1 Classe pràctica d'Espais vectorials

Classe pràctica 2

Prob 1.1 Considerau els següents subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \langle (1,3,-1),(2,1,4) \rangle \qquad V = \langle (2,-1,1),(1,-4,2),(1,3,-1) \rangle$$

a) Trobau una base de U. **1 pt.**

b) Trobau una base de V. **1 pt.**

c) Trobau una base de $U+V$. **3 pt.**

d) Quina és la dimensió de $U \cap V$?. **4 pt.**

e) Ampliau la base de U a una base de $\mathbb{R}^3$. **1 pt.**

(Examen, febrer 2003)

Solució classe pràctica 2

Prob 1.1 Considerau els següents subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \langle (1,3,-1),(2,1,4)\rangle \qquad V = \langle (2,-1,1),(1,-4,2),(1,3,-1)\rangle$$

a) Trobau una base de U. **1 pt.**

b) Trobau una base de V. **1 pt.**

c) Trobau una base de $U+V$. **3 pt.**

d) Quina és la dimensió de $U\cap V$?. **4 pt.**

e) Ampliau la base de U a una base de $\mathbb{R}^3$. **1 pt.**

(Examen, febrer 2003)

Solució:

a) Cerquem una base de U

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Per tant una base de U és $\{(1,3,-1),(0,-5,6)\}$.

b) Cerquem una base de V

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant una base de V és $\{(1,-4,2),(0,7,-3)\}$.

c) $U+V$ està generat per les bases d'ambdues bases:

$$U+V = \langle (1,3,-1),(0,-5,6),(1,-4,2),(0,7,-3)\rangle$$

Trobem una base,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant, $dim(U+V)=3$, per tant $U+V=\mathbb{R}^3$ i aleshores qualsevol base de $\mathbb{R}^3$, com la canònica, serà base de $U+V$.

d) Si un element $(x,y,z)\in U$, depèn linealment de la base de U, aleshores el rang de la matriu següent ha de ser dos,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ x & y & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & y-3x & z+x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -13x+6y+5z \end{pmatrix}$$

per tant, $-13x+6y+5z=0$.

Per altra part, si un element $(x, y, z) \in V$, depèn linealment de la base de V, aleshores el rang de la matriu següent ha de ser dos,

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ x & y & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & y+4x & z-2x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -2x+3y+7z \end{pmatrix}$$

per tant, $-2x + 3y + 7z = 0$.

Aleshores, els elements de $U \cap V$ satisfan les equacions $-13x + 6y + 5z = 0$ i $-2x + 3y + 7z = 0$ i resolent el sistema ens dóna $x = -z$ i $y = -3z$. Per tant, aquests elements són de la forma $(-z, -3z, z) = z(-1, -3, 1)$, i

$$U \cap V = \langle(-1, -3, 1)\rangle.$$

aleshores la dimensicó d'$U \cap V$=1

d) Si una base de U és $\{(1, 3, -1), (0, -5, 6)\}$, una ampliació seva que sigui base de $\mathbb{R}^3$ serà,

$$\{(1, 3, -1), (0, -5, 6), (0, 0, 1)\}$$