Fonaments Matemàtics II. Telemàtica
Control 3. Aplicacions lineals. Curs 09/10

Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x]$ donada per $f(a,b) = p(x)$, on $p(x)$ ve definit de la següent forma:

$$p(x) = \int (a+bx)\,dx \qquad \text{tal que} \qquad p(0) = 0$$

a) Demostrau que f és una aplicació lineal. **2 pt.**

b) Trobau una base d'$Im\, f$ i $ker\, f$. **2 pt.**

c) Indicau si l'aplicació és injectiva, exhaustiva o bijectiva. **1 pt.**

d) Trobau la matriu associada a l'aplicació lineal respecte a la base canonica del conjunt inicial i a la base $\{1, 1+x, 1+x^2\}$ del conjunt final. **2 pt.**

e) Calculau les coordenades de $f(1,1)$ respecte a la base indicada a l'apartat anterior. **1 pt.**

f) Donat el subespai vectorial $S = \langle 3x + 2x^2 \rangle$, calculau una base de $f^{-1}(S)$. **2 pt.**

Solució:

Vegem primer com està definida l'aplicació f.

$$f(a,b) = p(x) = \int (a+bx)\,dx = ax + b\frac{x^2}{2} + C$$

Ara bé, com $p(0) = 0$ tenim $p(0) = C = 0$. Per tant, $f(a,b) = ax + \frac{b}{2}x^2$.

a) Vegem que f és lineal

- Hem de veure que $f[(a,b) + (a',b')] = f(a,b) + f(a',b')$

$$f[(a,b)+(a',b') = f(a+a', b+b') = (a+a')x + \frac{b+b'}{2}x^2 = ax + \frac{b}{2}x^2 + a'x + \frac{b'}{2}x^2 = f(a,b) + f(a',b')$$

- També hem de veure que $f[t(a,b)] = tf(a,b)$

$$f[t(a,b)] = f(ta, tb) = (ta)x + \frac{tb}{2}x^2 = t\Big(a + \frac{b}{2}x^2\Big) = tf(a,b)$$

A continuació aplicarem l'isomorfisme $h : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que $h(a + bx + cx^2) = (a,b,c)$ i en lloc de fer l'estudi sobre l'aplicació f ho farem sobre l'aplicació $f' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f'(a,b) = (0, a, \frac{b}{2})$.

b) Trobem primer una base d'$Im\, f'$.

Una base de $\mathbb{R}^2$ és $\{(1,0),(0,1)\}$, per tant, un sistema generador d'$Im\, f'$ és $\{f'(1,0), f'(0,1)\} = \{(0,1,0),(0,0,\frac{1}{2})\}$, que també són linealment independents (cada un té davant un zero més que l'anterior) i per tant formen una base de $\mathbb{R}^3$.

Aleshores una base de $Im\, f = \{x, \frac{x^2}{2}\}$

Cerquem una base de $ker\, f$. Hem vist a teoria que $dim\, \mathbb{R}^2 = dim\, Im\, f + dim\, ker\, f$. Substituint tenim $2 = 2 + dim\, ker\, f$, per tant, $dim\, ker\, f = 0$ i no té base.

c) Com $ker\, f = \{(0,0)\}$ tenim que és injectiva. Com $dim\, Im\, f = 2$ diferent a $dim\, \mathbb{R}_2[x]$ no és exhaustiva i per tant tampoc és bijectiva.

d) Si consideram l'aplicació f' tenim que la base del conjunt inicial és $\{(1,0),(0,1)\}$ i la del conjunt final és $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1)\}$. Aleshores

$$f'(1,0) = (0,1,0) = x(1,0,0) + y(1,1,0) + z(1,0,1)$$

que operant tenim $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$.

Anàlogament

$$f'(0,1) = (0,0,\frac{1}{2}) = x(1,0,0) + y(1,1,0) + z(1,0,1)$$

que operant tenim $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$.

Aleshores la matriu associada a f' (i per tant la de f ja que tractam en coordenades) serà

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e)

$$f'(1,1) = (0,1,\frac{1}{2}) = x(1,0,0) + y(1,1,0) + z(1,0,1)$$

operant tenim $x = -\frac{3}{2}$, $y = 1$, $z = \frac{1}{2}$ que seran les coordenades demanades

f) Considerem l'espai isomorf $S' = \langle(0,3,2)\rangle$. Tenim que $(a,b) \in f^{-1}(S')$ si $f'(a,b) \in S'$, és a dir, si $(0,a,\frac{b}{2}) \in \langle(0,3,2)\rangle$ i això es complirà si $\{(0,a,\frac{b}{2}),(0,3,2)\}$ són linealment dependents

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & a & \frac{b}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3b}{2} - 2a \end{pmatrix}$$

i perquè siguin linealment dependents s'ha de complir

$$\frac{3b}{2} - 2a = 0, \qquad \text{és a dir,} \qquad a = \frac{3}{4}\,b$$

Aleshores els elements de $f^{-1}(S')$ seran de la forma

$$(a,b) = \Big(\frac{3}{4}\,b, b\Big) = b\Big(\frac{3}{4}, 1\Big)$$

i una base seria

$$\Big\{\Big(\frac{3}{4}, 1\Big)\Big\}$$