Final de Fonaments Matemàtics II. Telemàtica (setembre 2004)

ÀLGEBRA (2 hores)

P1.- Sigui el següent subconjunt de $\mathcal{M}_2(I\!R)$: $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(I\!R) \;\; / \;\; a - b + c + d = 0 \right\}$

a) Demostrau que B és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_2(I\!R)$. **0.5 pt**

b) Trobau una base i la dimensió de B. **0.5 pt**

c) Trobau un conjunt A tal que $A \oplus B = \mathcal{M}_2(I\!R)$. **0.5 pt**

P2.- Donada l'aplicació $f : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ definida com $f(x, y, z) = (x - 2y + z, y, z + x)$.

a) Demostrau que és aplicació lineal. **0.25 pt**

b) Trobau Imf, Ker$f$ i la dimensió de cada un d'ells. **0.5 pt**

c) Indicau si l'aplicació és un epimorfisme, un monomorfisme i/o un isomorfisme. **0.25 pt**

d) Calculau la matriu associada a l'aplicació en la base (inicial i final): $\{(0, 1, 1), (0, 2, 0), (1, -1, 0)\}$ **0.5pt**

e) És el vector $(1, 2, 1)$ un vector propi de l'aplicació? **0.5 pt**

P3.- Calculau l'expressió general de A^n, on n és la matriu següent: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **1.5 pt**

PROBABILITAT (2 hores)

P4.- Una empresa fabrica mobles econòmics però de baixa qualitat. S'ha determinat que el nombre de defectes en cada un dels panells de fusta emprats per a la fabricació dels mobles segueix una llei de Poisson de mitjana 0.2.

a) Si examinam un panell, quina és la probabilitat que no tengui cap defecte? **0.25 pt**

b) Si examinam 50 panells independents, quina és la probabilitat que cap d'ells tengui defectes? **0.25 pt**

c) Si examinam un per un els panells fins a trobar-ne un de defectuós, quina és la probabilitat que el panell defectuós sigui el que fa 20? (suposam que els panells són independents entre si). **0.25 pt**

d) Si examinam un per un els panells fins a trobar-ne un de defectuós, quin és el nombre esperat de panells que és necessari examinar abans de trobar un defecte? (suposam que els panells són independents entre si). **0.5 pt**

e) Quina és la probabilitat que un panell tengui dos o més defectes? **0.25 pt**

P5.- La funció de densitat de probabilitat del temps d'error (en hores) d'un component electrònic és

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000} e^{\frac{-x}{1000}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Calculau la probabilitat que el component es torbi més de 3000 hores en fallar. **0.25 pt**

b) Calculau la probabilitat que el component falli en el lapse de temps comprés entre 1000 i 2000 hores. **0.25 pt**

c) Calculau la probabilitat que el component falli abans de 1000 hores. **0.25 pt**

d) Calculau el nombre d'hores que tardaran en fallar el 10% de tots els components. **0.5 pt**

e) Calculau la funció de distribució acumulada. **0.25 pt**

f) Obteniu la mitjana i la variància del temps de vida del component electrònic. **0.5 pt**

P6.- Sigui X una variable aleatòria absolutament contínua amb funcions de densitat i distribució $f_X(x)$ i $F_X(x)$, respectivament. Es defineix una nova variable aleatòria $Y = X^2$. Trobar les funcions de densitat i distribució de Y en funció de les de X. **1.5 pt**