1 Classes Pràctiques de vectors i valors propis

Classe pràctica 1

Prob 1 Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida com

$$f(x, y, z) = (3x - 2y, -2x + 3y, 5z)$$

Calculau:

a) Els valors propis

b) Els vectors propis

c) Indicau si és diagonalitzable i perquè. En el cas en que ho sigui expressau A com PDP^{-1}

d) (opcional) Trobau A^n

(Examen, setembre 2001)

Solució:

a) La matriu associada a f és

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Els valors propis els obtindrem resolent l'equació $|A - tI| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 3-t & -2 & 0 \\ -2 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 5-t \end{vmatrix} = 25 - 35t + 11t^2 - t^3 = 0$$

d'aquí tenim que les arrels són $t = 1$ arrel simple i $t = 5$ arrel doble.

b) Cerquem $V(1)$ que està format per tots els vectors (x, y, z) que verifiquen l'equació:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolent el sistema tenim les solucions: $x = y,\ z = 0$. Aleshores els elements de $V(1)$ seran de la forma $(y, y, 0) = y(1, 1, 0)$ i per tant $V(1) =< (1, 1, 0) >$. Notem que l'ordre de multiplicitat de l'arrel coincideix amb la dimensió de $V(1)$.

A continuació cerquem $V(5)$ que està format per tots els vectors (x, y, z) que verifiquen l'equació:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolent el sistema tenim les solucions: $x = -y$. Aleshores els elements de $V(5)$ seran de la forma $(-y, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ i per tant $V(5) =< (-1, 1, 0), (0, 0, 1) >$. Aquests vectors són linealment independents, i per tant $dim\ V(5) = 2$. Notem que l'ordre de multiplicitat de l'arrel coincideix amb la dimensió de $V(5)$.

c) Com la suma de les multiplicitats dels valors propis $1 + 2 = 3$ coinideix amb la dimensió de V i l'ordre de multiplicitat de cada valor propi coincideix amb la dimensió del seu subespai vectorial associat tenim que la matriu A és diagonalitzable.

A més

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{5^n}{2} & \frac{1}{2} - \frac{5^n}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{5^n}{2} & \frac{1}{2} + \frac{5^n}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$$