1 Si $z = 1 + 2i$ i $\omega = 3 - i$, comprovau les propietats següents:

a) $\overline{\overline{z}} = z$ **b)** $\overline{z + \omega} = \overline{z} + \overline{\omega}$

c) $\overline{z \cdot \omega} = \overline{z} \cdot \overline{\omega}$ **d)** $z \cdot \overline{z} \geq 0$

2 Si $z = 3 - 4i$ i $\omega = -6 + 8i$, comprovau les propietats següents:

a) $|\,\overline{z}\,| = |\,z\,|$ **b)** $|\,z \cdot \omega\,| = |\,z\,| \cdot |\,\omega\,|$

c) $|\,\mathrm{Re}\, z\,| \leq |\,z\,|$ **d)** $|\,\mathrm{Im}\, z\,| \leq |\,z\,|$

e) $|\,z + \omega\,| \leq |\,z\,| + |\,\omega\,|$

3 Calculau el mòdul i l'argument dels nombres complexos següents:

$$2\sqrt{3} - 2i, \quad 5i, \quad -\sqrt{3} - i, \quad -4 + 4\sqrt{3}i, \quad 1 + i$$

4 Representau gràficament i expressau en forma exponencial i en forma trigonomètrica els nombres complexos següents:

a) $z = i$ **b)** $z = -2 - 2i$ **c)** $z = 2$

d) $z = 1 + i$ **e)** $z = 1 - i$ **f)** $z = -1 + i$

5 Representau gràficament i expressau en forma binòmica els nombres complexos següents expressats en forma exponencial:

a) $z = 3\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ **b)** $z = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ **c)** $z = 6\, e^{i\frac{5\pi}{3}}$

d) $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$ **e)** $z = 8\, e^{i\frac{\pi}{2}}$ **f)** $z = 4\, e^{i\pi}$

6 Resoleu les equacions següents en $\mathbb{C}$ i descomponeu en factors:

a) $4x^2 + 48x + 169 = 0$ **b)** $4x^2 - 12x + 25 = 0$

c) $x^2 + 49 = 0$ **d)** $x^2 + 16 = 0$

e) $x^2 + 2x - 5 = 0$ **f)** $3x^2 - x - 10 = 0$

7 Si $z = 3 + 2i$ i $\omega = 5 - i$, comprovau les propietats següents:

a) $e^{z+\omega} = e^z \cdot e^\omega$ **b)** $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

c) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ **d)** $e^z = e^{z+2\pi i}$

8 Provau que si $z_1 = 2-2i, z_2 = 4+5i,$ aleshores $(z_1 \cdot z_2)^2 = z_1^2 \cdot z_2^2$

9 Efectuau les operacions següents amb nombres complexos:

a) $(1-i+i^2)(2i-1)^2$ **b)** $(2+3i)^5$

c) $\dfrac{i^{15}-i^{16}}{2-i}$ **d)** $\dfrac{(1+i+...+i^{62})}{2-i}$

10 Determinau el conjunt de tots els $x, y \in \mathbb{R}$ tals que:

a) $x+iy = |\, x-iy \,|$ **b)** $x+iy = (x-iy)^2$ **c)** $x+iy = \displaystyle\sum_{k=0}^{100} i^k$

11 Determinau els conjunts següents:

a) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, 1+e^z = 0\}$ **b)** $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \dfrac{1}{e} - e^z = 0\}$ **c)** $\{z \in \mathbb{C} \,:\, 1+i-e^z = 0\}$

12 Determinau les arrels complexes

$$\sqrt[3]{-5i},\quad \sqrt[4]{-\sqrt{3}+i},\quad \sqrt[5]{4-4\sqrt{3}i},\quad \sqrt[6]{1+i}, \sqrt[3]{-1}$$

13 Determinau tots els $z \in \mathbb{C}$ tals que $z^4 + i = 0$ i tots els $z \in \mathbb{C}$ tals que $z^8 = 1$.

14 Sigui $z = 1+i$. Calculau els conjunts de valors de $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ i $\sqrt[n]{z^m}$ per als casos següents:

a) $m=4,\ n=2$ b) $m=3,\ n=2$

Nota. Siguin m i n dos nombres naturals i z un nombre complex distint de 0. Llavors el nombre de valors distints de $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ és $\frac{n}{d}$, on $d = \text{mcd}(m,n)$.