# Solució exercici 5.30 d'aplicacions lineals

Considerem les aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$ i $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $g(x, y, z) = (x + y, x + z)$.

a) Defineix, de forma semblant a com hem definit $f$ i $g$, l'aplicació $g \circ f$. **0,3 pt.**

b) Trobau les matrius associades a $f$, $g$ i $g \circ f$. Quina relació hi ha entre aquestes matrius? Comprovar-ho. **0,3 pt.**

c) Cercau una base i la dimensió de $Im\ f$ i $Ker\ g$, i indicau, només amb les dades d'aquest apartat, si $f$ és injectiva, exhaustiva o bijectiva. És $g$ injectiva? Per què? **0,6 pt.**

d) Tenint en compte només els rangs de les matrius associades a les aplicacions $g$ i $g \circ f$, podries dir si aquestes són exhaustives, injectives o bijectives? Raonau la resposta i indicau si ho són. **0,6 pt.**

e) Donada la base $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\{(1, 1), (1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ trobau la matriu associada a $g$ respecte a aquestes base. Podries saber quin seria el rang d'aquesta matriu sense calcular-la? Raonau la resposta. **0,6 pt.**

f) Aplicant la definició de vector propi, trobau algun vector propi i el seu valor propi corresponent, de l'endomorfisme $f$. **0,6 pt.**

**Solució:**

a) $(g \circ f)(x, y, z) = g(f(x, y, z)) = g(3x, x - y, 2x + y + z) = (4x - y, 5x + y + z)$

b)

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenen la relació $M_{g \circ f} = M_g \cdot M_f$

c)

$$Im\ f = \langle f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1) \rangle = \langle (3, 1, 2), (0, -1, 1), (0, 0, 1) \rangle$$

que són linealment independents, ja que cada un té davant un zero més que l'anterior.

Per tant, dim $Im\ f$=3 i una base és $\{(3,1,2),(0,-1,1),(0,0,1)\}$.

Cerquem ara el nucli de $g$:

$Ker\ g = \{(x,y,z)|g(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z)|(x+y, x+z) = (0,0)\} = \{(x,y,z)|x+y = 0, x$

Resolent el sistema ens queda que $y = -x$ i $z = -x$. Per tant, un element que pertany a $Ker\ g$ serà de la forma $(x,-x,-x) = x(1,-1,-1)$. D'aquí deduïm que una base del nucli de $g$ és $\{(1,-1,-1)\}$ i dim $Ker\ g = 1$.

$f$ és bijectiva, ja que com dim $Im\ f = 3 = dim\mathbb{R}^3$ és exhaustiva i com la dimensió de l'espai vectorial origen i final és la mateixa, és bijectiva.

$g$ no és injectiva, ja que per això hauria de complir-se que dim $Ker\ g = 0$.

d) El rang de la matriu $M_g$ és 2, ja que el menor de segon ordre $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Pel mateix motiu rang de $M_{g\circ f} = 2$ ja que el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Com rang $M_g = 2 = dim\ \mathbb{R}^2$, l'aplicació $g$ és exhaustiva, però com les dimensions de l'espai vectorial inicial i final són diferents, no pot ser bijectiva, i per tant, tampoc és injectiva.

Pel mateix motiu l'aplicació $g \circ f$ és exhaustiva, però no injectiva ni bijectiva.

e) Per cercar la matriu associada a l'aplicació lineal $g$ respecte a les base donades, cercarem les coordenades de les imatges dels elements de la base de $\mathbb{R}^3$ respecte a la base donada de $\mathbb{R}^2$. Per a això:

$$g(1,1,0) = (2,1) = x(1,1) + y(1,-1) = (x+y, x-y)$$

resolent el sistema ens dóna $x = \frac{3}{2}$ i $y = \frac{1}{2}$.

Anàlogament tendríem $g(1,0,1) = (1,2) = \frac{3}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1)$ i $g(0,1,1) = (1,1) = (1,1) - 0 \cdot (1,-1)$

Per tant, la matriu associada a $g$ en la base donada és

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

El rang de la matriu associada a una aplicació lineal no depèn de la base triada, per tant serà 2 que és la calculada a l'apartat d).

f) $(x, y, z)$ és un vector propi de $f$ si $f(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z) = k(x, y, z)$. Ens queda els següent sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 3x & & & & & = & kx \\ x & - & y & & & = & ky \\ 2x & + & y & + & z & = & kz \end{array}\right\}$$

aïllant tenin $k = 3$, $x = \frac{8z}{9}$, $y = \frac{2z}{9}$. Per tant, per a $z = 9$ un valor propi és 3 i un vector propi és $(8, 2, 9)$, ja que $f(8, 2, 9) = 3(8, 2, 9)$