Processos aleatoris típics

Procés Gaussià

Un procés aleatori es diu Gaussià si per a qualsevol elecció de mostres $t_1, \cdots, t_k$ i qualsevol valor de k, les variables $X(t_1), \cdots, X(t_k)$ són v.a. conjuntament Gaussianes.

Propietats:

1. Un procés Gaussià ho pot ser tant en temps discret com continu.
2. La funció de densitat d'un procés Gaussià queda totalment determinada per les esperances i les covariàncies de les variables que el formen.
3. En un procés Gaussià cada una de les v.a. $X(t_i)$ és Gaussiana.
4. Qualsevol operació lineal (suma, derivació, integració, etc) damunt un procés Gaussià dóna lloc a un nou procés Gaussià.
5. Molts senyals i renous en Comunicacions es poden modelar com a processos Gaussians, per aquest motiu és el tipus de procés aleatori més utilitzat en processament de senyals.

Exercicis proposats: 9, 10

Temps Discret

- **Procés suma**. És un procés discret que s'obté com a suma de variables aleatòries i.i.d.:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad n = 1, 2, \cdots$$

  Propietats:

  1. $S_n = S_{n-1} + X_n$
  2. Si X_i són Bernouilli amb paràmetre p, llavors $S_n \sim B(n,p)$ i el procés es diu de **suma binomial**.

  Exemple 7:

  (Setembre 2005). Sigui S_n el procés suma següent: $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Les variables aleatòries X_i són variables discretes iid que prenen valors -1, 0 o 1 amb probabilitats respectives $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$. Calculau $P(S_3 = k)$ per a tots els valors possibles de k.

  Exercicis proposats: 11

- **Procés de passejada aleatòria**. És un procés de suma binomial on les X_i prenen valors $+1$ o -1.

  Exemple 8:

  (Exercici 12). Trobau $P(S(n) = 0)$ per al procés de la passejada aleatòria.

Exercicis proposats: 13

Temps Continu

- **Procés de Poisson**. Si $N(t)$ és la funció que compta el nombre d'*esdeveniments* que s'han produit fins a l'instant de temps t (és a dir, en l'interval $(0,t)$) i el promig d'*esdeveniments* per unitat de temps és t, llavors $N(t)$ s'anomena procés de Poisson.

  Propietat: $N(t) \sim \text{Po}(\lambda t)$, per tant, $P(N(t)=k) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, $k = 0, 1, \cdots$

  Exemple 9:

  (Exercici 14). Suposem que una secretària rep cridades que arriben d'acord amb un procés de Poisson amb un ritme de 10 cridades per hora. Quina és la probabilitat que cap cridada es quedi sense resposta si la secretària surt de l'oficina els primers 15 i els darrers 15 minuts d'una hora?

  Exemple 10:

  (Exercici 16). Un impuls de renou ocorr en una línia telefònica d'acord amb un procés Poisson de paràmetre λ per segon.
  - *a) Trobau la probabilitat que no ocorri cap impuls en el transcurs d'un missatge de t segons.*
  - *b) Suposem que el missatge està codificat i que si s'ha produït un impuls podem corregir el missatge. Quina és la probabilitat que un missatge de t segons estigui lliure d'errors o es pugui corregir?*

  Exemple 11:

  (Exercici 17). Els missatges arriben a un ordinador des de dues línies telefòniques segons dos processos de Poisson independents i amb ritmes λ_1 i λ_2 respectivament.
  - *a) Trobau la probabilitat que un missatge arribi primer per la linea 1.*
  - *b) Trobau la funció de densitat del temps que tarda un missatge en arribar per alguna de les línies.*
  - *c) Trobau la probabilitat de $N(t)$ el nombre total de missatges que arriben a l'ordinador en un interval de longitud t.*
  - *d) Generalitzau el resultat anterior quan es junten k línies telefòniques independents Poisson amb paràmetres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ y $N(t) = N_1(t) + \ldots + N_k(t)$.*

  Exercicis proposats: 15, 18