Examen Probabilitat i Processos Aleatoris. Telemàtica
febrer 2011

P1.- L'emissor d'un sistema de comunicacions emet, de manera equiprobable, quatre tipus de símbols, cada un d'ells format per un parell de valors: $(-1/2, -1/2)$, $(-1/2, 1/2)$, $(1/2, -1/2)$, $(1/2, 1/2)$. Degut al renou en el canal de transmissió el receptor rep el parell $(\hat{U}, \hat{V}) = (U + X, V + Y)$ quan s'emet el símbol (U, V), on (X, Y) és un renou additiu amb funció de densitat conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} Kx^2e^{-y} & \text{si } -1 \le x \le 1 \quad \text{i} \quad -1 \le y \le 1 \\ 0 & \text{resta} \end{cases}$$

La decisió sobre el símbol rebut es fa seguint els següents criteris:

- es decideix que s'havia enviat $(-1/2, -1/2)$ si $\hat{U} < 0$ i $\hat{V} < 0$
- es decideix que s'havia enviat $(-1/2, 1/2)$ si $\hat{U} < 0$ i $\hat{V} \ge 0$
- es decideix que s'havia enviat $(1/2, -1/2)$ si $\hat{U} \ge 0$ i $\hat{V} < 0$
- es decideix que s'havia enviat $(1/2, 1/2)$ si $\hat{U} \ge 0$ i $\hat{V} \ge 0$

Responeu les següents qüestions:

a) Trobau el valor de la constant K. **0.5 pt.**

b) Quina és la probabilitat de transmetre $(-1/2, -1/2)$ i decidir $(1/2, 1/2)$? **1 pt.**

c) Quina és la probabilitat de decidir $(1/2, -1/2)$ si s'ha transmés $(-1/2, 1/2)$? **1 pt.**

P2.- Tenim una urna amb tres bolles blanques i dues negres. Es fan tres extraccions sense reposició. Sigui N la variable aleatòria que compta el nombre de bolles blanques extretes, i sigui M la variable que compta el nombre de bolles negres extretes *abans* de la primera bolla blanca. Es demana:

a) Calculau la funció de probabilitat conjunta de N i M. **0.5 pt.**

b) Calculau $P(|M - N| \le 2)$. **0.5 pt.**

c) Calculau l'esperança i la variància de N. **0.5 pt.**

d) Calculau l'esperança i la variància de M. **0.5 pt.**

e) Calculau la covariància i el coeficient de correlació de N i M. **0.5 pt.**

P3.- Una càmera de televisió utilitzada per les retransmissions de partits de futbol es desplaça damunt un rail. Cada vegada que s'acciona el motor que desplaça la càmera es produeix un error δ de desplaçament, on $\delta \sim N(0, 1)$ (mm). Els errors en desplaçament s'acumulen després de cada actuació del motor i són independents entre sí.

a) Quina és la probabilitat que l'error de desplaçament sigui superior a 5mm després de 100 actuacions del motor? **1.25 pt.**

b) Quan l'error acumulat (en valor absolut) és superior a 10mm la càmera s'ha de recalibrar. Quin és el nombre màxim d'actuacions del motor que es poden fer si es vol garantir, amb una probabilitat del 95%, que la càmera no necessita ésser recalibrada? **1.25 pt.**

P4.- Una persona juga al següent joc: llança una moneda i si surt cara es desplaça a la dreta 1 metre, si surt creu es desplaça a l'esquerra 1 metre. Quina és la probabilitat que després de 15 llançaments es trobi 5 metres a la dreta de la seva posició inicial? Resoleu el problema en termes de processos aleatoris, justificant el tipus de procés utilitzat. Suposau que la moneda està equilibrada. **1.5 pt.**

P5.- El renou d'un canal de comunicacions es pot considerar blanc Gaussià amb densitat espectral de potència P_0^2. Quina és la probabilitat que en una transmissió el renou superi el valor $P_0/2$? **1 pt.**

Duració de l'examen 3 hores.