6 Valors propis

Prob 6.1 Determinau els valors propis i els seus espais vectorials associats de cada una de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Prob 6.2 Determinau a, b, c, d, e, f si tenim que els vectors $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$ són vectors propis de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Prob 6.3 Estudiau si són o no diagonalitzables els endomorfismes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donats per:

a) $f(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$.

b) $f(x, y, z) = (-x, -z, y)$.

Prob 6.4 Estudiau si són o no diagonalitzables les següents matrius de $M_3(\mathbb{R})$ i $M_4(\mathbb{R})$. En cas de que ho siguin, trobau una base de vectors propis i la matriu diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Prob 6.5 Diagonalitzau, si és posible, les següents matrius

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Trobau en cada cas la matriu del canvi de base i l'expressió que relaciona la matriu diagonal amb la matriu donada.

Prob 6.6 Calculau A^n per a tot $n \in \mathbb{N}$, si A és la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Prob 6.7 Trobau el terme general de la successió $\dfrac{a_n}{b_n}$ definida per

$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n \quad \text{per a tot} \quad n \in \mathbb{N}$$

Prob 6.8 Considerau les successions definides recurrentment per a tot $n \geq 1$ per:

$$u_n = -4u_{n-1} - 6v_{n-1} \quad v_n = 3u_{n-1} + 5v_{n-1} \quad w_n = 3u_{n-1} + 6v_{n-1} + 5w_{n-1}$$

Calculau u_n, v_n, w_n en funció de u_0, v_0, w_0.

Prob 6.9 Considerem l'endomorfisme $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ donat per $f(A) = A^t$. Diagonalitzau A, donau una base de vectors propis.

Prob 6.10 Definim l'endomorfisme $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ mitjançant $f(p(x)) = p(x+1)$.

a) Demostrau que f és lineal i trobau la matriu associada a f respecte de la base canònica $\{1, x, x^2\}$.

b) Calculau els valors propis de f. És diagonalitzable?

Prob 6.11 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donada per $f(x, y, z) = (2x - y - z, x - z, -x + y + 2z)$.

a) Diagonalitzau l'endomorfisme f i trobau la matriu de canvi de base.

b) Trobau $f^n(1, 1, 1)$

(Examen, juny 2000)

Prob 6.12 Considerem les successions definides en forma recurrent, per a tot $n \geq 1$, per:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_n & = & a_{n-1} & + & b_{n-1} & + & c_{n-1} \\ b_n & = & a_{n-1} & - & 2b_{n-1} & & \\ c_n & = & & & 3b_{n-1} & + & c_{n-1} \end{array}\right\}$$

amb a_0, b_0 i c_0 valors reals fixos.

a) Trobau la matriu A tal que $(a_n, b_n, c_n)^T = A(a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1})^T$.

b) Calculau a_n, b_n i c_n en funció de a_0, b_0 i c_0. (Indicació: utilitzeu diagonalització).

(Examen, setembre 2000)

Prob 6.13 Considerem que s'emeten tres valors en un canal de comunicació x_0, x_1 i x_2. Aquests valors es passen repetidament per un filtre definit per:

$$S_n = \frac{1}{2}S_{n-1} + \frac{5}{2}S_{n-2} + S_{n-3} \text{ per a } n \geq 3.$$

$$S_0 = x_0, \quad S_1 = x_1, \quad S_2 = x_2$$

a) Calculau una matriu A tal que $A \begin{pmatrix} S_{n-1} \\ S_{n-2} \\ S_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_n \\ S_{n-1} \\ S_{n-2} \end{pmatrix}$

b) Diagonalitzau A i calculau A^{n-2} en funció de la matriu diagonal i de les matrius de canvi de base. Aquesta expressió donarà directament S_n en funció de n, x_0, x_1 i x_2.

(Examen, febrer 2001)

Prob 6.14 Amb la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Trobau els valors propis de A i la seva matriu diagonal.

b) Trobau la matriu de canvi de base de A a la matriu diagonal.

c) Calculau A^n per a tot $n \in \mathbb{N}$.

(Examen, juny 2001)

Prob 6.15 Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida com

$$f(x, y, z) = (3x - 2y, -2x + 3y, 5z)$$

trobau una base de $\mathbb{R}^3$ en relació amb la qual la matriu de f sigui diagonal.
(Examen, setembre 2001)

Prob 6.16 Donada la matriu següent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Trobau el polinomi característic de la matriu i els seus valors propis.

b) Trobau els subespais propis associats a cada valor propi. Diagonalitza la matriu?

c) Quina és la relació entre la matriu A i la seva matriu diagonal associada?

(Examen, febrer 2002)

Prob 6.17 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació definida com $f(x, y, z) = (x, x + 2y - 3z, x - y)$.

a) Demostrau que f és una aplicació lineal.

b) És el vector $(0, 2, 2)$ un vector propi de f?

c) Trobau una base de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada a f en aquesta base sigui diagonal.

(Examen, juny 2002)

Prob 6.18 Amb la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Trobau els valors propis de A i la seva matriu diagonal.

b) Trobau la matriu de canvi de base de A a la matriu diagonal.

c) Calculau A^n per a tot $n \in \mathbb{N}$.

(Examen, setembre 2002)

Prob 6.19 Es donen les seqüents successions recurrents

$$\begin{array}{rcrcr} u_n & = & 3u_{n-1} & + & 3v_{n-1} \\ v_n & = & 5u_{n-1} & + & v_{n-1} \end{array}$$

amb $u_0 = v_0 = 1$.
Calculau les expressions de u_n i v_n en funció de u_0 i v_0.
(Examen, febrer 2003)

Prob 6.20 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfisme amb la següent matriu associada: $A = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

a) Calcular els valors propis de l'endomorfisme.

b) Calcular els subespais propis associats a cada valor propi.

c) Diagonalitza la matriu? Per què?.

d) Calcular l'expressió general de A^n.

(Examen, juny 2003)

Prob 6.21 Donada la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Trobar el polinomi característic de la matriu i els seus valors propis.

b) Trobar els subespais propis associats a cada valor propi. Diagonalitza la matriu?

c) Quina és la relació entre la matriu A i la seva matriu diagonal associada? Calcular explicitament totes les matrius implicades en aquesta relació.

(Examen, setembre 2003)

Prob 6.22 Donada la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Trobau l'expressió de l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que té la matriu A coma a matriu associada en la base canònica (inicial i final).

b) Calculau el polinomi característic de f i trobau els valors propis de l'endomorfisme.

c) Calculau els subespais propis associats a cada valor propi.

d) Aplicau el Teorema de Diagonalització per decidir si l'endomorfisme diagonalitza o no. En cas afirmatiu digueu quina és la matriu diagonal D i la matriu de canvi de base C tal que $A = C.D.C^{-1}$.

Indicació: cada valor propi apareix en la matriu diagonal tantes vegades com el valor de la seva multiplicitat com a valor propi.
(Examen, febrer 2004)

Prob 6.23 Calculau l'expressió general de A^n, on n és la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(Examen, setembre 2004)

Prob 6.24 Donada la matriu.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{amb } (a \neq 0)$$

a) Cercau els valors propis en $\mathbb{R}$ de la matriu. **0.75 pt**

b) Calculau els subespais propis associats a cada valor propi i determinau si la matriu és diagonalitzable. **2 pt**

c) Indicau quina és la matriu diagonal i trobau la matriu del canvi de base. **0.75 pt**

(Examen, setembre 2005)

Prob 6.25 Donada la matriu

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Determina el valors dels paràmetres a i b per a que la matriu següent sigui diagonalitzable. **1 pt.**

b) Per als casos que sigui diagonalitzable, trobau la matriu diagonal. Igualment trobau una base formada per vectors propis per al cas que $a \neq 5$ i $a \neq -1$. **1 pt.**

c) En aquest darrer cas ($a \neq 5$ i $a \neq -1$), trobau la matriu del canvi de bases. **0,25 pt.**

(Examen, febrer 2006)

Prob 6.26 Donada l'aplicació $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donada per

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -b \\ a - 2c & 2a - 2b - 2c + d \end{pmatrix}$$

a) Demostrau que és un endomorfisme. **0,7 pt.**

b) Trobau els valors propis. **0,8 pt.**

c) Indicau si és diagonalitzable i en aquest cas trobau una base formada per vectors propis. **1 pt.**

(Examen, juny 2006)