Tema 1. Introducció al Processament Digital del Senyal.

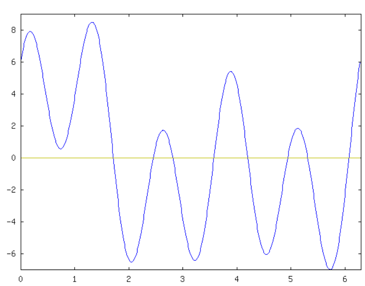
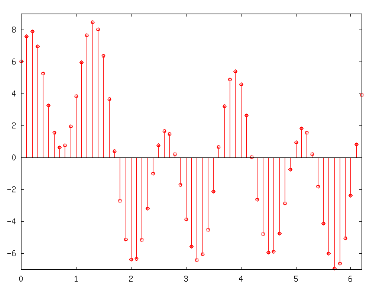
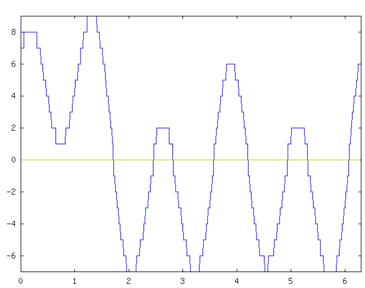
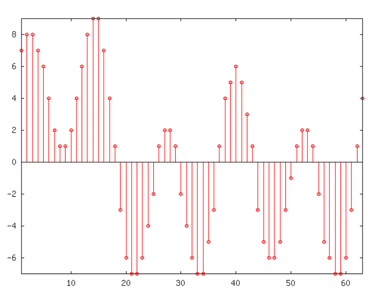
Senyals

Un **senyal** és el conjunt de valors numèrics resultants de mesurar un fenomen físic que varia amb el temps, l'espai o qualsevol altre paràmetre.

Exemples:

- La mesura del corrent elèctric que mostra un oscil.loscopi.
- Les variacions de la pressió de l'aire quan una persona parla.
- Un electrocardiograma.
- Una fotografia.

En aquest curs ens limitarem a estudiar els senyals que varien respecte a un únic paràmetre, que en general serà el temps, per tant els senyals estaran formats per una *seqüència de valors*. En funció de com siguin aquesta seqüència i aquest conjunt de valors poder classificar els senyals de la següent manera:

	Seqüència contínua	Seqüència discreta
Conjunt continu de valors	Senyal Analògic 	Senyal en temps discret 
Conjunt discret de valors		Senyal digital 

Per **tractament o processament de senyal** entenem qualsevol operació que permet generar, rebre, enviar o modificar un senyal. Fins als anys 60 la majoria de senyals amb què treballaven els enginyers eren senyals analògics (per exemple senyals de radar) que es tractaven amb circuits electrònics analògics (basats en vàlvules i transistors). Amb l'aparició dels ordinadors i els circuits digitals es va passar a treballar amb senyals digitals, que són els únics que poden tractar els ordinadors. L'ús de la tecnologia digital permet molta més flexibilitat en el tractament de senyals. El **processament digital de senyals** fa referència a les modificacions que afecten els senyals digitals.

Notació

Matemàticament els senyals es modelen com a funcions: $f : A \to B$, on els conjunts A i B depenen del tipus de senyal:

	Seqüència contínua $A = \mathbb{R}$	Seqüència discreta $A = \mathbb{Z}$
Conjunt continu de valors $B = \mathbb{R}$ o $B = \mathbb{C}$	Senyal analògic Notació: $f(t)$	Senyal en temps discret Notació: $f(nT)$
Conjunt discret de valors $B = \{v_0, v_1, \cdots, v_k, \cdots\}$ on $v_i \in \mathbb{R}$ o $v_i \in \mathbb{C}$		Senyal digital Notació: $f[n]$

Si B està format per valors reals deim que el senyal és un **senyal real**, si està format per valors complexes parlam de **senyal complexe**.

Conversió analògica-digital

Un senyal analògic es pot transformar en digital mitjantzant la **digitalització**, que compren un procés de **mostreig** i un procés de **quantització** (veure figura 1). La conversió inversa (de digital a analògic) també és possible i el senyal obtingut és idèntic a l'original sempre que la quantització i el mostreig verifiquin unes certes condicions.

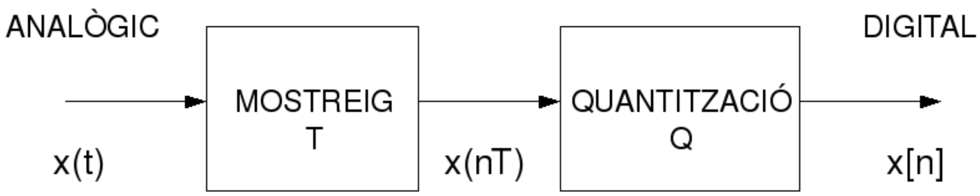


Figura 1: Conversió analògica-digital

Senyals digitals

En aquest curs treballarem principalment amb senyals digitals, els quals es poden descriure mitjançant una seqüència de nombres o mitjançant una fórmula.

Exemples:

- $x[n] = \{\cdots, 5, \underline{7}, 15, 11, \cdots\}$ (seqüència infinita)
- $x[n] = \{2, 9, \underline{-4}, -3, 5, 17\}$ (seqüència finita)
- $x[n] = (-1)^n + 2$ (seqüència infinita)

Alguns senyals importants:

- **Delta de Dirac (impuls unitari)**: $\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

- **Esglaó unitari:** $u[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

- **Senyal sinusoïdal**:

$$x[n] = A\cos(\omega n + \theta) \qquad \text{o} \qquad x[n] = A\sin(\omega n + \theta)$$

  A s'anomena amplitud, ω és la freqüència angular ($\omega = 2\pi f$) i θ és la fase del senyal.

- **Senyal exponencial complexe**:

$$x[n] = a^n, \qquad a \in \mathbb{C}$$

  Observem que, donat que a és un nombre complexe, llavors $a = re^{i\theta}$ i per tant

$$x[n] = a^n = r^n e^{i\theta n} = r^n(\cos(\theta n) + i\sin(\theta n)) = r^n\cos(\theta n) + ir^n\sin(\theta n) = x_R[n] + ix_I[n]$$

  on x_R i x_I són senyals sinusoïdals.

Classificació dels senyals.

Els senyals digitals es poden classificar seguint diversos criteris:

- Senyals periòdics i no periòdics. El senyal $x[n]$ es diu **periòdic** si verifica la següent condició:

$$x[n] = x[n+N] \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \text{per a algun } N \in \mathbb{Z}$$

- Senyals parells i senars.

  $x[n]$ és parell si $x[n] = x[-n]$

  $x[n]$ és senar o imparell si $x[n] = -x[-n]$

  Propietat: donat un senyal qualsevol $x[n]$, $x_P[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$ és un senyal parell, $x_I[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$ és un senyal senar i, a més, $x[n] = x_P[n] + x_I[n]$.

- Senyals d'energia i de potència.

  $x[n]$ és un **senyal d'energia finita** si

$$E = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

  $x[n]$ és un **senyal de potència finita** si

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} |x[n]|^2 < \infty$$

- Senyals causals i anticausals.

  $x[n]$ és **causal** si $x[n] = 0 \ \forall n < 0$

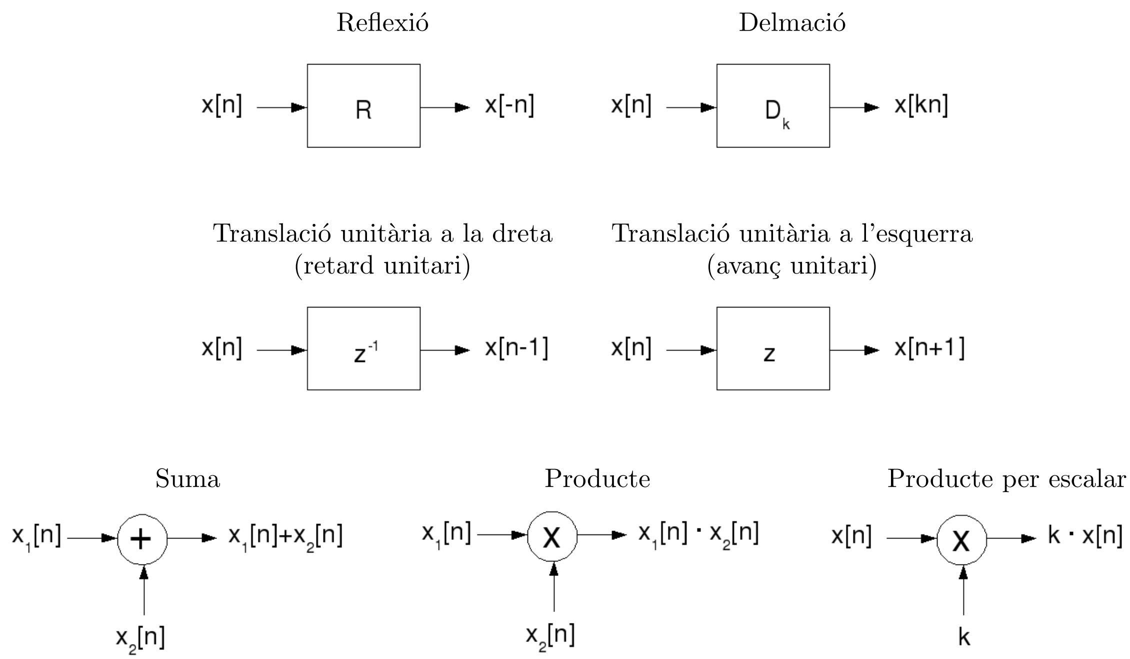
  $x[n]$ és **anticausal** si $x[n] = 0 \ \forall n \geq 0$

- Senyals deterministes i aleatoris. Els senyals **deterministes** són aquells els valors dels quals són coneguts sense cap incertesa. Els senyals **aleatoris**, en canvi, evolucionen amb el temps d'una manera impredictible. Aquest senyals es modelen com a **processos aleatoris** que, en general, es consideren estacionaris i ergòdics.

Operacions bàsiques amb senyals.

- Reflexió (R). $y[n] = R\,x[n] = x[-n]$
- Translació (T_k). $y[n] = T_k\,x[n] = x[n-k]$
- Delmació (D_k). $y[n] = D_k\,x[n] = x[kn]$
- Producte per un escalar. $y[n] = k \cdot x[n]$
- Suma de senyals. $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$
- Producte de senyals. $y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$

Aquestes operacions es poden representar gràficament mitjançant **diagrames de blocs**:



Descomposició d'un senyal en deltes de Dirac

Qualsevol senyal $x[n]$ es pot escriure com una combinació de deltes de Dirac mitjançant les operacions de suma, producte per escalars i translació, segons la fòrmula següent:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Convolució de senyals

La convolució és una operació entre dos senyals que es denota amb el símbol $*$ i es defineix de la següent manera:

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

Propietats de la convolució:

- $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$
- $x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$
- $x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$
- Si $x_1[n]$ té una durada M_1 i $x_2[n]$ una durada M_2, llavors $x_1[n] * x_2[n]$ té una durada $M_1 + M_2 - 1$.

Observació: $x[n] = x[n] * \delta[n]$