SEGON PARCIAL I FINAL DE FONAMENTS MATEMÀTICS II. TELEMÀTICA (JUNY 2003)

P1.- Considerem en $\mathbb{R}^3$ els conjunts $W_1 = \{(x,y,z) \,/\, x+y+z=0\}$ i $W_2 = \{(t,2t,3t) \,/\, t \in \mathbb{R}\}$

a) Demostrar que són subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$. **0.5 pt.**

b) Calcular $W_1 + W_2$ i donar la seva dimensió. **0.5 pt.**

c) Calcular $W_1 \cap W_2$ i donar la seva dimensió. **0.5 pt.**

d) Podem dir que W_1 i W_2 són suplementaris? Per què?. **0.25 pt.**

P2.- Considerem l'espai vectorial V sobre un cos $\mathcal{K}$. Sigui $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ la base canònica de V i f un endomorfisme de V tal que $f(u_1) = u_1 + u_2$, $f(u_2) = u_2 + u_3$ i $f(u_3) = 0$. Calcular:

a) L'expressió matricial de l'endomorfisme en la base canònica B inicial i final. **0.5 pt.**

b) $\mathrm{Ker}(f)$ i la seva dimensió. **0.5 pt.**

c) $\mathrm{Im}(f)$ i la seva dimensió. **0.5 pt.**

d) El conjunt de vectors de V invariants per l'endomorfisme f.
(Indicació: es diu que un vector w és invariant per f si $f(w) = w$). **0.5 pt.**

P3.- Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfisme amb la següent matriu associada: $A = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

a) Calcular els valors propis de l'endomorfisme. **0.25 pt.**

b) Calcular els subespais propis associats a cada valor propi. **0.5 pt.**

c) Diagonalitza la matriu? Per què?. **0.25 pt.**

d) Calcular l'expressió general de A^n. **0.25 pt.**

P4.- Una urna conté 2 bolles blanques i 2 negres; una segona urna conté 2 bolles blanques i 3 negres.

a) Si extreim 1 bolla de cada urna, quina és la probabilitat que ambdues siguin del mateix color? **0.25 pt.**

b) Si seleccionam una urna a l'atzar i extreim una bolla, quina és la probabilitat que no sigui blanca? **0.25 pt.**

c) Si seleccionam una urna a l'atzar i estreim dues bolles a la vegada, quina és la probabilitat que siguin del mateix color? **0.25 pt.**

d) Seleccionam una urna a l'atzar, extreim una bolla i resulta ésser blanca. Quina és la probabilitat d'haver escollit la primera urna? **0.5 pt.**

P5.- Tres persones llancen a la vegada una moneda a l'aire. El joc continua fins que alguna d'elles obtengui un resultat diferent a les altres dues. La persona que obtengui el resultat diferent guanya. Si X és el nombre de rondes necessàries fins tenir un guanyador,

a) Calcular la funció de probabilitat de X **0.5 pt.**

b) Calcular la funció de distribució de X **0.5 pt.**

c) Quin serà el nombre mitjà de jugades que s'han de fer fins que algú guanyi? Calcular $\mathrm{Var}(X)$. **0.75 pt.**

P6.- Sigui X una v.a. continua per a la qual coneixem l'esperança $E(X) = \mu$ i la variància $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

a) Demostrar la desigualtat de Txebitxef: $P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \qquad \forall a > 0$
(Indicació: utilitzar la variable auxiliar $Y = X - \mu$ i començar calculant $P(Y^2 \geq a^2)$ amb l'ajut de la desigualtat de Markov.) **0.5 pt.**

b) Si X compta el nombre de persones que van diàriament al cine en una determinada sala. Quina és la capacitat mínima que ha de tenir la sala de cine per assegurar que tots els assistents tendran entrada almenys el 90% de les vegades. Utilitzar la desigualtat de Txebitexf i considerar que el nombre mitjà de persones que van al cine diàriament és 300 i la seva desviació típica és 20. **0.75 pt.**

c) Repetir l'apartat anterior sense utilitzar la desigualtat de Txebitxef i considerant que X és una variable aleatòria gaussiana. **0.75 pt.**

Exàmen final: totes les preguntes. Duració: 4:00 hores.
Exàmen parcial: preguntes 4, 5 i 6 (puntuació doble a la indicada). Duració: 2:30 hores.
Per aprovar l'assignatura s'ha de puntuar com a mínim un 30% de cada part i la mitja ha d'ésser superior o igual a 5.