1 Classe pràctica d'Espais vectorials

Classe pràctica 3

Prob 1 A l'espai vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ consideram els conjunts

$$V_1 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ a-b & a+b \end{array} \right) \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{i} \quad V_2 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| a+b+c+d=0, 2a-c-d=0 \right\}$$

a) Demostrau que V_1 i V_2 són subespais vectorials de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. **0.5 pt.**

b) Trobau una base de V_1 i de V_2. **0.5 pt.**

c) Trobau una base de $V_1 \cap V_2$ **0.5 pt.**

d) Trobau una base de $V_1 + V_2$. Indicau si la suma és directa. **0.5 pt.**

(Examen, setembre 2009)

Solució classe pràctica 3

Prob 1 A l'espai vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ consideram els conjunts

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{i} \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a+b+c+d = 0, 2a-c-d = 0 \right\}$$

a) Demostrau que V_1 i V_2 són subespais vectorials de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. **0.5 pt.**

b) Trobau una base de V_1 i de V_2. **0.5 pt.**

c) Trobau una base de $V_1 \cap V_2$ **0.5 pt.**

d) Trobau una base de $V_1 + V_2$. Indicau si la suma és directa. **0.5 pt.**

(Examen, setembre 2009)

Solució:

a) Sigui $\begin{pmatrix} a & b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \in V_1$, aleshores

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

per tant $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, és a dir, és conjunt generat per les dues matrius indicats, i aleshores té estructura d'espai vectorial.

Vegem ara que V_2 és espai vectorial.

Sigui $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in V_2$, aleshores es compleix $a+b+c+d = 0, 2a-c-d = 0$ i $a'+b'+c'+d' = 0, 2a'-c'-d' = 0$ i siguin $t, s \in \mathbb{R}$

Hem de veure que $t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in V_2$

$$t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sa' & sb' \\ sc' & sd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta+sa' & tb+sb' \\ tc+sc' & td+sd' \end{pmatrix}$$

Hara hem de comprovar que aquesta matriu compleix les condicions de pertànyer a V_2:

$$(ta+sa') + (tb+sb') + (tc+sc') + (td+sd') = t(a+b+c+d) + s(a'+b'+c'+d') = t \cdot 0 + s \cdot 0 = 0$$

Anàlogament

$$2(ta+sa') - (tc+sc') - (td+sd') = 2ta + 2sa' - tc - sc' - td - sd' = t(2a-c-d) + s(2a'-c'-d') = t \cdot 0 + s \cdot 0 = 0$$

Aleshores $t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in V_2$

b)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2\times 2} & \to & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a, b, c, d) \end{array}$$

és un isomorfisme, per tant, efectuarem l'estudi dins $\mathbb{R}^4$.

Sigui $V_1' = \{(a, b, a-b, a+b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ i $V_2' = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 | a+b+c+d = 0, 2a-c-d = 0\}$, els espais vectorials isomorfs a V_1 i V_2.

Cerquem una base de V_1'

$$(a,b,a-b,a+b)=(a,0,a,a)+(0,b,-b,b)=a(1,0,1,1)+b(0,1,-1,1)$$

per tant, $V_1'=\langle(1,0,1,1),(0,1,-1,1)\rangle$. A més $\{(1,0,1,1),(0,1,-1,1)\}$ són linealment independents, ja que el 2n té davant un zero més que l'anterior, aleshores aquests dos vectors formen una base de V_1' i

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$$

forma una base de V_1.

Cerquem ara una base de V_2'. Resolent el sistema $a+b+c+d=0, 2a-c-d=0$ tenim $a=\frac{1}{2}\,c+\frac{1}{2}\,d$ i $b=-\frac{3}{2}\,c-\frac{3}{2}\,d$. Per tant els elements de V_2' serà de la forma

$$\Big(\frac{1}{2}\,c+\frac{1}{2}\,d,-\frac{3}{2}\,c-\frac{3}{2}\,d,c,d\Big)=\Big(\frac{1}{2}\,c,-\frac{3}{2}\,c,c,0\Big)+\Big(\frac{1}{2}\,d,-\frac{3}{2}\,d,0,d\Big)=c\Big(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1,0\Big)+d\Big(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1\Big)$$

Aleshores $V_2'=\langle\big(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1,0\big),\big(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1\big)\rangle$ i $\big\{\big(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1,0\big),\big(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1\big)\big\}$ és un sistema generador. A més són linealment independents, ja que el menor $\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Per tant formen una base de V_2' i

$$\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

forma una base de V_2

c) Els elements de $V_1\cap V_2$ han de complir les condicions de V_1 i les de V_2. Els elements de V_1, tal com podem veure de la seva definició, compleixen $c=a-b,\ d=a+b$, per tant,

$$V_1\cap V_2=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle|\, a+b+c+d=0,2a-c-d=0,a-b=c,a+b=d\right\}$$

Resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl}a+b+c+d&=&0\\2a-c-d&=&0\\a-b-c&=&0\\a+b-d&=&0\end{array}\right\}$$

tenim $a=-\frac{1}{2}d$, $b=\frac{3}{2}d$, $c=-2d$. Per tant, els elements de $V_1\cap V_2$ són de la forma

$$\Big(-\frac{1}{2}d,\frac{3}{2}d,-2d,d\Big)=d\Big(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-2,1\Big)$$

aleshores

$$\Big\{\Big(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-2,1\Big)\Big\}$$

és un sistema generador i per tant base (ja que només té un element) de $V_1\cap V_2$.

d) Si $V_1=\left\langle\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\right\rangle$ i $V_2=\left\langle\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$, aleshores,

$$V_1+V_2=\left\langle\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$$

és un sistema generador de V_1+V_2. Cerquem ara els linealment independents. Per això tornarem fer servir l'isomorfisme defini abans i estudiarem la dependència lineal dels elements de $\mathbb{R}^4$

$$\Big\{(1,0,1,1),(0,1,-1,1),\Big(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1,0\Big),\Big(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1\Big)\Big\}$$

Ho farem per menors. Si cercam el determinant format pels 4 vectors ens surt 0, Per tant són linealment dependents.

Considerem el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Per tant els tres primers vectors formen una base de $V_1' + V_2'$ i

$$\left\{(1,0,1,1),(0,1,-1,1),\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1,0\right)\right\}$$

forma una base de $V_1 + V_2$.

La suma no és directa ja que $V_1 \cap V_2 \neq \{\bar{0}\}$