Classe pràctica 2. Enunciat

Prob 3 Sigui X l'esforç (psi) en la paleta d'una turbina de vent a una determinada velocitat en un túnel de vent. A l'article "Blade Fatigue Life Assessment with application to VAWTS" (*J. Solar Energy Engr., 1982; 107-111)*) es proposa la distribució de Rayleigh, amb funció de densitat

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2}\, e^{-x^2/(2\theta^2)} & x > 0 \\ 0 & \textit{altrament} \end{cases}$$

com a model per a la distribució d'X.

a) Comprovau que $f(x;\theta)$ és una funció de densitat. **1.5 pt.**

b) Calculau la funció de distribució. **1.5 pt.**

c) Suposau que $\theta = 100$ (un valor suggerit a la gràfica de l'article). Aplicant la funció de distribució, quina és la probabilitat de que X sigui com a màxim 200? Y de que estigui entre 100 i 200? **2 pt.**

(Control, curs 2008/09)

Prob 4 Una fàbrica de components electrònics produeix en un dia 5000 components. Si la probabilitat de que un d'aquests components no sigui defectuós és de 0.99

a) Calculau la probabilitat de que hi hagi més de 30 components defectuosos en un dia. **2 pt.**

b) Quin és el nombre esperat de components defectuosos en un dia? **0.5 pt.**

Suposem que la fàbrica produeix aquests components de forma continuada durant tot el dia i que el nombre de components defectuosos per dia segueix una distribució de Poisson de mitjana, per dia, el valor esperat de l'apartat b).

c) Calculau la probabilitat de que no surti cap component defectós en 2 hores. **2.5 pt.**

(Control, curs 2008/09)

Classe pràctica 2. Solució

Prob 3 Sigui X l'esforç (psi) en la paleta d'una turbina de vent a una determinada velocitat en un túnel de vent. A l'article "Blade Fatigue Life Assessment with application to VAWTS" (*J. Solar Energy Engr., 1982; 107-111)*) es proposa la distribució de Rayleigh, amb funció de densitat

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2}\, e^{-x^2/(2\theta^2)} & x > 0 \\ 0 & \textit{altrament} \end{cases}$$

com a model per a la distribució d'X.

a) Comprovau que $f(x;\theta)$ és una funció de densitat. **1.5 pt.**

b) Calculau la funció de distribució. **1.5 pt.**

c) Suposau que $\theta = 100$ (un valor suggerit a la gràfica de l'article). Aplicant la funció de distribució, quina és la probabilitat de que X sigui com a màxim 200? Y de que estigui entre 100 i 200? **2 pt.**

(Control, curs 2008/09)

Solució:

a) Hem de comprovar que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\theta)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\theta)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\theta^2}\, e^{-x^2/(2\theta^2)}\,dx = -e^{-x^2/(2\theta^2)}\Big]_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1$$

b)

$$F(x;\theta) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t;\theta)\,dt = \int_0^{x} \frac{t}{\theta^2}\, e^{-t^2/(2\theta^2)}\,dt = -e^{-t^2/(2\theta^2)}\Big]_0^{x} = -e^{-x^2/(2\theta^2)} + 1 =$$

$$= 1 - e^{-x^2/(2\theta^2)} \text{per a } x > 0$$

Per tant,

$$F(x;\theta) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-x^2/(2\theta^2)} & x > 0 \end{cases}$$

c) La funció de distribució és, per a $\theta = 100$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-x^2/(2\theta^2)} & x > 0 \end{cases}$$

Calculem les probabilitats que ens demanen

$$P(X < 200) = F(200) = 1 - e^{-200^2/(2\cdot 200^2)} = 1 - e^{-2} = 0.86466471676339$$

$$P(100 < X < 200) = F(200) - F(100) = 1 - e^{-200^2/(2\cdot 100^2)} - (1 - e^{-100^2/(2\cdot 100^2)}) =$$

$$= e^{-100^2/(2\cdot 100^2)} - e^{-200^2/(2\cdot 100^2)} = 0.47119537647602$$

Prob 4 Una fàbrica de components electrònics produeix en un dia 5000 components. Si la probabilitat de que un d'aquests components no sigui defectuós és de 0.99

a) Calculau la probabilitat de que hi hagi més de 30 components defectuosos en un dia. **2 pt.**

b) Quin és el nombre esperat de components defectuosos en un dia? **0.5 pt.**

Suposem que la fàbrica produeix aquests components de forma continuada durant tot el dia i que el nombre de components defectuosos per dia segueix una distribució de Poisson de mitjana, per dia, el valor esperat de l'apartat b).

c) Calculau la probabilitat de que no surti cap component defectós en 2 hores. **2.5 pt.**

(Control, curs 2008/09)

Solució:

a) Com la probabilitat de que no siguin defectuosos és de 0.99, la probabilitat que ho siguin és 0.01. Per tant, es tracta d'una distribució binomial $B(5000; 0.01)$. Ens demanen $P(X > 30)$ i com $n \cdot p = 50$ i $n \cdot q = 4950$ podem aproximar aquesta distribució a una normal de mitjana $n{\cdot}p = 50$ i variància $n{\cdot}p{\cdot}q = 49.5$, $N(50; 49.5)$. Si designam per Y aquesta variable aleatòria tendrem,

$$P(X > 30) = P(Y > 30.5) = P(Z > \frac{30.5 - 50}{\sqrt{49.5}}) = P(Z > -2.7716) = P(Z \leq 2.7716) = 0.9972$$

b) Com és una distribució binomial, el valor esperat de components defectuosos en un dia és

$$n \cdot p = 50$$

c) Designem per T la variable aleatòria que ens dóna el temps que hi ha entre dos components defectuosos, que segueix una distribució exponencial de mitjana 1/50 dies: $Exp(\frac{1}{50})$.

Ens demanen la probabilitat que el següent component defectós surti després de 2 hores, és a dir després de 2/24=1/12 dies.

$$P\Big(T > \frac{1}{12}\Big) = \int_{\frac{1}{12}}^{+\infty} 50 e^{-50\,x}\,dx = -\,e^{-50\,x}\Big]_{\frac{1}{12}}^{+\infty} = e^{-\frac{50}{12}} = 0.016$$

També s'hagués pogut plantejar com una de Poisson de mitjana

$$\frac{50 \text{ comp. defec.}}{1 \text{ dia}} \cdot \frac{1 \text{ dia}}{12 \text{ períodes de 2 h}} = \frac{25}{6} \text{ defectes cada 2 hores}$$

És a dir, ens trobam amb una distribució de Poisson de mitjana $\frac{25}{6}$ defectes cada 2 hores. Ens demanen

$$P(T = 0) = \frac{e^{-\frac{25}{6}}\,(\frac{25}{6})^0}{0!} = 0.016$$