Classe pràctica de Sistemes d'Equacions

Classe pràctica 2

Prob 3 Discutir i resoldre el sistema

$$\left.\begin{array}{llllr} 3ax & +3(b-1)y & +(b+6)z & = & 2b-1 \\ & +(b-2)y & +z & = & 0 \\ 2ax & +2(b-1)y & +(b+4)z & = & 2b-2 \end{array}\right\}$$

(Control , curs 2008/09)

Solució classe pràctica 2

Prob 3 Discutir i resoldre el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrcl} 3ax & +3(b-1)y & +(b+6)z & = & 2b-1 \\ & +(b-2)y & +z & = & 0 \\ 2ax & +2(b-1)y & +(b+4)z & = & 2b-2 \end{array}\right\}$$

(Control , curs 2008/09)

Solució:

Cerquem el determinant de la matriu dels coeficients

$$|M| = \begin{vmatrix} 3a & 3(b-1) & b+6 \\ 0 & b-2 & 1 \\ 2a & 2(b-1) & b+4 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 3 & 3(b-1) & b+6 \\ 0 & b-2 & 1 \\ 2 & 2(b-1) & b+4 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} a \begin{vmatrix} 1 & b-1 & 2 \\ 0 & b-2 & 1 \\ 2 & 2(b-1) & b+4 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b-1 & 2 \\ 0 & b-2 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = ab(b-2)$$

(1) $F_1 - F_3$

que es fa 0 per a $b = 0$, $b = 2$, o $a = 0$
D'aquí deduïm:

a) $a \neq 0,\ b \neq 0$ i $b \neq 2$ rang M=rang A=núm. incògnites=3. Per tant el sistema és compatible i determinat i les solucions són:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2b-1 & 3(b-1) & b+6 \\ 0 & b-2 & 1 \\ 2b-2 & 2(b-1) & b+4 \end{vmatrix}}{ab(b-2)} = \frac{-b^2+8b-12}{ab(b-2)} = \frac{-(b-2)(b-6)}{ab(b-2)} = \frac{-(b-6)}{ab}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3a & 2b-1 & b+6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2a & 2b-2 & b+4 \end{vmatrix}}{ab(b-2)} = \frac{-2a(b-2)}{ab(b-2)} = \frac{-2}{b}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3a & 3(b-1) & 2b-1 \\ 0 & b-2 & 0 \\ 2a & 2(b-1) & 2b-2 \end{vmatrix}}{ab(b-2)} = \frac{2a(b-2)^2}{ab(b-2)} = \frac{2(b-2)}{b}$$

b) $a = 0$. En aquest cas x pot prendre qualsevol valor i ens queda un sistema de 3 equacions amb 2 incògnites.

$$\left.\begin{array}{llcl} 3(b-1)y & +(b+6)z & = & 2b-1 \\ (b-2)y & +z & = & 0 \\ +2(b-1)y & +(b+4)z & = & 2b-2 \end{array}\right\}$$

Cercarem el rang de la matriu ampliada

$$\begin{vmatrix} 3(b-1) & b+6 & 2b-1 \\ (b-2) & 1 & 0 \\ 2(b-1) & b+4 & 2b-2 \end{vmatrix} = (b-2)(b-6)$$

b.1) $b \neq 2, 6$ rang $A = 3 \neq$rang M. Per tant el sistema és incompatible.

b.2) $b = 2$ tendríem la matriu

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on rang M=rang A=2=núm.incògnites, per tant els sistema és compatible i determinat pel que fa al sistema en y i z i les solucions les obtenim resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrr} 3y & +8z & = & 3 \\ & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

que ens dóna $z = 0$, $y = 1$.

Per tant, el sistema original serà compatible i indeterminat i les solucions seran x qualsevol, $y = 1$, $z = 0$

b.3) $b = 6$ tendríem la matriu

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 & 11 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 15 & 12 & 11 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on rang M=rang A=2=núm.incògnites, per tant els sistema és compatible i determinat pel que fa al sistema en y i z i les solucions les obtenim resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrr} y & +z & = & 1 \\ & -3z & = & -4 \end{array}\right\}$$

que ens dóna $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{4}{3}$.

Per tant, el sistema original serà compatible i indeterminat i les solucions seran x qualsevol, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{4}{3}$

c) $b = 0$ i $a \neq 0$ (ja per $a = 0$ l'hem estudiat a l'apartat anterior). Ens queda el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 3ax & -3y & +6z & = & -1 \\ & -2y & +z & = & 0 \\ 2ax & -2y & +4z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Ho resoldrem per Gauss

$$\begin{pmatrix} 3a & -3 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2a & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3a & -3 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

on rang $M = 2 \neq$rang $A = 3$ i el sistema seria incompatible

d) $b = 2$ i $a \neq 0$ (ja per $a = 0$ l'hem estudiat a l'apartat b). Ens queda el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 3ax & +3y & +8z & = & 3 \\ & & z & = & 0 \\ 2ax & +2y & +6z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Ho resoldrem per Gauss

$$\begin{pmatrix} 3a & 3 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2a & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3a & 3 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3a & 3 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on rang $M = 2$ =rang A <núm.incòg. i el sistema seria compatible i indeterminat i les solucions les obtenim resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 3ax & +3y & +8z & = & 3 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

que ens dóna $y = 1 - ax$, $z = 0$.