualsevol dels enginyers trobi una solució al problema és de 0.7, ens interessa estudiar el nombre d'enginyers que trobaran una solució. **2 pt.**
- a) Indicau la variable aleatòria  $X$  que ens resol el problema.
- b) Si volem calcular la funció de probabilitat, de quin tipus de distribució es tracta?
- c) Calculau  $P(4 \leq X \leq 6)$
- d) Indicau el nombre esperat d'enginyers que solucionaran el problema
- 3) En les mateixes condicions de l'apartat anterior (la probabilitat de que qualsevol dels enginyers trobi una solució al problema és de 0.7), el conseller delegat de l'empresa vol entrevistar als dos primer enginyers que surtin i hagin trobat una solució. Si aquest parla amb cada un quan surt, fins trobar els dos esmentats, **2 pt.**
- a) Indicau la variable aleatòria  $X$  que ens resol el problema referent al nombre d'enginyers amb els quals parla.
- b) Si volem calcular la funció de probabilitat, de quin tipus de distribució es tracta?
- c) Calculau  $P(3 \leq X < 5)$

**Solució:**

## Apartat 1)

- a) Com entrevista a 5, i n'hi ha 4 que han resolt el problema, el nombre d'enginyers que poden haver resolt el problema dels entrevistats és:

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

- b) és una distribució hipergeomètrica, ja que consideram un conjunt de 12 elements ( $N = 12$ ), on 4 elements els consideram èxits ( $K = 4$ ) i 8 fracassos. A més es prenen a l'atzar una mostra de 5 elements a l'atzar ( $n = 5$ ) d'entre els 12 elements.

$$H(5, 12, 4)$$

- c)

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3} \binom{8}{2}}{\binom{12}{5}} = 0.1414$$

## Apartat 2)

- a) Hi ha 12 enginyers, i el nombre d'aquests que poden trobar una solució és

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

- b) Consideram un conjunt de 12 experiments aleatoris (assajos) ( $n = 12$ ): "triari un enginyer a l'atzar i veure si ha resolt el problema". és compleixen les següents condicions

- Els assajos són independents
- Cada assaig té dos resultats possibles, que hagin resolt o no el problema (èxit o fracàs)
- La probabilitat d'èxit a cada assaig és sempre la mateixa ( $p = 0.7$ ).

Per tant és una distribució binomial  $B(12, 0.7)$ .

c)

$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 6) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \\ &= \binom{12}{4} 0.7^4 \cdot 0.3^8 + \binom{12}{5} 0.7^5 \cdot 0.3^7 + \binom{12}{6} 0.7^6 \cdot 0.3^6 = 0.11616 \end{aligned}$$

d)  $E(X) = 12 \cdot 0.7 = 8.4$

Apartat 3)

a) Com ha de trobar 2 que resolguin el problema, el mínim de persones amb les quals parlarà és 2, i el màxim és 12, ja que només hi ha 12 enginyers. Per tant,

$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

b) Ens trobam amb un experiment aleatori que consisteix en la realització d'assajos de Bernoulli independents, fins a obtenir 2 èxits ( $r = 2$ ) amb probabilitat d'èxit ("que l'enginyer hagi trobat solució al problema") 0.7 ( $p = 0.7$ ). Per tant ens trobam amb una distribució binomial negativa  $BN(0.7, 2)$ .

**Nota:** De fet no és ben bé una distribució binomial negativa. Per què? I com s'hauria de modificar l'enunciat perquè ho fos?

c)

$$P(3 \leq X < 5) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{2}{1} 0.7^2 \cdot 0.3 + \binom{3}{1} 0.7^2 \cdot 0.3^2 = 0.4263$$