Tema 5. VARIABLES ALEATÒRIES CONTÍNUES

Recordatori:

Variable aleatòria (v.a.): regla que assigna un valor numèric a cada un dels resultats possibles d'un experiment aleatori

Exemples:

1. Experiment: llançar 2 monedes
   V.a.: X=nombre de cares
   $\Omega=\{cc, c+, +c, ++\}$ X(cc)=2, X(c+)=1, X(+c)=1, X(++)=0

2. Experiment: llançar 1 moneda fins que surt cara
   V.a.: X=nombre de llançaments
   $\Omega=\{c, +c, ++c, +++c, ...\}$ X(c)=1, X(+c)=2, X(++c)=3, ...

3. Experiment: escollir 3 persones a l'atzar
   V.a.: X=alçada mitjana de les 3 persones
   Ω={qualsevol grup de 3 persones} $X(grup)=(a_1+a_2+a_3)/3$
   (a_1: alçada 1ª persona, a_2: alçada 2ona persona, etc)

Tipus de variables aleatòries:

Recordatori:

- **V.a. discretes**: prenen un conjunt de valors finit (exemple 1: $\Omega_X=\{0, 1, 2\}$)
  o bé infinit però numerable (exemple 2: $\Omega_X=\{1, 2, 3, ...\}$)

- **V.a. contínues**: prenen un conjunt de valors infinit no numerable
  (la diferència entre 2 valors pot ésser infinitament petita)
  (exemple 3: $\Omega_X=[0, 3)$)

Càlcul de probabilitats amb variables aleatòries:

- V.a. contínues: **Funció de densitat**

P(X=x)=0

però $P(a<X<b)=\int_a^b f_X(x)\,dx$

Propietat: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=1$

Exemples:

1. Experiment: triar a l'atzar un nombre entre 0 i 1 (inclosos)
   V.a.: X=nombre triat
   Ω=[0, 1]   X(nombre)=nombre
   per exemple: 0,75 → X(0,75)=0,75

   P(X=0,75)=CF/CP = 1 / ∞ = 0

   $f_X(x)=1$ si $0 \leq x \leq 1$
   $f_X(x)=0$ en cas contrari

   $$P(0<X<0{,}5)=\int_0^{0{,}5} 1\,dx=0{,}5$$

Càlcul de probabilitats amb variables aleatòries:

- **Funció de distribució**: es defineix tant per a v.a. discretes com contínues

$$F_X(x)=P(X \le x)$$

En el cas continu:

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$

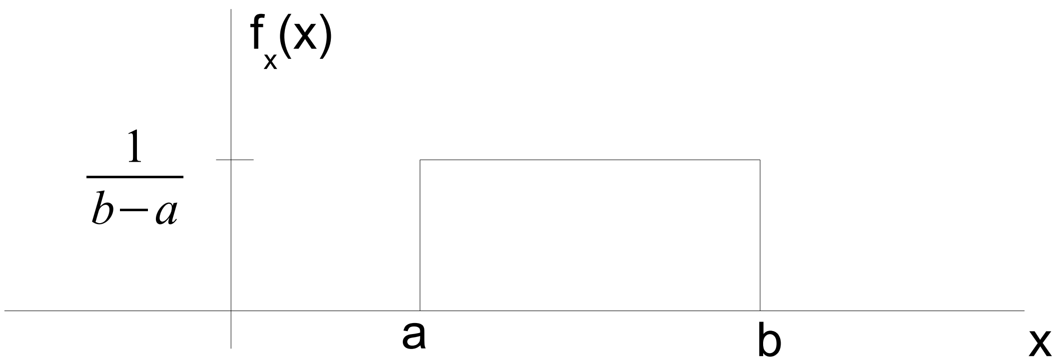
Propietats:

- $0 \le F_X(x) \le 1$
- $P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b) = F_X(b)-F_X(a)$

V.a. contínues típiques

V.a. uniforme:

X=valors en un interval [a, b] amb funció de densitat de probabilitat constant



Funció de distribució:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Notació: X ~ U(a, b)

V.a. contínues típiques

V.a. uniforme:

Exemple:

Un professor sempre arriba a classe entre les 9h i les 9h10.
X=hora d'arribada del professor (minuts des de les 9h)
$X \sim U(0, 10)$

Si els seus alumnes sempre arriben a les 9h,

P(alumnes esperin més de 5 minuts)=$P(X > 5)=1-P(X \leq 5)=$

$$=1-F_X(5)= 1-\frac{5-0}{10-0}=0,5$$

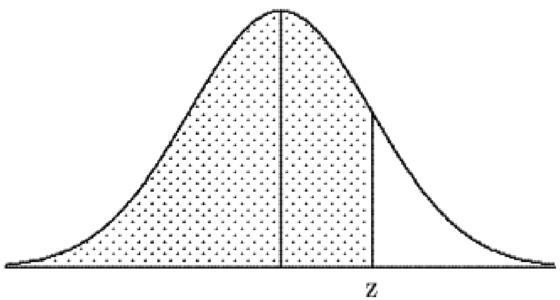
P(alumnes esperin entre 3 i 7 minuts)=$P(3 \leq X \leq 7)=F_X(7)-F_X(3)=$

$$= \frac{7-0}{10-0}-\frac{3-0}{10-0}=0,4$$

V.a. contínues típiques

V.a. normal o Gaussiana:

X=valors entre -∞ i +∞ amb funció de densitat amb la forma següent



Funció de distribució: tabulada

E(X)= μ

Var(X)= σ^2

Notació: X ~ N(μ, σ^2) (Z ~ N(0, 1) s'anomena **normal estàndar**)

V.a. contínues típiques

V.a. normal o Gaussiana:

Propietats:

- si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i $Z \sim N(0, 1)$ llavors $F_X(x) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

- $F(-z)=1-F(z)$

- (**Teorema del límit central**):

$$X_1+X_2+\cdots+X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

si n és molt gran, les v.a. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ són independents, tenen la mateixa distribució de probabilitats i les seves esperances i variàncies són μ i σ^2

- (aproximació d'una v.a. binomial per una normal):
  si n és molt gran $B(n, p) \approx N(np, np(1-p))$

- (aproximació d'una v.a. Poisson per una normal):
  si λ és molt gran $Po(\lambda) \approx N(\lambda, \lambda)$

V.a. contínues típiques

V.a. normal o Gaussiana:

Exemple:

Suposem que el nombre d'hores (X) que un auxiliar administratiu necessita per a aprendre un nou programa de facturació és una v.a. amb distribució normal amb mitjana 18 i desviació típica 2,5.

P(tardi més de 20 hores en aprendre)=$P(X > 20)=1- P(X \leq 20) =$

$$= 1- F_X(20)=1 - F_Z\left(\frac{20-18}{2,5}\right) = 1 - F_Z(0,8) = \text{(taula)}=1-0,7881=0,2119$$

P(tardi menys de 15 hores) = $P(X \leq 15) = F_X(15) = F_Z\left(\frac{15-18}{2,5}\right) =$

$$= F_Z(-1,2) = 1- F_Z(1,2) =\text{(taula)}=1- 0,8849=0,1151$$

P(tardi entre 15 i 20 hores)=$P(15 \leq X \leq 20)=F_X(20) - F_X(15)=$(taules)=

$$= 0,7881 - 0,1151 = 0,673$$

Quin temps màxim necessita per aprendre, amb una probabilitat del 90%?

$P(X \leq t)=0,9$

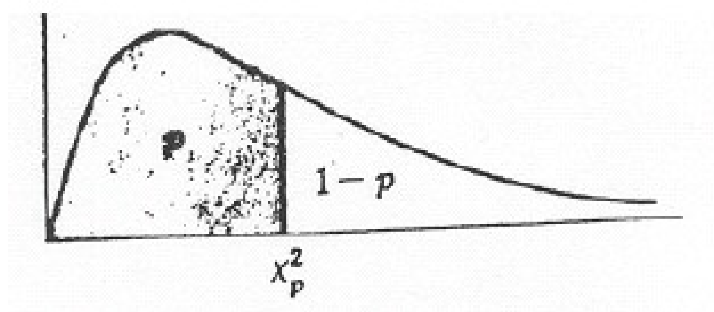
$$P(X \leq t)= F_X(t) = F_Z\left(\frac{t-18}{2,5}\right) = 0,9 \ \rightarrow \ \text{Taules: } \frac{t-18}{2,5} \simeq 1,28$$

$t \approx 21,2$ hores

V.a. contínues típiques

V.a. xi quadrat:

X=valors entre 0 i +∞ amb funció de densitat amb la forma següent



Funció de distribució: tabulada

E(X)= n

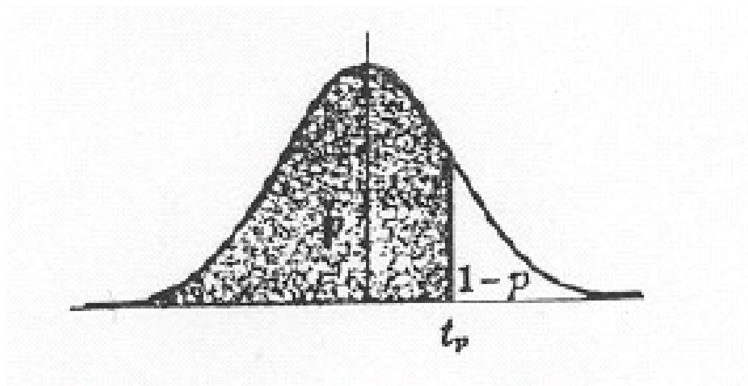
Var(X)= 2n

Notació: X ~ χ^2_n (xi quadrat amb n graus de llibertat)

V.a. contínues típiques

V.a. *t* de Student:

X=valors entre -∞ i +∞ amb funció de densitat amb la forma següent



Funció de distribució: tabulada

E(X)= 0

Var(X)= n/(n-2) (per a n > 2)

Notació: X ~ t_n (*t* de Student amb n graus de llibertat)