1 Classes Pràctiques de vectors i valors propis

Classe pràctica 2

Prob 2 Considerem l'endomorfisme $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ que té per matriu associada respecte a la base canònica $\{1, x, x^2\}$ del conjunt inicial i final

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a+1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinau el/els valors del paràmetre a per a que f sigui diagonalitzable. **3 pt.**

Per a tot el que segueix suposem que $a = 0$

b) Indicau els valors propis i els espais vectorials de vectors propis associats a cada valor propi. Digueu si f és diagonalitzable. **2 pt.**

c) Indicau la matriu del canvi de base i la matriu diagonal. **1 pt.**

d) Trobau A^n. **3 pt.**

e) És $1 + x + x^2$ un vector propi de l'aplicació lineal f^{10}. Quin seria un valor propi de f^{10}, perquè? **1 pt.**

(**Nota:** El control del curs 08/09 tenia el següent enunciat:

Considerem l'endomorfisme $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ que té per matriu associada respecte a la base canònica $\{1, x, x^2\}$ del conjunt inicial i final

$$A = \begin{pmatrix} -2a+3 & -4a+5 & 4a-9 \\ 0 & -1 & 0 \\ -a+1 & -2a+2 & 2a-3 \end{pmatrix}$$

a) Determinau el/els valors del paràmetre a per a que f sigui diagonalitzable. **3 pt.**

Per a tot el que segueix suposem que $a = 1$

b) Indicau els valors propis i els espais vectorials de vectors propis associats a cada valor propi. Digueu si f és diagonalitzable. **2 pt.**

c) Indicau la matriu del canvi de base i la matriu diagonal. **1 pt.**

d) Trobau A^n. **3 pt.**

e) És $-1 + 2x - 3x^2$ un vector propi de l'aplicació lineal f^{10}. Quin seria un valor propi de f^{10}, perquè? **1 pt.**

.)

Solució classe pràctica 2

Prob 2 Considerem l'endomorfisme $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ que té per matriu associada respecte a la base canònica $\{1, x, x^2\}$ del conjunt inicial i final

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a+1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinau el/els valors del paràmetre a per a que f sigui diagonalitzable. **3 pt.**

Per a tot el que segueix suposem que $a = 0$

b) Indicau els valors propis i els espais vectorials de vectors propis associats a cada valor propi. Digueu si f és diagonalitzable. **2 pt.**

c) Indicau la matriu del canvi de base i la matriu diagonal. **1 pt.**

d) Trobau A^n. **3 pt.**

e) És $1 + x + x^2$ un vector propi de l'aplicació lineal f^{10}. Quin seria un valor propi de f^{10}, perquè? **1 pt.**

.

Solució:

Considerarem l'isomorfisme $h : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que $h(a + bx + cx^2) = (a, b, c)$ i l'aplicació $f' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que té per matriu associada la indicada a l'enunciat.

a) Els valors propis s'obtendran amb l'equació: $\mid A - \lambda I \mid = 0$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & a \\ 1 & a+1-\lambda & -2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a-\lambda) \begin{vmatrix} a+1-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & a+1-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(a-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - a\lambda + 2a) + a(a-\lambda) = (a-\lambda)(\lambda^2 - (a+3)\lambda + 3a) = 0$$

d'aquí tenim que les arrels són $\lambda = a$ (doble), $\lambda = 3$
Cerquem ara una base formada per vectors propis:
Primer cercarem $V'(a)$ que està format per tots els vectors (x, y, z) que verifiquen l'equació:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolguem els sistema per Gauss

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2-a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hem de discutir dues possibilitats:

- Si $a \neq 0$ ens queda el sistema format per les equacions

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ -az &= 0 \end{aligned}$$

que té per solucions $x = -y$ i $z = 0$. Aleshores els elements de $V(a)$ seran de la forma $(-y, -y, 0) = y(-1, -1, 0)$ i per tant $V'(a) =< (-1, -1, 0) >$.

Com $\lambda = a$ és una arrel doble i $dim\ V'(a) = 1$ f', i per tant f, no és diagonalitzable.

- Si $a = 0$ ens queda l'equació $x + y - 2z = 0$ que té per solució $x = -y + 2z$ i aleshores els elements de $V'(0)$ seran de la forma $(-y + 2z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(2, 0, 1)$, on es pot conprovar fàcilment que $\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$ són linealment independents i per tant $dim\ V'(0) = 2$ i $\lambda = 0$ és una arrel doble.

  Per tant, com la suma de les multiplicitats de les arrels és 3 (2+1), la dimensió de $dim\, V(0) = 2$ i $dim\, V(3) = 1$ (teniu en compte per teoria que $1 \leq dim\, V(3) \leq$ multiplicitat de l'arrel 3), per $a = 0$ f', i per tant f, és diagonalitzable.

b) A l'apartat anterior hem vist que per $a = 0$ la matriu és diagonalitzable.

Per altra part hem trobat $V'(0) = \langle(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\rangle$, aleshores $V(0) = \langle -1 + x, 2 + x^2\rangle$.

Cerquem ara $V'(3)$.

$V'(3)$ està format per tots els vectors (x, y, z) que verifiquen l'equació:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolguem els sistema per Gauss

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ens queda per tant el sistema format per les equacions:

$$\begin{aligned} -3x &= 0 \\ -6y - 6z &= 0 \end{aligned}$$

que té per solucions: $x = 0,\ y = -z$
Aleshores els elements de $V'(3)$ seran de la forma $(0, -z, z) = z(0, -1, 1)$ i per tant $V'(3) =< (0, -1, 1) >$ i $V(3) = \langle -x + x^2\rangle$.

c) Una base d'$\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis serà $\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1), (0, -1, 1)\}$, per tant, la matriu diagonal serà

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i la matriu del canvi de base serà

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & -2 \cdot 3^{n-1} \\ -3^{n-1} & -3^{n-1} & 2 \cdot 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

e) Si és un vector propi ha de complir $f^{10}(u) = t \cdot u$, o en forma matricial i tenint en compte que l'isomorf a $1 + x + x^2$ és $(1, 1, 1)$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Operant tenim

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3^{10-1} & 3^{10-1} & -2 \cdot 3^{10-1} \\ -3^{10-1} & -3^{10-1} & 2 \cdot 3^{10-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant és un vector propi de valor propi 0.