

P1.- Sigui $\mathbb{R}_2[x]$ l'espai vectorial format pels polinomis de grau menor o igual a 2 amb coeficients reals:

$$\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Consideram el subconjunt $V \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ definit com

$$V = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] : 2a + b + c = 0\}$$

- a) Demostrar que V és un subespai vectorial? 0.5 pt
- b) Calcular la dimensió de V . 1 pt

P2.- Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida com $f(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$,

- a) Trobar la matriu associada a f en la base canònica. 0.25 pt
- b) És f un monomorfisme? Justificar-ho. 0.5 pt
- c) És f un epimorfisme? Justificar-ho. 0.5 pt
- d) És f un automorfisme? Justificar-ho. 0.25 pt

P3.- Donada la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Trobar el polinomi característic de la matriu i els seus valors propis. 0.75 pt
- b) Trobar els subespais propis associats a cada valor propi. Diagonalitza la matriu? 0.75 pt
- c) Quina és la relació entre la matriu A i la seva matriu diagonal associada?
Calcular explícitament totes les matrius implicades en aquesta relació. 0.5 pt

P4.- Una capsa A conté nou cartes numerades del 1 al 9, i una altra capsa B conté cinc cartes numerades del 1 al 5. S'agafa una capsa a l'atzar i es treu una carta; si la carta indica un nombre parell, llavors es treu una altra carta de la mateixa capsa; si la carta indica un nombre imparell, es treu una carta de l'altra capsa. Les extraccions es fan sense reposició.

- a) Quina és la probabilitat que ambdues cartes tenguin nombres parells? 0.5 pt.
- b) Si ambdues cartes mostren nombres parells, quina és la probabilitat que procedeixin de la capsa A ? 0.5 pt.
- c) Quina és la probabilitat que una carta sigui parell i l'altra imparell? 0.75 pt.

P5.- La probabilitat que es produeixi una errada per hora en el funcionament d'una màquina és de 0.005. Es suposa que les errades ocorren de manera independent.

- a) Quina és la probabilitat que en 1000 hores de funcionament no es produeixi cap errada? 0.5 pt.
- b) Quina és la probabilitat que el temps entre dues errades consecutives sigui inferior a 100 hores? 0.75 pt.
- c) Una empresa té 5 màquines com les descrites en els apartats anteriors. Totes les màquines es posen en marxa al mateix moment. Quina és la probabilitat que al cap de 100 hores ja hagin fallat 2 màquines? 0.75 pt.

P6.- Un sistema de transmissió emet, de manera equiprobable, els dígit -1 , 0 i 1 . Quan es transmet el símbol i es rep el símbol j amb les següents probabilitats: $P(r_1|t_1) = 0.9$, $P(r_0|t_1) = 0.1$, $P(r_1|t_0) = 0.1$, $P(r_0|t_0) = 0.8$, $P(r_{-1}|t_0) = 0.1$, $P(r_0|t_{-1}) = 0.1$, $P(r_{-1}|t_{-1}) = 0.9$. On r_i denota el succés "rebre el símbol i " i t_j denota el succés "enviar el símbol j ".

- a) Si definim la variable aleatòria $D = (i - j)^2$ com la distorsió de la comunicació. Quin és l'espai mostral de D ? 0.5 pt.
- b) Quin és el valor mitjà de la distorsió? 0.75 pt.

Examen final: totes les preguntes. Duració: 4:00 hores.

Primer parcial: preguntes 1, 2 i 3 (2 hores). Segon parcial: preguntes 4, 5 i 6 (2 hores).

Per aprovar l'assignatura s'ha de puntuar com a mínim un 30% de cada part i la mitja ha d'ésser superior o igual a 5.