Tema 2. Suma de variables aleatòries

En aquest tema estudiarem les propietats de la suma de n variables aleatòries $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, on n pot ésser un valor constant o un valor aleatori.

Funcions de probabilitat o densitat d'una suma de variables aleatòries

Si definim $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, on $X_1, \cdots, X_n$ són variables aleatòries i n és constant, en general és difícil calcular la funció de probabilitat (si les n variables són discretes) o de densitat (si les n variables són contínues) de S_n a partir de les funcions de probabilitat o densitat de $X_1, \cdots, X_n$. La manera general de fer-ho seria la següent:

cas discret:

$$P(S_n = s) = \sum \cdots \sum_{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n)$$

on $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n)/x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s\}$

cas continu:

$$F_{S_n}(s) = P(S_n \leq s) = \int \cdots \int_{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A} f_{X_1 X_2 \cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

on $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n)/x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq s\}$ i $f_{S_n}(s) = \frac{df_{S_n}(s)}{ds}$.

Una manera alternativa de calcular la probabilitat o densitat de S_n és utilitzant funcions característiques o funcions generadores de probabilitat:

La **funció característica** d'una v.a. (continua o discreta) X es defineix com $\Phi_X(\omega) = E(e^{j\omega X})$.
La **funció generadora de probabilitat** d'una v.a. discreta X ($X \geq 0$) és $G_X(z) = E(z^X)$.
Propietats:

- $\Phi_{S_n}(\omega) = \Phi_{X_1}(\omega) \cdot \Phi_{X_2}(\omega) \cdots \Phi_{X_n}(\omega)$ si les v.a. X_i són independents.
- $G_{S_n}(z) = G_{X_1}(z) \cdot G_{X_2}(z) \cdots G_{X_n}(z)$ si les v.a. X_i són independents.

En alguns casos concrets les funcions de probabilitat o densitat es poden calcular fàcilment a partir de les densitats o probabilitats de les v.a. sumades:

- la suma de n v.a. binomials independents $X_i \sim B(n_i, p)$ és una v.a. binomial

$$S_n \sim B(n_1 + n_2 + \cdots + n_n, p)$$

- la suma de n v.a. de Poisson independents $X_i \sim \mathrm{Po}(\lambda_i)$ és una v.a. de Poisson

$$S_n \sim \mathrm{Po}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$$

- la suma de n v.a. Gaussianes independents $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ és una v.a. Gaussiana

$$S_n \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$

Exemple 1:

Sabent que la funció característica d'una v.a. Gaussiana $N(\mu, \sigma^2)$ és $\Phi(\omega) = e^{\frac{j\mu\omega - \sigma^2\omega^2}{2}}$, demostrau que la suma de n v.a. Gaussianes independents $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ és també Gaussiana amb paràmetres $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$ i $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$.

Exemple 2:

(Exercici 4).Sigui $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ on X_i són v.a. independents i amb distribució $B(n_i, p)$ per a $i = 1, \ldots, k$. Utilitzau la funció generadora de probabilitats per demostrar que S_k segueix una distribució $B(\sum_{i=1}^k n_i, p)$. Explicau aquest resultat.

Exercicis proposats: 5 (indicació: si $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, llavors $G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$).