Transformacions de variables aleatòries

Recordatori:

donada una v.a. X i una funció $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la funció de probabilitat o de densitat de $Y = g(X)$ es calculava de la següent manera:

1) en el cas discret: $P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(A)$, on $A = \{x/g(x) = y\}$.

2) en el cas continu: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(A)$, on $A = \{x/g(x) \leq y\}$. A continuació derivam $F_Y(y)$ per a obtenir $f_Y(y)$. En alguns casos particulars es pot utilitzar una fòrmula que relaciona $f_X(x)$ i $f_Y(y)$.

Exemple 13:

Sigui $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ i $Y = X^2$. Trobau $f_Y(y)$.

En aquest tema:

donades dues variables aleatòries X i Y distribuïdes conjuntament i una funció g, volem trobar la distribució de $g(X, Y)$.

Podem trobar dos casos:

Cas 1: $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, per exemple $Z = g(X, Y) = 2X + Y$, llavors:

- Cas discret: $P(Z = z) = P(g(X, Y) = z) = P(A) = \sum\sum_A P(X = x, Y = y)$, on $A = \{(x, y)/g(x, y) = z\}$.

- Cas continu: $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(X, Y) \leq z) = P(A) = \iint_A f_{XY}(x, y)\, dxdy$, on $A = \{(x, y)/g(x, y) \leq z\}$. A continuació derivam $F_Z(z)$ per a obtenir $f_Z(z)$.

Exemple 14:

(Exercici 4). Les variables aleatòries X_1 i X_2 són independents i amb densitat comú

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & en\ cas\ contrari \end{cases}$$

a) Determinau la densitat de $Y = X_1 + X_2$.

b) Determinau la densitat de $Z = X_1 - X_2$.

Exemple 15:

Siguin X i Y dues v.a. amb funció de probabilitat conjunta

$Y\backslash X$	0	1	2	3
-1	0	1/12	2/12	2/12
0	1/12	2/12	0	1/12
1	1/12	1/12	1/12	0

Trobau la funció de probabilitat conjunta de $Z = |X - Y|$.

Cas 2: $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, per exemple $(U, V) = g(X, Y) = (g_1(x, y), g_2(x, y)) = (2X + Y, X - Y)$, llavors:

- Cas discret: $P(U = u, V = v) = P(g_1(X, Y) = u, g_2(x, y) = v) = P(A) = \sum \sum_A P(X = x, Y = y)$, on $A = \{(x, y)/g_1(x, y) = u \quad \text{i} \quad g_2(x, y) = v\}$.

- Cas continu: $F_{UV}(u, v) = P(U \leq u, V \leq v) = P(A) = \iint_A f_{XY}(x, y)\, dxdy$, on $A = \{(x, y)/g_1(x, y) \leq u \quad \text{i} \quad g_2(x, y) \leq v\}$. A continuació derivam $F_{UV}(u, v)$ per a obtenir $f_{UV}(u, v)$.

  Casos especials:

  1) Si podem trobar dues funcions h_1 i h_2 tals que $x = h_1(u, v)$ i $y = h_2(u, v)$, llavors:

  $$f_{UV}(u, v) = f_{XY}(h_1(u, v), h_2(u, v)) \cdot |J_{h_1 h_2}(u, v)| \qquad \text{on} \qquad J_{h_1 h_2}(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

  per a cada conjunt de valors de (u, v) on les funcions h_1 i h_2 són úniques.

  2) Si $g(X, Y)$ té forma matricial: $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ i $\det(A) \neq 0$, llavors:

  $$f_{UV}(u, v) = \frac{1}{|\det(A)|} f_{XY}\left(A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)$$

Exemple 16:

Sigui (X, Y) la v.a. discreta de l'exemple anterior. Calculau la funció de probabilitat conjunta de $(U, V) = (|X - Y|^2, Y^2)$

Exemple 17:

(Exercici 27). Sigui (X, Y) una v.a. contínua amb funció de densitat:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{2-x-y}{8} & -1 \leq x \leq 1 \qquad -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \textit{en altre cas} \end{cases}$$

Calculau la funció de densitat de (X^2, Y^2).

Exemple 18:

Sigui (X, Y) una v.a. contínua amb funció de densitat:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \qquad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \textit{en altre cas} \end{cases}$$

Definim una nova variable $(U, V) = (2X + Y, X - Y)$. Calculau la funció de densitat de (U, V).

Exercicis proposats: 31, 25, 29, 30