Tema 4. VARIABLES ALEATÒRIES DISCRETES

Variable aleatòria (v.a.): regla que assigna un valor numèric a cada un dels resultats possibles d'un experiment aleatori

Notació: lletres majúscules

Exemples:

1. Experiment: llançar 2 monedes
   V.a.: X=nombre de cares
   Ω={cc, c+, +c, ++}   X(cc)=2, X(c+)=1, X(+c)=1, X(++)=0

2. Experiment: llançar 1 moneda fins que surt cara
   V.a.: X=nombre de llançaments
   Ω={c, +c, ++c, +++c, ...}   X(c)=1, X(+c)=2, X(++c)=3, ...

3. Experiment: escollir 3 persones a l'atzar
   V.a.: X=alçada mitjana de les 3 persones
   Ω={qualsevol grup de 3 persones} $X(\text{grup})=(a_1+a_2+a_3)/3$
   (a_1: alçada 1ª persona, a_2: alçada 2ona persona, etc)

Tipus de variables aleatòries:

- **V.a. discretes**: prenen un conjunt de valors finit (exemple 1: $\Omega_X=\{0, 1, 2\}$)
  o bé infinit però numerable (exemple 2: $\Omega_X=\{1, 2, 3, ...\}$)

- **V.a. contínues**: prenen un conjunt de valors infinit no numerable
  (la diferència entre 2 valors pot ésser infinitament petita)
  (exemple 3: $\Omega_X=[0, 3)$)

Càlcul de probabilitats amb variables aleatòries:

• V.a. discretes: **Funció de probabilitat**

P(X=x)=P(succés associat)

Propietat: $\sum_{x \in \Omega_X} P(X=x)=1$

Exemples:

1. Experiment: llançar 2 monedes
   V.a.: X=nombre de cares
   Ω={cc, c+, +c, ++}   X(cc)=2, X(c+)=1, X(+c)=1, X(++)=0
   P(X=2)=P(cc)=1/4
   P(X=1)=P(c+ U +c)=1/4+1/4=1/2
   P(X=0)=P(++)=1/4
   P(X=x)=0   si x ≠ 0, 1, 2

2. Experiment: llançar 1 moneda fins que surt cara
   V.a.: X=nombre de llançaments
   Ω={c, +c, ++c, +++c, ...}   X(c)=1, X(+c)=2, X(++c)=3, ...
   P(X=1)=P(c)=1/2
   P(X=2)=P(+c)=1/4
   P(X=3)=P(++c)=1/8
   ....
   P(X=x)=0   si   x ≠ 1, 2, 3, ...

Càlcul de probabilitats amb variables aleatòries:

- **Funció de distribució**:

$$F_X(x)=P(X \leq x)$$

En el cas discret : $F_X(x)=P(X \leq x)=P(X=x_1)+P(X=x_2)+...$

($\Omega_X=\{x_1, x_2, ...\}$)

Propietats:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $P(a < X \leq b) = F_X(b)-F_X(a)$

Càlcul de probabilitats amb variables aleatòries:

- **Funció de distribució**:

Exemple:

Experiment: llançar 2 monedes
V.a.: X=nombre de cares,

$\Omega_X=\{0, 1, 2\}$

$F_X(1)=P(X \leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=1/2+1/4=3/4$

en general:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } \quad x < 0 \\ 1/4 & \text{si } \quad 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & \text{si } \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Moments de variables aleatòries

Són uns nombres que resumeixen el comportament dels valors de la variable aleatòria.

Els principals són dos:

- **Esperança** (valor esperat): dóna una idea de la distribució mitjana dels valors de la variable

  Cas discret: $E(X)=\mu= x_1\cdot P(X=x_1) + x_2\cdot P(X=x_2) + \ldots$
  ($\Omega_X=\{x_1, x_2, \ldots\}$)

- **Variància**: dóna una idea de la dispersió dels valors de la variable

  Cas discret: $Var(X)=\sigma^2= x_1^2\cdot P(X=x_1) + x_2^2\cdot P(X=x_2) + \ldots - E(X)^2$
  ($\Omega_X=\{x_1, x_2, \ldots\}$)

  Propietat: $Var(X) \geq 0$

  A partir de la variància es pot calcular la **desviació típica**: $\sigma=+\sqrt{Var(X)}$

Moments de variables aleatòries

Propietats:

- $E(aX)=a\,E(X)$
- $E(aX + b)=a\,E(X) + b$
- $E(aX+bY)=a\,E(X) + b\,E(Y)$
- $Var(aX)=a^2\,Var(X)$
- $Var(aX + b)=a^2\,Var(X)$
- si X i Y independents: $Var(aX+bY)=a^2\,Var(X) + b^2\,Var(Y)$
- Desigualtat de Txebytxeff: $P(|X-E(X)|\geq a)\leq \frac{Var(X)}{a^2}$

Moments de variables aleatòries

Exemple:

Experiment: llançar 2 daus

Ω={11, 12, ..., 21, 22, ..., ..., 66}

V.a.: X=diferència dels dos daus (en valor absolut)

Ω_X={0, 1, 2, 3, 4, 5}

P(X=0)=P({11, 22, 33, 44, 55, 66})=6/36

P(X=1)=P({12, 21, 23, 32, 34, 43, 45, 54, 56, 65})=10/36

P(X=2)=P({13, 31, 24, 42, 35, 53, 46, 64})=8/36

P(X=3)=P({14, 41, 25, 52, 36, 63})=6/36

P(X=4)=P({15, 51, 26, 62})=4/36

P(X=5)=P({16, 61})=2/36

$$E(X)=0\cdot\frac{6}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+2\cdot\frac{8}{36}+3\cdot\frac{6}{36}+4\cdot\frac{4}{36}+5\cdot\frac{2}{36}=\frac{70}{36}=1,95$$

$$Var(X)=0^2\cdot\frac{6}{36}+1^2\cdot\frac{10}{36}+2^2\cdot\frac{8}{36}+3^2\cdot\frac{6}{36}+4^2\cdot\frac{4}{36}+5^2\cdot\frac{2}{36}-\left(\frac{70}{36}\right)^2=\frac{2660}{1296}=20,52$$

$$\sigma=\sqrt{20,52}=4,53$$

Variables aleatòries vectorials

Un **vector aleatori** (X, Y) està format per **dues v.a**. X i Y **associades a un mateix experiment** aleatori.

Definim la **funció de probabilitat conjunta de X i Y** com:

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x \cap Y=y)$$

Si X i Y són **independents** llavors $P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$

Propietats:

1) $\sum_{x\in\Omega_X} \sum_{y\in\Omega_Y} P(X=x, Y=y)=1$

2) $P(X=x)=\sum_{y\in\Omega_Y} P(X=x, Y=y)$ (llei marginal de X)

3) $P(Y=y)=\sum_{x\in\Omega_X} P(X=x, Y=y)$ (llei marginal de Y)

4) $P(A)=\sum_{(x,y)\in A} P(X=x, Y=y)$ (probabilitat d'un conjunt)

Variables aleatòries vectorials

La **probabilitat de X condicionada per Y=y** es defineix com

$$P(X=x \mid Y=y)=\frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

En general: $$P(A \mid B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Variables aleatòries vectorials

Exemple:

Experiment: llançar 2 daus

$\Omega=\{11, 12, ..., 21, 22, ..., ..., 66\}$

V.a.: X=suma dels dos daus

Y=diferència dels dos daus (en valor absolut)

$$P(X=7, Y=3)=P(\{25,52\})=\frac{CF}{CP}=\frac{2}{36}$$

$$P(Y=3|X=7)=\frac{P(Y=3, X=7)}{P(X=7)}=\frac{2/36}{6/36}=\frac{2}{6}$$

$$P(X=7)=P(16,61,25,52,34,43)=\frac{CF}{CP}=\frac{6}{36}$$

Moments de dues variables aleatòries

Són uns nombres que resumeixen el comportament conjunts dels valors de dues variable aleatòries.

- **Covariància** : indica el grau de dependència lineal entre les variables

$$Cov(X, Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)$$

Cas discret ($\Omega_X=\{x_1, x_2, ...\}$, $\Omega_Y=\{y_1, y_2, ...\}$):

$$E(X\cdot Y)=x_1 \cdot y_1 \cdot P(X=x_1, Y=y_1) + x_1 \cdot y_2 \cdot P(X=x_1, Y=y_2) + ...$$

- **Coeficient de correlació**: al igual que la covariància indica el grau de dependència lineal entre les variables però els seus valors estan normalitzats entre -1 i +1

$$r_{XY}=\frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Propietat: $-1 \le r_{XY} \le +1$ ($|r_{XY}| \approx 1$ indica forta dependència entre les variables)

Moments de dues variables aleatòries

Exemple:

Experiment: llançar 2 monedes $\Omega=\{cc, c+, +c, ++\}$

V.a.: X=nombre de cares

Y=1 si mateix resultat en les dues, -1 si diferent resultat

$\Omega_X=\{0, 1, 2\}$

$P(X=2)=P(cc)=1/4$

$P(X=1)=P(c+ \cup +c)=1/4+1/4=1/2$

$P(X=0)=P(++)=1/4$

$P(X=x)=0$ si $x \neq 0, 1, 2$

$\Omega_Y=\{-1, 1\}$

$P(Y=-1)=P(c+ \cup +c)=1/4+1/4=1/2$

$P(Y=1)=P(cc \cup ++)=1/4+1/4=1/2$

$P(Y=y)=0$ si $y \neq -1, 1$

$E(X)=0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} =1$

$E(Y)=(-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$

$Var(X)=0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} - 1^2=0,5$

$Var(Y)=(-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} - 0^2= 1$

$\sigma_X=\sqrt{0,5}=0,7071$

$\sigma_Y=\sqrt{1}=1$

Moments de dues variables aleatòries

Exemple (continuació):

Experiment: llançar 2 monedes $\Omega=\{cc, c+, +c, ++\}$
V.a.: X=nombre de cares
Y=1 si mateix resultat en les dues, -1 si diferent resultat

$\Omega_{XY}=\{(0, -1), (0, 1), (1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1)\}$
P(X=0, Y=-1)=0
P(X=0, Y=1)=P(++)=1/4
P(X=1, Y=-1)=P(c+ U +c)=1/4+1/4=1/2
P(X=1, Y=1)=0
P(X=2, Y=-1)=0
P(X=2, Y=1)=P(cc)=1/4
P(X=x, Y=y)=0 si $x \neq 0, 1, 2$ o $y \neq -1, 1$,

$E(XY)=0 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$

$Cov(X, Y)= 0 - 1 \cdot 0 = 0$

$$r_{XY} = \frac{0}{0{,}7071 \cdot 1} = 0$$

V.a. discretes típiques

Experiments aleatoris molt diferents poden tenir associades variables aleatòries similars.

En aquest tema s'estudien una sèrie de v.a. típiques comuns a molts problemes.

Si som capaços d'associar un problema a una v.a. típica podrem conèixer fàcilment la seva funció de probabilitat o densitat, la seva funció de distribució i la seva esperança i variància.

Els valors de probabilitat de les v.a. típiques es troben tabulats.

V.a. discretes típiques

V.a. de Bernouilli:

Experiment: èxit/fracàs (dos resultats possibles)

Ω = { èxit, fracàs }   P(èxit)=p   P(fracàs)=1-p

V.a.:

$$X=\begin{cases} 1 & \text{si èxit} \\ 0 & \text{si fracàs} \end{cases}$$

$\Omega_X=\{0, 1\}$

$$P(X=x)=\begin{cases} p & \text{si } x=1 \\ 1-p & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$$

$E(X)=p$

$Var(X)=p(1-p)$

Notació: $X \sim Be(p)$

V.a. discretes típiques

V.a. de Bernouilli:

Exemples:

1. Llançament d'una moneda.
   $X=1$ si surt cara, 0 sino.

   $X \sim Be(1/2)$
   (èxit= "surt cara")

2. Tres persones llancen a una diana amb probabilitats d'encert 1/5, 1/4 i 1/3, respectivament.
   $X=1$ si les tres encerten, 0 sino.

   $X \sim Be(1/5 \,.\, 1/4 \,.\, 1/3\,)=Be(1/60)$
   (èxit= "les tres persones encerten")

V.a. discretes típiques

V.a. binomial:

Experiment: n repeticions d'un experiment èxit/fracàs on P(èxit)=p

Ω = { {èxit, èxit, ..., èxit}, {fracàs, èxit, ..., èxit}, ..., {fracàs, fracàs, ..., fracàs} }

V.a.:

X=nombre d'èxits

$\Omega_X=\{0, 1, 2, ..., n\}$

$$P(X=x)=\begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)} & \text{si } x=0, 1, 2, ..., n \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$$

E(X)=np

Var(X)=np(1-p)

Notació: X ~ B(n, p)

Observació: els valors de la funció de distribució de la v.a. binomial estan tabulats

V.a. discretes típiques

V.a. binomial:

Exemples:

1. X=nombre de cares en 10 llançaments d'una moneda.
   X ~ B(10, 1/2)
   (èxit= "surt cara")

   P(treure 7 cares)=P(X=7)= $\binom{10}{7}(1/2)^7(1-1/2)^{(10-7)}=120\cdot(1/2)^7\cdot(1/2)^3=0{,}1172$

   P(treure 3 o menys cares)=P(X ≤ 3)=(taules)=0,1719

2. X=nombre de respostes correctes en un test de 20 preguntes
   amb 4 opcions de resposta per pregunta (només 1 correcta)

   X ~ B(20, 1/4)
   (èxit= "resposta correctes")

   P(contestar bé més de 10)=P(X > 10)=
   =1-P(X ≤ 10)=(taules)=1-0,9961=0,0039

V.a. discretes típiques

V.a. geomètrica:

Experiment: repeticions d'un experiment èxit/fracàs on P(èxit)=p
V.a.:

Tipus I:

X=nombre de repeticions fins al primer èxit

$\Omega_X=\{1, 2, 3, ..., \}$

$$P(X=x)=\begin{cases}(1-p)^{x-1}p & \text{si } x=1, 2, ... \\ 0 & \text{resta}\end{cases}$$

$E(X)=1/p$

$Var(X)=(1-p)/p^2$

Tipus II:

X=nombre de fracasos fins al primer èxit

$\Omega_X=\{0, 1, 2, ..., \}$

$$P(X=x)=\begin{cases}(1-p)^{x}\,p & \text{si } x=1, 2, ... \\ 0 & \text{resta}\end{cases}$$

$E(X)=(1-p)/p$

$Var(X)=(1-p)/p^2$

Notació: X ~ Ge(p)

V.a. discretes típiques

V.a. geomètrica:

Exemples:

1. Llançament de dos daus de póker
   X=nombre de llançaments fins a treure 2 asos
   $X \sim Ge(1/6 \, . \, 1/6)=Ge(1/36)$ (tipus I)
   (èxit= "treure 2 asos")

   $P(\text{fer 5 llançaments})=P(X = 5)=(1-1/36)^4 \cdot 1/36= (35/36)^4 \cdot 1/36=0{,}025$

   Nombre esperat de llançaments=$E(X)=1/(1/36)=36$

2. Una persona té 10 claus en el seu clauer, 1 d'elles és de ca seva.
   X=nombre de intents fallits abans d'obrir la porta de ca seva
   $X \sim Ge(1/10)$ (tipus II)
   (èxit= "obrir la porta")

   $P(\text{fallar més de 3 vegades})=P(X > 3)=1-P(X \leq 3)=1-F_X(3)=(\text{formulari})=$
   $=1-(1-(1-1/10)^4)=(0{,}9)^4=0{,}6561$

   Nombre esperat d'intents fallits=$E(X)=(1-1/10)/(1/10)=9$

V.a. discretes típiques

V.a. de Poisson:

X=nombre d'ocurrències d'un succés que passa una mitjana de λ vegades

$\Omega_X=\{0, 1, 2, 3, ..., \}$

$$P(X=x)=\begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} & \text{si } x=0, 1, 2, ... \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$$

$E(X)=\lambda$

$Var(X)=\lambda$

Notació: $X \sim Po(\lambda)$

Observació: els valors de la funció de distribució de la v.a. Poisson estan tabulats

Propietat (aproximació d'una v.a. Binomial per una Poisson):

si n és gran ($n \geq 20$) i p és petit ($p < 0,05$), llavors $B(n, p) \approx Po(np)$

V.a. discretes típiques

V.a. de Poisson:

Exemple:

El nombre de clients que arriben en mitjana, per minut, al mostrador d'una companyia aérea és 0,3.

X=nombre de clients, per minut, que arriben al mostrador

X ~ Po(0,3)

P(arribin 3 clients en 1 minut)=P(X=3)= $\frac{(0,3)^3}{3\,!}e^{-0,3} = 0,0033$

P(arribin més de 3 clients en 1 minut)=P(X > 3)=1-P(X ≤ 3)=(taula)=
=1- 0,9997 = 0,0003

Y=nombre de clients en mitja hora

Y ~ Po(0,3 · 30)=Po(9)

P(cap client en mitja hora)=P(Y=0)= $\frac{(9)^0}{0\,!}e^{-9} = 0,00012$

P(entre 8 i 15 clients en mitja hora)=P(8 ≤ Y ≤ 15) = P(Y ≤ 15) – P(Y ≤ 7)=
= (taula) = 0,9780 – 0,3239 = 0,6541