Primer Parcial de Fonaments Matemàtics II. Telemàtica
febrer 2005

P1.- Sabent que el terme n-èssim (general) de la successió $1, 3, 6, 10, ...,$ és $\frac{n(n+1)}{2}$. Calculau per inducció: **1,5 pt.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

P2.- Discutiu i resoleu el següent sistema segons els valors d'a i $b \in \mathbb{R}$: **2 pt.**

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & -1 \\ 2x + az & = & 2 \\ -x - y - az & = & b \end{array}\right\}$$

P3.- Donats els espais vectorials $V =< (1, 2, 3), (-1, 0, 2) >$ i $W = \{(x, y, z)|y - 2x = 0\}$,

a) És W un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$? Raonau la resposta. **0.5 pt.**

b) Quina o quines equacions han de complir x, y i z per poder dir que $(x, y, z) \in V$?. Expressau l'espai vectorial V en una forma semblant a com està expressat l'espai vectorial W. **0.5 pt.**

c) Trobau una base i la dimensió de $V + W$ i $V \cap W$. **1 pt.**

d) Indicau si $V + W$ és suma directa. En cas que no ho sigui trobau un espai vectorial U suplementari de W. **0.5 pt.**

P4.- Donada l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$,

a) Demostrau, aplicant la definició, que és una aplicació lineal. **0.5 pt.**

b) Trobau una base i la dimensió de Ker f i Im f. **0.5 pt.**

c) És monomorfisme, epimorfisme o isomorfisme? Raonau la resposta. **0.25 pt.**

d) Si $S =< (1, 0, 0), (1, 1, 0) >$, trobau una base i la dimensió de $f^{-1}(S)$ i $f(S)$ **0.75 pt.**

P5.- Considerem el supespai vectorial de $\mathbb{R}^4$,

$$V =< (1, 1, 0, -1), (1, 0, 0, 4), (2, 0, 1, -1) >,$$

on hem definit el producte escalar usual.

a) Aplicant el mètode d'ortogonalizació de Gram-Scmidt cercau una base ortonormal de V. **0.75 pt.**

b) Si designem per $S =< (1, 1, 0, -1), (1, 0, 0, 4) >$ trobau el seu complement ortogonal. **0.75 pt.**

c) Trobau la projecció ortogonal de (1,2,3,-3) sobre S i sobre $S^{\perp}$ **0.5 pt.**

Duració de l'examen 4 hores.