

Aplicacions Estadístiques. Enginyeria Edificació.

Exercicis Variable Aleatòria

Problema 1 Es prenen 4 cartes d'una baralla de 48 cartes. Sigui X = “nombre d'espases entre les 4 cartes”. Calculeu la distribució d' X i la seva esperança.

Problema 2 Es llança un dau dues vegades. Siguin X_1 i X_2 els resultats del primer i segon llançament. Sigui $X = \max\{X_1, X_2\}$.

(a) Representeu la funció de distribució d' X i calculeu la seva esperança.

(b) Sigui $A = \{X_1 = 2\}$. Calculeu la distribució de la variable condicionada $X|A$.

Problema 3 Es llança una moneda 3 vegades. Sigui X la variable aleatòria “nombre de cares que hi ha després de la primera creu”. (Per exemple, si surt $\{c+c\}$ llavors $X = 1$, si surt $\{c++\}$, llavors $X = 0$). Si la probabilitat de cara és igual a p ,

(a) Calculeu la funció de probabilitat de la variable X .

(b) Calculeu el valor de p que fa màxim $E(X)$

Problema 4 Es tira una moneda 4 vegades seguides. Sigui X el nombre total de cares obtingudes.

(a) Busqueu i representeu gràficament la funció probabilitat i la funció de distribució de X .

(b) Calculeu l'esperança i la variància de X .

Problema 5 Un jugador de cartes extreu una carta a l'atzar d'una baralla de 48 cartes. Si surt figura, guanya 100 euros, si surt un as no guanya ni perd res, i si surt qualsevol altra carta, perd 25 euros. Quina és l'esperança de guany del jugador?

Problema 6 Una bossa conté 5 boles blanques, 3 negres i 2 vermelles. Se selecciona a l'atzar i sense devolució una mostra de dues boles de la bossa. Si X simbolitza la v.a. “nombre de boles negres en la mostra”, busqueu la funció de probabilitat, l'esperança i la variància d'aquesta variable.

Problema 7 L'última novel·la d'un autor ha tingut un gran èxit, fins al punt que el 80 % dels lectors ja l'han llegit. Un grup de 4 amics són aficionats a la lectura:

- Quina és la probabilitat que en el grup hagin llegit la novel·la 2 persones?
- I com màxim 2?

Problema 8 Un agent d'assegurances ven pòlisses a cinc persones de la mateixa edat i que gaudeixen de bona salut. Segons les taules actuals, la probabilitat que una persona en aquestes condicions visqui 30 anys o més és $2/3$. Trobeu la probabilitat que, transcorreguts 30 anys, visquin:

- Les cinc persones.
- Almenys tres persones.
- Exactament dues persones.

Problema 9 *Es llança una moneda quatre vegades. Calcular la probabilitat que surtin més cares que creus*

Problema 10 *Si de sis a set del vespre s'admet que un nombre de telèfon de cada cinc està comunicant, quin és la probabilitat que, quan es marquin 10 nombres de telèfon triats a l'atzar, només comuniquin dos?*

Problema 11 *La probabilitat que un home encerti en el blanc és $1/4$. Si dispara 10 vegades quina és la probabilitat que encerti exactament en tres ocasions? Quin és la probabilitat que encerti almenys en una ocasió? Quina és el nombre de encerts esperat?*

Problema 12 *En unes proves de alcoholemia s'ha observat que el 5 % dels conductors controlats donen positiu en la prova i que el 10 % dels conductors controlats no duen cordat cinturó de seguretat. També s'ha observat que les dues infraccions són independents. Un guàrdia de tràfic deté cinc conductors a l'atzar. Si tenim en compte que el nombre de conductors és suficientment important com per a estimar que la proporció d'infractors no varia al fer la selecció.*

- *Determineu la probabilitat que exactament tres conductors hagin comès alguna de les dues infraccions.*
- *Determineu la probabilitat que almenys un dels conductors controlats hagi comès alguna de les dues infraccions.*

Problema 13 .

- *La probabilitat que un article produït per una fabrica sigui defectuós és $p = 0,002$. Es va enviar un carregament de 10.000 articles a uns magatzems. Trobau el nombre esperat d'articles defectuosos, la variància i la desviació típica.*
- *Si cada article correcte el venem per 1 euro i per cada article defectuos hem d'abonar 10 euros en concepte de indemnització, quina és la probabilitat d'obtenir un benefici mayor o igual a 9900 euros?*

Problema 14 *En una urna hi ha 30 boles, 10 vermelles i la resta blanques. Es tria una bolla a l'atzar i s'anota si és vermella; el procés es repeteix, retornant la bolla, 10 vegades. Calcular la mitjana i la desviació típica del nombre de bolles vermelles extretes.*

Problema 15 *Un laboratori afirma que una droga causa efectes secundaris en una proporció de 3 de cada 100 pacients. Per a contrastar aquesta afirmació, altre laboratori tria a l'atzar a 5 pacients als quals aplica la droga. Quin és la probabilitat dels següents successos?*

- *Cap pacient tingui efectes secundaris.*
- *Almenys dos tinguin efectes secundaris.*
- *Quin és el nombre de pacients que espera laboratori que tinguin efectes secundaris si tria 100 pacients a l'atzar?*

Problema 16 *Un representant realitza 5 visites cada dia als comerços del seu ram i per la seva experiència anterior sap que la probabilitat que li facin una comanda en cada visita és del 0.4. Obtenir:*

- *El nombre mitjà de comandes per dia*
- *La variància*

- La probabilitat que el nombre de comandes que realitza durant un dia estigui comprès entre 1 i 3
- La probabilitat que almenys realitzi dues comandes

Problema 17 Una prova d'intel·ligència consta de deu qüestions cadascuna d'elles amb cinc respostes de les quals una sola és vertadera. Un alumne respon a l'atzar (és a dir, sense tenir la menor idea sobre les deu qüestions). Quina és la probabilitat que respongui bé a dues qüestions? Quina la que respongui bé a quatre? Quina la que respongui bé a sis?

Problema 18 Determinau la probabilitat de realitzar cert tipus d'experiment amb èxit si se sap que si es repeteix 14 vegades és igual de probable obtenir 2 èxits que 3.

Problema 19 Un equip se serveix amb 7 perns per a ser muntats pel client, però l'equip només necessita 4 per a funcionar. Si la proporció de perns defectuosos és del 10 %, Quina és la probabilitat que un equip pugui muntar-se?. Com és la probabilitat que si comprem 3 equips no puguem fer funcionar cap, per culpa dels perns? (Els perns d'un equip no serveixen per a l'altre).

Problema 20 Una companyia compra quantitats molt grans de components electrònics. La decisió per a acceptar o rebutjar un lot de components es pren amb base a una mostra de 100 unitats. Si el lot es rebutja al trobar tres o més unitats defectuoses en la mostra, quina és la probabilitat de rebutjar un lot si aquest conté un 1 % de components defectuosos? Quina és la probabilitat de rebutjar un lot que contingui un 8 % d'unitats defectuoses.

Problema 21 El nombre de rebentades en els pneumàtics de cert vehicle industrial té una distribució de Poisson amb mitjana 0.3 per cada 50 000 quilòmetres. Si el vehicle recorre 100000 km, es demana:

- Probabilitat que no hagi tingut rebentades.
- Probabilitat que tingui menys de 3 rebentades
- Nombre de km recorreguts perquè la probabilitat que no tingui cap rebentada sigui 0.4066

Problema 22 Els accidents laborals diaris d'una empresa segueixen una distribució de Poisson de paràmetre $\lambda = 0,4$. Calcular les probabilitats:

- que en un determinat dia es produeixin dos; com a molt dos; i almenys dos accidents.
- que hagin 4 accidents en una setmana.
- que hagi un accident avui i cap demà.

Problema 23 Els missatges que arriben a una computadora utilitzada com servidor ho fan d'acord amb una distribució Poisson amb una taxa de 0.1 missatges per minut.

- Quina és la probabilitat que arribin com a molt 2 missatges en una hora?
- Determinar l'interval de temps necessari perquè la probabilitat que no arribi cap missatge durant aquest lapse de temps sigui 0.8.

Problema 24 El nombre de cridades telefòniques que es reben en una centraleta cada 5 minuts, s'ajusta a una distribució de Poisson de paràmetre $\lambda = 3$. Calculeu la probabilitat que:

- (a) La centraleta rebi 6 cridades en 5 minuts.

- (b) La centraleta no rebi cap cridada en 5 minuts.
- (c) La centraleta rebi 3 cridades en 10 minuts.
- (d) La centraleta rebi més de 15 cridades en 15 minuts.
- (e) La centraleta rebi 2 cridades en 1 minut.

Problema 25 Un llibre consta de 200.000 paraules. La probabilitat que en una paraula hi hagi un error d'impremta és de $1/50.000$. Calculeu la probabilitat que:

- (a) El llibre no contingui cap error.
- (b) El llibre contingui més de 6 errors.

Problema 26 Un magatzem de fruites comercialitza les llimones en caixes de 200 unitats. La proporció de llimones malmeses és de 0.45% . Un eventual comprador, abans de fer l'encàrrec d'uns quants centenars de caixes de llimones, decideix fer un control de qualitat que consisteix en escollir a l'atzar una de les caixes i comprovar la qualitat de les llimones. Si no hi ha cap llimona en mal estat formalitza la compra. Si hi ha més de 2 llimones malmeses rebutja l'encàrrec. Si la caixa conté 1 o 2 llimones malmeses, escull a l'atzar una nova caixa, i si aquesta conté menys de 2 llimones dolentes, formalitza la compra. En qualsevol altre cas, decideix no fer la compra. Calculeu la probabilitat que el comprador formalitzi la compra.

Problema 27 Se sap que el 1% dels articles importats d'un cert país tenen algun defecte. Si prenem una mostra de 30 articles, determinar la probabilitat que tres o més d'ells tinguin algun defecte.

Problema 28 La variable aleatòria $X =$ "temps de durada fins a la seva adquisició de cert producte en l'aparador" està distribuïda segons una Poisson, amb un temps mitjà de 6 dies.

- Probabilitat que duri més de 6 dies però menys de 10 .
- Quants dies com a mínim hem de tenir el producte en l'aparador perquè la probabilitat de no es vengui durant aquest període sigui de 0.85 ?
- Un comerciant té el producte en l'aparador tres dies. Com és la probabilitat que es vengui en els pròxims tres dies?

Problema 29 S'ha comprovat que la durada de vida de certs elements segueix una distribució Poisson amb mitjana 8 mesos. Es demana:

- Calcular la probabilitat que un element tingui una vida entre 5 i 12 mesos.
- El percentil $0'9$ de la distribució.
- La probabilitat que un element que ha viscut ja més de 11 mesos, viva 14 mesos més.

Problema 30 Suposi's que la concentració de cert contaminant es troba distribuïda de manera uniforme en l'interval de 0 a 20 ppm (parts per millon). Si es considera tòxica una concentració de 8 o més, quina és la probabilitat que al prendre's una mostra la concentració d'aquesta sigui tòxica?. Concentració mitjana i variància. Probabilitat que la concentració sigui exactament 10.

Problema 31 Una màquina fabrica perns les longituds dels quals es distribuïxen normalment amb mitjana 20mm i variància 0'25mm. Un pern es considera defectuós si la seva longitud difereix de la mitjana més de 1mm. Els perns es fabriquen de forma independent. Quina és la probabilitat de fabricar un pern defectuós?. Si els envasem en envasos de 15 perns, probabilitat que un envàs no tingui més de 2 defectuosos.

Problema 32 Una empresa dedicada a la fabricació i venda de begudes refrescants observa que el 40 % dels establiments que són visitats pels seus venedors realitzen compres d'aquestes begudes. Si un venedor visita 20 establiments, determinau la probabilitat que almenys 6 d'aquests establiments realitzin una compra

Problema 33 La durada d'un laser semiconductor a potència constant té una distribució normal amb mitjana 7000 hores i desviació típica de 600 hores.

- Com és la probabilitat que el laser falli abans de 5000 hores?
- Com és la durada en hores excedida pel 95 % dels làsers?
- Si es fa ús de tres làsers en un producte i se suposa que fallen de manera independent, com és la probabilitat que els tres segueixin funcionant després de 7000 hores?

Problema 34 Un servei dedicat a la reparació d'electrodomèstics en general, ha observat que rep cada dia de mitjana 15 cridades. Determinar la probabilitat que es rebin més de 20 cridades en un dia.

Problema 35 El nombre mig de clients que entren en un banc durant una jornada, és de 25. Calcular la probabilitat que en un dia entrin en el banc almenys 35 clients.

Problema 36 Les qualificacions dels alumnes d'estadística, X , pot suposar-se que s'ajusten a una distribució aproximadament normal, amb una mitjana de sis punts i desviació típica de tres punts

- Trobar el percentatge d'alumnes que suspèn
- quin percentatge d'alumnes té notables i excel·lents (és a dir puntuacions majors que 7 i 9)?
- Trobar la puntuació x tal que el 25 % dels alumnes té una puntuació inferior o igual a x

Problema 37 Les qualificacions dels 500 aspirants presentats a un examen per a contractació laboral, es distribueixen normalment amb mitjana 6'5 i variància 4 .

- Calculi la probabilitat que un aspirant obtingui més de 8 punts.
- Determini la proporció d'aspirants amb qualificacions inferiors a 5 punts.
- Quants aspirants van obtenir qualificacions compreses entre 5 i 7'5 punts ?.

Problema 38 Només 24 dels 200 alumnes d'un Centre medeixen menys de 150 cm. Si l'alçada mitjana d'aquests alumnes és de 164 cm., quina és la seva variància ?. Suposau una distribució normal de les alçades dels alumnes.

Problema 39 El percentil 70 d'una distribució normal és igual a 88, sent 0'27 la probabilitat que la variable tingui un valor inferior a 60. A quina distribució normal ens estem referint?

Problema 40 En un estudi realitzat sobre els ingressos familiars en els quals els dos cònjuges treballen, s'ha observat que el salari mensual, en euros, de les dones (X) es distribueix normalment amb mitjana 1000, mentre que el dels homes (Y) té la següent transformació $Y = X + 20$. Sabent a més que el 15 % dels homes no superen el percentil 75 de les dones, es demana:

- El salari mig dels homes.
- La desviació típica del salari dels homes i de les dones.

Problema 41 Analitzades 240 mostres de colesterol en sang, es va observar que es distribuïen normalment amb mitjana 100 i desviació típica 20.

- Calculi la probabilitat que una mostra sigui inferior a 94.
- Quina proporció de mostres tenen valors compresos entre 105 i 130 ?
- Quantes mostres van ser superiors a 138 ?

Problema 42 Determini la mitjana i la desviació típica de les puntuacions d'un test d'agressivitat que es va aplicar a 120 individus, sabent que 30 van arribar menys de 40 punts i que el 60 % van obtenir puntuacions compreses entre 40 i 90 punts. Es suposa una distribució Gaussiana de les puntuacions.

Problema 43 Durant l'hora punta, la línia de reserves d'una companya aèria està ocupada el 95 % del temps. Una persona fa cridades a aquesta línia fins que sigui lliure. Calculeu:

- (a) Probabilitat que hagi de fer més de 5 cridades fins que la línia sigui lliure
- (b) Nombre mitjà de cridades que ha de fer fins a trobar la línia lliure

Problema 44 La llargada de les peces fabricades per una determinada màquina s'ajusta a una distribució normal de mitjana 150 cm i desviació típica 0.4 cm. Les peces es consideren acceptables si la seva llargada pertany a l'interval obert (149.2, 150.4). Es demana:

- (a) La proporció de peces defectuoses que contindrà la mostra.
- (b) Trobeu un interval $(150 - \delta, 150 + \delta)$ que contingui el 95 % de la producció
- (c) Si s'escull una mostra a l'atzar de 50 peces, calculeu la probabilitat que la mostra contingui exactament 44 peces acceptables

Problema 45 La duració X de les bombones de butà de 40 kg es distribueix segons una normal $\mu = 200h$ i $\sigma^2 = 20$.

- (a) Calculeu la probabilitat que una bombona duri més de 220 hores.
- (b) Quin és el temps de vida mínim que es pot garantir amb un risc d'equivocar-nos del 20 %?
- (c) Si una bombona porta 160 h funcionant, quina és la probabilitat que duri més de 220 h?
- (d) Determineu la probabilitat que entre 4 bombones n'hi hagi 2, com a mínim, que durin entre 180 i 220 h.
- (e) Calculeu la probabilitat que el temps de vida total de 25 bombones sigui com a mínim de 5200 hores.