

P1.- Un malalt que ha contret un virus arriba a l'hospital universitari de Princetown. El doctor House és el seu metge i fa el següent raonament per determinar el nombre de dies que haurà d'estar hospitalitzat: anomena X a la v.a. aleatòria que compta el temps, en dies, que tarda en manifestar-se la malaltia. Anomena Y al temps total, en dies, des de que el virus s'ha contret fins que el pacient és donat d'alta. Si suposam que en el moment que apareixen els símptomes el pacient és hospitalitzat, llavors la v.a. $Z = Y - X$ compta el temps d'hospitalització. House, que va llegir un estudi estadístic sobre la evolució del virus, sap que la funció de densitat conjunta de X i Y és:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 4xe^{-y} & \text{si } 0 \leq 2x \leq y \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Ajudau al doctor House i responeu a les següents qüestions:

- a) Calculeu la funció de densitat conjunta de les variables Z i Y i dibuixau el seu suport. **1.5 pt.**
- b) Calculeu la funció de densitat de Z . **0.75 pt.**
- c) Suposant que el pacient és donat d'alta després de 3 dies hospitalitzat, quina és la probabilitat que contragués el virus menys de 5 dies abans d'ésser donat d'alta?. **0.75 pt.**

Indicació: $\int xe^{-x} dx = -e^{-x}(1+x) + C$

P2.- Tenim una urna amb tres bolles blanques i dues negres. Es fan tres extraccions sense reposició. Sigui N la variable aleatòria que compta el nombre de bolles blanques extretes, i sigui M la variable que compta el nombre de bolles negres extretes *abans* de la primera bolla blanca. Es demana:

- a) Calculeu la funció de probabilitat conjunta de N i M . **0.5 pt.**
- b) Calculeu $P(|M - N| \leq 2)$. **0.5 pt.**
- c) Calculeu l'esperança i la variància de N . **0.25 pt.**
- d) Calculeu l'esperança i la variància de M . **0.25 pt.**
- e) Calculeu la covariància i el coeficient de correlació de N i M . **0.5 pt.**

P3.- El motor que permet orientar una antena parabòlica produeix un error en l'orientació de ε graus cada vegada que s'acciona, on $\varepsilon \sim N(0, 1)$. Els errors en l'orientació s'acumulen després de cada actuació del motor i són independents entre sí.

- a) Quina és la probabilitat que l'error d'orientació sigui superior a 5 graus després de 100 actuacions del motor? **1.25 pt.**
- b) Quan l'error acumulat (en valor absolut) és superior a 10 graus l'antena s'ha de recalibrar. Quin és el nombre màxim d'actuacions del motor que es poden fer si es vol garantir, amb una probabilitat del 95%, que l'antena no necessita ésser recalibrada? **1.25 pt.**

P4.- La transmissió d'un senyal binari està contaminada per un renou blanc Gaussià de mitjana 0 i densitat espectral de potència 5. Aquest renou s'afegeix (renou additiu) al senyal transmès $v(t)$.

$v(t)$ pren el valor $+A$ quan es vol transmetre un '1' i $-A$ si es vol transmetre un '0' ($A > 0$). En recepció es decideix que s'ha rebut un '1' si el senyal rebut és positiu i un '0' en cas contrari. Quin és el valor mínim de A que assegura que, com a mínim, 999 de cada 1000 bits es reben correctament? **1.25 pt.**

P5.- Sigui S_n el procés suma següent: $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Les variables aleatòries X_i són variables discretes iid que prenen valors -1 , 0 o 1 amb probabilitats respectives $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$. Calculeu $P(S_3 = k)$ per a tots els valors possibles de k . **1.25 pt.**