Primer Parcial de Fonaments Matemàtics II. Telemàtica (febrer 2004)

P1.- Discutiu i resoleu el següent sistema segons els valors de $a,\ b,\ c \in I\!R$: **2.5 pt.**

$$\left.\begin{array}{lcl} -x+z-t & = & 4 \\ y-z+at & = & 1 \\ x-y+t & = & b \\ ax+y-z & = & c \end{array}\right\}$$

P2.- Donats els subespais vectorials $U = \{a+bx+cx^2 \in I\!R_2[x] | a+b+c=0\}$ i $V = \{a+bx+cx^2 \in I\!R_2[x] | a-c=0\}$, cercau:

a) Una base de U i de V així com les seves dimensions. **1.25 pt.**

b) $U+V$ i $U \cap V$ donant una base de cada un i la seva dimensió. **1.25 pt.**

P3.- Si $p(x)$ és un polinomi de $I\!R_n[x]$, designem per $p'(x)$ la seva derivada. Considerem l'aplicació

$$f : I\!R_3[x] \rightarrow I\!R_2[x]$$

definida com: $f(p(x)) = p'(x)$.

a) Demostrau que és una aplicació lineal. **0.75 pt.**

b) Trobau la matriu associada a aquesta aplicació lineal respecte a les bases canòniques respectives. . **0.75 pt.**

c) Trobau la matriu associada a aquesta aplicació lineal si consideram la base canònica de $I\!R_3[x]$ i la base $\{1, 1+x, 1+x^2\}$ de $I\!R_2[x]$. **1 pt.**

P4.- Donada la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Trobau l'expressió de l'endomorfisme $f : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ que té la matriu A com a matriu associada en la base canònica (inicial i final). **0.5 pt.**

b) Calculau el polinomi característic de f i trobau els valors propis de l'endomorfisme. **0.5 pt.**

c) Calculau els subespais propis associats a cada valor propi. **0.5 pt.**

d) Aplicau el Teorema de Diagonalització per decidir si l'endomorfisme diagonalitza o no. En cas afirmatiu digueu quina és la matriu diagonal D i la matriu de canvi de base C tal que $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$. **1 pt.**

Indicació: cada valor propi apareix en la matriu diagonal tantes vegades com el valor de la seva multiplicitat com a valor propi.

Duració de l'examen 3:30 hores.