Fonaments Matemàtiques II

Àlgebra Lineal

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears

Manuel Moyà Quintero

Índex

Capítol 3

Sistemes d'equacions lineals

Definició 3.1 *Sigui K un cos commutatiu. Un **sistema d'equacions lineals** de m equacions i n incògnites consisteix en m equacions de la forma:*

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \dots & & \dots & & \dots & = & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

*on $a_{ij}, b_i \in K$ per a tot $i = 1, \dots, m$ i $j = 1, \dots, n$. Als termes a_{ij} els anomenarem **coeficients**, als b_i **termes independents** i als x_j **incògnites**.*

Exemple:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & - & 4z & = & 7 \\ -3x & - & 2y & + & 4z & = & -1 \\ 6x & + & y & - & 8z & = & -4 \end{array}\right\}$$

Si els termes independents són tots zero, direm que el sistema és **homogeni** .

Exemple:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & - & 4z & = & 0 \\ -3x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ 6x & + & y & - & 8z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Aquest sistema d'equacions també el podem expressar en forma matricial de la següent forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \text{és a dir} \quad MX = B.$$

que anomenarem **expressió matricial** d'un sistema d'equacions lineals.

Les matrius següents

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

reben el nom de **matriu dels coeficients** i **matriu ampliada** respectivament.

Exemple: El sistema de l'exemple que hem vist anteriorment es pot posar com

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

on

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

Definició 3.2 *A la n-tupla $(s_1, \dots, s_n)$ de K^n que satisfà el sistema d'equacions l'anomenarem* ***solució*** *del sistema d'equacions.*

Si un sistema d'equacions té solució direm que és **compatible** i en cas contrari **incompatible**. En el cas que sigui compatible, si només té una solució li direm **compatible determinat** i si té més d'una direm que és **compatible indeterminat**.
Direm que dos sistemes són **equivalents** si tenen les mateixes solucions.

Exemple: El sistema d'equacions vist anteriorment

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & - & 4z & = & 7 \\ -3x & - & 2y & + & 4z & = & -1 \\ 6x & + & y & - & 8z & = & -4 \end{array}\right\}$$

és compatible, ja que $(-1, 2, 0)$, és a dir, $x = -1,\ y = 2,\ z = 0$ és una solució. I com en té més d'una solució, ja que $(3, 2, 3)$ també és solució, és indeterminat.

Resolguem el sistema aplicant propietats que transformen sistemes d'equacions en altres sistemes equivalents. Aquestes propietats són les mateixes que feien que una matriu es transformés en una altra que tengués el mateix rang (vegeu Prop. 1.23), és a dir:

1. Permutar dues equacions.
2. Substituir una equació e_i per $e_i + te_j$ on $t \in K$ i $i \neq j$.
3. Multiplicar una equació per un escalar $t \neq 0$, $t \in K$.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & - & 4z & = & 7 \\ -3x & - & 2y & + & 4z & = & -1 \\ 6x & + & y & - & 8z & = & -4 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & - & 4z & = & 7 \\ & & 3y & & & = & 6 \\ 6x & + & y & - & 8z & = & -4 \end{array}\right\} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & - & 4z & = & 7 \\ & & 3y & & & = & 6 \\ & & -9y & & & = & -18 \end{array}\right\} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & - & 4z & = & 7 \\ & & 3y & & & = & 6 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right\}$$

(1) A la segona equació li sumam la primera; (2) A la tercera equació li restam dues vegades la primera; (3) A la tercera equació li sumam 3 vegades la segona.

Ara ja podem resoldre, de forma fàcil, el sistema equivalent obtingut

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & - & 4z & = & 7 \\ & & 3y & & & = & 6 \end{array}\right\} \qquad y = 2;\; x = -1 + \frac{4}{3}z$$

Aquesta resolució l'haguéssim poguda fer amb matrius,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

i transformant la forma matricial en equacions tenim

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & - & 4z & = & 7 \\ & & 3y & & & = & 6 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right\}$$

que és el mateix sistema final que hem obtingut abans.

Nota: Podem observar que les operacions fetes en les files de les matrius són operacions que mantenen el seu rang. Aquest fet ens serà de molta utilitat per discutir la compatibilitat o no d'un sistema d'equacions lineals com es veurà més endavant.

Proposició 3.3 *Si un sistema d'equacions té més d'una solució, té infinites.*

DEMOSTRACIÓ:

Suposem que té dues solucions $s = (s_1, \ldots, s_n)$ i $s' = (s'_1, \ldots, s'_n)$. Vegem que

$$s + t(s' - s) = (s_1, \ldots, s_n) + t[(s'_1, \ldots, s'_n) - (s_1, \ldots, s_n) =$$
$$= (s_1 + t(s'_1 - s_1), \ldots, s_n + t(s'_n - s_n))$$

també és solució per a qualsevol valor de t. Per a això, vegem que satisfà qualsevol equació del sistema $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ per a $i = 1, \ldots m$. Efectivament,

$$a_{i1}[s_1 + t(s'_1 - s_1)] + \ldots + a_{in}[s_n + t(s'_n - s_n)] =$$
$$= a_{i1}s_1 + \ldots + a_{in}s_n + ta_{i1}(s'_1 - s_1) + \ldots + ta_{in}(s'_n - s_n) =$$
$$= a_{i1}s_1 + \ldots + a_{in}s_n + t(a_{i1}s'_1 + \ldots + a_{in}s'_n) + t(a_{i1}s_1 + \ldots + a_{in}s_n) \overset{(1)}{=} b_i + tb_i - tb_i = b_i$$

(1) Ja que s i s' són solució del sistema.

Proposició 3.4 *Un sistema homogeni sempre serà compatible.*

DEMOSTRACIÓ:

És evident, ja que $x_1 = \ldots = x_n = 0$ serà sempre una solució.

Teorema 3.5 (Teorema de Rouché-Frobenius)
Un sistema d'equacions $MX = B$ de m equacions amb n incògnites té solució si i només si rang M= rang A.
A més, si rang $M = n$ els sistema és determinat i si rang $M < n$ és indeterminat.

DEMOSTRACIÓ:

El sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

el podem representar com

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_mx_m = B$$

on $A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

1) Vegem la primera part del teorema. Si existeix solució $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ tenim que $A_1 s_1 + A_2 s_2 + \ldots + A_n s_n = B$, aleshores B es pot posar en combinació lineal dels A_i la qual cosa ens diu que el rang és el mateix.

   Suposem ara que el rang és el mateix i igual a r i que els vectors linealment independents són $A_1, \ldots, A_r$. Com el rang de la matriu dels coeficients és igual al de la matriu ampliada tenim que C és pot posar en combinació lineal de $A_1, \ldots, A_r$. Sigui aquesta

$$C = s_1 A_1 + \ldots + s_r A_r$$

   aleshores existeix solució que és

$$C = s_1 A_1 + \ldots + s_r A_r + 0A_{r+1} + \ldots + 0A_m$$

2) Vegem ara la segona part. Si el rang de la matriu dels coeficients és igual al nombre d'incògnites. Això vol dir que els vectors $A_1, A_2, \ldots, A_n$ són linealment independents i per tant B és pot posar en combinació lineal d'aquests de forma única (segons hem vist a la prop. 1.18), sigui aquesta:

$$B = s_1 A_1 + \ldots + s_n A_n$$

   aleshores existeix una única solució.

   Suposem que el rang és menor que el nombre d'incògnites i que els vectors linealment independents són els r primers.

   El sistema d'equacions es pot posar d'aquesta forma:

$$x_1 A_1 + \ldots + x_r A_r = C - x_{r+1} A_{r+1} + \ldots + x_n A_n$$

   donant valors qualssevol $s_{r+1}, \ldots, s_n$ a $x_{r+1}, \ldots, x_n$ existiran $s_1, \ldots, s_r$ tal que $s_1, \ldots, s_n$ és solució del sistema, és a dir hi ha infinites solucions.

Per resoldre un sistema d'equacions podem fer servir el **mètode de Gauss** que consisteix en triangularitzar la matriu per cercar el rang.

Exemple: A l'exemple vist a la definició 3.2, teníem el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & - & 4z & = & 7 \\ -3x & - & 2y & + & 4z & = & -1 \\ 6x & + & y & - & 8z & = & -4 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right)$$

Pel que fa a la matriu tenim que tota la matriu representa la matriu ampliada del sistema, A, i les tres primeres columnes representen la matriu dels coeficients, M.

Quan hem triangularitzat la matriu hem obtingut la següent matriu resultant:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que ens diu que el *rang* M = *rang* $A = 2$, per tant, pel teorema de Rouché-Frobenius el sistema és compatible. A més, com el *rang* $M <$ nombre d'incògnites, el sistema és indeterminat i les solucions les obtenim resolent el sistema que se'n deriva de aquesta darrera matriu

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & - & 4z & = & 7 \\ & & 3y & & & = & 6 \end{array}\right\}$$

que té per solucions, com hem vist abans, $y = 2$; $x = -1 + \frac{4}{3}z$

Definició 3.6 *Direm que un sistema d'equacions $MX = B$ és de* ***Cramer*** *si M és una matriu quadrada i regular. És a dir, si té el mateix nombre d'equacions que d'incògnites i $|M| \neq 0$.*

Exemple: El sistema següent és de Cramer,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & z & = & 3 \end{array}\right\}$$

ja que té el mateix nombre d'equacions que d'incògnites i

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Proposició 3.7 (Regla de Cramer)
Si el sistema $MX = B$ és de Cramer, aleshores la solució és única i és:

$$x_j = \frac{|C_j|}{|M|}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

on C_j és la matriu M substituint la columna j pels termes independents.

DEMOSTRACIÓ:

Sigui el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right\}$$

el podem representar en forma de matrius com

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

és a dir $M.X = C$, com $\mid M \mid \neq 0$ la matriu M té inversa, per tant $M^{-1}.M.X = M^{-1}.C$ i $X = M^{-1}.C$ o sigui:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M_{11}}{\mid M \mid} & \frac{M_{21}}{\mid M \mid} & \dots & \frac{M_{n1}}{\mid M \mid} \\ \frac{M_{12}}{\mid M \mid} & \frac{M_{22}}{\mid M \mid} & \dots & \frac{M_{n2}}{\mid M \mid} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{M_{1n}}{\mid M \mid} & \frac{M_{2n}}{\mid M \mid} & \dots & \frac{M_{nn}}{\mid M \mid} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

d'aquí deduïm que

$$x_i = \frac{c_1 M_{1i} + c_2 M_{2i} + \dots + c_n M_{ni}}{\mid M \mid} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\mid M \mid}$$

Exemple 1: En la definició anterior hem vist que el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

és de Cramer i que $|M| = -2$. Per tant les solucions són:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

Exemple 2: Considere, ara el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Com no té el mateix nombre d'equacions que d'incògnites no és un sistema de Cramer, però si consideram una incògnita, per exemple z, com si fos un paràmetre (un nombre qualsevol), el sistema es transformaria en el següent:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 2 - z \\ x & + & y & = & 3 + z \end{array}\right\}$$

on tendríem dues equacions amb dues incògnites, x i y. Aquest sistema és de Cramer ja que

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

i seria compatible i indeterminat, i la solució és

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-z & -1 \\ 3+z & 1 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{5}{2}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-z \\ 1 & 3+z \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{1+2z}{2}$$

Exemples de resolució de sistemes d'equacions lineals amb paràmetres

Exemple 1: Discutiu i resoleu, en funció del paràmetre a, el següent sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & a \\ ax & + & y & + & 5z & = & 4 \\ x & + & ay & + & 4z & = & a \end{array}\right\}$$

(Examen, febrer 2002)

Solució:

$$|M| = 6 - 9a + 3a^2 = 0, \quad a = 1, 2$$

- Si $a \neq 1,\ 2$ aleshores $|M| \neq 0$ i per tant $rang\ M = 3 = rang\ A =$ núm. d'incògnites i els sistema és compatible i determinat i la solució és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ a & a & 4 \end{vmatrix}}{6 - 9a + 3a^2} = \frac{-16 + 18a - 5a^2}{3(a-1)(a-2)} = \frac{(-5a+8)(a-2)}{3(a-1)(a-2)} =$$

$$= \frac{-5a+8}{3(a-1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ a & 4 & 5 \\ 1 & a & 4 \end{vmatrix}}{6 - 9a + 3a^2} = \frac{4 - a^2}{3(a-1)(a-2)} = \frac{-(a-2)(a+2)}{3(a-1)(a-2)} =$$

$$= \frac{-a-2}{3(a-2)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 4 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{6-9a+3a^2} = \frac{4-4a-a^2+a^3}{3(a-1)(a-2)} = \frac{(a-1)(a-2)(a+2)}{3(a-1)(a-2)} =$$
$$= \frac{a+2}{3}$$

- Si $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

  $rang\ M = 2 \neq rang\ A = 3$, per tant els sistema és incompatible.

- Si $a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  $rang\ M = 2 = rang\ A <$ n. incògnites, per tant els sistema és compatible i indeterminat i la solució l'obtindrem resolent el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+3z & = 2 \\ -y-z & = 0 \end{array}\right\}$$

  i aïllant x i y tenim, $x = 2 - z,\ y = -z$

Exemple 2: Discutiu i resoleu, en funció dels paràmetres s i t, el següent sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} tx & + & y & + & 2sz & = & 1 \\ 2sx & + & y & + & 2sz & = & 1+3t \\ sx & + & & & sz & = & 2t \end{array}\right\}$$

(Examen, febrer 2003)

Solució:

$$|M| = ts - 2s^2 = 0, \quad s = 0,\ t = 2s$$

- Si $s \neq 0$ i $t \neq 2s$ $rang\ M = rang\ A = 3 =$ n. incògnites i el sistema és compatible i determinat i la solució és, per Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2s \\ 1+3t & 1 & 2s \\ 2t & 0 & s \end{vmatrix}}{s(t-2s)} = \frac{-3st}{s(t-2s)} = \frac{-3t}{t-2s}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} t & 1 & 2s \\ 2s & 1+3t & 2s \\ s & 2t & s \end{vmatrix}}{s(t-2s)} = \frac{-2s^2+st+2s^2t-st^2}{s(t-2s)} = \frac{-2s+t+2st-t^2}{t-2s} =$$

$$= \frac{(t-2s)(1-t)}{t-2s} = 1-t.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 2s & 1 & 1+3t \\ s & 0 & 2t \end{vmatrix}}{s(t-2s)} = \frac{2t^2-st}{s(t-2s)}$$

- Si $s = 0$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1+3t \\ 0 & 0 & 0 & 2t \end{array}\right)$$

En aquest cas,

1. Si $t = 0$ ens queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

i $rang\ M = rang\ A = 1 <$ n. d'incògnites, el sistema és compatible i indeterminat i la solució és $y = 1$ i x, z qualsevol.

2. Si $t \neq 0$ $rang\ M = 2 \neq rang\ A = 3$. El sistema és incompatible

- Finalment, si $t = 2s$ i $s \neq 0$ (ja que per a $s = 0$ l'hem estudiat a l'apartat anterior)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2s & 1 & 2s & 1 \\ 2s & 1 & 2s & 1+6s \\ s & 0 & s & 4s \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2s & 1 & 2s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6s \\ 0 & -1 & 0 & 8s-1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2s & 1 & 2s & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 8s-1 \\ 0 & 0 & 0 & 6s \end{array}\right)$$

Com $s \neq 0$, $rang\ M = 2 \neq rang\ A = 3$. Per tant el sistema és incompatible.

Exemple 3: Discutiu i resoleu, en funció del paràmetre k el següent sistema:

$$\left.\begin{array}{rcccr} x & + & (k+1)y & = & 5 \\ kx & + & y & = & 0 \\ 3x & - & ky & = & -7 \end{array}\right\}$$

Considerarem, en aquest cas la matriu ampliada

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 5 \\ k & 1 & 0 \\ 3 & -k & -7 \end{vmatrix} = 2k^2 + 7k - 22 = 0, \qquad k = 2, -\frac{11}{2}$$

- Per a $k \neq 2$ i $k \neq -\frac{11}{2}$, $rang\ A = 3 > rang\ M$ (ja que M té dues columnes i per tant el rang màxim és 2) per tant el sistema és incompatible.

- Per a $k = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -11 & -22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  i tenim que $rang\ M = rang\ A = 2 =$ núm. incògnites. Per tant el sistema és compatible i determinat i la solució l'obtenim resolen el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 5 \\ & - & 5y & = & -10 \end{array}\right\}$$

  que té per solució $x = -1,\ y = 2$

- Per a $k = -\dfrac{11}{2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{9}{2} & 5 \\ -\frac{11}{2} & 1 & 0 \\ 3 & \frac{11}{2} & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -9 & 10 \\ -11 & 2 & 0 \\ 6 & 11 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -9 & 10 \\ 0 & -95 & 110 \\ 0 & 38 & -44 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -9 & 10 \\ 0 & -95 & 110 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

i tenim que *rang* $M =$ *rang* $A = 2 =$ núm. incògnites. Per tant el sistema és compatible i determinat i la solució l'obtenim resolen el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 9y & = & 10 \\ & - & 95y & = & 110 \end{array}\right\}$$

que té per solució $x = -\dfrac{4}{19}$, $y = -\dfrac{22}{19}$

Índex alfabètic