Final de Fonaments Matemàtics II.
(setembre 2000)

P1.- Demostrau, sense desenvolupar el determinant, la següent igualtat: **(1.5 pt.)**

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)^3$$

P2.- Considereu la base B de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,0)$, $u_3 = (0,0,1)$. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme donat per $f(x,y,z) = (2x-y-z, x+z, 3y+3z)$.

a) Donat un vector qualsevol $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, trobau les seves coordenades en la base B. **(0.5 pt.)**

b) Trobau la matriu de l'endomorfisme f en la base B (inicial i final). **(0.75 pt.)**

c) Calculeu $Im\ f$, $Ker\ f$, una base de cada un i les seves dimensions. **(0.75 pt.)**

P3.- Considerem les successions definides en forma recurrent, per a tot $n \geq 1$, per:

$$\left.\begin{array}{rclclcl} a_n & = & a_{n-1} & + & b_{n-1} & + & c_{n-1} \\ b_n & = & a_{n-1} & - & 2b_{n-1} & & \\ c_n & = & & & 3b_{n-1} & + & c_{n-1} \end{array}\right\}$$

amb a_0, b_0 i c_0 valors reals fixos.

a) Trobau la matriu A tal que $(a_n, b_n, c_n)^T = A(a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1})^T$. **(0.5 pt.)**

b) Calculau a_n, b_n i c_n en funció de a_0, b_0 i c_0. (Indicació: utilitzeu diagonalització). **(1.5 pt.)**

P4.- Siguin els polinomis $p_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $p_2(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\ t$ i $p_3(t) = at^2 + bt + c$. Definim el següent producte escalar:

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt, \quad \text{amb} \quad p, q \in \mathbb{R}_2[t].$$

on $\mathbb{R}_2[x]$ és l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals de grau menor o igual a 2.

a) Comprovau que els polinomis $p_1(t)$ i $p_2(t)$ són ortonormals entre sí respecte al producte escalar anterior. **(0.75 pt.)**

b) Trobau els coeficients a, b i c de $p_3(t)$ per tal que $p_1(t)$, $p_2(t)$ i $p_3(t)$ formin una base de vectors ortonormals de $\mathbb{R}_2[x]$ respecte a aquest producte escalar. **(0.75 pt.)**

P5.- El centre meteorològic local anuncia una tempesta amb llamps. Una companyia té un repetidor de senyal en aquesta zona. Se sap que el repetidor quedarà inutilitzat si un llamp cau a menys de 11 metres de l'antena. S'estima que la distància X de l'impacte d'un llamp a l'antena és una variable aleatòria amb funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{100} & si & 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ \frac{2}{a} - \frac{4}{a^2}(x - \frac{a}{2}) & si & \frac{a}{2} < x \leq a \\ 0 & altrament & \end{cases}$$

a) Calculau el valor de a. **(0.75 pt.)**

b) Si cauen quatre llamps (de forma independent) calculau la probabilitat que l'antena quedi inutilitzada. **(0.75 pt.)**

P6.- Sigui X una v.a. que segueix una distribució $Ge(p)$ (començant en 1). Considerem la v.a. Y funció de la v.a. X que ve donada, amb k un sencer positiu, per:

$$Y = H(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq X \leq k \\ M & \text{si} \quad (M-1)k < X \leq Mk \text{ per a } M = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Aquesta v.a. Y és el nombre de paquets de longitud k que es necessiten per transmetre un missatge de longitud X. Calculau la funció de probabilitat i de distribució de la v.a. Y. **(1.5 pt.)**

Duració de l'examen 3:30 hores.