

Classe pràctica 3. Enunciat

Prob 1 Durant la 2a guerra mundial, els alemanys llançaven sobre Londres bombes volants V2 des de Calais. El nostre interès consisteix en saber si els alemanys apuntaven a llocs concrets sobre Londres o disparaven a l'atzar.

Per a fer aquest estudi dividirem l'àrea de Londres formada per un quadrat de 144 km^2 en 576 quadrats més petits de 0.5 km^2 . El nombre de bombes que es varen llançar sobre l'esmentada àrea de Londres va ser de 537. Designem per μ el nombre mitjà de bombes per quadrat petit.

Es va comprovar que el nombre d'impactes a cada quadrat petit ve donat per la següent taula:

Nombre de V2 per quadrat x	Quadrats reals observats amb x impactes
0	229
1	211
2	93
3	35
4	7
5 o més	1

Sigui X la variable aleatòria que ens dona el nombre d'impactes per quadrat petit. L'estudi consisteix en comprovar si existeix distribució de probabilitat que obtengui uns resultats semblants als obtinguts realment. Farem l'estudi amb la distribució de Poisson

- Indicau quin seria el valor de μ . **0.2 pt.**
- Calculau la probabilitat que en un quadrat hi caiguin 0, 1, 2, 3, 4, 5 o més bombes, i feu una taula amb aquests resultats. **0.45 pt.**
- Calculau el nombre de quadrats en els quals hi caurien 0, 1, 2, 3, 4, 5 o més bombes, afegiu-lo a la taula anterior i comparau aquests resultats amb els obtinguts realment. **0.4 pt.**
- Tenint en compte els resultats, creus que els alemanys apuntaven o disparaven a l'atzar? **0.2 pt.**

(Examen Telemàtica, juny 2009)

Prob 2 Una cinta magnètica es talla en tires de mitja polsada d'ample, per després debanar-les en un cilindre. La unitat de tall conté 48 ganivetes. Es trien a l'atzar cinc d'elles i s'avaluen diàriament per determinar el desgast del tall. Si es troba qualsevol ganiveta sense tall, es canvia tot el conjunt de ganivetes de la unitat de tall per una de nova.

- Si la unitat de tall té 10 ganivetes desgastades, quina és la probabilitat de canviar el conjunt de ganivetes el primer dia en que es du a terme l'avaluació? **0.5 pt.**
- Si la unitat de tall té 10 ganivetes desgastades, quina és la probabilitat de que el conjunt de ganivetes no sigui canviat fins el tercer dia d'iniciada l'avaluació? [Suggeriment: Suposau que les decisions que es prenen per dia són independents]. **0.5 pt.**
- Suposem que el primer dia en que es fa l'avaluació, dues ganivetes estan desgastades; el segon dia sis, i el tercer dia 10. Quina és la probabilitat de que el conjunt de ganivetes no sigui canviat fins els tercer dia de l'avaluació? [Suggeriment: Suposau que les decisions que es prenen cada dia són independents]. **0.5 pt.**

(Examen Telemàtica, setembre 2009)

Classe pràctica 3. Solució

Prob 1 Durant la 2a guerra mundial, els alemanys llançaven sobre Londres bombes volants V2 des de Calais. El nostre interès consisteix en saber si els alemanys apuntaven a llocs concrets sobre Londres o disparaven a l'atzar.

Per a fer aquest estudi dividirem l'àrea de Londres formada per un quadrat de 144 km^2 en 576 quadrats més petits de 0.5 km^2 . El nombre de bombes que es varen llançar sobre l'esmentada àrea de Londres va ser de 537. Designem per μ el nombre mitjà de bombes per quadrat petit.

Es va comprovar que el nombre d'impactes a cada quadrat petit ve donat per la següent taula:

Nombre de V2 per quadrat x	Quadrats reals observats amb x impactes
0	229
1	211
2	93
3	35
4	7
5 o més	1

Sigui X la variable aleatòria que ens dona el nombre d'impactes per quadrat petit. L'estudi consisteix en comprovar si existeix distribució de probabilitat que obtengui uns resultats semblants als obtinguts realment. Farem l'estudi amb la distribució de Poisson

- Indicau quin seria el valor de μ . **0.2 pt.**
- Calculau la probabilitat que en un quadrat hi caiguin 0, 1, 2, 3, 4, 5 o més bombes, i feu una taula amb aquests resultats. **0.45 pt.**
- Calculau el nombre de quadrats en els quals hi caurien 0, 1, 2, 3, 4, 5 o més bombes, afegiu-lo a la taula anterior i comparau aquests resultats amb els obtinguts realment. **0.4 pt.**
- Tenint en compte els resultats, creus que els alemanys apuntaven o disparaven a l'atzar? **0.2 pt.**

(Examen Telemàtica, juny 2009)

Solució:

a) Com han caigut 537 bombes en 576 quadrats, $\mu = \frac{537}{576}$

b) i c) Si segueix una distribució de Poisson amb mitjana $\mu = \frac{537}{576}$. La funció de probabilitat és: $f(x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$. Per tant,

Nombre de V2 per quadrat x	Probabilitat de x impactes $P(X = x)$	Quadrats amb x impactes $576 \cdot P(X = x)$
0	$P(X = 0) = \frac{e^{-\mu} \mu^0}{0!} = 0.3937$	226.8
1	$P(X = 1) = \frac{e^{-\mu} \mu^1}{1!} = 0.3670$	211.4
2	$P(X = 2) = \frac{e^{-\mu} \mu^2}{2!} = 0.1711$	98.6
3	$P(X = 3) = \frac{e^{-\mu} \mu^3}{3!} = 0.0532$	30.6
4	$P(X = 4) = \frac{e^{-\mu} \mu^4}{4!} = 0.0124$	7.1
5 o més	$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 0.0026$	1.5

d) Si observam, els resultats són molt semblants als obtinguts realment, per tant podem considerar que desapareixen a l'atzar.

Prob 2 Una cinta magnètica es talla en tires de mitja polsada d'ample, per després debanar-les en un cilindre. La unitat de tall conté 48 ganivetes. Es trien a l'atzar cinc d'elles i s'avaluen diàriament per determinar el desgast del tall. Si es troba qualsevol ganiveta sense tall, es canvia tot el conjunt de ganivetes de la unitat de tall per una de nova.

- a) Si la unitat de tall té 10 ganivetes desgastades, quina és la probabilitat de canviar el conjunt de ganivetes el primer dia en que es du a terme l'avaluació? **0.5 pt.**
- b) Si la unitat de tall té 10 ganivetes desgastades, quina és la probabilitat de que el conjunt de ganivetes no sigui canviat fins el tercer dia d'iniciada l'avaluació? [Suggeriment: Suposau que les decisions que es prenen per dia són independents]. **0.5 pt.**
- c) Suposem que el primer dia en que es fa l'avaluació, dues ganivetes estan desgastades; el segon dia sis, i el tercer dia 10. Quina és la probabilitat de que el conjunt de ganivetes no sigui canviat fins els tercer dia de l'avaluació? [Suggeriment: Suposau que les decisions que es prenen cada dia són independents]. **0.5 pt.**

(Examen Telemàtica, setembre 2009)

Solució:

- a) Tenim una distribució hipergeomètrica on el nombre d'objectes és 48 i d'èxits 10. La mostra té una grandària de 5.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{10}{0} \binom{38}{5}}{\binom{48}{5}} = \\ &= 1 - 0,293138 = 0,706862 \end{aligned}$$

- b) La probabilitat de canviar el conjunt de ganivetes un dia és $p = 0,706862$, ens demanen la probabilitat de no canviar-les fins al tercer dia. Ens trobem davant una distribució geomètrica $Ge(0,706862)$. Ens demanen:

$$P(Y = 3) = 0,293138^2 \cdot 0,706862 = 0,0607406$$

- c) La probabilitat de canviar les ganivetes el primer dia és una distribució hipergeomètrica on el nombre d'objectes és 48 i d'èxits 2. La mostra té una grandària de 5.

$$p_1 = P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{2}{0} \binom{46}{5}}{\binom{48}{5}} = 1 - 0,800532 = 0,199468$$

La probabilitat de canviar les ganivetes el segon dia és una distribució hipergeomètrica on el nombre d'objectes és 48 i d'èxits 6. La mostra té una grandària de 5.

$$p_2 = P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{6}{0} \binom{42}{5}}{\binom{48}{5}} = 1 - 0,496797 = 0,503203$$

La probabilitat de canviar les ganivetes el tercer dia és una distribució hipergeomètrica on el nombre d'objectes és 48 i d'èxits 10. La mostra té una grandària de 5.

$$p_3 = P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{10}{0} \binom{38}{5}}{\binom{48}{5}} = 1 - 0,293138 = 0,706862$$

Finalment per no canviar les ganivetes fins el tercer dia, no les podem canviar el primer, ni el segon i si el tercer. La probabilitat serà per tant,

$$(1 - p_1)(1 - p_2)p_3 = 0,800532 \cdot 0,496797 \cdot 0,706862 = 0.28112$$