Tema 3.Anàlisi transformat (transformada Z)

La transformada Z permet caracteritzar els sistemes digitals i estudiar, de manera relativament senzilla, algunes de les seves propietats (estabilitat, causalitat, etc.).

Transformada Z

Es defineix la transformada Z d'un senyal discret $x[n]$ com:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

on z és una variable complexa. En funció del valor de z aquest sumatori pot ésser infinit (sèrie divergent). Anomenam **regió de convergència (ROC)** el conjunt de valors de z que fan que la sèrie sigui convergent.

Exemples:

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\{\underline{1}, 2, 5, 7, 0, 1\}$	$1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$	pla z, excepte $z = 0$
$\{1, 2, \underline{5}, 7, 0, 1\}$	$z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$	pla z, excepte $z = 0$ i $z = \infty$
$\delta[n]$	1	tot el pla z
$\delta[n-k]$ $(k > 0)$	z^{-k} $(k > 0)$	pla z, excepte $z = 0$
$\delta[n+k]$ $(k > 0)$	z^{k} $(k > 0)$	pla z, excepte $z = \infty$
$(\frac{1}{2})^n u[n]$	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \frac{1}{2}$
$-(\frac{1}{2})^n u[-n-1]$	$-\sum_{n=-\infty}^{1} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \frac{1}{2}$
$2^n u[n] + 5^n u[-n-1]$	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2z^{-1}\right)^n + \sum_{n=-\infty}^{1} \left(5z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1-5z^{-1}}$	$2 < \lvert z\rvert < 5$

Observem que en els 5 primers exemples els senyals són de duració finita mentre que els 4 darrers són de duració infinita. En els primers casos la ROC és igual a tot el pla excepte, possiblement, els punts $z = 0$ i/o $z = \infty$. En el cas dels senyals infinits la ROC, en general, té la forma següent (forma d'anell): $r_2 < |z| < r_1$, on r_2 i r_1 són dos valors constants que depenen de la definició de $x[n]$.

Un senyal $x[n]$ queda totalment determinat per la seva transformada Z i la seva ROC. Conèixer només la transformada Z no permet saber quin era el senyal original (veure exemples 6 i 7).

Per als senyals causals ($x[n] = 0$ si $n < 0$) la ROC té la forma $|z| > r$, mentre per als no causals ($x[n] = 0$ si $n \geq 0$) la ROC és de la forma $|z| < r$, per a alguna constant r (veure exemples 6 i 7).

TABLE 3.1 Characteristic Families of Signals with Their Corresponding ROCs

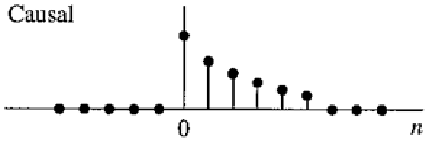
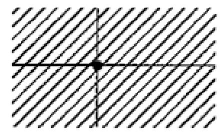
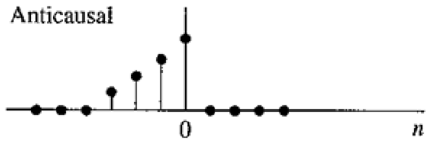
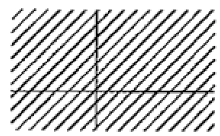
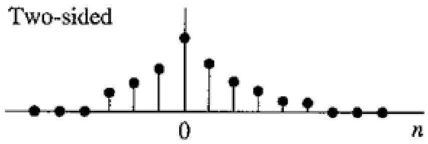
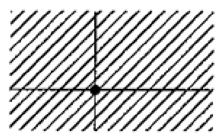
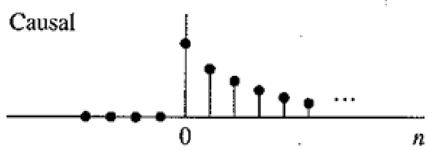
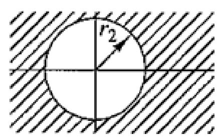
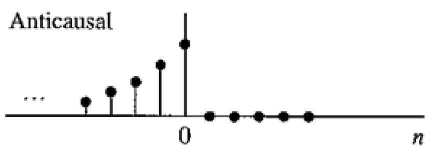
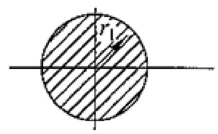
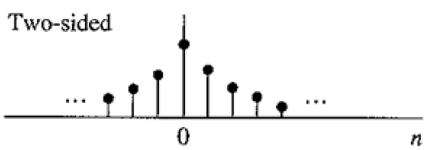
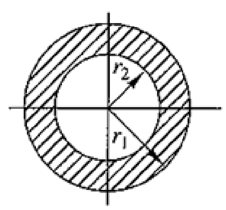
	Signal	ROC	
Finite-Duration Signals			
Causal			Entire z-plane except $z = 0$
Anticausal			Entire z-plane except $z = \infty$
Two-sided			Entire z-plane except $z = 0$ and $z = \infty$
Infinite-Duration Signals			
Causal			$\lvert z\rvert > r_2$
Anticausal			$\lvert z\rvert < r_1$
Two-sided			$r_2 < \lvert z\rvert < r_1$

Figura 1: Font: Digital Signal Processing, J. Proakis, D. Manolakis, Pearson Prentice Hall, 2007

Propietats de la transformada Z

Denotam $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$, amb ROC=ROC$_0$ $= r_2 < |z| < r_1$, $X_1(z) = \mathcal{Z}\{x_1[n]\}$ amb ROC=ROC$_1$ i $X_2(z) = \mathcal{Z}\{x_2[n]\}$ amb ROC=ROC$_2$.

1. Linealitat.

$$\mathcal{Z}\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

amb ROC=com a mínim, intersecció de ROC$_1$ i ROC$_2$.

2. Desplaçament en temps.

$$\mathcal{Z}\{x[n-k]\} = z^{-k} X(z)$$

amb ROC=ROC$_0$ excepte $z = 0$ si $k > 0$ i $z = \infty$ si $k < 0$.

3. Escalat.

$$\mathcal{Z}\{a^n x[n]\} = X(a^{-1} z)$$

amb ROC=$|a| r_2 < |z| < |a| r_1$.

4. Inversió temporal.

$$\mathcal{Z}\{x[-n]\} = X(z^{-1})$$

amb ROC=$\frac{1}{r_1} < |z| < \frac{1}{r_2}$.

5. Derivació en el domini z.

$$\mathcal{Z}\{nx[n]\} = -z \frac{d\, X(z)}{dz}$$

amb ROC=ROC$_0$.

6. Conjugació.

$$\mathcal{Z}\{x^*[n]\} = X^*(z^*)$$

amb ROC=ROC$_0$.

7. Convolució.

$$\mathcal{Z}\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z) X_2(z)$$

amb ROC=com a mínim, intersecció de ROC$_1$ i ROC$_2$.

Transformades Z habituals

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	tot z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$(a^n \cos(\omega_0 n)) u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$(a^n \sin(\omega_0 n)) u[n]$	$\frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Transformades Z racionals

Un tipus important de transformades Z són les transformades Z racionals, que s'escriuen com a quocient de dos polinomis:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)} \tag{1}$$

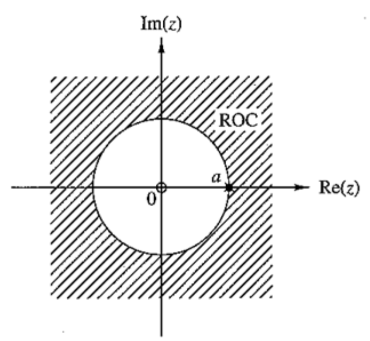
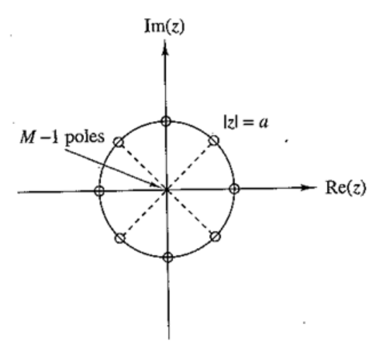
Pols i zeros de la transformada Z. S'anomenen **zeros** de $X(z)$ els valors de z que fan que $X(z) = 0$. S'anomenen **pols** de $X(z)$ els valors de z que fan que $X(z) = \infty$.

Amb la factorització de l'equació anterior, $z_1, z_2, \cdots, z_M$ són zeros de la transformada racional i $p_1, p_2, \cdots, p_N$ són pols. A més, si $N > M$, $z = 0$ és zero de $X(z)$ (amb multiplicitat $N - M$) i si $N < M$, $z = 0$ és pol de $X(z)$ (amb multiplicitat $M - N$). Si els polinomis $P(z)$ i $Q(z)$ tenen arrels en comú llavors haurà zeros i pols que es cancel.laran mutuament.

A ∞ existeix un zero si $X(\infty) = 0$ i hi existeix un pol si $X(\infty) = \infty$. Si comptam els zeros i pols a ∞, $X(z)$ té el mateix nombre de pols i zeros.

Els pols i els zeros de $X(z)$ es representen en un **diagrama de zeros i pols**. La ROC de $X(z)$ no conté cap pol.

Exemples:

	diagrama pols-zeros
$x[n] = a^n u[n] \qquad (a > 0)$ $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$ ROC: $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$ zeros: $z_1 = 0$ pols: $p_1 = a$	
$x[n] = \begin{cases} a^n & \text{si } 0 \le n \le M-1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \quad (a > 0, \text{real})$ $X(z) = \frac{z^M - a^M}{z^{M-1}(z-a)}$ ROC: $z \neq 0$ zeros: $z_i = ae^{j2\pi k/M}, \qquad i = 1, \cdots, M-1$ pols: $p = 0$ (multiplicitat $M-1$)	 (M=8)

Posició dels pols i estabilitat de senyals causals reals

Cas 1. Senyal real amb un únic pol: $x[n] = a^n u[n]$, $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, ROC=$|z| > |a|$, ($a$ real)

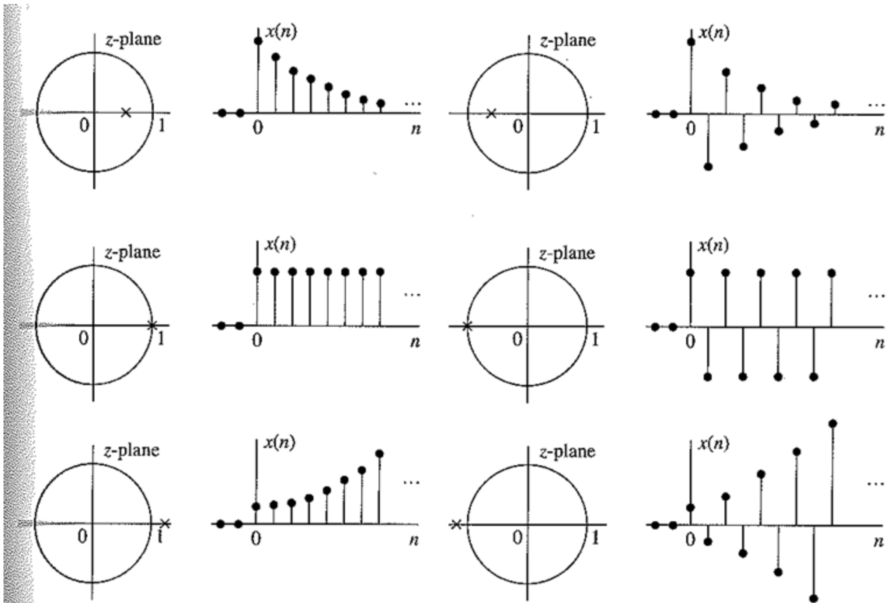


Figure 3.3.5 Time-domain behavior of a single-real-pole causal signal as a function of the location of the pole with respect to the unit circle.

Cas 2. Senyal real amb dos pols reals: $x[n] = na^n u[n]$, $X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$, ROC=$|z| > |a|$, ($a$ real)

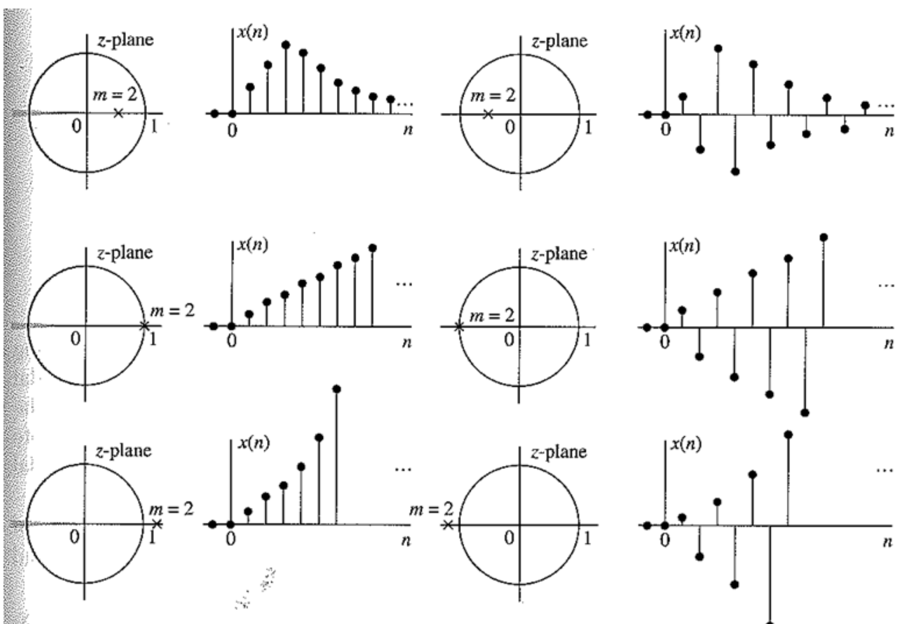


Figure 3.3.6 Time-domain behavior of causal signals corresponding to a double ($m = 2$) real pole, as a function of the pole location.

Cas 3. Senyal real amb un parell de pols complexes conjugats: $x[n] = (a^n \cos(\omega_0 n))u[n]$, $X(z) = \frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$, ROC=$|z| > |a|$, ($a$ real)

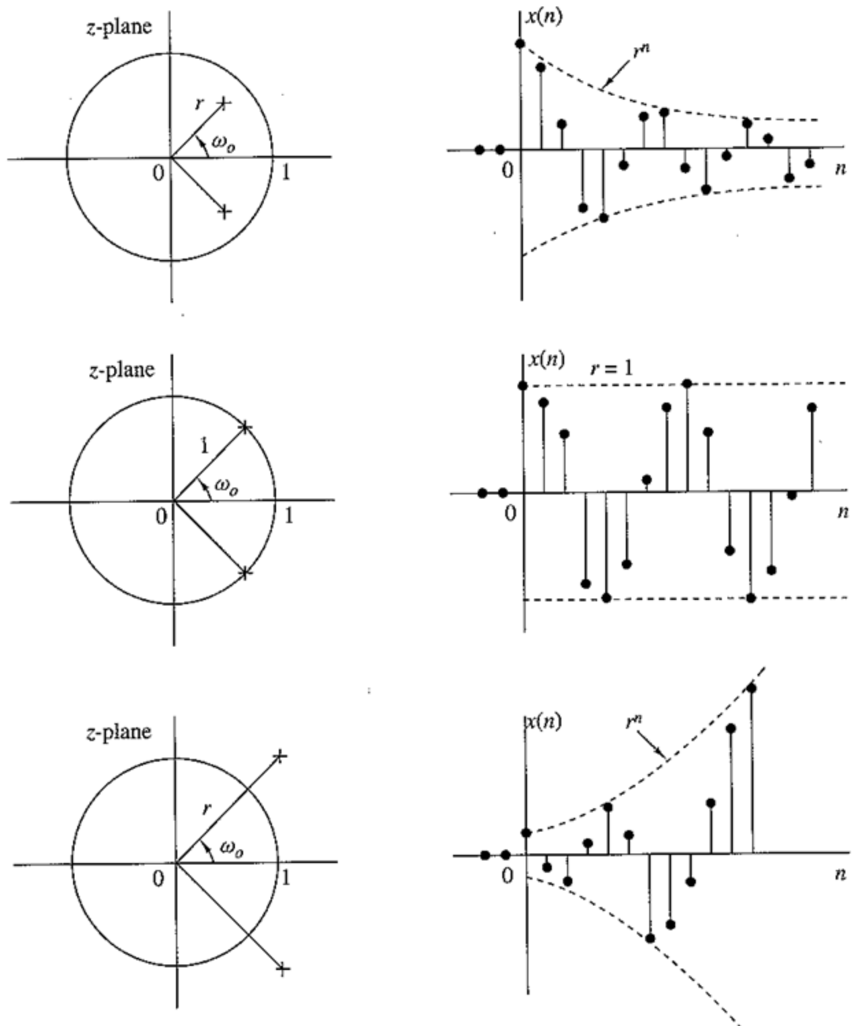


Figure 3.3.7 A pair of complex-conjugate poles corresponds to causal signals with oscillatory behavior.

En general podem afirmar que els senyals causals reals amb els pols a l'interior del **cercle unitat** ($|z| = 1$) són fitats en amplitud. Si els pols estan a l'exterior del cercle unitat els senyals no són fitats i si els pols estan damunt el cercle unitat els senyals són fitats si els pols tenen multiplicitat 1. A més, per al cas de pols dins el cercle unitat el decreixement del senyal és més ràpid com més a prop de l'origen es troben els pols.

Inversió de transformades Z racionals

L'objectiu és trobar $x[n]$ a partir de $X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}$ i la seva ROC. El procediment és el següent:

1. si $M \geq N$ dividim els polinomis fins a trobar una expressió amb la forma següent:

$$X(z) = c_0 + c_1z^{-1} + \cdots + c_{M-N}z^{-(M-N)} + \frac{B'(z)}{A(z)}$$

   on es compleix que $\frac{B'(z)}{A(z)} = \frac{b_0'+b_1'z^{-1}+\cdots+b_K'z^{-K}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}$ amb $K < N$.

   El senyal $x_0[n]$ corresponent a $X_0(z) = c_0+c_1z^{-1}+\cdots+c_{M-N}z^{-(M-N)}$ és $x_0[n] = \{\underline{c_0}, c_1, \cdots, c_{M-N}\}$.

2. si $M < N$ (suposant $a_N \neq 0$):

   (a) descomposam la funció racional en factors:

      i. reescrivim $X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ de la forma

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{B'(z)}{A'(z)} = \frac{b_0'z^{N-1} + b_1'z^{N-2} + \cdots + b_N'z^{N-M-1}}{z^N + a_1'z^{N-1} + \cdots + a_N'}$$

      ii. trobam les arrels de $A'(z)$

      iii. si totes les arrels són diferents:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{A_N}{z-p_N}$$

      iv. si alguna arrel p_i té multiplicitat $k > 1$ la descomposició en factors corresponent a aquesta arrel és

$$\frac{A_{1i}}{z-p_i} + \frac{A_{2i}}{(z-p_i)^2} + \cdots + \frac{A_{ki}}{(z-p_i)^k}$$

      v. trobam les constants $A_1, \cdots, A_N$ per igualació amb l'expressió de $\frac{X(z)}{z}$

   (b) escrivim $X(z)$ de la forma:

$$X(z) = \frac{A_1}{1-p_1z^{-1}} + \frac{A_2}{1-p_2z^{-1}} + \cdots + \frac{A_{1i}}{1-p_iz^{-1}} + \frac{A_{2i}z^{-1}}{(1-p_iz^{-1})^2} + \cdots + \frac{A_N}{1-p_Nz^{-1}}$$

   (c) calculam el senyal corresponent a cada sumand de $X(z)$, tenint en compte les següents propietats:

$X(z)$	ROC	$x[n]$	
$\frac{1}{1-pz^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert p\rvert$	$p^nu[n]$	(senyal causal)
$\frac{1}{1-pz^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert p\rvert$	$-p^nu[-n-1]$	(senyal anticausal)
$\frac{A}{1-pz^{-1}} + \frac{A^*}{1-p^*z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert p\rvert$	$2\lvert A\rvert r^n\cos(\beta n+\alpha)u[n]$	$A = \lvert A\rvert e^{j\alpha},\ p = \lvert r\rvert e^{j\beta},$ (senyal causal)
$\frac{pz^{-1}}{(1-pz^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert p\rvert$	$np^nu[n]$	(senyal causal)

Exemple: determinau el sistema causal que té per transformada

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

Solució:

1. en aquest cas $M = 0$ i $N = 3$, per tant $M < N$. Reescrivim la transformada de la forma:

$$X(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$$

2. les arrels de $(z+1)(z-1)^2$ són $p_1 = -1$ i $p_2 = 1$ (doble), per tant podem descomposar $X(z)/z$ de la següent manera:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{(z-1)^2}$$

3. calculam les constants per comparació dels numeradors de les expressions anteriors i trobam $A_1 = \frac{1}{4}$, $A_2 = \frac{3}{4}$ i $A_3 = \frac{1}{2}$. Per tant:

$$X(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

4. mirant les taules de transformades Z habituals trobam les transformades de cada sumand, tenint en compte que el senyal que buscam és causal:

$$x[n] = \frac{1}{4}(-1)^n u[n] + \frac{3}{4}u[n] + \frac{1}{2}n(1)^n u[n] = \left(\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}n\right) u[n]$$

Anàlisi de sistemes LTI mitjançant la transformada Z

Recordem que la resposta d'un sistema LTI a una entrada $x[n]$ es pot escriure com

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

on $h[n]$ és la resposta impulsional del sistema.

Aplicant les propietats de la transformada Z podem escriure l'expressió anterior de la següent manera:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

on $X(z)$, $Y(z)$ i $H(z)$ són les transformades Z de $x[n]$, $y[n]$ i $h[n]$, respectivament. $H(z)$ rep el nom de **funció de transferència** del sistema.

Si coneixem l'entrada i la sortida del sistema podem calcular $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Si la relació entre $x[n]$ i $y[n]$ s'expressa mitjançant una equació en diferències finites podem calcular $H(z)$ amb la fòrmula anterior i utilitzant les propietats de la transformada Z.

Exemple: determinau la resposta impulsional del sistema causal descrit per la següent equació

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + 2x[n]$$

Solució:

1. aplicam la transformada Z als dos membres de l'equació i aplicam propietats:

$$Y(z) = \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) + 2X(z)$$

2. escrivim la relació $Y(z)/X(z)$:

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = 2X(z) \qquad \Longrightarrow \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

3. comparant amb la taula de transformades Z habituals trobam que

$$h[n] = 2(\frac{1}{2})^n u[n]$$

ja que el sistema és causal i per tant $h[n]$ també ho és.

Causalitat i estabilitat de sistemes LTI

L'anàlisi de $H(z)$ permet determinar de manera molt senzilla les característiques de causalitat i estabilitat d'un sistema LTI:

- Un sistema LTI és causal si i només si la ROC de $H(z)$ és l'exterior d'un cercle de radi $r < \infty$, incloent el punt $z = \infty$.
- Un sistema LTI és estable si i només si la ROC de $H(z)$ conté el cercle unitat.
- Un sistema LTI causal és estable si i només si tots els pols de $H(z)$ estan a l'interior del cercle unitat.
- Un sistema LTI causal amb pols al cercle unitat pot produir una sortida estable si el senyal d'entrada i H(z) no tenen pols en comú.
- La cancel.lació de pols i zeros en l'expressió de $H(z)$ pot produir sistemes estables que en la pràctica no ho són degut a la imperfecta cancel.lació dels pols i els zeros.