Esperança i variància d'una suma de variables aleatòries

Si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, on $X_1, \cdots, X_n$ són variables aleatòries i n és constant, llavors:

$$E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{Cov}(X_1, X_1) + \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \cdots + \mathrm{Cov}(X_n, X_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Propietats:

- si $X_1, \cdots, X_n$ són **independents**, llavors:

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)$$

- si $X_1, \cdots, X_n$ són **i.i.d.**[1] , llavors

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = n \cdot E(X)$$

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = n \cdot \mathrm{Var}(X)$$

Exemple 3:

(Exercici 1). Sigui $W = X + Y + Z$, on X, Y i Z són variables aleatòries amb mitjana 0 i variància 1, i amb $Cov(X, Y) = 1/4, Cov(X, Z) = 0, Cov(Y, Z) = -1/4$.

a) Trobau l'esperança i la variància de W.

b) Repetiu l'apartat (a) suposant que X, Y i Z estan incorrelades.

Exemple 4:

(Exercici 3). Siguin $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatòries amb la mateixa mitjana μ i covariàncies $Cov(X_i, X_j) = \sigma^2\rho^{|i-j|}$ per $i, j = 1, \ldots, n$ amb $\sigma > 0$ i $|\rho| < 1$. Determinau la mitjana i la variància de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Exercicis proposats: 2

[1] Les v.a. $X_1, \cdots, X_n$ es diu que són **i.i.d.** si són **independents** i estan **idènticament distribuïdes**, és a dir, si totes tenen la mateixa funció de densitat o probabilitat, i en conseqüència $E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = E(X)$ i $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = \cdots = \mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{Var}(X)$.

Suma d'un nombre aleatori de v.a.

Sigui $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, on $X_1, \cdots, X_N$ són variables aleatòries i N és un nombre aleatori enter positiu, llavors, si les variables són i.i.d.:

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_N) = E(N) \cdot E(X)$$

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_N) = E(N) \cdot \mathrm{Var}(X) + E(X)^2 \cdot \mathrm{Var}(N)$$

Exemple 5:

(Exercici 6). Sigui N una v.a. que pren valors enters positius. Sigui $X_1, \ldots, X_N$ una seqüència de N v.a. iid. Considerem $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$.

a) Calculau $E(S_N|N)$. (Sol.:$\mathbf{NE(X)}$).

b) Calculau $E(S_N) = E(E(S_N|N))$. (Sol.:$\mathbf{E(N)E(X)}$)

c) Demostrau que $E(e^{j\omega S_N}|N) = \Phi_{X_1}(\omega)^N$.

d) Demostrau que $\Phi_{S_N}(\omega) = G_N(\phi_{X_1}(\omega))$ on $G_N(z) = E(z^N)$ és la funció generadora de probabilitats de N.(ind.: $\Phi_{S_N}(\omega) = E(E(e^{j\omega S_N}|N))$).

Exemple 6:

(Exercici 7). Sigui $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ una seqüència de v.a. iid. que pren valors enters. Sigui N una v.a. que pren valors enters positius. Sigui $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$

a) Trobau la mitjana i la variància de S_N.

b) Demostrau que $G_{S_N}(z) = E(z^{S_N}) = G_N(G_{X_1}(z))$.

Exemple 7:

(Exercici 23). El nombre N d'usuaris que arriben a un sistema durant un cert període és una variable aleatòria amb llei $\mathrm{Po}(\lambda)$. Sigui $p \in (0,1)$ la probabilitat que un usuari que arriba al sistema rebi servei. Determinau la llei de la variable aleatòria que compta el nombre d'usuaris que reben servei.

Problemes proposats: 8