Processos Estocàstics

1) Considerem el procés aleatori amb temps discret $X(n)$ definit a continuació. Es llança una moneda a l'aire i si surt cara $X(n) = 1$, en cas contrari $X(n) = -1$, per a tot n.

a) Dibuixau alguns camins de mostra del procés.

b) Calculau la funció de probabilitat de $X(n)$.

c) Calculau la funció de probabilitat conjunta de $X(n)$ i $X(n+k)$.

d) Calculau $\mu_X(n)$ y $C_X(n,m)$.

2) Considerem el procés aleatori amb temps discret $X(n)$ definit a continuació. Es llança una moneda a l'aire; si surt cara $X(n) = (-1)^n$ i $X(n) = (-1)^{n+1}$ si surt creu, per a tot n.

a) Dibuixau alguns camins de mostra del procés.

b) Calculau la funció de probabilitat de $X(n)$.

c) Calculau la funció de probabilitat conjunta de $X(n)$ i $X(n+k)$.

d) Calculau $\mu_X(n)$ y $C_X(n,m)$.

3) Sigui $g(t)$ un pols rectangular a l'interval $(0,1)$, és a dir $g(t) = 1$ si $t \in (0,1)$ i zero a la resta de casos. Considerem el procés aleatori definit per $X(t) = Ag(t)$ on $A = \pm 1$ amb la mateixa probabilitat.

a) Calculau la funció de probabilitat de $X(t)$.

b) Calculau $\mu_X(t)$

c) Calculau la funció de probabilitat conjunta de $X(t)$ i $X(t+d)$, amb $d > 0$.

d) Calculau $C_X(t, t+d)$ amb $d > 0$.

4) Un procés aleatori està definit per l'equació $Y(t) = g(t-T)$ on $g(t)$ és el pols del problema anterior i T és una v.a. amb distribució uniforme a l'interval unitat.

a) Calculau la funció de probabilitat de $Y(t)$.

b) Trobau la funció $\mu_Y(t)$

c) Calculau $C_Y(0.5, 0.75)$ y $C_Y(1.2, 1.5)$.

5) Sigui $Y(t) = g(t-T)$ el procés del problema anterior però amb T una v.a. exponencial de paràmetre λ.

a) Calculau la funció de probabilitat de $Y(t)$.

b) Trobau la funció $\mu_Y(t)$

c) Calculau $C_Y(0.2, 1.2)$ y $C_Y(1.5, 1.5)$.

6) Sigui $Z(t) = At + B$ on A i B són v.a. independents.

a) Calculau la funció de densitat de $Z(t)$.

b) Trobau $\mu_Z(t)$ i $C_Z(t_1, t_2)$.

7) Trobau una expressió de $E((X(t_2) - X(t_1))^2)$ en termes de la funció d'autocorrelació.

8) ¿Un procés ortogonal és incorrelat? ¿Un procés incorrelat és ortogonal?

9) Siguin $X(t)$, $Y(t)$ dos processos aleatoris conjuntament Gaussians. Explicau quina relació hi ha, en aquest cas, entre les condicions d'independència, incorrelació i ortogonalitat de $X(t)$ i $Y(t)$.

10) Sigui $X(t)$ un procés estocàstic Gaussià, amb mitjana zero i funció d'autocovariància donada per

$$C_X(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-|t_1 - t_2|}$$

Trobau la funció de densitat conjunta de $X(t)$ i $X(t+s)$.

11) Sigui $S(n)$ un procés suma binomial.

a) Demostrau que $P(S(n) = j, S(n') = i) \neq P(S(n) = j)P(S(n') = i)$.

b) Trobau $P(S(n_2) = j | S(n_1) = i)$ amb $n_2 > n_1$.

c) Demostrau que $P(S(n_2) = j | S(n_1) = i, S(n_0) = k) = P(S(n_2) = j | S(n_1) = i)$ on $n_2 > n_1 > n_0$

12) Trobau $P(S(n) = 0)$ per al procés de la passejada aleatòria.

13) Sigui $M(n)$ un procés discret definit com la seqüència de les mitjanes d'una successió de v.a. X_i iid:

$$M(n) = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Trobau la mitjana,la variància i l'autocovariància de $M(n)$.

14) Suposem que una secretària rep cridades que arriben d'acord amb un procés de Poisson amb un ritme de 10 cridades per hora. Quina és la probabilitat que cap cridada es quedi sense resposta si la secretària surt de l'oficina els primers 15 i els darrers 15 minuts d'una hora?

15) Els clients arriben a una màquina de refrescs segons un procés Poisson de mitjana λ. Suposem que cada vegada que un client deposita una moneda, la màquina dispensa un refresc amb probabilitat p. Trobau la funció de probabilitat del nombre de begudes dispensades en un temps t. (Nota: s'ha de suposar que la màquina conté un nombre ilimitat de refrecs).

16) Un impuls de renou ocorr en una línia telefònica d'acord amb un procés Poisson de paràmetre λ per segon.

a) Trobau la probabilitat que no ocorri cap impuls en el transcurs d'un missatge de t segons.

b) Suposem que el missatge està codificat i que si s'ha produït un impuls podem corregir el missatge. Quina és la probabilitat que un missatge de t segons estigui lliure d'errors o es pugui corregir?

17) Els missatges arriben a un ordinador des de dues línies telefòniques segons dos processos de Poisson independents i amb ritmes λ_1 i λ_2 respectivament.

a) Trobau la probabilitat que un missatge arribi primer per la linea 1.

b) Trobau la funció de densitat del temps que tarda un missatge en arribar per alguna de les línies.

c) Trobau la probabilitat de $N(t)$ el nombre total de missatges que arriben a l'ordinador en un interval de longitud t.

d) Generalitzau el resultat anterior quan es junten k línies telefòniques independents Poisson amb paràmetres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ y $N(t) = N_1(t) + \ldots + N_k(t)$.

18) Calculau $P(N(t-d) = j | N(t) = k)$ amb $d > 0$ quan $N(t)$ es un procés de Poisson amb paràmetre λ.