1 Classes Pràctiques de vectors i valors propis

Classe pràctica 3

Prob 3 Considerem les successions definides en forma recurrent, per a tot $n \geq 1$, per:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} a_n & = & a_{n-1} & + & b_{n-1} & + & c_{n-1} \\ b_n & = & a_{n-1} & - & 2b_{n-1} & & \\ c_n & = & & & 3b_{n-1} & + & c_{n-1} \end{array}\right\}$$

amb $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ i $c_0 = 3$ valors reals fixos.

a) Trobau la matriu A tal que $(a_n, b_n, c_n)^T = A(a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1})^T$.

b) Calculau a_n, b_n i c_n.

(Examen, setembre 2000)

Solució classe pràctica 3

Prob 3 Considerem les successions definides en forma recurrent, per a tot $n \geq 1$, per:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} a_n & = & a_{n-1} & + & b_{n-1} & + & c_{n-1} \\ b_n & = & a_{n-1} & - & 2b_{n-1} & & \\ c_n & = & & & 3b_{n-1} & + & c_{n-1} \end{array}\right\}$$

amb $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ i $c_0 = 3$ valors reals fixos.

a) Trobau la matriu A tal que $(a_n, b_n, c_n)^T = A(a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1})^T$.

b) Calculau a_n, b_n i c_n.

Solució:

a)

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

b) a_n, b_n i c_n en funció de a_0, b_0 i c_0 seria:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

i per cercar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^n$$

diagonalitzarem la matriu.
Els valors propis els obtindrem resolent l'equació $|A - tI| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & -2-t & 0 \\ 0 & 3 & 1-t \end{vmatrix} = 4t - t^3 = 0$$

d'aquí tenim que les arrels són $t = 0,\ t = 2$ i $t = -2$
Com la matriu és d'ordre 3 i el nombre d'arrels diferents és 3 la matriu és diagonalitzable i la matriu diagonal és:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ara trobarem una base formada per vectors propis
Cerquem $V(0)$ que està format per tots els vectors (x, y, z) que verifiquen l'equació:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolent el sistema tenim les solucions: $x = -2z/3,\ y = -z/3$. Aleshores els elements de $V(0)$ seran de la forma $(-2z/3, -z/3, z) = z(-2/3, -1/3, 1)$ i per tant $V(0) =< (-2, -1, 3) >$.

A continuació cerquem $V(2)$ que està format per tots els vectors (x, y, z) que verifiquen l'equació:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolent el sistema tenim les solucions: $x = 4z/3,\ y = z/3$. Aleshores els elements de $V(2)$ seran de la forma $(4z/3, z/3, z) = z(4/3, 1/3, z)$ i per tant $V(2) =< (4, 1, 3) >$.

Finalment cerquem $V(-2)$ que està format per tots els vectors (x, y, z) que verifiquen l'equació:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolent el sistema tenim les solucions: $x = 0,\ y = -z$. Aleshores els elements de $V(-2)$ seran de la forma $(0, -z, z) = z(0, -1, 1)$ i per tant $V(-2) =< (0, -1, 1) >$.

La matriu del canvi de base que serà la que està formada pels vectors propis és

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{9}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Tenim que $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ per tant:

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{9}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-3} + 3(-2)^{n-3} & 2^{n-3} - 9(-2)^{n-3} & 2^{n-3} - (-2)^{n-3} \\ 3 \cdot 2^{n-3} - 3(-2)^{n-3} & 3 \cdot 2^{n-3} + 9(-2)^{n-3} & 3 \cdot 2^{n-3} + (-2)^{n-3} \end{pmatrix}$$

Aleshores

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-3} + 3(-2)^{n-3} & 2^{n-3} - 9(-2)^{n-3} & 2^{n-3} - (-2)^{n-3} \\ 3 \cdot 2^{n-3} - 3(-2)^{n-3} & 3 \cdot 2^{n-3} + 9(-2)^{n-3} & 3 \cdot 2^{n-3} + (-2)^{n-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Per tant el terme general és:

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \cdot 2^n \\ b_n &= 3 \cdot 2^{n-2} + 9(-2)^{n-2} \\ c_n &= 9 \cdot 2^{n-2} - 9(-2)^{n-2} \end{aligned}$$