Classes Pràctiques d'Aplicacions Lineals

Classe pràctica 4

Prob 5 Considerem l'aplicacions lineals $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ i $g : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ donades per:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + cx + dx^2, \qquad g(a + bx + cx^2) = (a + b, c)$$

Calculau:

1. Demostrau que efectivament g és una aplicació lineal. **1.5 pt.**
2. $g \circ f$ (indicant el conjunt inicial, final i la image d'un element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$). **1.5 pt.**
3. Calculau $\ker(g \circ f)$ i $\ker f$ i indicau si $\ker f \subseteq \ker(g \circ f)$. **2 pt.**
4. Trobau les matrius associades a les aplicacions lineals f, g i $g \circ f$ respecte a les bases canòniques dels conjunts inicials i finals. Quina relació hi ha entre aquestes matrius?. **1.5 pt.**
5. Trobau $\operatorname{Im} g$. **1.5 pt.**
6. Trobau la matriu associada a g si les bases del conjunt inicial i final són, $\{1, 1+x, 1+x^2\}$ i $\{(1,0),(1,1)\}$ respectivament. **2 pt.**

(Control, curs 2008/09)

Solució classe pràctica 4

Prob 5 1.- Siguin $a+bx+cx^2, a'+b'x+c'x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ i $t \in \mathbb{R}$

- Hem de veure que $g[(a+bx+cx^2)+(a'+b'x+c'x^2)] = g(a+bx+cx^2)+g(a+bx+cx^2)$.

$$g[(a+bx+cx^2)+(a'+b'x+c'x^2)] = g[a+a'+(b+b')x+(c+c')x^2] = (a+a'+b+b', c+c') =$$

$$= (a+b,c)+(a'+b',c') = g(a+bx+cx^2)+g(a+bx+cx^2)$$

- Hem de veure que $g[t(a+bx+cx^2)] = tg(a+bx+cx^2)$

$$g[t(a+bx+cx^2)] = g(ta+tbx+tcx^2) = (ta+tb,tc) = t(a+b,c) = tg(a+bx+cx^2)$$

2.- $g\circ f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$(g\circ f)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = g(a+b+cx+dx^2) = (a+b+c,d)$$

Farem servir els isomorfismes $h : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ i $h' : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ donades per:

$$h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a,b,c,d), \qquad h'(a+bx+cx^2) = (a,b,c)$$

Aleshores les aplicacions sobre les quals estudiarem el problema seran $f' : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ i $g' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donades per:

$$f'(a,b,c,d) = (a+b,c,d), \qquad g'(a,b,c) = (a+b,c)$$

3.- Pel que hem vist a l'apartat 2,

$$(g'\circ f')(a,b,c,d) = (a+b+c,d)$$

per tant per cercar $\ker(g'\circ f')$ hem de trobar els elements $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tal que $(g'\circ f')(a,b,c,d) = (0,0)$

$$(g'\circ f')(a,b,c,d) = (a+b+c,d) = (0,0)$$

Aleshores $a+b+c=0$, $d=0$ i

$$\ker(g'\circ f') = \{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 | a+b+c=0, d=0\}$$

i desfent l'isomorfisme

$$\ker(g\circ f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \middle| a+b+c=0, d=0 \right\}$$

Cerquem ara $\ker f$. Per a així cercarem $\ker f'$, que estarà format pels elements $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tal que $f'(a,b,c,d) = (0,0,0)$

$$f'(a,b,c,d) = (a+b,c,d) = (0,0,0)$$

Per tant, $a+b=0$, $c=0$, $d=0$,

$$\ker f' = \{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 | a+b=0, c=0, d=0\}$$

i desfent l'isomorfisme

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \middle| a+b=0, c=0, d=0 \right\}$$

Podem veure que $\ker f \subseteq \ker (g \circ f)$ ja que si els elements de $\ker f$ han de complir $a+b=0, c=0, d=0$ també compliran $a+b+c=0, d=0$ que és la condició que han de complir els elements de $\ker (g \circ f)$

4.- Les matrius associades a f, g i $g \circ f$ són les mateixes que les associades a f', g' i $g' \circ f'$.

- Matriu associada a f' i per tant a f:

  $$f'(1,0,0,0) = (1,0,0), \quad f'(0,1,0,0) = (1,0,0), \quad f'(0,0,1,0) = (0,1,0), \quad f'(0,0,0,1) = (0,0,1)$$

  aleshores la matriu associada serà

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriu associada a g' i per tant a g

  $$g'(1,0,0) = (1,0), \quad g'(0,1,0) = (1,0), \quad g'(0,0,1) = (0,1)$$

  aleshores la matriu associada serà

  $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriu associada a $g' \circ f'$ i per tant a $g \circ f$

  $$f'(1,0,0,0) = (1,0), \quad f'(0,1,0,0) = (1,0), \quad f'(0,0,1,0) = (1,0), \quad f'(0,0,0,1) = (0,1)$$

  aleshores la matriu associada serà

  $$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  La relació entre aquestes matrius és que $C = B \cdot A$

  5.- Cercarem $\operatorname{Im} g'$.

  $$\operatorname{Im} g' = g'(\mathbb{R}^3) = g'(\langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle) = \langle g'(1,0,0), g'(0,1,0), g'(0,0,1)\rangle = \langle (1,0),(1,0),(0,1)\rangle$$

  Podem observar que hi ha dos vectors iguals, per tant

  $$\operatorname{Im} g' = \langle (1,0),(0,1)\rangle; \quad \operatorname{Im} g = \langle (1,0),(0,1)\rangle;$$

  6.- Tenint en compte l'isomorfisme indicat abans, cercarem la matriu associada a g' respecte a les bases $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1)\}$ i $\{(1,0),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ respectivament.

  $$\begin{gathered} g'(1,0,0) = (1,0) = 1 \cdot (1,0) + 0 \cdot (1,1) \\ g'(1,1,0) = (2,0) = 2 \cdot (1,0) + 0 \cdot (1,1) \\ g'(1,0,1) = (1,1) = 0 \cdot (1,0) + 1 \cdot (1,1) \end{gathered}$$

  I la matriu associada demanada de g' i de g serà

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$