

EXAMEN PROBABILITAT I PROCESSOS ALEATORIS. TELEMÀTICA
SETEMBRE 2010

P1.- La funció de densitat conjunta de dues variables aleatòries X i Y és:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kx^2e^{-y} & \text{si } 1 < |x| < 2 \text{ i } 1 < y < 3 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

- a) Trobau el valor de la constant k . **0.5 pt.**
- b) Demostrau que les variables X i Y són independents. **1 pt.**
- c) Calculau $P(Y - \frac{X}{2} \geq 2)$. **1 pt.**

Indicació: $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx = -2e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 4x + 8)$

P2.- Siguin X i Y dues v.a. discretes amb funció de probabilitat conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \alpha \sqrt{2xy} \quad \text{si } x = 0, 1, 2; y = 1, 4, 9; \quad f_{XY}(x, y) = 0 \quad \text{altrament}$$

Calculau:

- a) El valor de la constant α . **0.5 pt.**
- b) La funció de probabilitat de $U = \frac{X^2+1}{Y}$. **0.5 pt.**
- c) La funció de probabilitat de $V = |3Y - 2X|$. **0.5 pt.**
- d) El vector de mitjanes de (U, V) . **0.5 pt.**
- e) La covariància de U i V . **0.5 pt.**

P3.- El motor que permet orientar una antena parabòlica produeix un error en l'orientació de ε graus cada vegada que s'acciona, on $\varepsilon \sim N(0, 1)$. Els errors en l'orientació s'acumulen després de cada actuació del motor i són independents entre sí.

- a) Quina és la probabilitat que l'error d'orientació sigui superior a 5 graus després de 100 actuacions del motor? **1.25 pt.**
- b) Quan l'error acumulat (en valor absolut) és superior a 10 graus l'antena s'ha de recalibrar. Quin és el nombre màxim d'actuacions del motor que es poden fer si es vol garantir, amb una probabilitat del 95%, que l'antena no necessita ésser recalibrada? **1.25 pt.**

P4.- Consideram el procés aleatori $Z(t) = t + X$, on X és una v.a. uniforme en l'interval $[-0.1, 0.1]$.

- a) Calculau la probabilitat que $Z(t)$ sigui major que 1 per a valors de t entre 0 i 1. **1 pt.**
- b) Calculau la mitjana i l'autocovariància del procés. Es tracta d'un procés estacionari?. **0.75pt.**
- c) Consideram el procés $W(t) = t^2 + Y$, on Y és una v.a. gaussiana de mitjana 0 i desviació típica 0.1. Si X i Y són v.a. independents, estan incorrelats els processos?. Justificau la resposta. **0.75 pt.**