

ÀLGEBRA (2 hores)

P1.- Aplicant les propietats dels determinants calculeu: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$. Expressau el resultat final en forma de producte de tres factors. **1 pt**

P2.- Sigui el conjunt de vectors de \mathbb{R}^3 : $S = \{(a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)\}$.

a) Calculeu el rang d'aquest conjunt segons els valors de a . **0.5 pt**

b) Per a cada un dels possibles valors de a trobau una base de l'espai vectorial que generen. Indicaue-ne la dimensió. **0.5 pt**

c) Sigui $U = \langle S \rangle$ quan $a = 1$ i sigui $V = \langle (1, 2, 3), (3, 4, 5) \rangle$. Cercau $U + V$ indicant una base i la dimensió. **0.5 pt**

P3.- Siguin $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$ una base de l'espai vectorial de \mathbb{R}^2 i $B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ una base de l'espai vectorial \mathbb{R}^3 . Definim l'aplicació $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donada per $f(x, y) = (y, x, x - y)$.

a) Demostreu que f és lineal. **0.5 pt**

b) Trobau la matriu associada a aquesta aplicació lineal en les bases B i B' . **0.5 pt**

c) Trobau $\text{Im} f$ i $\text{Ker} f$ i la dimensió de cada un d'ells. **1 pt**

d) Indicaue si l'aplicació és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva. **0.5 pt**

PROBABILITAT (2 hores)

P4.- Un lot de 100 circuits integrats en conté 20 de defectuosos. Es trien dos a l'atzar, sense reposició.

a) Quina és la probabilitat que el segon circuit sigui defectuós? **0.25 pt**

b) Si el segon circuit ha estat defectuós, quina és la probabilitat que el primer no ho hagi estat? **0.25 pt**

c) Si consideram 5 lots idèntics i independents entre si, quina és la probabilitat que en dos d'aquests lots algun dels circuits agafats sigui defectuós? **1 pt**

P5.- Un canó d'artilleria guiat per satèl·lit llança míssils a una antena enemiga. La variable D que mesura a quina distància de l'antena cau cada bomba és una variable aleatòria amb funció de densitat

$$f_D(d) = \begin{cases} K(625 - d^2) & \text{si } 0 \leq d \leq 25 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

on K és una constant.

a) Calculeu la probabilitat que una bomba caigui exactament damunt l'antena. **0.5 pt**

b) Trobau el valor de la constant K . **0.5 pt**

c) L'antena queda momentàniament inutilitzada si una bomba cau a menys de 10 metres. Calculeu la probabilitat que això passi. **0.5 pt**

d) Si es llancen 1000 bombes, calculeu el nombre mitjà de vegades que l'antena queda inutilitzada per aquests llançaments. **0.5 pt**

P6.- La centraleta telefònica d'una petita empresa rep una mitjana de 5 cridades per minut. Calculeu el nombre mínim de línies necessàries perquè la probabilitat de saturació de la centraleta sigui inferior al 10%, en els casos següents:

a) Utilitzant la desigualtat de Txebytxef, considerant que la desviació típica és 2. **0.5 pt**

b) Si la variable X que compta el nombre de cridades rebudes en un minut per la centraleta és una variable de Poisson. **0.5 pt**

c) En aquest darrer cas, calculeu la probabilitat de rebre exactament 10 cridades en 1 minut. **0.5 pt**

Indicació: consideram que hi ha saturació en la centraleta quan el nombre de cridades rebudes en un minut és superior al nombre de línies.