Tema 1. Introducció al Processament Digital del Senyal.

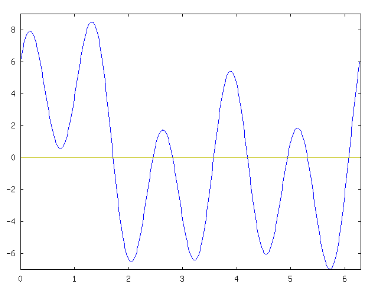
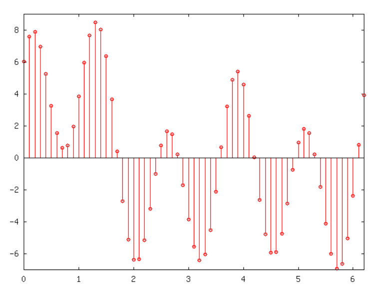
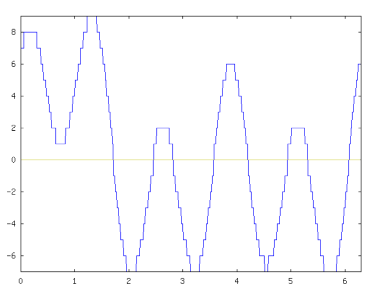
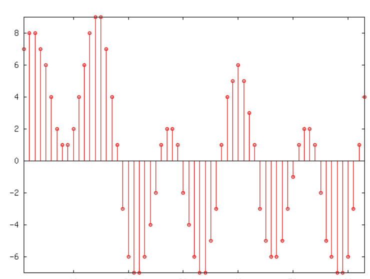
Senyals

Un **senyal** és el conjunt de valors numèrics resultants de mesurar un fenomen físic que varia amb el temps, l'espai o qualsevol altre paràmetre.

Exemples:

- La mesura del corrent elèctric que mostra un oscil.loscopi.
- Les variacions de la pressió de l'aire quan una persona parla.
- Un electrocardiograma.
- Una fotografia.

En aquest curs ens limitarem a estudiar els senyals que varien respecte a un únic paràmetre, que en general serà el temps, per tant els senyals estaran formats per una *seqüència de valors.* En funció de com siguin aquesta seqüència i aquest conjunt de valors poder classificar els senyals de la següent manera:

	Seqüència contínua	Seqüència discreta
Conjunt continu de valors	Senyal Analògic 	Senyal en temps discret 
Conjunt discret de valors		Senyal digital 

Notació

Matemàticament els senyals es modelen com a funcions: $f : A \to B$, on els conjunts A i B depenen del tipus de senyal:

	Seqüència contínua $A = \mathbb{R}$	Seqüència discreta $A = \mathbb{Z}$
Conjunt continu de valors $B = \mathbb{R}$ o $B = \mathbb{C}$	Senyal analògic Notació: $f(t)$	Senyal en temps discret Notació: $f(nT)$
Conjunt discret de valors $B = \{v_0, v_1, \cdots, v_k, \cdots\}$ on $v_i \in \mathbb{R}$ o $v_i \in \mathbb{C}$		Senyal digital Notació: $f[n]$

Si B està format per valors reals deim que el senyal és un **senyal real**, si està format per valors complexes parlam de **senyal complexe**.

Tractament analògic vs. tractament digital de senyals

Per **tractament o processament de senyal** entenem qualsevol operació que permet generar, rebre, enviar o modificar un senyal. Fins als anys 60 la majoria de senyals amb què treballaven els enginyers eren senyals analògics (per exemple senyals de radar) que es tractaven amb circuits electrònics analògics (basats en vàlvules i transistors). Amb l'aparició dels ordinadors i els circuits digitals es va passar a treballar amb senyals digitals, que són els únics que poden tractar els ordinadors. L'ús de la tecnologia digital permet molta més flexibilitat en el tractament de senyals. El **processament digital de senyals** fa referència a les modificacions que afecten els senyals digitals.

La figura 1 mostra un exemple d'un circuit electrònic (filtre analògic) que fa un processament d'un senyal analògic. La figura 2 mostra l'exemple d'un programa d'ordinador (filtre digital) que fa un filtratge equivalent. Resulta evident que és més senzill canviar els paràmetres del filtre digital modificant algunes línees del codi que haver de remplaçar resistències i condensadors en el circuit digital.

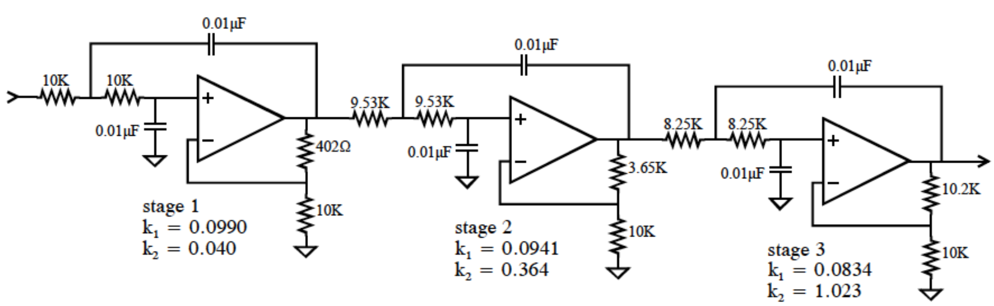


Figura 1: Exemple de filtre analògic (font: The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, A.W. Smith)

Conversió analògica-digital

Per a que els filtres analògic i digital mostrats en les figures anteriors siguin realment equivalents és necessari convertir primer els senyals d'entrada analògics a format digital. I, una vegada processats, convertir la sortida a format analògic. Un senyal analògic es pot transformar en digital mitjantzant la **digitalització**, que compren un procés de **mostreig** i un procés de **quantització** (veure figura 3). La conversió inversa (de digital a analògic) també és possible i el senyal obtingut és idèntic a l'original sempre que la quantització i el mostreig verifiquin unes certes condicions.

```
100 'LOW-PASS WINDOWED-SINC FILTER
110 'This program filters 5000 samples with a 101 point windowed-sinc filter,
120 'resulting in 4900 samples of filtered data.
130 '
140 DIM X[4999]                  'X[ ] holds the input signal
150 DIM Y[4999]                  'Y[ ] holds the output signal
160 DIM H[100]                   'H[ ] holds the filter kernel
170 '
180 PI = 3.14159265
190 FC = .14                     'Set the cutoff frequency (between 0 and 0.5)
200 M% = 100                     'Set filter length (101 points)
210 '
220 GOSUB XXXX                   'Mythical subroutine to load X[ ]
230 '
240 '                            'Calculate the low-pass filter kernel via Eq. 16-4
250 FOR I% = 0 TO 100
260   IF (I%-M%/2) = 0 THEN H[I%] = 2*PI*FC
270   IF (I%-M%/2) <> 0  THEN H[I%] = SIN(2*PI*FC * (I%-M%/2)) / (I%-M%/2)
280   H[I%] = H[I%] * (0.54 - 0.46*COS(2*PI*I%/M%) )
290 NEXT I%
300 '
310 SUM = 0                      'Normalize the low-pass filter kernel for
320 FOR I% = 0 TO 100            'unity gain at DC
330   SUM = SUM + H[I%]
340 NEXT I%
350 '
360 FOR I% = 0 TO 100
370   H[I%] = H[I%] / SUM
380 NEXT I%
390 '
400 FOR J% = 100 TO 4999         'Convolve the input signal & filter kernel
410   Y[J%] = 0
420   FOR I% = 0 TO 100
430     Y[J%] = Y[J%] + X[J%-I%] * H[I%]
440   NEXT I%
450 NEXT J%
460 '
470 END
```

Figura 2: Exemple de filtre digital (font: The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, A.W. Smith)

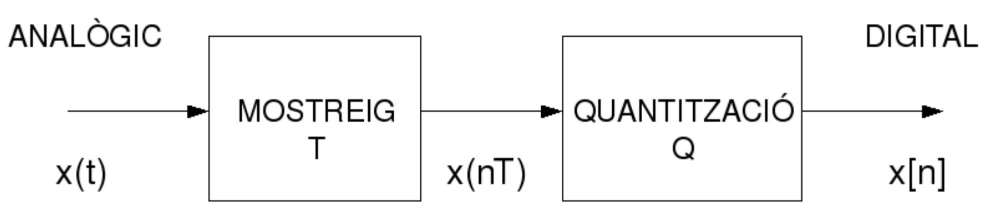


Figura 3: Conversió analògica-digital

Senyals digitals

En aquest curs treballarem principalment amb senyals digitals, els quals es poden descriure mitjançant una seqüència de números o mitjançant una fòrmula.

Exemples:

- $x[n] = \{\cdots, 5, \underline{7}, 15, 11, \cdots\}$ (seqüència infinita)
- $x[n] = \{2, 9, \underline{-4}, -3, 5, 17\}$ (seqüència finita)
- $x[n] = (-1)^n + 2$ (seqüència infinita)

Alguns senyals importants:

- **Delta de Dirac (impuls unitari)**: $\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$
- **Esglaó unitari:** $u[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$
- **Senyal sinusoïdal**:

  $$x[n] = A\cos(\omega n + \theta) \qquad \text{o} \qquad x[n] = A\sin(\omega n + \theta)$$

  A s'anomena amplitud, ω és la freqüència angular ($\omega = 2\pi f$) i θ és la fase del senyal.
- **Senyal exponencial complexe**:

  $$x[n] = a^n, \qquad a \in \mathbb{C}$$

  Observem que, donat que a és un nombre complexe, llavors $a = re^{i\theta}$ i per tant

  $$x[n] = a^n = r^n e^{i\theta n} = r^n(\cos(\theta n) + i\sin(\theta n)) = r^n\cos(\theta n) + ir^n\sin(\theta n) = x_R[n] + ix_I[n]$$

  on x_R i x_I són senyals sinusoïdals.

Classificació dels senyals.

Els senyals digitals es poden classificar seguint diversos criteris:

- Senyals periòdics i no periòdics. El senyal $x[n]$ es diu **periòdic** si verifica la següent condició:

  $$x[n] = x[n+N] \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad\qquad \text{per a algun } N \in \mathbb{Z}$$

- Senyals parells i senars.

  $x[n]$ és parell si $x[n] = x[-n]$

  $x[n]$ és senar o imparell si $x[n] = -x[-n]$

  Propietat: donat un senyal qualsevol $x[n]$, $x_P[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$ és un senyal parell, $x_I[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$ és un senyal senar i, a més, $x[n] = x_P[n] + x_I[n]$.
- Senyals d'energia i de potència.

  $x[n]$ és un **senyal d'energia finita** si

  $$E = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

  $x[n]$ és un **senyal de potència finita** si

  $$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{+N} |x[n]|^2 < \infty$$

- Senyals causals i anticausals.

  $x[n]$ és **causal** si $x[n] = 0 \; \forall n < 0$

  $x[n]$ és **anticausal** si $x[n] = 0 \; \forall n \geq 0$

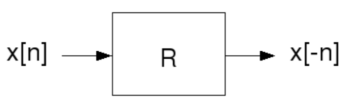
- Senyals deterministes i aleatoris. Els senyals **deterministes** són aquells els valors dels quals són coneguts sense cap incertesa. Els senyals **aleatoris**, en canvi, evolucionen amb el temps d'una manera impredictible. Aquest senyals es modelen com a **processos aleatoris** que, en general, es consideren estacionaris i ergòdics.

Operacions bàsiques amb senyals.

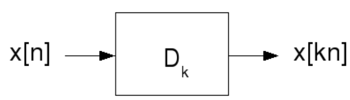
- Reflexió (R). $y[n] = R\,x[n] = x[-n]$
- Translació (T_k). $y[n] = T_k\,x[n] = x[n-k]$
- Delmació (D_k). $y[n] = D_k\,x[n] = x[kn]$
- Producte per un escalar. $y[n] = k \cdot x[n]$
- Suma de senyals. $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$
- Producte de senyals. $y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$

Aquestes operacions es poden representar gràficament mitjançant **diagrames de blocs**:

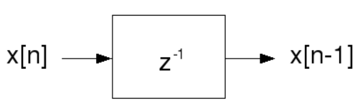
Reflexió



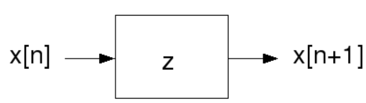
Delmació



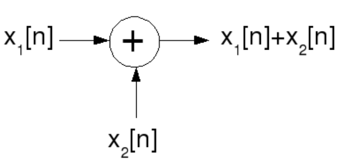
Translació unitària a la dreta
(retard unitari)



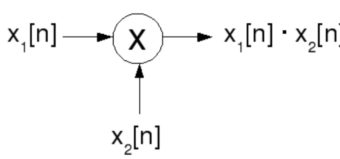
Translació unitària a l'esquerra
(avanç unitari)



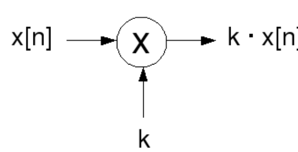
Suma



Producte



Producte per escalar



Descomposició d'un senyal en deltes de Dirac

Qualsevol senyal $x[n]$ es pot escriure com una combinació de deltes de Dirac mitjançant les operacions de suma, producte per escalars i translació, segons la fòrmula següent:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Convolució de senyals

La convolució és una operació entre dos senyals que es denota amb el símbol $*$ i es defineix de la següent manera:

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n-k]$$

Propietats de la convolució:

- $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$
- $x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$
- $x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$
- Si $x_1[n]$ té una durada M_1 i $x_2[n]$ una durada M_2, llavors $x_1[n] * x_2[n]$ té una durada $M_1 + M_2 - 1$.

Observació: $x[n] = x[n] * \delta[n]$