1 Classe pràctica d'Espais vectorials

Classe pràctica 4

Prob 5 Sigui $V = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] | a + b + c = 0\}$ i $W = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] | 2a - b - 2c = 0\}$.

a) Cercau un a base de $V \cap W$ **1 pt.**

b) Trobau el subespai vectorial suplementari U de V i expressau-lo en funció de la/les condicions que han de complir els coeficients dels polinomis d'U (és a dir en la forma en que se us han donat els subespais V i W. **1 pt.**

c) Considerem les bases $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Trobau la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$. **1 pt.**

(Examen, setembre 2007)

Solució classe pràctica 4

Prob 5 Sigui $V = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] | a + b + c = 0\}$ i $W = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] | 2a - b - 2c = 0\}$.

a) Cercau un a base de $V \cap W$ **1 pt.**

b) Trobau el subespai vectorial suplementari U de V i expressau-lo en funció de la/les condicions que han de complir els coeficients dels polinomis d'U (és a dir en la forma en que se us han donat els subespais V i W. **1 pt.**

c) Considerem les bases $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Trobau la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$. **1 pt.**

(Examen, setembre 2007)
Solució:

a) Sigui $V' = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a + b + c = 0\}$ i $W' = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | 2a - b - 2c = 0\}$. Sabem per teoria que $V \cong V'$ i $W \cong W'$, aleshores operarem sobre els subespais de $\mathbb{R}^3$. Trobem $V' \cap W'$

$$V' \cap W' = \{a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a + b + c = 0, 2a - b - 2c = 0\}$$

per tant, els elements de $V' \cap W'$ han de complir les dues equacions. Resolent el sistema per Gauss tenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

i ens queden les equacions $a + b + c = 0, -3b - 4c = 0$. Aïllant tenim $a = \frac{c}{3}$ i $b = -\frac{4c}{3}$, aleshores els elements de $V' \cap W'$ són de la forma

$$\left(\frac{c}{3}, -\frac{4c}{3}, c\right) = c\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1\right)$$

Per tant,

$$V' \cap W' = \langle\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1\right)\rangle = \langle(1, -4, 3)\rangle$$

Aleshores una base de $V \cap W$ és $\{1 - 4x + 3x^2\}$

b) Cerquem una base de V'. Els elements de V compleixen $a = -b - c$, per tant són de la forma

$$(-b - c, b, c) = b(-1, 1, 0) + c(-1, 0, 1)$$

d'aquí deduïm $V' = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$. Vegem si són linealment independents,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

per tant són linealment independents i tenint en compte el resultat, l'espai vectorial suplementari de V' és $U' = \langle(0, 0, 1)\rangle$ que també el podem representar com $U' = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a = b = 0\}$. Aleshores l'espai suplementari de V és $U = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] | a = b = 0\}$.

c) Per trobar la matriu de canvi de base demanada hem de cercar les coordenades dels elements de la base $\mathcal{B}_1$ respecte a la base $\mathcal{B}_2$.

$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (1 + x^2)$ per tant les coordenades de 1 són $(1, 0, 0)$.

$x = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (1 + x^2)$ per tant les coordenades de x són $(-1, 1, 0)$.

$x^2 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (1 + x) + 1 \cdot (1 + x^2)$ per tant les coordenades de x són $(-1, 0, 1)$.

I la matriu de canvi de base és

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$