Fonaments Matemàtiques II

Àlgebra Lineal

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears

Manuel Moyà Quintero

Índex

Capítol 1

Matrius

Definició 1.1 *Una **matriu** $n \times m$ sobre un cos K és un quadre d'elements de K, format per n fileres i m columnes.*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i & -3-\sqrt{2}i \\ -4i & 3 & \sqrt{3}i \\ 2-i & -1 & 3+2i \end{pmatrix}$$

La matriu A és una matriu 2x3 i la matriu B és una matriu 3x3.

Dues matrius són iguals si els elements (i, j) (filera i i columna j) són iguals, per a tot i, j.

Exemple:

Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ -4 & 3-2i & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3-i \\ -4 & 3+yi & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Per a que les matrius A i B siguin iguals s'ha de complir $x = 3 - i$ i $y = -2$.

Al conjunt de les matrius $n \times m$ el representarem per $M(n \times m)$ o $M_{n\times m}$. Una matriu $1 \times m$ l'anomenarem **matriu fila**

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

és una matriu 1×4

i una $n \times 1$ **matriu columna**

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2+3i \\ 4i \end{pmatrix}$$

és una matriu 3×1

Una matriu $n \times n$ l'anomenarem **matriu quadrada** i al conjunt de matrius quadrades $n \times n$ el representarem per M_n i direm que és una matriu d'**ordre** n.

Considerant una matriu quadrada, anomenam **diagonal principal** de la matriu als elements a_{ii}.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i & -3-\sqrt{2}i \\ -4i & 3 & \sqrt{3}i \\ 2-i & -1 & 3+2i \end{pmatrix}$$

La diagonal principal està formada pels elements $(2-3i, 3, 3+2i)$.

Direm que una matriu és **triangular inferior** si són nuls els elements situats sobre la diagonal principal; direm que és **triangular superior** si són nuls els elements sota la diagonal principal; i **diagonal** si són nuls tots els elements fora de la diagonal principal, és a dir, és triangular superior i inferior.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2-3i & 0 & 0 \\ -4i & 3 & 0 \\ 2-i & 0 & 3+2i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2-3i & 1+i & -3-\sqrt{2}i \\ 0 & 3 & \sqrt{3}i \\ 0 & 0 & 3+2i \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2-3i & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3+2i \end{pmatrix}$$

La matriu A és una matriu triangular inferior, la B triangular superior i la matriu C diagonal.

Definició 1.2 *Donada una matriu $A \in M_{n\times m}$, anomenarem* ***matriu transposada*** *de A, la matriu que té per element (i,j) l'element (j,i) de A i la representarem per A', ${}^tA$ o A^t.*

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si observam la matriu transposada podem veure que les fileres de la matriu A són les columnes de la matriu A^t.

Es dedueix de la definició de matriu transposada que $(A^t)^t = A$.

Definició 1.3 *Sigui $A \in M_n$, direm que A és* ***simètrica*** *si $A^t = A$, és a dir si $a_{ij} = a_{ji}$. Direm que és* ***antisimètrica*** *si $A^t = -A$, és a dir, si $a_{ij} = -a_{ji}$.*

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En el cas d'una matriu antisimètrica es compleix $a_{ii} = 0$ per a tot $1 \le i \le n$.

Demostració:
Si $a_{ii} = -a_{ii}$, tenim que $2a_{ii} = 0$, per tant, $a_{ii} = 0$

Definició 1.4 *Donades dues matrius $n\times m$ $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, anomenam* ***matriu suma*** *a aquella que té per element (i,j) $a_{ij} + b_{ij}$, i la representarem per $A + B$.*

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -5 & 2+i & -1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -3 & -2+i & -2-2i \end{pmatrix}$$

Proposició 1.5 *$(M(n \times m); +)$ té les següents propietats:*

1. *Commutativa: $A + B = B + A$*

2. *Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$*

3. *Element neutre: Existeix la matriu $\mathbf{0}$, que és la matriu formada per zeros, que compleix $\mathbf{0} + A = A$.*

   Exemple: Si la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, aleshores

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

4. *Element oposat: Donada la matriu A, existeix una matriu que anomenarem $-A$ de forma que $A + (-A) = \mathbf{0}$. Aquesta matriu és la mateixa que A però amb tots els signes canviats.*

   Exemple: Si la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, aleshores

   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   per tant, $-A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Nota: Un estructura $(G, +)$ formada per un conjunt G amb una operació interna $+$ que tengui les propietats

1. Associativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$ per a tot $a, b, c \in G$.

2. Element neutre: Existeix un element $e \in G$ que denotarem per 0, que compleix $0 + a = a + 0 = a$. per a tot $a \in G$

3. Element oposat: Donat un element qualsevol $a \in G$, existeix $a' \in G$ que denotarem per $-a$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

   l'anomenarem **grup**. Si a més compleix la propietat:

4. Commutativa: $a + b = b + a$ per a tot $a, b \in G$

   direm que G és un grup **commutatiu**

D'aquí deduïm que $(M(n \times m); +)$ té estructura de grup.

Definició 1.6 *Donada una matriu A i un escalar $t \in K$ anomenam* ***producte de t per A*** *a la matriu que té per element (i, j) l'element ta_{ij} i la representarem per tA.*

Exemple:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4+2i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 & -10 \\ 10 & -20+10i & -5 \end{pmatrix}$$

Proposició 1.7 (Propietats del producte per escalars) *Siguin A i B dues matrius $n \times m$ i t, s dos escalars (elements de K)*

1. *Distributiva respecte a la suma d'escalars: $(t + s) \cdot A = t \cdot A + s \cdot A$.*

2. *Distributiva respecte a la suma de matrius: $t(A + B) = t \cdot A + t \cdot B$.*

3. *Pseudoassociativa: $(t \cdot s)A = t(s \cdot A)$.*

4. *Llei d'identitat: $1 \cdot A = A$*

Nota: Anomenam **espai vectorial sobre** K a un conjunt V dotat d'una operació interna $(+)$ i una externa $(.)$ amb K com domini d'operadors, tals que:

- La estructura $(V; +)$ és un grup abelià
- L'operació externa compleix $\forall t, s \in K$ i $\forall a, b \in V$:

  a) $t(a + b) = ta + tb$
  b) $(t + s)a = ta + sa$
  c) $t(sa) = (ts)a$
  d) $1.a = a$

Per tant, $(M(n \times m); +, \cdot_K)$ té estructura d'espai vectorial sobre K.

Tornarem sobre aquesta qüestió al tema d'Espais Vectorials.

Definició 1.8 *Donada una matriu $A = (a_{ij}) \in M(n \times p)$ i $B = (b_{ij}) \in M(p \times m)$ definim la **matriu producte** $A.B$ a una matriu $P = (p_{ij}) \in M(n \times m)$ tal que $p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$ que expressarem dient que l'element p_{ij} de P és el producte de la fila i de A per la columna j de B.*

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(p-1)} & a_{ip} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & b_{1j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & b_{2j} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & b_{(p-1)j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & b_{pj} & \cdots & \cdots \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & p_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Per poder multiplicar dues matrius és necessari i suficient que el nombre de columnes de la primera sigui igual al nombre de fileres de la segona.

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-4) + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -12 & 21 \end{pmatrix}$$

Proposició 1.9 (Propietats del producte de matrius) *Siguin A, B, C matrius i t un escalar. Sempre que l'operació tengui sentit es compleix*

1. *Associativa: $A(BC) = (AB)C$.*

2. *Distributiva: $A(B + C) = AB + AC$ i $(A + B)C = AC + BC$*

3. $t(AB) = (tA)B$.

Nota: El producte de matrius no és en general commutatiu

Exemple: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} -9 & -5 \\ 22 & 0 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} -1 & 17 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Proposició 1.10 *$A \in M(n \times m)$ i $B \in M(m \times p)$, aleshores $(AB)^t = B^t A^t$.*

DEMOSTRACIÓ:

Designem per $C = (AB)^t$. L'element c_{ij} de la matriu C és l'element (j, i) de la matriu AB, és a dir, el producte de la fila j de la matriu A per la columna i de la matriu B

$$c_{ij} = a_{j1}b_{i1} + a_{j2}b_{i2} + \ldots + a_{jm}b_{im}$$

Designem per $D = B^t A^t$. L'element d_{ij} de la matriu D és el producte de la fila i de la matriu B^t per la columna j de la matriu A^t, és a dir, el producte de la columna i de la matriu B per la fila j de la matriu A,

$$d_{ij} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \ldots + b_{mi}a_{jm} = a_{j1}b_{i1} + a_{j2}b_{i2} + \ldots + a_{jm}b_{im}$$

Per tant, $c_{ij} = d_{ij}$ per a $1 \leq i \leq p$ i $1 \leq j \leq n$ i es compleix $(AB)^t = B^t A^t$

Definició 1.11 *La matriu quadrada d'ordre $n \times n$ tal que els elements de la diagonal principal són 1 i tots els altres 0 l'anomenarem **matriu unitat** d'ordre n i la representarem per I_n.*

Exemple:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es compleix que si $A \in M(n \times m)$ aleshores $AI_m = I_n A = A$.

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: Una estructura $(A, +, .)$ formada per un conjunt A i dues operacions internes que indicarem amb $(+)$ i $(.)$ que compleixen les següent propietats

- La estructura $(A; +)$ és un grup abelià
- L'operació $(.)$ és associativa i distributiva respecte a $(+)$.

direm que és un **anell**

L'element neutre de $(+)$ s'anomena **zero** de l'anell i s'escriu 0.
L'operació $(.)$ pot no tenir element neutre, però si en té s'anomena **unitat** de l'anell i el representarem per e o 1.
L'operació $(.)$ pot no ser commutativa, però si ho és direm que l'anell és **commutatiu**

Tenint en compte l'anterior, $(M(n); +, .)$ (”.”és el producte de matrius) és un anell amb unitat, on la matriu unitat és I_n

Exemple 1: Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};\ \text{i } C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calculem $3AB - 4C$.

b) Resolguem l'equació $2AB + 3X = 4(AB)^tC$

Solució:

a) $3AB - 4C$

$$3AB - 4C = 3\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 3\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 19 & -6 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -15 \\ 57 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -20 \\ 16 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 5 \\ 41 & -14 \end{pmatrix}$$

b) $2AB + 3X = 4(AB)^tC$. Substituint tenim

$$2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 3X = 4\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right]^t \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$2\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 19 & -6 \end{pmatrix} + 3X = 4\left[\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 19 & -6 \end{pmatrix}\right]^t \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 38 & -12 \end{pmatrix} + 3X = 4\begin{pmatrix} 12 & 19 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 38 & -12 \end{pmatrix} + 3X = 4\begin{pmatrix} 112 & -79 \\ -39 & 31 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 38 & -12 \end{pmatrix} + 3X = \begin{pmatrix} 448 & -316 \\ -156 & 124 \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 448 & -316 \\ -156 & 124 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 38 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 424 & -306 \\ -118 & 136 \end{pmatrix};$$

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 424 & -306 \\ -118 & 136 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{424}{3} & -102 \\ \frac{-118}{3} & \frac{136}{3} \end{pmatrix}$$

Definició 1.12 *Donada una matriu quadrada $A \in M_n$, anomenam **traça** de la matriu A a $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.*

Exemple: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, aleshores $tr(A) = 1 + (-4) + 2 = -1$

Proposició 1.13 *Es compleixen les següents propietats:*

a) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

b) $tr(A) = tr(A^t)$.

DEMOSTRACIÓ:

a) Si $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, aleshores $A + B = (c_{ij})$ on $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Per tant,

$$tr(A + B) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr(A) + tr(B)$$

b) Si $A = (a_{ij})$, aleshores $A^t = (c_{ij})$ on $c_{ij} = a_{ji}$. Per tant,

$$tr(A^t) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(A)$$

Definició 1.14 *Direm que una matriu quadrada $A \in M(n)$ és **invertible** o que té **inversa**, si existeix una matriu d'ordre n, que representarem per A^{-1}, que compleix $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. A una matriu invertible també la direm **regular**.*

Exemple: Si la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, aleshores $A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ja que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definició 1.15 *Donada una matriu $A \in M(n \times m)$, les seves fileres es poden considerar com elements de K^m i les anomenarem **vectors fila**, anàlogament les columnes de A les podem considerar com elements de K^n i les anomenarem **vectors columna**.*

Exemple: Si tenim la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, tendrem els vectors fila

$$v_1 = (1, -1, -1), \quad v_2 = (-1, 0, 3), \quad v_3 = (-2, 5, -3)$$

i els vectors columna

$$w_1 = (1, -1, -2), \quad w_2 = (-1, 0, 5), \quad w_3 = (-1, 3, -3)$$

Definició 1.16 *Donada una matriu $A \in M(n \times m)$, direm que un vector fila v_i és **combinació lineal** dels altres si*

$$v_i = t_1 v_1 + \cdots + t_{i-1} v_{i-1} + t_{i+1} v_{i+1} + \cdots + t_n v_n$$

Anàlogament definiríem quan un vector columna és combinació lineal dels altres.

Exemple: Sigui la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, podem veure que $v_3 = 2v_1 + v_2$

$$(1, -2, 1) = 2(1, -1, -1) + (-1, 0, 3)$$

Definició 1.17 *Direm que un conjunt de vectors fila (resp. columna) són **linealment independents** si cap d'ells es pot posar en combinació lineal dels altres.*

*En cas contrari direm que són **linealment dependents**.*

Proposició 1.18 *Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ són linealment independents i v és pot posar en combinació lineal d'aquells, aquesta combinació lineal és única.*

La demostració es veurà al tema d'espais vectorials.

Exemple: Si tenim la matriu $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ cap fila es pot posar en combinació lineal de les altres, ja que si

$$(2,0,0) = x(0,3,0) + y(0,0,-1); \quad (2,0,0) = (0,3x,-y)$$

i per tant, 2=0, la qual cosa no pot ser. Anàlogament passaria si consideram qualsevol altra fila. Aleshores les files d'aquesta matriu són linealment independents.

Per altra part les files de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ són linealment dependents, ja que com hem vist a l'exemple de la definició 1.16 es compleix $v_3 = 2v_1 + v_2$, per tant les files són linealment dependents

Proposició 1.19 *Si a una matriu, cada fila (resp. columna) té, davant, almenys un zero més que l'anterior, aquestes són linealment independents.*

Exemple: En la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, les files són linealment independents, ja que cap d'elles es pot posar en combinació lineal de les altres. Suposem que la primera es pot posar en combinació lineal de les altres dues

$$(1,-1,-1) = x(0,-2,3) + y(0,0,1) = (0,-2x,3x+y)$$

d'aquí tenim que $1 = 0$, contradicció.

Definició 1.20 *Sigui $A \in M(n \times m)$. Anomenam **rang de files de A** al major nombre de vectors fila linealment independents. Anàlogament definim **rang de columnes de A**.*

Exemple: Si tornam a considerar la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ hem vist que la tercera fila depèn de les altres dues, per tant ens queden només les dues primeres. Però les dos primeres són linealment independents, ja que cap d'elles es pot posar en combinació lineal de l'altra,

$$(1,-1,-1) = x(-1,0,3); \quad (1,-1,-1) = (-x,0,3x)$$

que no pot ser ja que, per exemple, ens surt $-1 = 0$. Aleshores el rang de files d'A és 2.

Si consideram la matriu $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vista a l'exemple 1.17 tenim que cap fila es pot posar en combinació lineal de les altres, per tant el rang de files d'A és 3.

Proposició 1.21 *El rang de files d'una matriu A i el rang de columnes són igual.*

Definició 1.22 *Anomenam **rang d'una matriu** A al rang de files de A, que coincideix amb el de columnes i el representarem per rang A.*

Definició 1.23 *Anomenam **operacions elementals** realitzades en una matriu A a:*

1. *Permutar dues fileres o dues columnes.*
2. *Substituir una filera A_i (resp. columna) per $A_i + tA_j$ on $t \in K$ i $i \neq j$.*
3. *Multiplicar una filera (resp. columna) per un escalar $t \neq 0$.*

Proposició 1.24 *El rang d'una matriu no varia si es realitzen operacions elementals sobre ella.*

Exemple 1: Cerquem el rang de la matriu d'elements de $\mathbb{Q}$: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant el rang és 2.

Exemple 2: Cerquem el rang de la matriu d'elements de $\mathbb{Q}$: $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -16 & -6 & -6 & 5 \\ 0 & -22 & -8 & -8 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Per tant el rang és 4.

Exemple 3: Cerquem el rang de la matriu d'elements de $\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 8 & a+2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 8 & a+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 14 & a+11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

Si $a-3=0$, és a dir, si $a=3$ el rang és 2, i si $a \neq 3$ el rang és 3.

Principi d'inducció matemàtica. Mètode d'inducció

Suposem que $P(x)$ significa que la propietat P es compleix per a x. Aleshores el principi d'inducció matemàtica afirma que $P(x)$ és veritat per a tots els nombres naturals sempre que

P1) $P(1)$ és veritat.

P2) Si $P(k-1)$ és veritat, també ho és $P(k)$.

Exemple: Demostrem, utilitzant el mètode d'inducció

$$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

P1) Es compleix per a $n = 1$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

P2) Suposem que es compleix per a $n-1$ i vegem que es compleix per a n:

$1 + \ldots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$, per tant,

$$1 + \ldots + (n-1) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Índex alfabètic