

## Teorema del límit central

Sigui  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , on  $X_1, X_2, \dots, X_n$  són variables aleatòries i.i.d., el Teorema del Límit Central (TLC) ens diu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = N(E(S_n), \text{Var}(S_n))$$

és a dir, la distribució de qualsevol suma de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes segueix una llei normal amb mitjana i variància iguals a les de la v.a. suma.

Si l'esperança i la variància de les variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  són  $\mu$  i  $\sigma^2$ , respectivament, llavors  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(n\mu, n\sigma^2)$

Visualitzant el TLC:

- Llançau un dau 20 vegades i calculau la suma dels punts. Repetiu l'experiment 50 vegades i feu una gràfica (histograma) del nombre de vegades que surt cada valor. La gràfica mostra la distribució de  $S_{20}$  i tendrà la forma d'una campana de Gauss.
- <http://www.rand.org/methodology/stat/applets/clt.html>
- <http://www.youtube.com/watch?v=XAuMfxWg6eI>

Conseqüències del TLC:

- **Aproximació d'una binomial per una normal:** si  $n$  és gran,  $B(n, p) \simeq N(np, np(1-p))$
- **Aproximació d'una Poisson per una normal:** si  $n$  és gran,  $Po(\lambda) \simeq N(\lambda, \lambda)$

Aproximació d'una v.a. discreta per una v.a. normal:

Si  $X$  és un v.a. discreta que es pot aproximar per una v.a. normal  $X'$  (per exemple, quan  $X$  és binomial o Poisson), llavors es segueixen els següents criteris per al càlcul de valors de probabilitat:

$$P(X = k) = P(k - 0.5 \leq X' \leq k + 0.5)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a - 0.5 \leq X' \leq b + 0.5)$$

*Exemple 11:*

(Exercici 10). Suposem que el 10% dels votants estan a favor d'una certa legislació. Es fa una enquesta entre la població i s'obté una freqüència relativa  $f_n(A)$  com una estimació de la proporció anterior. Determinau, aplicant el teorema del límit central, quants de votants s'haurien d'enquestar perquè la probabilitat que  $f_n(A)$  difereixi de 0.1 menys de 0.02 sigui al menys 0.95. Què podem dir si no coneixem el valor de la proporció?

*Exemple 12:*

(Exercici 11). Es llança a l'aire un dau regular 100 vegades. Aplicau el teorema del límit central per obtenir una fita de la probabilitat que el nombre total de punts obtinguts estigui entre 300 i 400.

*Exemple 13:*

(Exercici 12). Es sap que, en una població, la talla dels individus mascles adults és una variable aleatòria  $X$  amb mitjana  $\mu_x = 170$  cm i desviació típica  $\sigma_x = 7$  cm. Es tria una mostra aleatòria de 140 individus. Calculau la probabilitat que la mitjana mostral  $\bar{x}$  difereixi de  $\mu_x$  en menys d'1 cm.

*Exemple 14:*

(Exercici 19). Un radiofar està alimentat per una bateria amb un temps de vida útil  $T$  governat per una distribució exponencial amb una esperança d'un mes. Trobau el nombre mínim de bateries que s'han de suministrar al radiofar perquè sigui operatiu al menys un any amb probabilitat 0.99.

*Exemple 15:*

(Exercici 20). Si obtenim 447 cares en 1000 llançaments d'una moneda suposadament regular, hi ha algun indici per suposar que no ho és?

Problemes proposats: 13, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22