

Problema 1 Una persona treu 5 bolles, amb reposició, d'una urna que conté 7 bolles blanques i 3 negres.

a) Quina és la probabilitat de treure 3 blanques?

b) Quina és la probabilitat de treure 3 blanques i que alguna d'elles surti en la primera o la segona extracció?

Solució

Hi ha dues maneres de resoldre el problema, en ambdós casos definim els següents successos:

B=“treure bolla blanca”

N=“treure bolla negra”

A=“treure 3 blanques”

C=“treure bolla blanca en primera o segona extracció”

Mètode 1

Com les extraccions són amb reposició, en cada extracció tenim que: $P(B) = CF/CP = 7/10$ i $P(N) = CF/CP = 3/10$.

a)

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(BBBNN \cup BBNBN \cup BNBBN \cup NBBBN \cup BBNNB \cup \\
 &\quad BNB NB \cup NBBNB \cup BNNBB \cup NBNBB \cup NNBBB) = \\
 &= (\text{disjunts}) = \\
 &= P(BBBNN) + P(BBNBN) + P(BNBBN) + P(NBBBN) + P(BBNNB) + \\
 &\quad + P(BNB NB) + P(NBBNB) + P(BNNBB) + P(NBNBB) + P(NNBBB) = \\
 &= (\text{en cada sumand, successos independents}) = \\
 &= P(B)P(B)P(B)P(N)P(N) + P(B)P(B)P(N)P(B)P(N) + \dots + P(N)P(N)P(B)P(B)P(B) = \\
 &= 10 \cdot (7/10)^3 \cdot (3/10)^2 = 0,3087
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(BBBNN \cup BBNBN \cup BNBBN \cup NBBBN \cup BBNNB \cup \\
 &\quad BNB NB \cup NBBNB \cup BNNBB \cup NBNBB) = \\
 &= (\text{disjunts}) = \\
 &= P(BBBNN) + P(BBNBN) + P(BNBBN) + P(NBBBN) + P(BBNNB) + \\
 &\quad + P(BNB NB) + P(NBBNB) + P(BNNBB) + P(NBNBB) = \\
 &= (\text{en cada sumand, successos independents}) = \\
 &= P(B)P(B)P(B)P(N)P(N) + P(B)P(B)P(N)P(B)P(N) + \dots + P(N)P(B)P(N)P(B)P(B) = \\
 &= 9 \cdot (7/10)^3 \cdot (3/10)^2 = 0,27783
 \end{aligned}$$

Mètode 2

$$CP = VR_{10}^5 = 10^5$$

a)

$$\begin{aligned}
 CF_A &= \{\text{maneres de col.locar les 3 blanques}\} \cdot \\
 &\quad \{\text{maneres de col.locar les 2 negres}\} \cdot \\
 &\quad \{\text{maneres de col.locar les negres entre les blanques}\} = \\
 &= VR_7^3 \cdot VR_3^2 \cdot PR_5^{32} = 7^3 \cdot 3^2 \cdot 10
 \end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{CF_A}{CP} = \frac{7^3 \cdot 3^2 \cdot 10}{10^5} = 0,3087$$

b)

Definim

D=“no treure blanca ni en primera ni en segona extraccions”=“treure NNBBB”

$$CF_{A \cap C} = CF_A - CF_D = 7^3 \cdot 3^2 \cdot 10 - 7^3 \cdot 3^2 = 7^3 \cdot 3^2 \cdot 9$$

$$P(A \cap C) = \frac{CF_{A \cap C}}{CP} = \frac{7^3 \cdot 3^2 \cdot 9}{10^5} = 0,27783$$

Problema 2 En Toni, en Pep i na Maria es reuneixen per resoldre problemes d'estadística. Toni resol el 40% del total dels problemes, Pep el 30% i Maria el 30% restant. Toni s'equivoca en un 2% dels problemes que resol, Pep en el 6% y Maria en l'1%. Agafam a l'atzar un dels problemes resolts.

- a) Quina és la probabilitat que estigui ben resolt?
- b) Si el problema està mal resolt, quina és la probabilitat que l'hagi resolt en Pep?
- c) Quina és la probabilitat que estigui ben resolt i que l'hagi resolt en Toni?

Solució

Definim els següents successos:

A="problema fet per en Toni"

B="problema fet per en Pep"

C="problema fet per na Maria"

D="problema mal resolt"

De l'enunciat tenim:

$$\begin{aligned}P(A) &= 0,4 \\P(B) &= 0,3 \\P(C) &= 0,3 \\P(D|A) &= 0,02 \\P(D|B) &= 0,06 \\P(D|M) &= 0,01\end{aligned}$$

a)

L'enunciat ens demana calcular $P(\bar{D}) = 1 - P(D)$.

Els successos A, B i C formen un **sistema complet de successos**, ja que:

- i) $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ (això equival a dir que $A \cup B \cup C = \Omega$)
- ii) $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ (disjunts 2 a dos)

De manera que podem utilitzar la fórmula de la probabilitat total:

$$P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) = 0,02 \cdot 0,4 + 0,06 \cdot 0,3 + 0,01 \cdot 0,3 = 0,029$$

Finalment:

$$P(\bar{D}) = 1 - 0,029 = 0,971$$

b)

Ens demanen:

$$P(\bar{D} \cap A) = P(\bar{D}|A) \cdot P(A)$$

De l'enunciat sabem que $P(D|A) = 0,02$, per tant $P(\bar{D}|A) = 0,98$.

Finalment:

$$P(\bar{D} \cap A) = 0,98 \cdot 0,4 = 0,392$$