

Aplicacions Estadístiques. Enginyeria Edificació.

Exercicis Probabilitat

Problema 1 Una bossa conté 3 bolles negres, 8 blanques i 13 vermelles. Una segona bossa conté 5 bolles negres, 7 blanques i 6 vermelles. S'escull a l'atzar una bolla de cada bossa. Calculeu la probabilitat que les dues bolles siguin de diferent color.

Problema 2 Una bossa conté 7 bolles negres i 3 blanques. S'escullen a l'atzar 3 bolles de la bossa, una després de l'altra i sense devolució.

- Busqueu la probabilitat que les dues primeres boles siguin negres i la tercera blanca.
- Contesteu la mateixa pregunta en el cas que les extraccions fossin amb devolució

Problema 3 En Joan i en Pep llançen, 10 vegades cadascun, una moneda correcta. Quina és la probabilitat que en Joan tingui més cares que en Pep?

Problema 4 Es llança un dau tres vegades.

- (a) Quina és la probabilitat que la suma dels valors obtinguts sigui parell?
- (b) I si es llancen 4 vegades?
- (c) I si es llancen 5 vegades?

Problema 5 En una oficina amb un únic telèfon hi ha tres persones A, B i C. Les trucades que es reben a l'oficina es produeixen aleatòriament durant el dia en les proporcions $2/5$ dirigides a la persona A, $2/5$ dirigides a la persona B i $1/5$ dirigides a la persona C. Per motius de la seva feina les persones A, B i C han d'absentar-se de l'oficina aleatòriament i independentment de manera que A és absent la meitat del seu horari laboral, mentre que tant B com C són absents la quarta part del seu horari laboral. Per a les trucades que es reben a l'oficina en horari laboral, trobeu la probabilitat que:

- (a) No hi hagi ningú per atendre la trucada.
- (b) Que una trucada pugui ser atesa per la persona a la qual va dirigida.
- (c) Que tres trucades consecutives vagin dirigides a la mateixa persona.
- (d) Que tres trucades consecutives vagin dirigides a tres persones diferents.
- (e) Que una persona que vol contactar amb B hagi de trucar més de 3 vegades per localitzar-la.
- (f) S'ha rebut una trucada que se sap que ha pogut ser atesa per la persona a la qual anava dirigida. Calculeu la probabilitat que anés dirigida a A.

Problema 6 En una bossa hi ha 4 boles negres i 3 blanques. S'extreuen a l'atzar, sense devolució i una després de l'altra, totes les boles de la bossa.

- (a) Calculeu la probabilitat d'obtenir una successió alternativa de colors.
- (b) Contesteu la mateixa pregunta en el cas que la bossa contingui 3 boles negres i 3 blanques.

Problema 7 Es tenen dues monedes: una d'elles és normal i simètrica mentre que l'altra té dues cares. S'escull a l'atzar una de les monedes i es fa un llançament. Suposant que la probabilitat d'escollir la moneda normal és $3/4$ i que s'ha obtingut "cara" en el llançament. Quina és la probabilitat que s'hagi escollit la moneda trucada?

Problema 8 Una bossa conté boles numerades de l'1 al 9. Prenem boles a l'atzar, tornant-les cada vegada. Sigui p_k la probabilitat que el primer 7 aparegui en la extracció número k .

- (a) Calculeu p_k i representeu gràficament els seus valors.
- (b) Quantes boles hem d'extraure per a que la probabilitat de tenir algun 7 sigui com a mínim $9/10$?

Problema 9 Un canal de telecomunicació transmet missatges codificats en un sistema binari. La probabilitat que sigui emès el senyal 0 és p , i la probabilitat que sigui emès el senyal 1 és $1 - p$. Certes pertorbacions en la transmissió, anomenades soroll de fons, poden alterar el senyal emès - canviant 0's per 1's i 1's per 0's - essent p_0 la probabilitat d'alteració quan el senyal emès és 0, i p_1 la probabilitat d'alteració quan el senyal emès és 1. Es demana:

- (a) Si s'ha rebut el senyal 0. Quina és la probabilitat que el senyal emès hagi estat efectivament el 0?
- (b) Si s'ha rebut el senyal 1. Quina és la probabilitat que el senyal emès hagi estat el 0?

Problema 10 En un sistema d'alarma, la probabilitat que es produeixi un perill és $p = 0,1$. Si es produeix el perill, la probabilitat que l'alarma funcioni és $p_1 = 0,95$, i la probabilitat que l'alarma funcioni sense que s'hagi produït el perill és $p_2 = 0,03$. Calculeu:

- (a) La probabilitat que, havent funcionat l'alarma, el perill no s'hagi presentat.
- (b) La probabilitat que hi hagi un perill i l'alarma funcioni.
- (c) La probabilitat que, no havent funcionat l'alarma, hi hagi un perill.

Problema 11 En una certa instal·lació industrial, dues màquines M_1 i M_2 ocupen respectivament el 10 % i el 90 % de la producció total d'un determinat article. La probabilitat que la primera màquina fabriqui una peça defectuosa és $p_1 = 0,01$, i la probabilitat que fabriqui una peça defectuosa la segona màquina és $p_2 = 0,05$. Agafant a l'atzar una peça de la producció d'un dia, s'observa que és defectuosa. Quina és la probabilitat que aquesta peça procedeixi de la primera màquina?

Problema 12 Si un ordinador personal està contaminat per un determinat "virus" V , un programa PR1 detecta la seva presència amb probabilitat $p_1 = 0,92$. Si l'ordinador no té el virus V el programa detecta efectivament la seva absència amb probabilitat $p_2 = 0,87$. S'estima que la probabilitat que un ordinador contingui el virus V és igual a 0,32. Es demana:

- (a) Probabilitat que l'ordinador contingui realment el virus V quan el programa PR1 detecta la seva presència.
- (b) Probabilitat que l'ordinador no contingui efectivament el virus V quan el programa PR1 no detecta la seva presència.
- (c) Probabilitat que el programa PR1 realitzi una diagnosi correcta de la presència o no del virus V en un ordinador personal escollit a l'atzar.

Problema 13 Dues màquines A i B estan funcionant correctament. La probabilitat que la màquina A continuï funcionant correctament durant 10 dies més és igual a $1/4$, mentre que ho faci la màquina B és igual a $1/3$. El funcionament d'una de les màquines no influeix en el de l'altra. Calculeu la probabilitat que:

- (a) Passats 10 dies, les dues màquines continuïn funcionant correctament.
- (b) Passats 10 dies, una de les màquines -si més no- funcioni correctament.
- (c) Passats 10 dies, cap de les dues màquines funcioni correctament.
- (d) Passats 10 dies, només funcioni correctament la màquina B .
- (e) Passats 10 dies, només funcioni correctament una de les dues màquines.

Problema 14 En una bossa A hi ha 5 boles negres i 3 blanques, i en una altra bossa B hi ha 1 bola negra i 2 blanques. Es llança un dau i, si surt un 1 o un 2, es treu a l'atzar una bola de la bossa B i, sense mirar el seu color, s'introdueix a la bossa A i a continuació s'extreu a l'atzar una bola de la bossa A . Si la puntuació del dau és major que 2, s'extreu a l'atzar una bola de la bossa A i, sense mirar el seu color, s'introdueix a la bossa B i a continuació s'extreu a l'atzar una bola de la bossa B .

- (a) Calculeu la probabilitat que la bola extreta la segona vegada sigui de color negre.
- (b) Si la bola extreta la segona vegada resulta que és de color negre, quina probabilitat hi ha que la bola extreta en primer lloc també ho sigui?

Problema 15 La senyora Xisca, de tant en tant, va al casino per jugar a la ruleta. Segons ella, sap una manera per guanyar quasi sempre. Quan juga sempre ho fa al color vermell i només ho fa quan en les 10 partides anteriors la ruleta s'ha aturat en caselles de color negre. La Xisca diu que té moltes més possibilitats de guanyar ja que la probabilitat que una ruleta s'aturi 11 vegades consecutives en una casella és molt petita. Jutgeu el raonament de la senyora Xisca.

Problema 16 Siguin A i B dos esdeveniments associats a un fenomen aleatori de manera que: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ i $P(A \cap B) = 1/4$. Calculeu:

- (a) $P(A/B)$.
- (b) $P(B/A)$.
- (c) $P(A \cup B)$.
- (d) $P(\bar{A}/\bar{B})$.
- (e) $P(\bar{B}/\bar{A})$.

Problema 17 Un servei de manteniment d'equips informàtics està especialitzat en dos tipus d'equips que anomenarem A i \bar{A} . Del total de serveis reclamats un 40% són de les màquines A i un 60% de les \bar{A} . D'altra banda, aquests dos tipus d'equips poden tenir dos tipus d'avaries que anomenarem C i \bar{C} . Se sap que, de les avaries de les màquines A , el 50% són de tipus C . En canvi, el 30% de les avaries de les \bar{A} són del tipus \bar{C} . Es demana:

- (a) Quina és la probabilitat que una avaria sigui del tipus C ?
- (b) Els esdeveniments A i C són disjunts (mutuament excloents)? Són independents?

- (c) El fet de saber que una avaria és del tipus C o \bar{C} , varia la probabilitat que l'avaria vingui d'una màquina tipus A ?
- (d) Els operaris que reparen les avaries tipus \bar{C} amb quin tipus de màquines treballen més freqüentment?

Problema 18 Una urna conté 1 bola blanca i 3 boles negres. Quatre jugadors A , B , C i D treuen (per aquest ordre i sense reemplaçament) una bola de la urna. Guanya el primer jugador que treu la bola blanca. Calculeu la probabilitat que té cada jugador de guanyar la partida. Creieu que l'ordre en que els jugadors treuen les boles té influència en el resultat final?

Problema 19 Es treuen 5 cartes d'una baralla espanyola. Les cartes es treuen una després de l'altra i amb devolució. Calculeu la probabilitat d'obtenir 2 copes, 2 espases i 1 oro.

Problema 20 Una empresa de software ha trobat un nou procediment per a detectar un cert virus. Una empresa amb molts ordinadors l'ha contractada a fi de prevenir l'existència del virus. La probabilitat que la prova sigui positiva i identifiqui de manera correcta un ordinador que té el virus és de 0,99, mentre que la probabilitat que la prova sigui negativa i identifiqui correctament un ordinador que no té el virus és 0,95. La proporció d'ordinadors amb virus és igual a 0,001. Calculeu la probabilitat que un ordinador no tingui el virus, sabent que la prova ha resultat positiva.

Problema 21 El software per a detectar frau en las targetes telefòniques enregistra cada dia el nombre d'àrees metropolitanes des d'on s'originen totes les trucades. Se sap que l'1% dels usuaris legítims fan trucades al dia amb origen en dues o més àrees metropolitanes i que el 30% dels usuaris fraudulents fan trucades al dia des de dues o més àrees metropolitanes. La proporció d'usuaris fraudulents és de l'1%. Si un mateix usuari fa en un dia trucades des de dues o més àrees metropolitanes, calculeu la probabilitat que l'usuari sigui fraudulent.

Problema 22 Una placa base té 20 circuits en una certa zona i se sap que 5 són defectuosos. Es prenen 4 a l'atzar i sense reemplaçament per a comprovar-los.

- (a) Probabilitat que els 4 circuits no siguin defectuosos.
- (b) Probabilitat que com a mínim un sigui defectuós.

Problema 23 Quatre persones pugen a un ascensor a la planta baixa. L'ascensor té quatre parades. Quina és la probabilitat que com a mínim dues persones baixin a la mateixa parada?

Problema 24 Es llança un dau tres vegades. Es demana:

- (a) Si el resultat del tercer llançament ha estat 5, quina és la probabilitat que sigui major que els dos anteriors?
- (b) Si el resultat del tercer llançament és més gran que el del segon, quina és la probabilitat que sigui més gran que el resultat del primer?

Problema 25 D'una urna que conté tres boles vermelles i quatre blaves, es prenen tres boles. Si hi ha més vermelles que blaves entre les boles extretes, quina és la probabilitat que hi hagi tres boles vermelles?

Problema 26 Es llança un dau. Si el resultat és més petit o igual que 3, es llança de nou. Quina és la probabilitat que la suma dels valors sigui més gran que 4?

Problema 27 *En treure tres cartes d'una baralla de 40 cartes, quina és la probabilitat de treure almenys una figura?*

Problema 28 *Es treuen n nombres a l'atzar entre 1 i 9. Quina és la probabilitat que el seu producte acabi en 0?*

Problema 29 *Un senyor aparca cada nit en una zona prohibida. Li posen dotze multes, sempre en dimarts o en dijous. Quina és la probabilitat d'aquest succés si suposem que tots els dies de la setmana tenen el mateix risc de multa. Suposem ara que, de dotze multes, no n'hi ha cap en diumenge (però si els altres dies). Es prou evidència per suposar que els diumenges no passa mai la guàrdia urbana?*

Problema 30 *S'ensenya una mona a escriure a màquina i tecleja un text de 14 caràcters triant cadascuna de les 27 tecles de lletres (inclòs l'espai) a l'atzar. Quina és la probabilitat que escrigui la frase "Sóc intel·ligent"?*

Problema 31 *En un curs de quatre assignatures, el 70% aproven l'assignatura A, el 75% aproven l'assignatura B, el 80% aproven l'assignatura C i el 85% aproven l'assignatura D. Quin és el percentatge mínim d'estudiants que aproven les quatre assignatures?*

Problema 32 *El resultat d'un experiment és un nombre enter entre 1 i 4. L'experiment es repeteix dues vegades de forma independent i s'obtenen els resultats E_1 i E_2 . Calculeu les probabilitats de $A = \{E_1 = E_2\}$, $B = \{E_1 > E_2\}$, i $C = \{E_1 + E_2 > 6\}$. Calculeu les probabilitats de A; B; A B; A C; B C i $\bar{A} B$.*

Problema 33 *Tenim un dau amb tres uns, dos dosos i un tres. D'altra banda, tenim una urna amb tres bolles blanques i dues negres. Llancem el dau i agafem tantes bolles com el número que surti al dau.*

(a) *Calculeu la probabilitat de treure com a mínim una bolla blanca.*

(b) *Sabent que hem tret com a mínim una bolla negra, calculeu la probabilitat d'haver tret un dos al dau.*

Problema 34 *Suposem que neixen més nenes que nens. Comproveu que és més probable tenir dos fills del mateix sexe que de sexe diferent.*

Problema 35 *Quina és la probabilitat d'aprovar un test de 20 preguntes amb quatre opcions per a cadascuna (de les quals només una és vàlida) contestant a l'atzar? Quina és aquesta probabilitat si només es contesten a l'atzar 15 preguntes i se'n deixen 5 en blanc? Per a l'avaluació del test tingueu en compte que cada resposta encertada puntua un punt, les respostes errònies o les preguntes no contestades no sumen ni resten punts i per a aprovar s'han d'obtenir 5 punts o més.*

Problema 36 *(El problema del cavaller de Méré) El cavaller de Méré apostava que en tirar un dau 4 vegades almenys sortiria un sis. Després de guanyar moltes vegades ningú no volia jugar amb ell i va canviar el joc, apostant que en 24 tirades de dos daus sortiria un doble sis. És més probable que perdi o que guanyi? Quin és el nombre mínim de tirades a partir del qual és més probable guanyar que perdre?*

Problema 37 *Un senyor porta sis claus semblants, dues de les quals obren els dos panys de la porta de casa seva. Si en perd una, quina és la probabilitat que pugui entrar a casa? Quina és la probabilitat que les dues primeres claus que tria obrin la porta?*

Problema 38 En un lot de 100 xips, n'hi ha 10 que són defectuosos.

- (a) Quina és la probabilitat que en una mostra de mida 10 n'hi hagi 1 de defectuosos?
- (b) Quina seria aquesta probabilitat si es pren la mostra de mida 10 però amb reemplaçament?

Problema 39 Una caixa conté 10 monedes normals i 20 de trucades per a les quals $P(\text{cara}) = 0,25$. Es treu a l'atzar una moneda de la caixa i es tira dues vegades.

- (a) Quina és la probabilitat que surtin dues cares?
- (b) Si han sortit dues cares, quina és la probabilitat que la moneda fos trucada?

Problema 40 Es treuen dues boles d'una bossa que en conté 5 de vermelles, 3 de blanques i 2 de verdes.

- (a) Calculeu la probabilitat que les dues boles siguin del mateix color.
- (b) Si les dues boles són del mateix color, quina és la probabilitat que siguin de color blanc?

Problema 41 Una fàbrica produeix un 30% de claus, un 25% de cargols i un 45% de xinxetes. Entre els claus, cadascun té una probabilitat del 0,005 de ser defectuós; la probabilitat que un cargol sigui defectuós és de 0,003, i una xinxeta, de 0,008. Si una peça és defectuosa, quina és la probabilitat que sigui una xinxeta?

Problema 42 Per tal d'assistir a un examen un estudiant compta amb l'ajuda d'un despertador, el qual aconsegueix despertar-lo el 80% dels casos. Quan el despertador el desperta, la probabilitat que faci l'examen és del 0,9, mentre que si no el desperta la probabilitat que faci l'examen és del 0,5. Si fa l'examen, quina és la probabilitat que el despertador l'hagi despertat? Si no fa l'examen, quina és la probabilitat que no l'hagi despertat?

Problema 43 Un metge sap que només el 60% dels pacients que van a la consulta estan malalts. Per poder distingir entre els malalts i els que no ho són, el metge disposa d'una anàlisi que presenta el 95% de fiabilitat (és a dir, dona el resultat correcte el 95% de les vegades que s'aplica). Si un pacient dona positiu, quina és la probabilitat que realment estigui malalt?

Problema 44 En una població hi ha un 24% d'individus que són homes i fumen, i un 35% que són dones i no fumen. Si la proporció d'homes és del 55%, quina és la probabilitat que un individu escollit a l'atzar entre els fumadors sigui dona?

Problema 45 En un examen hi ha quatre problemes. El primer val 3 punts, el segon 2 i el tercer i el quart 2,5 cada un. La probabilitat de fer bé els problemes és 0,6, 0,8, 0,4 i 0,4, per aquest ordre.

- (a) Quina és la probabilitat de no aprovar?
- (b) Si un estudiant ha aprovat, quina és la probabilitat que hagi fet bé el primer problema?

Problema 46 En un concurs televisiu hi ha tres portes, darrere una de les quals hi ha un premi. El concursant escull una de les portes i a continuació el presentador li mostra una de les portes que no ha triat i que no amaga el premi. El presentador ofereix al concursant la possibilitat de canviar la seva elecció. Calculeu la probabilitat d'encertar la porta amb premi si:

- (a) El concursant ha decidit d'entrada no canviar la seva opció.

(b) El concursant ha decidit d'entrada canviar la seva opció.

Problema 47 Un servei tècnic té tres equips de reparació, A , B i C , els quals efectuen el mateix nombre de reparacions. L'equip A resol favorablement el 80% de les reparacions, l'equip B el 75% i l'equip C el 65%.

(a) Quina és la probabilitat que una reparació defectuosa correspongui a un treball efectuat per l'equip A .

(b) Es detecten cinc reparacions defectuoses. Quina és la probabilitat que n'hi hagi, com a molt, una realitzada per l'equip A .

Problema 48 Una urna conté tres boles negres i dues boles blanques. Un primer jugador treu tres boles. Torna a l'urna una bola negra si entre les boles que ha tret n'hi ha més de negres. Si no és així torna a l'urna una bola blanca. A continuació, el segon jugador extreu una bola. El joc consisteix a endevinar quantes boles blanques ha extret el primer jugador. Si el segon jugador ha extret una bola blanca, quina és la probabilitat que el primer jugador hagi extret:

(a) Cap bola blanca.

(b) Una bola blanca.

(c) Dues boles blanques.

Problema 49 La probabilitat que hi hagi embús a la via cintura a les 8 del vespre és de 0,4 els dies que no juga el Mallorca, mentre que puja a 0,8 els dies de partit. Sabem també que el Mallorca juga dos partits per setmana.

(a) Calculeu la probabilitat que hi hagi embús un dia qualsevol.

(b) Si un dia determinat vaig a la via cintura a les 8 del vespre i hi ha embús, calculeu la probabilitat que estigui jugant el Mallorca.