Fonaments Matemàtiques II

Àlgebra Lineal

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears

Manuel Moyà Quintero

Índex

1 Matrius **3**

2 Determinants **17**

3 Sistemes d'equacions lineals **33**

4 Espais Vectorials **45**

5 Aplicacions lineals **83**

6 Valors i vectors propis d'un endomorfisme **101**

7 Espais Euclidians **113**

Capítol 7

Espais Euclidians

Definició 7.1 *Donats $p+1$ espais vectorials, $V_1, \ldots, V_p, W$ sobre un mateix cos K, anomenam **aplicació p-lineal** de $V_1 \times \ldots \times V_p$ en W a una aplicació*

$$f : V_1 \times \ldots \times V_p \to W$$

que compleix per a cada $i = 1, \ldots, p$

- $f(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_p) = f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_p) + f(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_p)$ $(\forall v_i, v_i' \in V_i)$
- $f(v_1, \ldots, tv_i, \ldots, v_p) = tf(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_p) \quad \forall t \in K, \quad \forall v_i \in V_i$

Notem que una aplicació lineal és un cas particular d'aplicació p-lineal on $p = 1$. En el cas que $p > 1$ es diu genèricament **aplicació multilineal**.

En el cas particular en que $V_1 = \ldots = V_p = V$ i $W = K$ direm que $f : V^p \to K$ és una **funció p-lineal** sobre V.

Definició 7.2 *Anomenam **funció (forma) bilineal** a una funció 2-lineal sobre V.*

Exemple: Vegem que $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - 3x_2y_2$$

és una forma bilineal. Efectivament

- Hem de veure que $f[(x_1, x_2) + (x_1', x_2'), (y_1, y_2)] = f[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] + f[(x_1', x_2'), (y_1, y_2)]$. Efectivament,

$$f[(x_1, x_2) + (x_1', x_2'), (y_1, y_2)] = f[(x_1 + x_1', x_2 + x_2'), (y_1, y_2)] =$$

$$= 2(x_1 + x'_1)y_1 + (x_1 + x'_1)y_2 - (x_2 + x'_2)y_1 - 3(x_2 + x'_2)y_2 =$$
$$= (2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - 3x_2y_2) + (2x'_1y_1 + x'_1y_2 - x'_2y_1 - 3x'_2y_2) =$$
$$= f[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] + f[(x'_1, x'_2), (y_1, y_2)]$$

Anàlogament veuríem que
$f[(x_1, x_2), (y_1, y_2) + (y'_1, y'_2)] = f[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] + f[(x_1, x_2), (y'_1, y'_2)]$

- Vegem ara que $f[t(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = tf[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$. Efectivament,

  $$f[t(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = f[(tx_1, tx_2), (y_1, y_2)] = 2tx_1y_1 + tx_1y_2 - tx_2y_1 - 3tx_2y_2 =$$
  $$= t(2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - 3x_2y_2) = tf[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$$

  Anàlogament veuríem que $f[(x_1, x_2), t(y_1, y_2)] = tf[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$

Direm que una funció bilineal és **simètrica** si $f(u, v) = f(v, u)$

En el exemple anterior la forma bilineal no seria simètrica, ja que

$$f[(y_1, y_2), (x_1, x_2)] = 2y_1x_1 + y_1x_2 - y_2x_1 - 3y_2x_2 \neq f[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$$

Definició 7.3 *Anomenam* ***producte escalar*** *sobre V a una funció bilineal sobre V simètrica i semidefinida positiva (és a dir, $f(u, u) \geq 0$, i $f(u, u) = 0$ si i només si $u = \bar{0}$).*

A $f(u, v)$ el representarem per $\langle u, v\rangle$.

Per tant f és producte escalar si i només si:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ (simètrica).
2. $\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$ i $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$. (com ha de ser simètrica, basta una igualtat)
3. $\langle tu, v\rangle = \langle u, tv\rangle = t\langle u, v\rangle$. (com ha de ser simètrica, basta una igualtat)
4. Si $u \neq \bar{0}$ aleshores $\langle u, u\rangle > 0$, i $\langle u, u\rangle = 0$ si i només si $u = \bar{0}$ (semidefinida positiva).

Exemple 1: En el conjunt de vectors lliures del pla, $\langle u, v\rangle = |u||v| \cos(u, v)$ és un producte escalar.

Exemple 2: $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

És un producte escalar.

Efectivament,

- Vegem que $f(u,v) = f(v,u)$ on $u, v \in \mathbb{R}^3$

$$f[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 =$$
$$= f[(y_1,y_2,y_3),(x_1,x_2,x_3)]$$

- Vegem $f(u_1+u_2,v) = f(u_1,v) + f(u_2,v)$, on $u_1, u_2, v \in \mathbb{R}^3$

$$f[(x_1,x_2,x_3) + (x_1',x_2',x_3'),(y_1,y_2,y_3)] =$$
$$= f[(x_1+x_1', x_2+x_2', x_3+x_3'),(y_1,y_2,y_3)] =$$
$$= (x_1+x_1')y_1 + (x_2+x_2')y_2 + (x_3+x_3')y_3 =$$
$$= x_1y_1 + x_1'y_1 + x_2y_2 + x_2'y_2 + x_3y_3 + x_3'y_3 =$$
$$= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (x_1'y_1 + x_2'y_2 + x_3'y_3) =$$
$$= f[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] + f[(x_1',x_2',x_3'),(y_1,y_2,y_3)]$$

- $f(tu,v) = tf(u,v)$, per a $u, v \in \mathbb{R}^3$ i $t \in \mathbb{R}$

$$f[t(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] = f[(tx_1,tx_2,tx_3),(y_1,y_2,y_3)] =$$
$$= tx_1y_1 + tx_2y_2 + tx_3y_3 = t(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = tf[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)]$$

- Si $u \neq \bar{0}$ aleshores $\langle u,u\rangle > 0$, i $\langle u,u\rangle = 0$ si i només si $u = \bar{0}$ ($u \in \mathbb{R}^3$).

  Suposem $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

$$f[(x,y,z),(x,y,z)] = x^2 + y^2 + z^2 > 0$$

  Suposem ara que $f[(x,y,z),(x,y,z)] = 0$, això és equivalent a $x^2+y^2+z^2 = 0$ i per tant, $x = y = z = 0$

Per tant és un producte escalar.

Exemple 3: En general $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$f[(x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)] = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

és un producte escalar.

Nota: Si no es diu el contrari, suposarem que estam parlant d'aquest producte escalar.

Exemple 4: $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$$

és un producte escalar.

Efectivament,

- $$f[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 = 2y_1x_1 + y_2x_2 + 3y_3x_3 =$$
$$= f[(y_1,y_2,y_3),(x_1,x_2,x_3)]$$

- $$\begin{gathered} f[(x_1,x_2,x_3) + (x_1',x_2',x_3'),(y_1,y_2,y_3)] = \\ = f[(x_1+x_1',x_2+x_2',x_3+x_3'),(y_1,y_2,y_3)] = \\ = 2(x_1+x_1')y_1 + (x_2+x_2')y_2 + 3(x_3+x_3')y_3 = \\ = 2x_1y_1 + 2x_1'y_1 + x_2y_2 + x_2'y_2 + 3x_3y_3 + 3x_3'y_3 = \\ = (2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3) + (2x_1'y_1 + x_2'y_2 + 3x_3'y_3) = \\ = f[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] + f[(x_1',x_2',x_3'),(y_1,y_2,y_3)] \end{gathered}$$

- $$\begin{gathered} f[t(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] = f[(tx_1,tx_2,tx_3),(y_1,y_2,y_3)] = \\ = 2tx_1y_1 + tx_2y_2 + 3tx_3y_3 = t(2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3) = \\ = tf[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] \end{gathered}$$

- Suposem $(x,y,z) \neq (0,0,0)$
$$f[(x,y,z),(x,y,z)] = 2x^2 + y^2 + 3z^2 > 0$$
Suposem ara que $f[(x,y,z),(x,y,z)] = 0$, això és equivalent a $2x^2+y^2+3z^2 = 0$ i per tant, $x = y = z = 0$

Per tant és un producte escalar.

Exemple 5: Vegem que $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que:
$$f[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] = 2x_1y_1^2 + x_2y_2 + 3x_3y_3$$
no és un producte escalar.

Per una part
$$f[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] = 2x_1y_1^2 + x_2y_2 + 3x_3y_3$$
per altra
$$f[(y_1,y_2,y_3),(x_1,x_2,x_3)] = 2y_1x_1^2 + y_2x_2 + 3y_3x_3$$
que no són iguals.

Proposició 7.4 *Sigui $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V, i $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordenades de u i v, respectivament, en aquesta base. Si tenim el producte escalar $<,>$, es compleix:*

$$< u, v >= (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} < u_1, u_1 > & < u_1, u_2 > & \ldots & < u_1, u_n > \\ < u_2, u_1 > & < u_2, u_2 > & \ldots & < u_2, u_n > \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ < u_n, u_1 > & < u_n, u_2 > & \ldots & < u_n, u_n > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Demostració:

$$< u, v >=< x_1u_1 + \ldots + x_nu_n, y_1u_1 + \ldots + y_nu_n >= \sum_i^n \sum_j^n < x_iu_i, y_ju_j >=$$

$$= \sum_i^n \sum_j^n x_i < u_i, u_j > y_j =$$

$$= (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} < u_1, u_1 > & < u_1, u_2 > & \ldots & < u_1, u_n > \\ < u_2, u_1 > & < u_2, u_2 > & \ldots & < u_2, u_n > \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ < u_n, u_1 > & < u_n, u_2 > & \ldots & < u_n, u_n > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Definició 7.5 *Tenint en compta la proposició anterior (proposició 7.4) a l'expressió*

$$(x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} < u_1, u_1 > & < u_1, u_2 > & \ldots & < u_1, u_n > \\ < u_2, u_1 > & < u_2, u_2 > & \ldots & < u_2, u_n > \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ < u_n, u_1 > & < u_n, u_2 > & \ldots & < u_n, u_n > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

*l'anomenarem l'**expressió coordenada** del producte escalar i a la matriu*

$$\begin{pmatrix} < u_1, u_1 > & < u_1, u_2 > & \ldots & < u_1, u_n > \\ < u_2, u_1 > & < u_2, u_2 > & \ldots & < u_2, u_n > \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ < u_n, u_1 > & < u_n, u_2 > & \ldots & < u_n, u_n > \end{pmatrix}$$

*l'anomenarem **matriu coordenada** del producte escalar respecte a la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$.*

Nota: Com un producte escalar és simètric i semidefinida positiva, la matriu associada també ha de ser simètrica i els elements de la diagonal principal positius.

Exemple 1: El producte escalar vist a la definició 7.3 $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definit per

$$< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

té per matriu coordenada respecte a la base canònica:

$$\begin{pmatrix} <(1,0,0),(1,0,0)> & <(1,0,0),(0,1,0)> & <(1,0,0),(0,0,1)> \\ <(0,1,0),(1,0,0)> & <(0,1,0),(0,1,0)> & <(0,1,0),(0,0,1)> \\ <(0,0,1),(1,0,0)> & <(0,0,1),(0,1,0)> & <(0,0,1),(0,0,1)> \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2: El producte escalar vist a la definició 7.3 $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definit per

$$< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= 2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$$

té per matriu coordenada respecte a la base canònica:

$$\begin{pmatrix} <(1,0,0),(1,0,0)> & <(1,0,0),(0,1,0)> & <(1,0,0),(0,0,1)> \\ <(0,1,0),(1,0,0)> & <(0,1,0),(0,1,0)> & <(0,1,0),(0,0,1)> \\ <(0,0,1),(1,0,0)> & <(0,0,1),(0,1,0)> & <(0,0,1),(0,0,1)> \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 3: Sigui el producte escalar anterior

$$< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= 2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$$

Considerem la base d'$\mathbb{R}^3$, $\{(1,1,1),(1,-1,1),(1,1,0)\}$. La matriu coordenada respecte a aquesta base és:

$$\begin{pmatrix} <(1,1,1),(1,1,1)> & <(1,1,1),(1,-1,1)> & <(1,1,1),(1,1,0)> \\ <(1,-1,1),(1,1,1)> & <(1,-1,1),(1,-1,1)> & <(1,-1,1),(1,1,0)> \\ <(1,1,0),(1,1,1)> & <(1,1,0),(1,-1,1)> & <(1,1,0),(1,1,0))> \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Definició 7.6 *Direm que un espai vectorial V és un* ***espai vectorial euclidià*** *si sobre V s'ha definit un producte escalar.*

Definició 7.7 *Sigui V un espai vectorial euclidià i $<,>$ el producte escalar. Anomenam* ***norma*** *o* ***longitud*** *d'un vector v, i la representarem per $\|v\|$, a*

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}$$

Com $< v, v > \geq 0$, sempre existeix $\|v\|$ i a més $\|v\| \geq 0$.

Tenint en compte els exemples de la definició 7.3 vegem l'expressió de les normes corresponents:
Exemple 1: $< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ sobre $\mathbb{R}^3$,

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Nota: Aquesta serà la norma habitual si no es diu el contrari.

Exemple 2: $< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= 2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2}$$

Proposició 7.8 ***(Desigualtat de Schwarz)***
Si V és un espai vectorial euclidià i $u, v \in V$

$$| < u, v > | \leq \|u\|\|v\|$$

DEMOSTRACIÓ:

Operem

$$\begin{gathered}\|\|v\|u - \|u\|v\|^2 =< \|v\|u - \|u\|v, \|v\|u - \|u\|v >= \\ = \|v\|^2 < u, u > -2\|u\|\|v\| < u, v > +\|u\|^2 < v, v >= \\ = \|v\|^2\|u\|^2 - 2\|u\|\|v\| < u, v > +\|u\|^2\|v\|^2 = 2\|v\|^2\|u\|^2 - 2\|u\|\|v\| < u, v >= \\ = 2\|u\|\|v\|(\|u\|\|v\| - < u, v >)\end{gathered}$$

Com $\|\|v\|u - \|u\|v\|^2 \geq 0$ aleshores $2\|u\|\|v\|(\|u\|\|v\| - < u, v >) \geq 0$, per tant, $\|u\|\|v\| - < u, v > \geq 0$ i $< u, v > \leq \|u\|\|v\|$ (1).

Operem ara $\|\|v\|u+\|u\|v\|^2$ que de forma anàloga ens sortiria

$$\|\|v\|u+\|u\|v\|^2 = 2\|u\|\|v\|(\|u\|\|v\| + < u,v >)$$

i amb un raonament anàleg a l'anterior tenim $< u,v > \geq -\|u\|\|v\|$ (2).

Per (1) i (2) tenim $-\|u\|\|v\| \leq < u,v > \leq \|u\|\|v\|$, per tant,

$$| < u,v > | \leq \|u\|\|v\|$$

Definició 7.9 *Direm que un vector és* ***unitari*** *si té norma 1.*

Exemple: En el producte escalar habitual de $\mathbb{R}^3$ els vectors de la base canònica són unitaris.

$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{\langle(1,0,0),(1,0,0)\rangle} = \sqrt{1} = 1$$

igualment ho demostrariem per a $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$.

Anàlogament es compliria per a $\mathbb{R}^n$.

Proposició 7.10 *Si $v \in V$ i $v \neq \bar{0}$ aleshores el vector $\frac{1}{\|v\|}v$ és unitari.*

Demostració:

Cerquem la norma del vector $\frac{1}{\|v\|}v$

$$\left\|\frac{1}{\|v\|}v\right\| = \sqrt{\left\langle\frac{1}{\|v\|}v, \frac{1}{\|v\|}v\right\rangle} = \sqrt{\left(\frac{1}{\|v\|}\right)^2\langle v,v\rangle} = \sqrt{\frac{1}{\|v\|^2}\|v\|^2}$$

Definició 7.11 *Dos vectors $u,v \in V$ direm que són* ***ortogonals*** *si $< u,v >= 0$.*

Anàlogament, un conjunt de vectors $\{u_1,\ldots,u_m\}$ direm que és un ***conjunt ortogonal de vectors*** *si:*

1. $u_i \neq \bar{0}_V$ *per a* $i = 1,\ldots,m$
2. $\langle u_i,u_j\rangle = 0$ *per a* $i,i = 1,,\ldots,m$ *i* $i \neq j$

Exemple 1: En el conjunt de vectors lliures del pla o de l'espai, diferents de zero, els vectors ortogonals són els vectors perpendiculars, ja que segons vàrem definir el producte escalar com $\langle u,v\rangle = |u||v|\cos(u,v)$, $\langle u,v\rangle = 0$ si $|u||v|\cos(u,v) = 0$, i com els vectors són diferents de $\bar{0}_v$, aleshores $\cos(u,v) = 0$ i l'angle és de 90^o.

Exemple 2: En el producte escalar habitual de $\mathbb{R}^3$ els vectors de la base canònica són ortogonals dos a dos.

$$\langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle = 0$$

igualment ho feríem amb els altre elementes de la base.

Anàlogament es compleix per a $\mathbb{R}^n$.

Proposició 7.12 (Teorema de Pitàgores)

Si $u, v \in V$ són ortogonals,

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

DEMOSTRACIÓ:

Si u, v són ortogonals,

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \overset{(1)}{=} \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

(1) Ja que $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle = 0$

Proposició 7.13 *Sigui V és un espai vectorial euclidià. Si $\{u_1,\ldots,u_n\}$ és un conjunt ortogonal de vectors de V, aleshores són linealment independents.*

DEMOSTRACIÓ:

Considerem una combinació lineal igualada a zero,

$$t_1u_1 + \ldots + t_nu_n = \bar{0}_V$$

hem de veure que els coeficients són iguals a zero. De la igualtat anterior tenim

$$0 = \langle \bar{0}_V, \bar{0}_V\rangle = \langle t_1u_1 + \ldots + t_nu_n, t_1u_1 + \ldots + t_nu_n\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} t_it_j\langle u_i,u_j\rangle$$

ara bé, com els vectors u_i $i = 1,\ldots,n$ són ortogonals dos a dos tenim que $\langle u_i,u_j\rangle = 0$ si $i \neq j$, per tant, la igualtat anterior ens queda de la forma

$$0 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2\langle u_i,u_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} t_i^2\|u_i\|^2$$

i com $\|u_i\|^2 \neq 0$, tenim que $t_i^2 = 0$, ja que tots els sumands són no negatius. Aleshores $t_i = 0$ per a $i = 1, \ldots, n$

Definició 7.14 *Sigui V és un espai vectorial euclidià, direm que una base de V és* ***ortogonal*** *si els seus elements són ortogonals dos a dos.*

Si a més a més els vectors de la base són unitaris direm que la base és ***ortonormal****.*

Exemple 1: En el producte escalar habitual de $\mathbb{R}^3$ la base canònica és una base ortonormal segons hem vist als exemples de les definicions 7.9 i 7.11.

Anàlogament per a $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2: Del producte escalar vist a un exemple de la definició 7.3, definit per, $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3,$$

la base canònica de $\mathbb{R}^3$ és ortogonal, ja que:

$$< (1,0,0), (0,1,0) >=< (1,0,0), (0,0,1) >=< (0,1,0), (0,0,1) >= 0$$

però no és ortonormal ja que, per exemple

$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{2}$$

Ara bé, com

$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{2}, \quad \|(0,1,0)\| = \sqrt{1}, \quad \|(0,0,1)\| = \sqrt{3}$$

una base ortonormal seria, tenint en compte la proposició 7.10,

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), (0,1,0), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

Si tenim una base ortogonal, podem trobar una fórmula que ens permet posar un vector en combinació lineal de l'esmentada base, tal com indica la proposició següent.

Proposició 7.15 *Sigui V un espai vectorial euclidià i $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortogonal de V. Si $v \in V$,*

$$v = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 + \ldots + \frac{\langle v, u_n\rangle}{\|u_n\|^2}u_n$$

DEMOSTRACIÓ:

Si $v \in V$, existeixen $t_1, \ldots, t_n \in K$ tals que $v = t_1u_1 + t_2u_2 + \ldots + t_nu_n$. Aleshores

$$\langle v, u_i\rangle = \langle t_1u_1 + t_2u_2 + \ldots + t_nu_n, u_i\rangle = t_1\langle u_1, u_i\rangle + t_2\langle u_2, u_i\rangle + \ldots + \langle u_n, u_i\rangle =$$

$$= t_i\langle u_i, u_i\rangle = t_i\|u_i\|^2$$

i com $u_i \neq \bar{0}_V$ tenim que $\|u_i\| \neq 0$. Per tant, aïllant t_i ens queda

$$t_i = \frac{\langle v, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} \quad \text{per a } i = 1, \ldots, n$$

Exemple: Amb el producte escalar habitual sobre $\mathbb{R}^4$,

$$\{(1,1,1,-1),(1,0,1,2),(-1,0,1,0),(-1,3,-1,1)\}$$

és una base ortogonal d'$\mathbb{R}^4$ com es pot comprovar fàcilment. Si tenim un element $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, posem-lo en combinació lineal dels elements de la base. Si $(a,b,c,d) = t_1(1,1,1,-1) + t_2(1,0,1,2) + t_3(-1,0,1,0) + t_4(-1,3,-1,1)$, tenim

$$t_1 = \tfrac{\langle (a,b,c,d),(1,1,1,-1)\rangle}{\|(1,1,1,-1)\|^2} = \tfrac{a+b+c-d}{4}$$

$$t_2 = \tfrac{\langle (a,b,c,d),(1,0,1,2)\rangle}{\|(1,0,1,2)\|^2} = \tfrac{a+c+2d}{6}$$

$$t_3 = \tfrac{\langle (a,b,c,d),(-1,0,1,0)\rangle}{\|(-1,0,1,0)\|^2} = \tfrac{-a+c}{2}$$

$$t_4 = \tfrac{\langle (a,b,c,d),(-1,3,-1,1)\rangle}{\|(-1,3,-1,1)\|^2} = \tfrac{-a+3b-c+d}{12}$$

Lema 7.16 *Sigui V un espai vectorial euclidià. Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ és un conjunt ortogonal de vectors de V i $v \in V$ qualsevol,*

$$u_{m+1} = v - \frac{\langle v, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle v, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 - \ldots - \frac{\langle v, u_m\rangle}{\|u_n\|^2}u_m$$

compleix:

1. *u_{m+1} és ortogonal a u_1, u_2, $\ldots$, u_m*

2. *Si* $v \notin < u_1, u_2, \ldots, u_m >$*, aleshores* $u_{m+1} \neq \bar{0}_V$ *i* $\{u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}\}$ *és un conjunt ortogonal de vectors de* V

DEMOSTRACIÓ:

1.
$$\langle u_{m+1}, u_i \rangle = \left\langle v - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \ldots - \frac{\langle v, u_m \rangle}{\|u_n\|^2} u_m, u_i \right\rangle =$$
$$= \langle v, u_i \rangle - \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \langle u_1, u_i \rangle - \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \langle u_2, u_i \rangle - \ldots - \frac{\langle v, u_m \rangle}{\|u_n\|^2} \langle u_m, u_i \rangle =$$
$$= \langle v, u_i \rangle - \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle - \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \|u_i\|^2 = \langle v, u_i \rangle - \langle v, u_i \rangle = 0$$
i això es compleix per a $i = 1, \ldots, m$

2. De l'apartat anterior es dedueix de forma immediata que $\{u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}\}$ és un conjunt ortogonal de vectors. Per altra part com $\bar{0}_V \in < u_1, u_2, \ldots, u_m >$, aleshores si v no hi pertany, $v \neq \bar{0}_V$

Proposició 7.17 ***(Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt)*** *Sigui* V *un espai vectorial euclidià. Si* $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *és una base de* V*, aleshores* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *on*

$$e_1 = u_1,$$
$$e_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1$$
$$\ldots$$
$$e_r = u_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{< u_r, e_i >}{\|e_i\|^2} e_i$$
$$\ldots$$

per $r = 2, \ldots, n$ *és una base ortogonal de* V*.*

I per tant, $\left\{ \frac{1}{\|e_1\|} e_1, \frac{1}{\|e_2\|} e_2, \ldots, \frac{1}{\|e_n\|} e_n \} \right\}$ *és una base ortonormal de* V*.*

DEMOSTRACIÓ:

Pel lema 7.16 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ és un conjunt ortogonal de vectors de V i per tant per la proposició 7.13 són linealment independents. Com la dimensió de V és n i tenim n vectors linealment independents, aleshores formen base.

Exemple: Donat el producte escalar vist a un exemple de la definició 7.3 i donat per

$$< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= 2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$$

i la base $\{(1,1,1),(1,-1,1),(1,1,0)\}$, cerquem una base ortonormal.

Sigui $u = (1,1,1)$, $v = (1,-1,1)$, $w = (1,1,0)$ i designem per $\{e_1', e_2', e_3'\}$ i per $\{e_1, e_2, e_3\}$ les bases ortogonal i ortonormal de V obtingudes pel mètode de Gram-Schmidt.

$$e_1' = u = (1,1,1)$$

Cerquem ara e_2'.

$$e_2' = v - \frac{< v, e_1' >}{\|e_1'\|^2} e_1' = (1,-1,1) - \frac{< (1,-1,1),(1,1,1) >}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) =$$

$$= (1,-1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Finalment,

$$e_3' = w - \frac{< w, e_1' >}{\|e_1'\|^2} e_1' - \frac{< w, e_2' >}{\|e_2'\|^2} e_2' =$$

$$(1,1,0) - \frac{< (1,1,0),(1,1,1) >}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) - \frac{< (1,1,0), \left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{1}{3}\right) >}{\| \left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{1}{3}\right) \|^2} \left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{1}{3}\right) =$$

$$= (1,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,1) + \frac{1}{\frac{10}{3}} \left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right)$$

Aleshores, una base ortogonal seria

$$\left\{(1,1,1), \left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{3}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right)\right\}$$

I multiplicant cada vector per l'invers de la seva norma tendríem una base ortonormal:

$$\|e_1'\| = \sqrt{< e_1', e_1' >} = \sqrt{6}$$

$$\|e_2'\| = \sqrt{2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

$$\|e_3'\| = \sqrt{2\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 0^2 + 3\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

per tant,

$$e_1 = \frac{1}{\|e_1'\|}e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right)$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{30}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$

Una base ortonormal seria

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{30}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{30}}\right)\right\}$$

Corol·lari 7.18 *Tot espai vectorial euclidià de dimensió finita té una base ortonormal.*

DEMOSTRACIÓ:

És conseqüència immediata del mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt

Definició 7.19 *Sigui S un subespai vectorial de V, direm que $v \in V$ és* ***ortogonal*** *a S si és ortogonal a tot vector de S.*
Siguin S i T són dos subespais vectorials de V. Direm que S i T són ***ortogonals*** *si cada vector de S és ortogonal a tot vector de T. Aquest fet el representarem posant $S \perp T$.*

Proposició 7.20 *Siguin S i T dos subespais vectorials de l'espai vectorial euclidià V.*

a) S i T són ortogonals si i només si tots els vectors d'una base de S són ortogonals a tots els vectors d'una base de T.

b) Si $S \perp T$ aleshores $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

DEMOSTRACIÓ:

a)

$\Rightarrow$) Evident, ja que si S i T són ortogonals, tots els vectors d'S són ortogonals a tots els vectors de T.

$\Leftarrow$) Sigui $\{u_1, \ldots, u_p\}$ i $\{v_1, \ldots, v_q\}$ bases d'S i T respectivament, que compleixen l'hipòtesi de l'enunciat. Sigui $u \in S$ i $v \in T$, vegem que són ortogonals.

Com $u \in S$, existeixen $t_1, \ldots, t_p \in K$ tal que $u = t_1u_1 + \ldots + t_pu_p$. Anàlogament com $v \in T$, existeixen $s_1, \ldots, s_q \in K$ tals que $v = s_1v_1 + \ldots + s_qv_q$. Vegem si són ortogonals:

$$< u, v >=< t_1u_1 + \ldots + t_pu_p, s_1v_1 + \ldots + s_qv_q >= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} t_is_j < u_i, v_j > \overset{(1)}{=} 0$$

(1) Ja que per hipòtesi u_i i v_j són ortogonals per a tot $i = 1, \ldots, p$ i $j = 1, \ldots, q$.

b) Suposem que existeix $u \in S \cap T$. Com S i T són ortogonals, u és ortogonal a ell mateix, per tant, $< u, u >= 0$ i això implica que $u = \bar{0}_V$, per definició de producte escalar.

Definició 7.21 *Sigui S un subespai vectorial de V, anomenam* ***complement ortogonal*** *de S al conjunt d'elements de V que són ortogonals a S i el representarem per $S^\perp$.*

Exemple: Sigui $S =< (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1) >$. Trobem el seu complement ortogonal i la seva dimensió.

Es pot veure fàcilment que els vectors $\{(1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1)\}$ són linealment independents, i per tant formen base.

Per la proposició 7.20 $(x, y, z, t) \in S^\perp$ si i només si $(x, y, z, t)\perp(1, 1, 0, 1)$ i $(x, y, z, t)\perp(1, 0, 1, 1)$, és a dir,

$$\left.\begin{array}{l} < (x, y, z, t), (1, 1, 0, 1) >= x + y + t = 0 \\ < (x, y, z, t), (1, 0, 1, 1) >= x + z + t = 0 \end{array}\right\}$$

i resolent el sistema tenim $x = -z - t$ i $y = z$, per tant, els elements de $S^\perp$ són de la forma

$$(-z - t, z, z, t) = (-z, z, z, 0) + (-t, 0, 0, t) = z(-1, 1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1)$$

i aleshores $S^\perp =< (-1, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) >$ i com els vectors són linealment independents tenim que dim $S^\perp$=2.

Proposició 7.22 *Sigui S un subespai vectorial de V*

a) $S^\perp$ és un subespai vectorial de V.

b) $S^\perp \perp S$.

c) $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

DEMOSTRACIÓ:

a) Siguin $u, v \in S^{\perp}$ i $s, t \in K$, vegem que $su + tv \in S^{\perp}$. Sigui $w \in S$ qualsevol,

$$< su + tv, w >= s < u, w > +t < v, w >= 0$$

b) És evident, per pròpia definició de $S^{\perp}$.

c) $S^{\perp}$ està format per tots els vectors de V ortogonals als d'S, per tant, S està format per tots els vectors de V ortogonals a $S^{\perp}$, és a dir, $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

Proposició 7.23 *Si S un subespai vectorial de l'espai vectorial de dimensió finita V, aleshores $V = S \bigoplus S^{\perp}$.*

Per a demostrar aquesta proposició s'hurien de veure algunes propietats sobre bases d'un espai vectorial, que surten dels objectius de l'assignatura.

Corol·lari 7.24 *Si S un subespai vectorial de l'espai vectorial de dimensió finita V, aleshores $dim\ V = dim\ S + dim\ S^{\perp}$.*

DEMOSTRACIÓ:

És conseqüència immediata de la proposició anterior 7.23 i de 4.28

Definició 7.25 *Sigui S un subespai vectorial de l'espai vectorial de dimensió finita V, com $V = S \bigoplus S^{\perp}$ tenim que donat $u \in V$ existeix un únic $u_1 \in S$ i $u_2 \in S^{\perp}$ tal que $u = u_1 + u_2$. El vector u_1 rep el nom de* ***projecció ortogonal*** *de u sobre S i el representarem per $P_S(u)$ i u_2 la projecció ortogonal de u sobre $S^{\perp}$ i el representarem per $P_{S^{\perp}}(u)$.*

Exemple: Si $S =< (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1) >$, hem vist a l'exemple de la definició 7.21 que $S^{\perp} =< (-1, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) >$. Cerquem ara les projeccions ortogonals de $(8, 0, 1, 4)$ sobre S i sobre $S^{\perp}$.

Per cercar la projecció ortogonal hem de posar $(8, 0, 1, 4)$ en combinació lineal d'un element de S i un altre de $S^{\perp}$:

$$(8, 0, 1, 4) = x(1, 1, 0, 1) + y(1, 0, 1, 1) + z(-1, 1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1)$$

que resolent ens dóna $x = 2,\ y = 3,\ z = -2,\ t = -1$. Per tant

$$\left.\begin{array}{l} P_S((8, 0, 1, 4)) = 2(1, 1, 0, 1) + 3(1, 0, 1, 1) = (5, 2, 3, 5) \\ P_{S^{\perp}}((8, 0, 1, 4)) = -2(-1, 1, 1, 0) - 1(-1, 0, 0, 1) = (3, -2, -2, -1) \end{array}\right\}$$

Proposició 7.26 (Teorema de l'aproximació òptima)

Sigui V un espai vectorial euclidià i S un subespai vectorial seu. Si u és un element qualsevol de V, aleshores $P_S(u)$ és el vector de S més proper a v, en el sentit que

$$\|u - P_S(u)\| < \|u - v\|$$

per a tot $v \in S$, $v \neq P_S(u)$

Demostració:

$$u - v = (u - P_S(u)) + (P_S(u) - v)$$

Ara bé, per una part tenim que com $P_S(u), v \in S$ aleshores $P_S(u) - v \in S$. Per altra part, a la definició 7.25 hem vist que $u = P_S(u) + P_{S^\perp}(u)$, per tant, $u - P_S(u) \in S^\perp$. Això ens diu que $P_S(u) - v$ i $u - P_S(u)$ són ortogonals.

Aplicant ara el teorema de Pitàgores (prop. 7.12) tenim

$$\|u - v\|^2 = \|u - P_S(u)\|^2 + \|P_S(u) - v\|^2 > \|u - P_S(u)\|^2$$

ja que com $P_S(u) \neq v$, aleshores $P_S(u) - v \neq \mathbf{0}$

Nota: Un problema comú en matemàtiques aplicades consisteix en aproximar una funció $f \in V$ amb una funció g d'un subespai vectorial S de V. Pel que hem vist en aquesta proposició, aquesta funció g serà $P_S(f)$. Aquesta aproximació entre dos vectors s'enten en termes de $\|u - v\|$, i aquest resultat depen del producte escalar definit.

Exemple 1: Sigui $C[a, b]$ l'espai vectorial de les funcions contínues en $[a, b]$. Definim

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

a) Demostrem que $\langle f, g\rangle$ defineix un producte escalar.

b) Considerant el producte escalar anterior on $V = \mathbb{R}_4[x]$, $a = -2$ i $b = 2$, trobem l'aproximació òptima del polinomi $p(x) = 5 - \frac{1}{2}x^4$ per un polinomi de 2n grau ($S = \mathbb{R}_2[x]$).

a) Vegem que es compleixen les condicions de producte escalar

1.
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle g, f\rangle$$

2.

$$\langle f_1 + f_2, g\rangle = \int_a^b (f_1 + f_2)(x)g(x)\,dx = \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))g(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)g(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)g(x)\,dx = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$$

3.

$$\langle tf, g\rangle = \int_a^b (tf)(x)g(x)\,dx = \int_a^b tf(x)g(x)\,dx = t\int_a^b f(x)g(x)\,dx = t\langle f, g\rangle$$

4.

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b [f(x)]^2\,dx \geq 0$$

ja que $[f(x)]^2 \geq 0$. Com $[f(x)]^2$ és contínua i no negativa en $[a, b]$ si $\int_a^b [f(x)]^2\,dx = 0$ aleshores $[f(x)]^2$ ha de ser identicament zero (vegeu càlcul) i per tant $f(x)$ ha de ser 0.

b) Una base de $\mathbb{R}_2[x]$ és $\{1, x, x^2\}$. Cerquem $\mathbb{R}_2[x]^\perp$.

$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4 \in \mathbb{R}_2[x]^\perp$ si i només si $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ és ortogonal a 1, x i x^2. Per tant,

$$\langle a+bx+cx^2+dx^3+ex^4, 1\rangle = \int_{-2}^{2} (a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)\,dx = 4a+\frac{16}{3}c+\frac{64}{5}e = 0$$

$$\langle a+bx+cx^2+dx^3+ex^4, x\rangle = \int_{-2}^{2} (a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)x\,dx = \frac{16}{3}b+\frac{64}{5}d = 0$$

$$\langle a+bx+cx^2+dx^3+ex^4, x^2\rangle = \int_{-2}^{2} (a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)x^2\,dx =$$

$$= \frac{16}{3}a + \frac{64}{5}c + \frac{256}{7}e = 0$$

i resolent el sistema ens queda $a = \frac{48}{35}e$, $b = -\frac{12}{5}d$ i $c = -\frac{24}{7}e$. Per tant, els elements de $\mathbb{R}_2[x]^\perp$ seran

$$\frac{48}{35}e - \frac{12}{5}dx - \frac{24}{7}ex^2 + dx^3 + ex^4 = e(\frac{48}{35} - \frac{24}{7}x^2 + x^4) + d(-\frac{12}{5}x + x^3)$$

Aleshores

$$\mathbb{R}_2[x]^\perp = \left\langle \frac{48}{35} - \frac{24}{7}x^2 + x^4, -\frac{12}{5}x + x^3 \right\rangle = \left\langle 48 - 120x^2 + 35x^4, -12x + 5x^3 \right\rangle$$

Per tant,

$$5-\frac{1}{2}x^4 = a+bx+cx^2+d(48-120x^2+35x^4)+e(-12x+5x^3) =$$

$$= a+48d+(b-12e)x+(c-120d)x^2+5ex^3+35dx^4$$

i ens queda el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a+48d & = & 5 \\ b-12e & = & 0 \\ c-120d & = & 0 \\ 5e & = & 0 \\ 35d & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

que té per solució: $a=\frac{199}{35},\ b=0,\ c=-\frac{12}{7},\ d=-\frac{1}{70},\ e=0.$

Aleshores

$$5-\frac{1}{2}x^4 = \frac{199}{35}-\frac{12}{7}x^2-\frac{1}{70}(48-120x^2+35x^4)$$

i d'aquí deduïm que la projecció de $5-\frac{1}{2}x^4$ sobre $\mathbb{R}_2[x]$ és

$$P_{\mathbb{R}_2[x]}(p(x)) = \frac{199}{35}-\frac{12}{7}x^2$$

i és el polinomi de $\mathbb{R}_2[x]$ més pròxim a $p(x)$ amb el producte escalar donat.

Definició 7.27 *Sigui V un espai vectorial euclidià i $u,v \in V$. Definim **angle que formen dos vectors** u i v a aquell que compleix:*

$$\cos(u,v) = \frac{< u,v >}{\|u\|\|v\|}$$

*Definim **angle que forme un vector i un subespai vectorial** a l'angle que formen el vector i la projecció ortogonal d'aquest sobre el subespai. Si u és el vector i S el subespai vectorial tenim:*

$$\cos(u,S) = \frac{< u,P_S(u) >}{\|u\|\|P_S(u)\|}$$

Exemple: Considerem l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ amb el producte escalar

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 2x_1y_1+x_2y_2+3x_3y_3$$

vist a l'exemple de la definició 7.3. Volem saber:

a) L'angle que forma els vectors $u=(1,-2,1)$ i $v=(1,3,2)$.

b) L'angle que forma el vector $u = (1, -2, 1)$ i el subesvai vectorial $S = \langle(1, 1, 1), (1, 1, 2)\rangle$.

a) Per definició,

$$\cos(u, v) = \frac{< u, v >}{\|u\|\|v\|} = \frac{\langle(1, -2, 1), (1, 3, 2)\rangle}{\|(1, -2, 1)\|, \|(1, 3, 2)\|} = \frac{-2}{\sqrt{9}\sqrt{23}} = -0.139$$

aleshores l'angle és de 1.431 rad.

b) Cerquem el complement ortogonal de S. Per la proposició 7.20 $(x, y, z) \in S^{\perp}$ si i només si $(x, y, z)\perp(1, 1, 1)$ i $(x, y, z)\perp(1, 1, 2)$, és a dir,

$$\left.\begin{array}{l} < (x, y, z), (1, 1, 1) >= 2x + y + 3z = 0 \\ < (x, y, z), (1, 1, 2) >= 2x + y + 6z = 0 \end{array}\right\}$$

i resolent el sistema tenim $y = -2x$ i $z = 0$, per tant, els elements de $S^{\perp}$ són de la forma

$$(x, -2x, 0) = x(1, -2, 0)$$

i aleshores $S^{\perp} =< (1, -2, 0) >$.

Per cercar la projecció ortogonal de $u = (1, -2, 1)$ sobre S hem de posar $(1, -2, 1)$ en combinació lineal d'un element de S i un altre de $S^{\perp}$:

$$(1, -2, 1) = x(1, 1, 1) + y(1, 1, 2) + z(1, -2, 0)$$

que resolent ens dóna $x = -1, \ y = 1, \ z = 1$. Per tant

$$\left.\begin{array}{l} P_S((1, -2, 1)) = -(1, 1, 1) + (1, 1, 2) = (0, 0, 1) \\ P_{S^{\perp}}((1, -2, 1)) = (1, -2, 0) \end{array}\right\}$$

Per tant, l'angle que forma u amb S és l'angle que formen els vectors u i $w = P_S((1, -2, 1)) = (0, 0, 1)$,

$$\cos(u, w) = \frac{< u, w >}{\|u\|\|w\|} = \frac{\langle(1, -2, 1), (0, 0, 1)\rangle}{\|(1, -2, 1)\|, \|(0, 0, 1)\|} = \frac{-2}{\sqrt{9}\sqrt{3}} = -0.3849$$

aleshores l'angle és de 1.966 rad.

Índex alfabètic

angle
  d'un vector i un subespai, 131
  de dos vectors, 131
aplicació p-lineal, 113
aplicació multilineal, 113

base
  ortogonal, 122
  ortonormal, 122

complement ortogonal, 127
conjunt ortogonal de vectors, 120

espai vectorial
  euclidià, 119

forma bilineal, 113
funció p-lineal, 113
funció bilineal, 113
  simètrica, 114

longitud, 119

norma, 119

producte escalar, 114
  expressió coordenada, 117
  matriu coordenada, 117
projecció ortogonal, 128

subespai vectorial
  ortogonal, 126

vector
  ortogonal a un subespai, 126
  unitari, 120
vectors ortogonals, 120