Fonaments Matemàtics II. Telemàtica
Control 2. Espais vectorials. Curs 09/10

A l'espai vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sigui V el conjunt de les matrius simètriques i W de les matrius antisimètriques.

a) Demostrau que W és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ **2 pt.**
Teniu en compte que V també és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Trobau una base de V i de W. **2 pt.**

c) Trobau una base de $V + W$ **2.5 pt.**

d) Indicau si $V + W$ és una suma directa. **1 pt.**

e) Considerem la base canònica $\mathcal{E}$ i la base $\mathcal{B}$ següent **2.5 pt.**

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Trobau la matriu del canvi de base de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$

P1.-
Solució:

Considerarem, per a quan el volguem utilitzar, l'isomorfise

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a,b,c,d) \end{array}$$

a) $W = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\right\}$. Els elements de W són de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, està format per totes les combinacions lineals de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, i aleshores és un espai vectorial:

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b) Considerarem els espais vectorials

$$V' = \{(a,b,b,c) \in \mathbb{R}^4 | a,b \in \mathbb{R}\} \qquad \text{i} \qquad W' = \{(0,a,-a,0) \in \mathbb{R}^4 | a \in \mathbb{R}\}$$

isomorfos a V i W respectivament.

Cerquem una base de V. Per això cercarem primer un sistema generador. Els elements de V' són de la forma

$$(a,b,b,c) = (a,0,0,0) + (0,b,b,0) + (0,0,0,c) = a(1,0,0,0) + b(0,1,1,0) + c(0,0,0,1)$$

Per tant, $\{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$ forma un sistema generador de V, i com a més els vectors són linealment independents, ja que cada un davant té almenys un zero més que l'anterior, formaran una base.

Aleshores una base de V serà

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Cerquem ara una base de W. Com hem vist a l'apartat anterior $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ forma un sistema generador de W' i com està format per un únic element diferent de $\mathbf{0}$ tenim que també és linealment independent i per tant forma base.

c) En lloc de considerar V i W considerarem els seus isomorfos V' i W'. Com

$$V' = \langle (1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1) \rangle \qquad \text{i} \qquad W' = \langle (0,1,-1,0) \rangle$$

tenim que un sistema generador de $V' + W'$ és

$$\{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1),(0,1,-1,0)\}$$

Vegem, per Gauss, si són linealment independents

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectivament són linealment independents i per tant formen base de $V' + W'$.

La base de $V + W$ és

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

d) Sabem que $dim\, V + dim\, W = dim\,(V + W) + dim\,(V \cap W)$. Substituint les dimensiona anteriors tenim $dim\,(V \cap W) = 0$, per tant, $V + W$ és suma directa.

e)Hem de trobar les coordenades de cada un dels elements de la base $\mathcal{B}$ respecte a $\mathcal{E}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant les coordenades són $(1, 0, 0, 0)$.

el mateix faríem amb els altres elements de la base $\mathcal{B}$.

La matriu de canvi de base seria

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$