

Processament Digital del Senyal

Problemes Tema 3

1. Determineu la transformada \mathcal{Z} i la ROC dels senyals següents:

(a) $x[n] = (-2, 1, 0, 3, \underline{0})$.

(b) $x[n] = (-2, 1, 0, 3, \underline{3})$.

(c) $x[n] = (-2, 1, \underline{0}, 3)$.

(d) $x[n] = (\underline{3}, 1, -1)$.

2. Determineu la transformada \mathcal{Z} i la ROC dels senyals següents:

(a) $x[n] = u[n]$.

(b) $x[n] = (1 + n)u[n]$.

(c) $x[n] = (a^n + a^{-n})u[n]$.

(d) $x[n] = a^n u[n] - a^{-n} u[-n - 1]$.

(e) $x[n] = \cos(\omega n)u[n]$.

(f) $x[n] = n \cos(\omega n)u[n]$.

(g) $x[n] = a^n \cos(\omega n)u[n]$.

(h) $x[n] = na^n \cos(\omega n)u[n]$.

(i) $x[n] = (n^2 + n)a^{n-1}u[n - 1]$.

On a i ω són paràmetres arbitraris.

3. Determineu la transformada \mathcal{Z} i la ROC dels senyals següents:

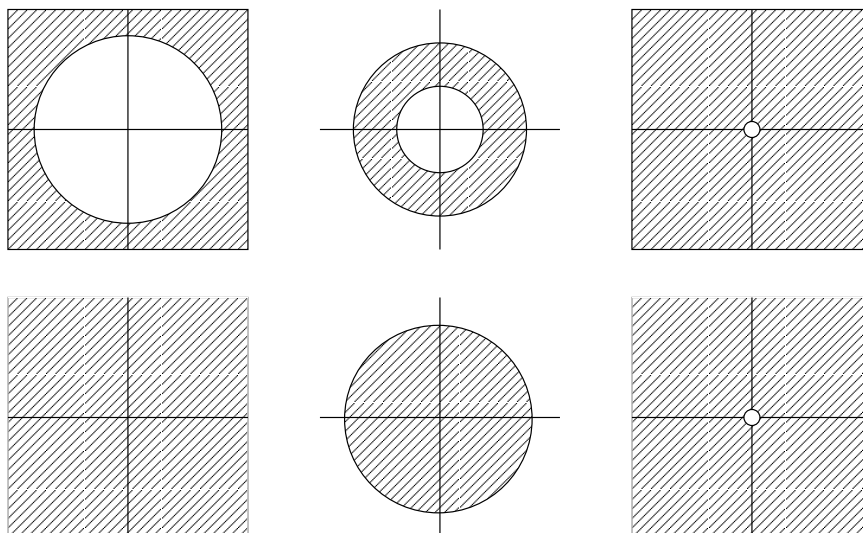
(a) $x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{si } n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, & \text{si } n < 0 \end{cases}$.

(b) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n - 1]$.

4. Tenim uns senyals amb les propietats:

- x_1 és de durada finita i causal.
- x_2 és de durada finita i anticausal.
- x_3 és de durada finita i no és ni causal ni anticausal.
- x_4 és de durada infinita i causal.
- x_5 és de durada infinita i anticausal.
- x_6 és de durada infinita i no és ni causal ni anticausal.

Digueu quina d'aquestes ROC correspon a cada cas: (noteu que el quadrat exterior simbolitza l'infinit)



5. Trobeu la transformada \mathcal{Z} dels senyals

- $y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$.
- $y_2[n] = x[2n]$.
- $y_3[n] = \begin{cases} x[n/2] & \text{si } n \text{ és parell} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

en funció de la transformada del senyal x .

6. Calculeu els senyals causals que tenen per transformada \mathcal{Z} els següents:

- $X(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$.
- $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$.

$$(c) \quad X(z) = \frac{z^{-6} + z^{-7}}{1 - z^{-1}}.$$

$$(d) \quad X(z) = \frac{1 + 2z^{-2}}{1 + z^{-2}}.$$

7. D'un senyal tant sols coneixem l'expressió tancada de la transformada \mathcal{Z} :

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(3 - z^{-1})}.$$

Digueu quantes possibles ROC diferents pot tenir i, per cadascuna d'aquestes, trobeu el senyal corresponent.

8. Sigui $x[n]$ un senyal amb transformada $X(z)$. Trobeu la transformada dels senyals:

(a) $x^*[n]$, on x^* és el complex conjugat de x .

(b) $\Re(x[n])$.

(c) $\Im(x[n])$.

Deduiu propietats de simetria per a senyals reals i imaginaris purs.

9. Un sistema LTI s'excita amb el senyal graó unitat $x[n] = u[n]$; la sortida que s'observa és $y[n] = (\frac{1}{2})^{n+1}u[n-1]$.

(a) Trobeu la transformada de la resposta impulsional del sistema $H(z)$.

(b) Trobeu la resposta impulsional del sistema.

10. L'entrada a un sistema LTI és $x[n] = u[-n-1] + (\frac{1}{2})^n u[n]$. De la sortida tant sols coneixem la expressió tancada per a la transformada,

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})},$$

mentre que desconexem la seva ROC.

(a) Determineu la ROC de $Y(z)$.

(b) Determineu la resposta impulsional del sistema.

11. Sigui $x[n]$ un senyal causal.
- (a) Calculeu $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$.
 - (b) Demostreu que si $X(z)$ ve donat per un quocient de polinomis, $X(z) = P(z)/Q(z)$, aleshores $\deg P \leq \deg Q$.
12. Sigui $x[n]$ un senyal causal tal que la seva transformada \mathcal{Z} té com a zeros $z_1 = -1$ i com a pols $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = -\frac{1}{2}$, $p_3 = p_4^* = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$. Determineu el diagrama de zeros i pols i la ROC dels senyals $x_1[n] = x[n-2]$, $x_2[n] = x[-n-2]$ i $x_3[n] = e^{jn\pi/3}x[n]$.
13. Disenyeu un sistema LTI causal tal que quan s'excita amb el senyal

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

la sortida és

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

Seguiu els pasos:

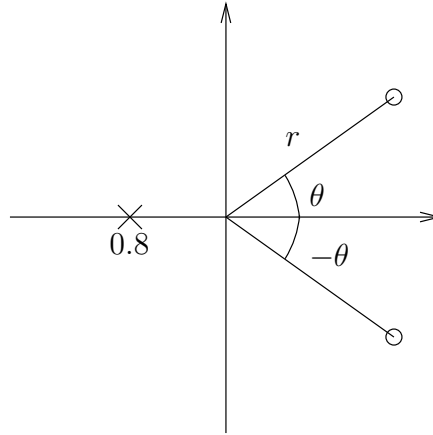
- (a) Trobeu la transformada de la resposta impulsional necessària.
 - (b) Trobeu aquesta resposta impulsional.
 - (c) Trobeu una equació en diferències finites que implementi el sistema.
 - (d) Trobeu la realització canònica del sistema.
 - (e) Discussiu l'estabilitat del sistema.
14. Sigui \mathcal{T} un sistema causal caracteritzat per l'equació en diferències finites:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = x[n].$$

Feu servir la caracterització d'estabilitat d'un sistema causal en funció dels pols de $H(z)$ per trobar les condicions que han de complir els paràmetres a_1 i a_2 per tal que el sistema sigui estable.

15. Un sistema té 3 pols situats a $z = -3$, -0.5 i 2 i un zero situat a $z = 1$.
- (a) Suposant que el sistema és estable, trobeu-ne la ROC.
 - (b) Suposant que el sistema és causal, trobeu-ne la ROC.
 - (c) És possible que un sistema estable i causal tingui aquesta configuració de zeros i pols?

16. D'un sistema LTI causal en coneixem el diagrama de zeros i pols, on $r = 1.5$ i $\theta = \pi/6$:



- (a) Trobeu la funció de transferència sabent que $H(1) = 1$.
 - (b) Trobeu la resposta impulsional.
 - (c) Discussiu l'estabilitat del sistema.
17. Demostreu que si $x[n]$ és un senyal causal, aleshores

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0].$$

Doneu un resultat d'aquest estil per a senyals anticausals.