

2 Probabilitat

Prob 2.1 Calculau la probabilitat que en llançar 5 daus s'obtingui

- a) repòquer (5 cares iguals);
- b) pòquer (4 cares iguals);
- c) full (3 cares iguals i les altres dues iguals);
- d) trio (3 cares iguals i les altres dues diferents);
- e) doble parella (2 cares iguals, 2 cares iguals i l'altra diferent);
- f) parella (2 cares iguals i les altres 3 diferents);
- g) res (les 5 cares diferents).¹

Prob 2.2 Tenim 12 ràdios de les quals sabem que 5 són defectuoses. Se n'agafen 3 a l'atzar. Quina és la probabilitat que només una de les 3 sigui defectuosa?²

Prob 2.3 Llancem a l'aire 6 daus.

- a) Quina és la probabilitat que tots ells donin cares diferents?
- b) Quina és la probabilitat d'obtenir 3 parelles?³

Prob 2.4 Suposem que en una empresa de fabricació d'uns certs components electrònics se sap que el 2% dels 550 components emmagatzemats són defectuosos. Quina és la probabilitat de trobar-ne 2 de defectuosos si n'agafem aleatòriament 25? ⁴

Prob 2.5 Si mesclem ben mesclat un joc de 52 cartes, quina és la probabilitat que els 4 asos quedin col.col.locats consecutivament?⁵

Prob 2.6 Quatre cartes numerades de l'1 al 4 estan girades cap avall damunt d'una taula. Una persona, suposadament clarivent, anirà endevinant els valors de les 4 cartes una a una. Si suposem que és un farsant i que el que fa és dir els quatre nombres a l'atzar, quina és la probabilitat que n'encerti com a mínim un? (obviament, no repeteix cap nombre).⁶

Prob 2.7 En una loteria hi ha 500 bitllets i 5 premis. Si una persona compra 10 bitllets, quina és la probabilitat d'obtenir:

- a) el primer premi?
- b) com a mínim un premi?

¹a) $\frac{1}{1296}$, b) $\frac{25}{1296}$, c) $\frac{25}{648}$, d) $\frac{25}{162}$, e) $\frac{25}{108}$, f) $\frac{25}{54}$, g) $\frac{5}{54}$
² $\frac{21}{44}$
³a) $\frac{5}{324}$, b) $\frac{25}{648}$
⁴0,074
⁵ $\frac{1}{5525}$
⁶ $\frac{19}{24}$

d) exactament un premi?⁷

Prob 2.8 S'elegeix a l'atzar un nombre de l'1 al 6.000. Calculeu la probabilitat que sigui múltiple de 2 o de 3 o de 4 o de 5.⁸

Prob 2.9 Si triam un nombre d'entre els primers 120 enters positius, quina és la probabilitat que sigui múltiple de 3, no sigui divisible per 5, i sigui divisible per 4 o per 6?⁹

Prob 2.10 Suposem que en un dau la probabilitat de cada cara és proporcional al nombre inscrit en ella. Calculeu la probabilitat d'obtenir un nombre parell.¹⁰

Prob 2.11 En una reunió, n persones ($n \geq 3$) llancen una moneda a l'aire. Si una d'elles dona diferent de totes les altres, el seu propietari paga una ronda. Quina és la probabilitat que passi això?¹¹

Prob 2.12 Dues persones juguen a cara o creu, i han decidit continuar la partida fins que s'hagin obtingut com a mínim 3 cares i 3 creus. Trobau la probabilitat que el joc no s'acabi en 10 tirades.¹²

Prob 2.13 Si la probabilitat de que un estudiant qualsevol acabi una carrera determinada és 0.4, donat un grup de 5 estudiants d'aquesta carrera, calculeu la probabilitat que:

- a) Cap d'ells acabi la carrera;
- b) Només un acabi la carrera;
- c) Almenys dos acabin la carrera;
- d) Tots 5 acabin la carrera.¹³

Prob 2.14 En una ciutat se publiquen 3 diaris A,B i C. El 30% de la població llegeix A, el 20% llegeix B i el 15% llegeix C; el 12% llegeix A i B, el 9% llegeix A i C, i el 6% llegeix B i C; finalment, el 3% llegeix A, B i C. Calculeu:

- a) El percentatge de gent que llegeix almenys un dels tres diaris.
- b) El percentatge de gent que només llegeix A.
- c) El percentatge de gent que llegeix B o C, però no A.
- d) El percentatge de gent que llegeix A o bé no llegeix ni B ni C.⁰

⁷a) $\frac{1}{50}$; b) 0,09645; c) 0,09295

⁸ $\frac{22}{30}$

⁹ $\frac{3}{2}$

¹⁰ $\frac{4}{5}$

¹¹ $\frac{7}{n}$

¹² $\frac{n}{2^{n-1}}$

¹³0,109375

¹³a) 0,07776; b) 0,2592; c) 0,66304; d) 0,01024

⁰a) 41%; b) 12%; c) 11%; d) 89%

Prob 2.15 Dos sistemes amb quatre components independents amb fiabilitats respectives p_1, p_2, p_3 i p_4 se configuren de les dues maneres següents: En el sistema A , la combinació en sèrie dels components 1 i 2 se configura en paral·lel amb la combinació en sèrie dels components 3 i 4; en el sistema B , la combinació en paral·lel de 1 i 3 se configura en sèrie amb la combinació en paral·lel de 2 i 4. Determinau quin dels dos sistemes té una fiabilitat més alta.⁰

Prob 2.16 Si un sistema que consisteix en tres components independents amb la mateixa fiabilitat ($p_1 = p_2 = p_3$) té una fiabilitat de 0.8, determinau p_1 si: a) el component 3 està configurat en sèrie amb la combinació en paral·lel de 1 i 2; b) el component 3 està configurat en paral·lel amb la combinació en sèrie de 1 i 2.⁰

Prob 2.17 Una forma d'incrementar la fiabilitat d'un sistema és mitjançant la introducció d'una còpia dels components en una configuració paral·lela. Suposem que la NASA vol una probabilitat no menor que 0.99999 que el transbordador espacial entri en òrbita al voltant de la Terra amb èxit. Quants de motors s'han de configurar en paral·lel per tal d'assolir aquesta fiabilitat, si se sap que la probabilitat que un qualsevol dels motors funcioni adequadament és 0.95? Suposem que els motors funcionen de manera independent entre si.⁰

Prob 2.18 Quina és la probabilitat que d'entre n persones de les quals cap no ha nascut el 29 de febrer n'hi hagi com a mínim dues que han nascut el mateix dia de l'any? (no necessàriament del mateix any). Calculau la probabilitat per a diferents valors de n (10, 15, 22, 23, 30, 40, 50, 55).⁰

Prob 2.19 Una quarta part de la població ha estat vacunada contra una malaltia contagiosa. Durant una epidèmia, s'observa que d'entre els malalts n'hi ha un que ha estat vacunat per cada quatre que no hi estan.

a) Ha tingut qualche eficàcia la vacuna?

b) D'altra banda, se sap que hi ha un malalt entre cada 12 persones vacunades. Quina és la probabilitat que estigui malalta una persona que no s'ha vacunat?⁰

Prob 2.20 Un llarg missatge s'ha codificat en termes de dos símbols A i B per transmetre'l a través d'un canal de comunicació. La codificació és tal que A apareix el doble de vegades que B en el missatge codificat. El soroll del canal és tal que quan A se transmet, se rep com a A amb probabilitat 0.8 i com a B amb probabilitat 0.2; quan B se transmet, se rep com a B amb probabilitat 0.7 i com a A amb probabilitat 0.3.

a) Quina és la freqüència relativa d' A en el missatge rebut?

b) Si la darrera lletra del missatge que s'ha rebut és una A , quina és la probabilitat que s'hagi enviat una A ?⁰

⁰B

⁰a) 0,825211; b) 0,652062

⁰4

⁰1 - $\frac{365 \cdot 364 \dots (365 - n + 1)}{365^n}$; 0, 117; 0, 253; 0, 476; 0, 507; 0, 706; 0, 891; 0, 970; 0, 986

⁰a) Sí, b) $\frac{1}{9}$

⁰a) 0,63333; b) 0,8421

Prob 2.21 Un comerciant ha de viatjar en avió entre Bangkok i Bagdad. Preocupat, demana a la companyia aèria quina és la probabilitat que hi hagi com a mínim una bomba dins l'avió i li diuen que és 0.1. Més preocupat encara, demana quina seria la probabilitat que hi hagués com a mínim dues bombes i li diuen que seria 0.01. Més tranquil, decideix dur una bomba en el seu equipatge. Quina valoració estadística podem fer de la seva decisió?⁰

Prob 2.22 Amb el propòsit d'aconseguir que una placa de circuits funcioni, es col·loquen en ella set xips idèntics. Per augmentar la seva fiabilitat s'afegeix un xip addicional del mateix tipus, de forma que el disseny de la placa fa que si un dels set xips falla és substituït automàticament pel xip addicional⁰.

- a) Calculau la probabilitat p_b que la placa funcioni en funció de la probabilitat p que cada xip funcioni. **(0.7 pt.)**
- b) Suposem que n plaques d'aquest tipus estan operant en paral·lel, i que es requereix una probabilitat del 99,9% que almenys una d'elles funcioni correctament. Quantes plaques necessitem? (donau el resultat en funció de p). **(0.7 pt.)**

(Examen, juny 2002)

Prob 2.23 Siguin tres successos A , B i C tales que C està contingut en la intersecció $\bar{A} \cap B$. Sabem que $P(A) = 0.6$, $P(C) = 0.1$, $P(A \cap B) = 0.3$ i que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1$ ⁰.

- a) Calculau $P(B)$. **(0.5 pt.)**
- b) Calculau la probabilitat de que succeeixi exactament un dels tres successos. **(1 pt.)**

(Examen, setembre 2002)

Prob 2.24 Una urna conté 2 boles blanques i 2 negres; una segona urna conté 2 boles blanques i 3 negres⁰.

- a) Si extreim 1 bola de cada urna, quina és la probabilitat que ambdues siguin del mateix color? **0.25 pt.**
- b) Si seleccionam una urna a l'atzar i extreim una bola, quina és la probabilitat que no sigui blanca? **0.25 pt.**
- c) Si seleccionam una urna a l'atzar i extreim dues boles a la vegada, quina és la probabilitat que siguin del mateix color? **0.25 pt.**
- d) Seleccionam una urna a l'atzar, extreim una bola i resulta esser blanca. Quina és la probabilitat d'haver escollit la primera urna? **0.5 pt.**

(Examen, juny 2003)

⁰és absurda

⁰a) $p^7(8-7p)$; b) $n = \frac{-3}{\log[1-p^7(8-7p)]}$

⁰a) 0,6; b) 0,5

⁰a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{11}{20}$; c) $\frac{11}{30}$; d) $\frac{5}{9}$

Prob 2.25 Una capsa A conté nou cartes numerades del 1 al 9, i una altra capsa B conté cinc cartes numerades del 1 al 5. S'agafa una capsa a l'atzar i es treu una carta; si la carta indica un nombre parell, llavors es treu una altra carta de la mateixa capsa; si la carta indica un nombre imparell, es treu una carta de l'altra capsa. Les extraccions es fan sense reposició⁰.

- a) Quina és la probabilitat que ambdues cartes tenguin nombres parells? **0.5 pt.**
- b) Si ambdues cartes mostren nombres parells, quina és la probabilitat que procedeixin de la capsa A ? **0.5 pt.**
- c) Quina és la probabilitat que una carta sigui parell i l'altra imparell? **0.75 pt.**

(Examen, setembre 2003)

Prob 2.26 Un lot de 100 circuits integrats en conté 20 de defectuosos. Es trien dos a l'atzar, sense reposició⁰.

- a) Quina és la probabilitat que el segon circuit sigui defectuós? **0.25 pt**
- b) Si el segon circuit ha estat defectuós, quina és la probabilitat que el primer no ho hagi estat? **0.25 pt**
- c) Si considerem 5 lots idèntics i independents entre si, quina és la probabilitat que en dos d'aquests lots algun dels circuits agafats sigui defectuós? **1 pt**

(Examen, juny 2004)

Prob 2.27 En una aula tenim 6 alumnes de telemàtica i 8 d'informàtica. Triem a l'atzar un grup de 5 alumnes ⁰.

- a) Calcular la probabilitat que hi hagi 3 alumnes de telemàtica i 2 d'informàtica. **0,5 pt**
- b) Quina seria la probabilitat de que un alumne concret de telemàtica formi part del grup de 5 indicat a l'apartat anterior? **0,5 pt**
- c) Quina seria la probabilitat que dos alumnes concrets de telemàtica no estiguin a la vegada en el grup format per 3 alumnes de telemàtica i 2 d'informàtica? **0,5 pt**

Suposem ara que una empresa ens demana un informàtic o telemàtic per dirigir un grup d'investigació i l'hem de triar d'entre l'alumnat que tenim dins l'aula. Per això fem tres grups, el grup A format per tres telemàtics i dos informàtics, el grup B format per un telemàtic i 3 informàtics i el grup C per la resta de l'alumnat. Seleccionam a l'atzar un dels grups i després triam a l'atzar un alumne.

- d) Cercau la probabilitat de triar un telemàtic. **0,75 pt**
- e) Si l'alumne seleccionat és un telemàtic, cercau la probabilitat haver triat el grup C. **0,75 pt**

⁰a) $\frac{2}{15}$; b) $\frac{5}{8}$; c) $\frac{8}{15}$

⁰a) 0,2; b) 0,808; c) 0,34

⁰a) $\frac{40}{143}$; b) $\frac{20}{143}$; c) $\frac{135}{143}$; d) $\frac{5}{12}$; e) $\frac{8}{25}$

(Examen, juny 2005)

Prob 2.28 Segons dades del organisme de la ONU, Unió Internacional de Telecomunicacions (www.itu.org), l'any 2000 el nombre d'ordinadors per cada 100 habitants era de 25 a la UE (Unió Europea) i de 51 als EUA (Estats Units d'Amèrica) ⁰. El cens als EUA era de 281 milions d'habitants ⁰, mentre que a la UE era de 376 milions⁰.

Suposem que els ordinadors estan distribuïts entre els habitants i designem per O el succés *Tenir ordinador* i per H el succés *Ser habitant de la UE*. Calculau les següents probabilitats (tenint en compte que només consideram aquests dos llocs) ⁰:

- a) $P(H)$ i $P(\overline{H})$. **0.5 pt**
- b) $P(O/H)$ i $P(O/\overline{H})$. **0.25 pt**
- c) $P(O \cap H)$ i $P(O \cap \overline{H})$ **0.75 pt**
- d) $P(O)$. **0.75 pt**
- e) Si triam una persona a l'atzar i resulta tenir ordinador, quina és la probabilitat que aquesta persona no sigui de la UE. **0.75 pt**

(Examen, setembre 2005)

Prob 2.29 La probabilitat que el Barça guanyi la lliga de l'Estat Espanyol és de 0,4, que la guanyi el Madrid és 0,3. La probabilitat que el campió de la lliga guanyi la Champions League és de 0,45 si la guanya el Barça, de 0,5 si la guanya el Madrid (al Madrid sempre li ha anat millor la Champions) i 0,2 si la guanya un altre equip de l'Estat Espanyol⁰.

- a) Quina és la probabilitat que guanyi la lliga un equip que no sigui ni el Barça ni el Madrid? **5 pt.**
- b) Quina és la probabilitat que guanyi la Champions League un equip de l'Estat Espanyol. **1,3 pt.**
- c) Si guanya la Champions un equip de l'Estat Espanyol, quina és la probabilitat que la lliga l'hagi guanyat el Barça? **1,2 pt.**

(Examen, juny 2006)

Prob 2.30 Sigui A, B dos successos de forma que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$ i $P(A \cap B) = 0,1$. Calculau les següents probabilitats⁰:

- a) $P(A')$ **0,25 pt.**
- b) $P(A \cup B)$ **0,25 pt.**
- c) $P(A/B)$ **0,25 pt.**

⁰<http://www.ine.es/revistas/fuentes/Numero51/paginas/9-10.htm>

⁰<http://www.census.gov/main/www/cen2000.html>

⁰<http://www.ine.es/revistas/fuentes/numero43/paginas/12-13.htm>

⁰a) 0.572; 0.428; b) 0.25; 0.51; c) 0.143; 0.21828; d) 0.36128; e) 0.604185

⁰a) 0.3; b) 0.39; c) 0.4615

⁰a) 0.7; b) 0.4; c) 0.5; d) 0.1, e) 0.6; f) 0.8; g) $\frac{1}{7}$

- d) $P(A' \cap B)$ 0,5 pt.
- e) $P(A' \cap B')$ 0,25 pt.
- f) $P(A' \cup B)$ 0,25 pt.
- g) $P(B/A')$ 0,25 pt.

on A' i B' són els successos contraris a A i B respectivament.
(Examen, setembre 2006)

Prob 2.31 En un camp de basquet juguen el Barça contra el Madrid i només queden 14 localitats buides i numerades. El venedor de les entrades veu venir 14 persones, d'aquestes 5 van juntes i vestides del Madrid, altres 6 també van juntes i vestides del Barça i tres més que no van plegades i no duen cap distintiu, a aquest darrer grup li direm *neutral*. Se suposa que les entrades que dóna el venedor no es poden intercanviar. ⁰

- a) El venedor troba que han de participar, animant al seu equip, i per tant vol posar junts a cada grup (incloent el grup neutral). De quantes formes podria repartir les entrades? I de quantes formes, de manera que els del Barça i els del Madrid no estiguin plegats? **2 pt.**
- b) Suposem ara que al venedor només l'interessa que els del Barça i els del Madrid estiguin plegats, però li és igual com estiguin posades les altres tres persones. De quantes formes podria repartir les entrades? I de quantes formes, de manera que el grup del Barça i el del Madrid no estiguin plegats? **2 pt.**
- c) Si el venedor dóna les entrades a l'atzar, quina és la probabilitat (amb una aproximació de 7 decimals) de que quedin col·locats com indica la segona part de l'apartat anterior? **1 pt.**

(Control curs 2006/07)

Prob 2.32 De l'exercici 2.31, suposem que només en queden dues d'entrades, i entre tots acorden que el venedor triarà a l'atzar dues persones. Calculau la probabilitat ⁰

- a) Els dos triat siguin del Barça. 0.75 pt.
- b) El primer sigui del Barça i el segon del Madrid. 0.75 pt.
- c) El segon sigui neutral. 1.5 pt.
- d) Si el segon és del Barça, quina és la probabilitat que el primer també ho sigui? 2 pt.

(Control curs 2006/07)

Prob 2.33 Una botiga d'informàtica demana un lot de 100 PCs. Per experiència sap que en general li arriben un 5% de defectuosos. Es trien dos a l'atzar, sense reemplaçament, del lot. ⁰

⁰a) 3 110 400, 1 036 800; b) 10 368 000, 6 220 800; c) 0.0000714

⁰a) 0.165; b) 0.165; c) 0.214; d) 0.385

⁰a) $\frac{1}{20}$; b) $\frac{4}{99}$; c) $\frac{1}{20}$; d) $\frac{1}{20}$; e) $\frac{4}{99}$

- a) Quina és la probabilitat de que el primer en ser seleccionat sigui defectuós? **0.2 pt.**
- b) Quina és la probabilitat de que el segon sigui defectuós donat que el primer és defectuós? **0.3 pt.**
- c) Com es canvia la resposta de l'apartat b) si els PCs es prenen amb reemplaçament? **0.3 pt.**
- d) Quina és la probabilitat de que el segon PC sigui defectuós? **0.7 pt.**
- e) Si el segon PC ha resultat ser defectuós, quina és la probabilitat que el primer també hagi estat defectuós. **1 pt.**

(Examen, setembre 2007)