4 Variable aleatòria contínua

Prob 4.1 Sigui X una variable aleatòria contínua amb funció de densitat $f(x)$ donada per:[1]

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot (1 + x^2) & \text{si } x \in (0,3) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,3) \end{cases}$$

a) Trobau la constant k i la funció de distribució.

b) Calculau la probabilitat que X estigui comprès entre 1 i 2.

c) Calculau la probabilitat que X sigui menor que 1.

d) Sabent que X és major que 1, calculau la probabilitat que sigui menor que 2.

Prob 4.2 La funció de densitat d'una variable aleatòria contínua és:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2 + b & \text{si } x \in (0,3) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,3) \end{cases}$$

.

Determinau a i b , sabent que $P(1 < X \leq 2) = 2/3$. [2]

Prob 4.3 Sigui X una variable aleatòria absolutament contínua amb densitat

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

a) Trobau la funció de distribució de X.

b) Calculau $P(X \geq 0)$ i $P(|X| < 1/2)$.[1]

Prob 4.4 S'anomena **distribució triangular** a qualsevol distribució absolutament contínua tal que la seva densitat és zero excepte en un cert interval (a, b), on la seva gràfica té la forma d'un triangle isòsceles. Trobau la densitat i la funció de distribució d'una distribució triangular.

Prob 4.5 Sigui X una variable aleatòria absolutament contínua amb densitat

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

Calculau $P(|X| > 2)$.[1]

[1] a) $k = \frac{1}{12}$; b) $\frac{5}{18}$; c) $\frac{1}{9}$; d) $\frac{5}{16}$
[2] $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{11}{6}$
[1] b) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$
[1] e^{-2}

Prob 4.6 Considerem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ a(1+x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2/3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Determinau el valor de a perquè f sigui una densitat.

b) En aquest cas, si X és una variable aleatòria absolutament contínua amb densitat f, calculau $P(1/2 < X \leq 3/2)$. [2]

Prob 4.7 S'ha estimat que el temps de vida X, en hores, d'un cert component electrònic segueix una distribució donada per la densitat[3]

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8}e^{-x/8} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

El departament de control de qualitat rebutja tots els components que fallen durant les 3 primeres hores, i comercialitza la resta.

a) Determinau la distribució del temps de vida dels components comercialitzats.

b) Quina és la probabilitat que un component comercialitzat, funcioni més de 12 hores?

Prob 4.8 D'una estació surt un tren cada 20 minuts. Un viatger arriba de sobte. Trobau:[4]

a) La funció de distribució de la variable aleatòria "temps d'espera".

b) La probabilitat que el viatger esperi el tren menys de 7 minuts.

c) La probabilitat que esperi exactament 12 minuts.

Prob 4.9 Utilitzant la taula de la distribució normal reduïda, calculeu les àrees següents:

a) àrea entre 0 i 0,25

b) àrea des de $-\infty$ fins a 1,32

c) àrea entre -2,23 i 1,15

Prob 4.10 Si Z és una variable aleatòria N(0,1), calcula:

[2] a) $\frac{2}{9}$; b) $\frac{19}{36}$
[3] b) $e^{\frac{-9}{8}}$
[4] b) $\frac{7}{20}$; c) 0

a) $P(Z \geq 1,32)$

b) $P(Z \leq 2,17)$

c) $P(1,52 < Z \leq 2,03)$

Prob 4.11 Si X és una variable aleatòria N(0,1), calcula:

a) $P(Z \geq -1,32)$

b) $P(Z \leq -2,17)$

c) $P(-2,03 < Z \leq 1,52)$

Prob 4.12 La durada mitjana d'un rentavaixelles és de 15 anys amb una desviació típica igual a 0,5 anys. Si la vida útil dels electrodomèstics es distribueix normalment, calcula la probabilitat que el rentavaixelles duri més de 16 anys.

Prob 4.13 En una regió determinada hi ha una mitjana de precipitacions de 2000 ml/m^2, amb una desviació típica de 300 ml/ m2. Suposant que es tracta d'una distribució normal, calculeu la probabilitat que en un any concret la pluja no superi els 1200 ml/m^2.

Prob 4.14 Les talles de 800 nadons es distribueixen normalment amb una mitjana de 66 cm i una desviació típica de 5. Calculeu quants nadons s'espera que tinguin talles compreses entre 65 cm i 70 cm.

Prob 4.15 En un examen fet a un gran nombre d'estudiants s'ha comprovat que les qualificacions obtingudes corresponen raonablement a una distribució normal amb qualificació mitjana de 6 i desviació típica de 1.

Si s'agafa a l'atzar un alumne, quina és la probabilitat que la seva qualificació estigui compresa entre 6,7 i 7,1?

Prob 4.16 Les vendes diàries d'una botiga tenen una distribució normal amb una mitjana de 214 EUR i una desviació típica de 15 EUR. Justifica si és o no raonable esperar obtenir en un dia unes vendes superiors a 330 EUR.

Calcula quants dies en un any s'espera obtenir unes vendes superiors a 245 EUR.

Prob 4.17 Una enquesta ha mostrat que, en un barri determinat, el 60% de les cases tenen almenys dos televisors. Si s'agafa a l'atzar una mostra de 50 cases d'aquest barri, calcula les probabilitats següents:

a) Que almenys 20 de les cases tinguin com a mínim dos televisors.

b) Que entre 30 i 40 casses tinguin com a mínim dos televisors.

Prob 4.18 Si buidem sobre una taula un sac que conté 400 monedes, calcula les probabilitats següents:

a) Que surtin més de 210 cares.

b) Que surtin menys de 180 cares.

c) Que el nombre de cares que apareixen estigui comprés entre 190 i 210, ambdós inclosos.

Prob 4.19 S'està considerant utilitzar dos xips en un cert sistema. El temps de vida del xip 1 s'ha modelat segons una N(20000, 4000^2) (la probabilitat d'un temps de vida negatiu és negligible). i el del xip 2 segons una N(22000,1000^2). Quin xip s'hauria de triar si el temps de vida objectiu del sistema és de 20000 h? I si és de 24000 h?[5]

Prob 4.20 Sigui X una v.a. normal amb parámetres μ i σ. Trobau les següents probabilitats:[1]

a) $P(X < \mu)$ i $P(|X - \mu| > k\sigma)$ per a $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

b) $P(X > \mu + k\sigma)$ para $k = 1.28, 3.09, 4.26, 5.20$.

Prob 4.21 Un sistema de comunicacions admet un voltatge arbitrari v i s'obté una sortida $Y = v + N$, on N és una variable aleatòria normal de mitjana $\mu = 0$ i variància $\sigma^2 = 4$. Suposem que el canal és utilitzat per retransmetre informació binària de la manera següent:[2]

- per transmetre un 0 apliquem un voltatge de -1.
- per transmetre un 1 apliquem un voltatge de +1.

El receptor decideix que s'ha emès un 0 si es rep un voltatge negatiu i un 1 en cas contrari.

a) Trobau la probabilitat que el receptor s'equivoqui si s'ha emès un 0.

b) Trobau la probabilitat que el receptor s'equivoqui si s'ha emès un 1.

c) Trobau la probabilitat que el receptor s'equivoqui, suposant que la probabilitat d'emetre un 0 o un 1 és la mateixa.

(Examen, juny 2000)

Prob 4.22 El centre meteorològic local anuncia una tempesta amb llamps. Una companyia té un repetidor de senyal en aquesta zona. Se sap que el repetidor quedarà inutilitzat si un llamp cau a menys de 11 metres de l'antena. S'estima que la distància X de l'impacte d'un llamp a l'antena és una variable aleatòria amb funció de densitat:[3]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{100} & si & 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ \frac{2}{a} - \frac{4}{a^2}(x - \frac{a}{2}) & si & \frac{a}{2} < x \leq a \\ 0 & altrament & \end{cases}$$

[5]a) xip 2; b) xip 1

[1]a) 0,5 i 0,31740; 0,0456; 0,0026; 0; 0 b) 0,1003; 0,0001; 0; 0

[2]a) 0.3085; b) 0.3085; c) 0.3085

[3]a) $a = 20$; b) 0.973096

a) Calculau el valor de a.

b) Si cauen quatre llamps (de forma independent) calculau la probabilitat que l'antena quedi inutilitzada.

(Examen, setembre 2000)

Prob 4.23 Un voltatge de renou aleatori se sap que és gaussià amb esperança 1 i variància 9. Trobau el valor de c en cada un dels següents casos:[1]

a) $P(|X-1|<c)=0,9$.

b) $P((X-1)^2>c)=0,9$.

(Examen, setembre 2001)

Prob 4.24 Una variable aleatòria X es diu que té distribució Laplaciana si té per funció de densitat $f_X(x)=\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x|}$ per a tot $x\in\mathbb{R}$, on α és un nombre real positiu.[2]

a) Comprovar que per a tot $\alpha>0$, f_X és una funció de densitat.

b) Calcular la funció de distribució de X.

c) Calcular $Var(X)$.

(Examen, setembre 2002)

Prob 4.25 Un servei d'atenció al client d'un proveïdor d'accés a internet pretén solucionar telefònicament els problemes de connexió. Per experiència se sap que el temps d'atenció d'una incidència segueix aproximadament una llei normal amb mitjana de 6 minuts i desviació típica 1.[1]

a) Quina és la probabilitat de que es dediqui més de 6,5 minuts a una incidència?

b) 0,25 és la probabilitat de que es dediqui a un servei més de quants minuts?

c) Cercau un interval centrat en la mitjana com cobreixi el 50% dels temps d'atenció de les incidències.

d) Es pren una mostra aleatòria de quatre serveis. Quina és la probabilitat de que exactament a dos d'ells se'ls hagi de dedicar més de 6,5 minuts?

(Examen, setembre 2002)

Prob 4.26 La probabilitat que es produeixi una errada per hora en el funcionament d'una màquina és de 0.005. Es suposa que les errades ocorren de manera independent.[2]

a) Quina és la probabilitat que en 1000 hores de funcionament no es produeixi cap errada?

---

[1] a) $c=4,935$, b) $c=0,1406$

[2] c) $Var(X)=\frac{2}{\alpha^2}$

[1] a) 0,3085; b) 6,68; c) $[5,32;6,68]$; d) 0,2731

[2] a) 0,00673795; b) 0,393469; c) 0,345446

b) Quina és la probabilitat que el temps entre dues errades consecutives sigui inferior a 100 hores?

c) Una empresa té 5 màquines com les descrites en els apartats anteriors. Totes les màquines es posen en marxa al mateix moment. Quina és la probabilitat que al cap de 100 hores ja hagin fallat 2 màquines?

(Examen, setembre 2003)

Prob 4.27 Un canó d'artilleria guiat per satèl.lit llança míssils a una antena enemiga. La variable D que mesura a quina distància de l'antena cau cada bomba és una variable aleatòria amb funció de densitat [1]

$$f_D(d) = \begin{cases} K(625 - d^2) & \text{si } 0 \leq d \leq 25 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

on K és una constant.

a) Calculau la probabilitat que una bomba caigui <u>exactament</u> damunt l'antena. **0.5 pt**

b) Trobau el valor de la constant K. **0.5 pt**

c) L'antena queda momentàniament inutilitzada si una bomba cau a menys de 10 metres. Calculau la probabilitat que això passi. **0.5 pt**

d) Si es llancen 1000 bombes, calculau el nombre mitjà de vegades que l'antena queda inutilitzada per aquests llançaments. **0.5 pt**

(Examen, juny 2004)

Prob 4.28 La funció de densitat de probabilitat del temps d'error (en hores) d'un component electrònic és [0]

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000} e^{\frac{-x}{1000}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Calculau la probabilitat que el component es torbi més de 3000 hores en fallar.

b) Calculau la probabilitat que el component falli en el lapse de temps comprés entre 1000 i 2000 hores.

c) Calculau la probabilitat que el component falli abans de 1000 hores.

d) Calculau el nombre d'hores que tardaran en fallar el 10% de tots els components.

e) Calculau la funció de distribució acumulada.

f) Obteniu la mitjana i la variància del temps de vida del component electrònic.

(Examen, setembre 2004)

[1] a) 0; b) $96 \cdot 10^{-6}$; c) 0.568; d) 568

[0] a) 0,0497871; b) 0,232544; c) 0,632121; d) 105,361; f) $E(X) = 1000$, $Var(X) = 1000000$

Prob 4.29 El temps entre arribades d'avionetes a un aeroport té una distribució exponencial amb una mitjana d'una hora. [0]

a) Indicau la funció de densitat corresponent a aquesta distribució. Utilitzant la funció de densitat, calculau la probabilitat de que no aterri cap avioneta en una hora i mitja. **1 pt.**

b) Amb quina distribució de variable discreta està associada una distribució exponencial? Quina és la probabilitat de que aterrin més de tres avionetes en una hora? **1 pt.**

c) Si es trien 30 intervals d'una hora, quina és la probabilitat de que en cap d'ells hagin aterrat més de tres avionetes? **1 pt.**

d) Determinau la duració d'un interval (en hores), de forma tal que la probabilitat de que no aterri cap avioneta en aquest temps sigui 0,10. **1 pt.**

(Examen, setembre 2006)

[0] a) 0.223; b) 0.019; c) 0.562635; d) 2.30259