Fonaments Matemátiques II

Probabilitat

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears

Manuel Moyà Quintero

Índex

Capítol 2

Probabilitat

2.1 Espai mostral i successos

Definició 2.1 *Anomenam* **experiment aleatori** *a aquell experiment que efectuat amb les mateixes condicions dóna resultats diferents.*

En cas contrari, és a dir, quan efectuat amb les mateixes condicions s'obtenen els mateixos resultats, l'anomenarem **experiment determinista**.

Definició 2.2 *El conjunt format pels possibles resultats d'un experiment aleatori es denomina* **espai mostral** *de l'experiment i el representarem per E.*

Exemples:

1. Si tiram un dau, l'espai mostral serà

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Considerem un experiment on seleccionem dos components i els classifiquem segons compleixin o no els requeriments d'una determinada propietat del producte. Si el primer component ho compleix i el segon no el representarem per SN. L'espai mostral serà:

$$E = \{SS, SN, NS, NN\}$$

3. Considerem un experiment on cada 10 minuts comprovem el volum en que s'han omplit les llaunes de refresc d'una determinada màquina que les omple automàticament amb la finalitat de saber si les omple correctament i el volum d'aquestes és correcte. L'avaluació continua fins que trobem una llauna que no compleixi les condicions. Si designem per s si les omple correctament i per n en cas contrari l'espai mostral serà:

$$E = \{n, sn, ssn, sssn, ssssn, \ldots\}$$

   Aquest espai mostral té un nombre infinit de resultats.

Definició 2.3 *Anomenam* **succés** *a un subconjunt d'un espai mostral.*

Al conjunt de tots els successos d'un experiment aleatori, és a dir, al conjunt format per tots els subconjunts d'un espai mostral E el representarem per $\mathcal{P}(\mathcal{E})$

Exemple 1: De l'experiment de l'exemple 2 de la definició 2.2, podem definir el succés

$$S\text{=”Almenys un component no sigui defectuós”}=\{SN, NS, SS\}$$

El succés format per un únic element rep el nom de **succés elemental** i el que té més d'un element s'anomena **succés compost** .

Exemple 2: De l'experiment de l'exemple 2 de la definició 2.2, el succés

$$S\text{=”El primer i només el primer component ho compleix”}=\{SN\}$$

és un succés elemental

Exemple 3: De l'experiment de l'exemple 2 de la definició 2.2, el succés

$$S\text{=”El primer component ho compleix”}=\{SN, SS\}$$

és un succés compost.

Exemple 4: De l'experiment de l'exemple 3 de la definició 2.2, el succés

$$S\text{=”La primera llauna que no compleixi les condicions sigui la quarta”}=\{sssn\}$$

és un succés elemental.

Exemple 5: De l'experiment de l'exemple 3 de la definició 2.2, el succés

$$S\text{=”La primera llauna que no compleixi les condicions estigui entre les quatre primeres}\\ =\{n, sn, ssn, sssn\}$$

és un succés compost.

Donat el succés S, anomenam **succés contrari** a S a aquell que es compleix quan no es compleix S, és a dir, $E - S$ i el representarem per $\bar{S}$.

Exemple 6: El succés contrari al de l'exemple 3 d'aquesta definició és

$$\bar{S}\text{=”El primer element no ho compleixi”}=\{NS, NN\} = E - S$$

Exemple 7: El succés contrari al de l'exemple 5 d'aquesta definició és

$\bar{S}$=”La primera llauna que no compleixi les condicions sigui a partir de la cinquena=$\{ssssn, sssssn, \cdots\} = E - S$

L'espai mostral també rep el nom de **succés segur** i el succés $\emptyset$ s'anomena **succés impossible**.

Definició 2.4 *Donats dos successos A i B anomenam* **succés unió** *a aquell que es compleix quan es compleix al menys un d'ells i es representa per $A \cup B$.*

Anomenam **succés intersecció** *a aquell que es compleix quan es compleixen els dos i es representa per $A \cap B$.*

Exemple 1: A l'espai mostral $\{SS, SN, NS, NN\}$ de l'experiment aleatori de l'exemple 2 de la definició 2.2 considerem els successos $S_1 = \{SS, SN, NS\}$ i $S_2 = \{SN, NS, NN\}$, aleshores,

$$S_1 \cup S_2 = \{SS, SN, NS, NN\} = E \quad S_1 \cap S_2 = \{SN, NS\}$$

$$\bar{S}_1 = \{NN\} \quad \bar{S}_2 = \{SS\}$$

Exemple 2: En un sistema de comunicació digital, cada missatge es classifica segons arribi o no arribi dins el temps establert pel disseny del sistema. Si es classifiquen tres missatges, utilitzem un diagrama arbre per representar l'espai mostral dels possibles resultats. (Vegeu figura 2.1)

Si designem per s_i que arribi a temps el missatge i i per n_i que no arribi a temps, l'espai mostral serà

$$E = \{s_1s_2s_3, s_1s_2n_3, s_1n_2s_3, s_1n_2n_3, n_1s_2s_3, n_1s_2n_3, n_1n_2s_3, n_1n_2n_3\}$$

Diguem S_1 =”Almenys dos missatges arribin a temps”:

$$S_1 = \{s_1s_2s_3, s_1s_2n_3, s_1n_2s_3, n_1s_2s_3\}$$

i diguem S_2 =”Un i només un missatge no arribi a temps”:

$$S_2 = \{s_1s_2n_3, s_1n_2s_3, n_1s_2s_3, \}$$

Aleshores

$$S_1 \cup S_2 = \{s_1s_2s_3, s_1s_2n_3, s_1n_2s_3, n_1s_2s_3\} = S_1$$
$$S_1 \cap S_2 = \{s_1s_2n_3, s_1n_2s_3, n_1s_2s_3\} = S_2$$

Definició 2.5 *Direm que dos successos A i B són* **incompatibles** *si $A \cap B = \emptyset$, és a dir, si no poden succeir a la vegada. En cas contrari direm que són* **compatibles**.

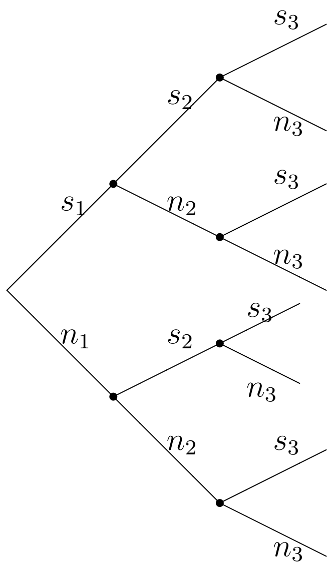

Figura 2.1: Espai mostral

Exemple: A l'espai mostral $\{SS, SN, NS, NN\}$ de l'experiment aleatori de l'exemple 2 de la definició 2.2 considerem els successos $S_1 = \{SS, SN, NS\}$, $S_2 = \{NN\}$ i $S_2 = \{SN, NS, NN\}$.

Aleshores S_1 i S_2 són incompatibles ja que no poden succeir a la vegada: $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Però S_1 i S_3 són compatibles, ja que es poden donar a la vegada: $S_1 \cap S_2 = \{SN, NS\}$.

Proposició 2.6 *Si E és l'espai mostral d'un experiment aleatori i S, S_1, S_2 són successos d'aquest espai mostral,*

1) $\overline{\overline{S}} = S$

2) Distributiva:

$$S \cap (S_1 \cup S_2) = (S \cap S_1) \cup (S \cap S_2); \qquad S \cup (S_1 \cap S_2) = (S \cup S_1) \cap (S \cup S_2)$$

3) Commutativa

$$S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1; \qquad S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1$$

4) Lleis d'en DeMorgan

$$\overline{S_1 \cap S_2} = \overline{S_1} \cup \overline{S_2}; \qquad \overline{S_1 \cup S_2} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$$

5) Si designam per $S_2 - S_1$ als elements de S_2 que no són de S_1, aleshores

$$S_2 - S_1 = S_2 \cap \bar{S}_1$$

DEMOSTRACIÓ:

Surt dels objectius de l'assignatura. De totes formes podem observar el compliment d'aquestes propietats observant els diagrames de Venn corresponents. (Vegeu figura 2.2)

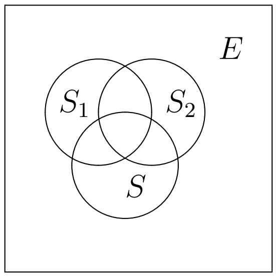

Figura 2.2: Propietats dels successos

2.2 Concepte de probabilitat i propietats

Definició 2.7 (Definició axiomàtica de probabilitat. Kolgomorov 1933) *Sigui E l'espai mostral d'un experiment aleatori i $\mathcal{P}(E)$ el conjunt de tots els successos de E. Anomenam* **probabilitat** *a una aplicació*

$$P : \mathcal{P}(E) \to [0, 1]$$

que satisfà:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$, per a tot succés A de E.

b) $P(E) = 1$.

c) Si $\{A_1, A_2, \ldots\}$ és una família qualsevol de successos incompatibles dos a dos, aleshores

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Nota: Anteriorment a aquesta definició es varen donar altres:

1. (*Definició com a freqüència relativa. Von Mises 1883-1953*)
   Si $N_A(n)$ és el nombre de vegades que ha succeït el succés A en repeticions del mateix experiment aleatori, la freqüència relativa de A és $f_A(n) = \dfrac{N_A(n)}{n}$ i definim
   $$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_A(n)$$
2. (*Definició clàssica. Laplace 1812*)
   Si l'espai mostral d'un experiment aleatori és finit i de cardinal n, la probabilitat d'un succés A és:
   $$P(A) = \frac{card\ (A)}{n} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}$$

Exemple: Considerem una màquina que talla barres de ferro i sigui x la longitud de les barres. Suposem que per el 10% de les barres, $x \leq 7,55$ centímetres, per el 15% de les barres, $7,55 < x \leq 7,57$ centímetres i per el 25% de les barres, $7,57 < x \leq 7,59$ centímetres. La resta és de major grandària.

Si es tria una barra a l'atzar, quina és la probabilitat de que la longitud sigui menor o igual que 7,59 centímetres?

Si designem per S_1: "$x \leq 7,55$", S_2:"$7,55 < x \leq 7,57$" i S_3:"$7,57 < x \leq 7,59$" tenim:

$$P(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = 0,10 + 0,15 + 0,25 = 0,50$$

Proposició 2.8 *Si A i B són dos successos,* $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

DEMOSTRACIÓ:

Si ens fixem en el dibuix 3 veurem que es compleix $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, on $A - B$ i $A \cap B$ són incompatibles. Per tant, per la propietat c) de la definició 2.7

$$P(A) = P((A - B) \cup (A \cap B)) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

aïllant, $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

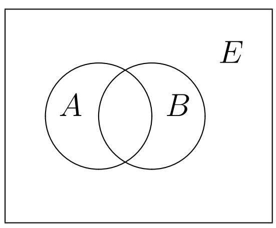

Figura 2.3: $A - B$

Proposició 2.9 *Si A i B dos successos corresponents a un determinat experiment aleatori es compleix:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

DEMOSTRACIÓ:

Observant el diagrama de Venn del dibuix 2.3 tenim

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

on $A - B$, $A \cap B$ i $B - A$ són incompatibles dos a dos. Per tant, per la propietat c) de la definició 2.7 tenim

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$$

però tenint en compte la proposició 2.9 tenim

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Corol·lari 2.10 *Si A, B i C són tres successos corresponents a un determinat experiment aleatori, es compleix:*

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

DEMOSTRACIÓ:

Per anar resolent aquesta demostració ens fixarem en el diagrama de Ven de la figura 2.4

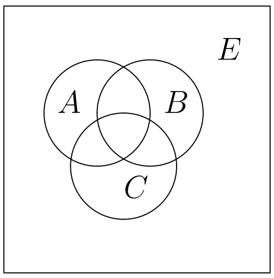

Figura 2.4: $A \cup B \cup C$

Tenim que $P(A \cap B \cup C) = P(A \cup (B \cup C))$ i per la proposició 2.9 tenim

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C))$$

Per la propietat esmentada abans i per la distributiva de la intersecció respecte a la unió, vegeu la proposició 2.6 tenim

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

Tornant a aplicar la proposició 2.9

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-[P(A\cap B)+(A\cap C)-P((A\cap B)\cap(A\cap C))]=$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-[P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)]=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Proposició 2.11 *a)* $P(\bar{A})=1-P(A)$.

b) $P(\emptyset)=0$.

c) Si $A\subseteq B$ *aleshores* $P(A)\leq P(B)$.

DEMOSTRACIÓ:

a) $P(\bar{A})=1-P(A)$.

Efectivament, com $A\cup\bar{A}=E$ tenim $P(A\cup\bar{A})=P(E)$, i com A i $\bar{A}$ són incompatibles i P(E)=1,

$$P(A\cup\bar{A})=P(A)+p(\bar{A})=1$$

aïllant ens queda $P(\bar{A})=1-P(A)$.
b) $P(\emptyset)=0$.

Tenim que $\emptyset=\bar{E}$, per tant, aplicant l'apartat anterior

$$P(\emptyset)=P(\bar{E})=1-P(E)=1-1=0$$

c) Si $A\subseteq B$ aleshores $P(A)\leq P(B)$.

Tenim que $B=(B-A)\cup A$, i com $B-A$ i A són incompatibles,

$$P(B)=P((B-A)\cup A)=P(B-A)+P(A)$$

ara bé, com $P(B-A)\geq 0$ tenim que $P(B)\geq P(A)$

Exemple: Si $P(A)=0.4$, $P(B)=0.3$ i $P(A\cap B)=0.2$,

- $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.4=0.6$
- $P(A\cap\bar{B})\overset{(1)}{=}P(A)-P(A\cap B)=0.4-0.2=0.2$
- $P(\overline{(A\cup B)})\overset{(2)}{=}1-P(A\cup B)\overset{(3)}{=}1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=1-(0.4+0.3-0.2)=0.5$
- $P(\bar{B}\cup A)\overset{(3)}{=}P(\bar{B})+P(A)-P(\bar{B}\cap A)\overset{(2)}{=}1-P(B)+P(A)-P(\bar{B}\cap A)\overset{(4)}{=}1-0.3+0.4-0.2=0.9$

(1) Vegeu la proposició 2.8; (2) Per aquesta mateixa proposició; (3) Per la proposició 2.9; (4) Per aquest mateix exercici;

Proposició 2.12 (Regla de Laplace) *Si el conjunt de successos elementals d'un experiment aleatori és finit, és a dir,* $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *i aquests successos elementals són equiprobables, aleshores si A és un succés format per k successos elementals, es compleix*

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Aquesta propietats l'enunciarem dient que la

"probabilitat d'A és igual al nombre de casos favorables dividit pel nombre de casos possibles"

$$P(A) = \frac{card\ (A)}{n} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos possibles}}$$

Demostració:

$$1 = P(E) = P(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_n\})$$

i per la definició 2.7

$$1 = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \ldots + P(\{a_n\})$$

però com són equiprobables, la probabilitat de cada succés elemental és la mateixa, per tant,

$$1 = n \cdot P(\{a_i\}), \qquad \text{per tant} \qquad P(\{a_i\}) = \frac{1}{n} \text{ per a } i = 1, \ldots, n$$

Cerquem ara la probabilitat de $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$,

$$P(A) = P(\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}) = P(\{a_{i_1}\}) + P(\{a_{i_2}\}) + \ldots + P(\{a_{i_k}\}) = k \cdot P(\{a_{i_j}\}) =$$

$$= k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

Exemple 1: A un petit comerç que es dedica a la venda de productes informàtics reben una comanda de 30 impressores, de les quals 10 són làser i la resta d'injecció de tinta, si en triam a l'atzar 5 d'aquestes impressores, quina és la probabilitat de que

a) Tres i només tres de les impressores triades siguin làser?

b) Almenys tres de les impressores triades siguin làser?

c) Almenys una de les impressores triades siguin làser?

En tots els casos hi ha la mateixa quantitat de casos possibles:

$$CP: \ C_{30,5} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{5!} = 142506$$

i designem per A_i el succés "Triar i i només i impressores làser de cinc".

a) Hem de calcular $P(A_3)$.

El casos favorables consisteixen en tots els grups que podem formar de 5 impressores de les quals tres són làser i les altres dues no:

$$CF: \ C_{10,3} \cdot C_{20,2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} \cdot \frac{20 \cdot 19}{2!} = 22800$$

Per tant

$$P(A_3) = \frac{22800}{142506} = 0.16$$

b) Sigui B el succés "Almenys 3 impressores de 5 siguin làser". Aleshores

$$B = A_3 \cup A_4 \cup A_5$$

on els successos $A_3, \ A_4, \ A_5$ són incompatibles. Per tant,

$$P(B) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5)$$

Pel mateix procediment que hem fet servir abans tenim

$$P(A_4) = \frac{C_{10,4} \cdot C_{20,1}}{142506} = \frac{210 \cdot 20}{142506} = 0.029$$

i

$$P(A_5) = \frac{C_{10,5}}{142506} = \frac{252}{142506} = 0.0018$$

Per tant,

$$P(B) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) = 0.16 + 0.029 + 0.0018 = 0.1908$$

c) Sigui C el succés "Almenys una impressora sigui làser", per tant,

$$P(C) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5)$$

Ara bé, ho podem fer d'una forma més ràpida cercant el succés contrari a C, $\bar{C}$, que és "cap impressora sigui làser", per tant,

$$P(\bar{C}) = P(A_0) = \frac{C_{20,5}}{142506} = \frac{15504}{142506} = 0.109$$

Aleshores

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0.109 = 0.891$$

Exemple 2: Llencem 5 monedes. Calculem la probabilitat que:

a) Surtin 5 cares.

b) Surtin 3 cares i 2 creus.

c) Surti almenys una cara.

En tots els successos, els casos possibles són $VR_{2,5} = 2^5 = 32$.

Els casos favorables són:

a) $CF = 1$. Per tant, $P = \frac{1}{32}$

b) $CF = PR_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

c) Sortir almenys una cara és el succés contrari a sortir 0 cares. Per tant,

$$P(\text{"Sortir almenys una cara"}) = 1 - P(\text{"Surtin 0 cares"}) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

Exemple 3: Considerem l'experiment aleatori de llençar dos daus, calculem la probabilitat d'obtenir 7 punts amb els dos daus.

Casos possibles: $VR_{6,2} = 6^2 = 36$.

Casos favorables: 16, 25, 34, 43, 52, 61. En total 6.

Per tant la probabilitat és $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Exemple 4: En un dau trucat, la probabilitat de treure un 6 és doble que la de qualssevol dels altres valors. Calculau la probabilitat de treure un 2.

Si E és l'espai mostral: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i designem per $x = P(1)$, tenim

$$P(E) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

per tant,

$$1 = x + x + x + x + x + 2x$$

i $x = \frac{1}{7}$ i $P(2) = \frac{1}{7}$.

2.3 Probabilitat condicional

Considerem el següent exemple: En una planta de fabricació de decodificadors de TDT hi ha dues màquines A i B que munten determinats components. La primera A és més lenta i amb menys fiabilitat i la segona B és més ràpida i fiable. Un determinat dia la màquina A

munta 10 components, dels quals 3 són defectuosos (D) i la màquina B 12 components dels quals 2 són defectuosos.

	D	$\bar{D}$
A	3	7
B	2	10

Suposem que l'encarregat de producció tria a l'atzar un dels components fabricats. Ens interessa calcular la probabilitat que hagi estat muntat per la màquina A. Designem també per:
A="Haver estat muntat per la màquina A"
B="Haver estat muntat per la màquina B".
D="Ser defectuós"
Aleshores,

$$P(A) = \frac{10}{22}$$

Suposem ara que el decodificador resulta ser defectuós, aleshores la probabilitat de que hagi estat muntat per la màquina A és

$$\frac{3}{5}$$

ja que la màquina A fa 3 defectuosos i en total es munten 5. A aquesta probabilitat la representarem per $P(A|D)$ i es llegeix *probabilitat de A condicionada a D.*

Tenguem en compte el següent:

$$P(A|D) = \frac{3}{5} = \frac{\frac{3}{22}}{\frac{5}{22}} = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

Definició 2.13 *Donats dos succés A i B amb $P(B) > 0$, definim* **probabilitat de** B **condicionada a** A *a:*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Aïllant tenim $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ o bé, $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$

$P(B|A)$ és la probabilitat que succeeixi B suposant que succeeix A.

Exemple 1: Volem analitzar els discos DVD d'un determinat proveïdor pel que fa referència a la resistència a les ratllades i als cops. Obtenim la taula següent:

		Resistència a cops	
		alta	baixa
Resistència a ratllades	alta	80	9
	baixa	6	5

Designem per:
A el succés *"Tenir alta resistència als cops"*
B el succés *"Tenir alta resistència a les ratllades"*

Volem calcular:

1. $P(A)$

$$P(A) = \frac{86}{100} = 0.86$$

2. $P(B)$

$$P(B) = \frac{89}{100} = 0.89$$

3. $P(\bar{A})$

$$P(\bar{A}) = \frac{14}{100} = 0.14, \quad \text{també es pot fer } P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.86 = 0.14$$

4. $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = \frac{80}{100} = 0.8$$

5. $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = \frac{95}{100} = 0.95$$

També ho podríem fer de la següent forma

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.86 + 0.89 - 0.8 = 0.95$$

6. $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{80}{89} = 0.8989$$

o també

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.8}{0.89} = 0.8989$$

7. $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{80}{86} = 0.930$$

o també

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.8}{0.86} = 0.930$$

Exemple 2: Considerem l'exemple anterior i ens fixarem només en els discos DVD que tenen resistència alta als cops: 86 i baixa: 14. Suposem que elegim dos a l'atzar, primer un i després l'altra, sense reemplaçament. Volem saber el següent:

1) La probabilitat que el primer seleccionat tengui una resistència alta als cops.
2) La probabilitat que el segon seleccionat tengui una resistència alta als cops, tenint en compte que el primer l'ha tenguda.
3) Com varia la solució anterior si hi ha reemplaçament?
4) La probabilitat que el segon seleccionat tengui una resistència alta si el primer no la tenia.
5) La probabilitat que els dos seleccionats tenguin una resistència alta als cops.
6) La probabilitat que els dos seleccionats tenguin una resistència baixa als cops.

Designem per
A=*"Tenir resistència alta als cops el 1r seleccionat"*
B=*"Tenir resistència alta als cops el 2n seleccionat"*

1)
$$P(A) = \frac{86}{100} = 0.86$$

2)
$$P(B|A) = \frac{85}{99} = 0.8586$$

3)
$$P(B|A) = \frac{86}{100} = 0.86$$

4)
$$P(B|\bar{A}) = \frac{86}{99} = 0.8687$$

5)
$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.86 \cdot 0.8586 = 0.738$$

6)
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{14}{100}\frac{13}{99} = 0.018$$

Teorema 2.14 (Teorema de la probabilitat composta)

Si $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ són n successos d'un mateix experiment aleatori, i tals que la probabilitat que es produeixin simultàniament els n successos no és nul·la, llavors es verifica:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \\ P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

DEMOSTRACIÓ:

Ho farem per inducció:

- és cert per a 1 succés: $P(A_1) = P(A_1)$
- Suposem que és cert per a $n-1$ successos

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) = \\ P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2})$$

- Vegem que és cert per a n

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P((A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cap A_n) \overset{(1)}{=}$$

$$= P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \overset{(2)}{=}$$

$$= P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

(1) Per la definició 2.13; (2) Per hipòtesi d'inducció

Proposició 2.15 *Sigui A és un succés no nul d'un espai mostral E, tal que $P(A) > 0$. Definim l'aplicació:*

$$P(-|A) : \mathcal{P}(E) \to [0,1] \text{ tal que } P(-|A)(B) = P(B|A).$$

Aleshores, aquesta aplicació és una probabilitat.

DEMOSTRACIÓ:

Hem de veure que compleixen els axiomes de la definició 2.7.

a) Sigui B un succés d'E

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

com $B \cap A \subseteq A$ aleshores per la proposició 2.11 tenim que $P(A \cap B) \leq P(A)$, i com $P(A \cap B) \geq 0$ i $P(A) > 0$ tenim

$$0 \leq P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \leq 1$$

b) Si E és l'espai mostral tenim

$$P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

c) Siguin $\{A_1, A_2, \ldots\}$ una família de successos incompatibles dos a dos,

$$P((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)|A) = \frac{P((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap A)}{P(A)} = \frac{P((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap A))}{P(A)}$$

ara bé, si A_i i A_j són incompatibles per a $i \neq j$, $A_i \cap A$ i $A_j \cap A$ també són incompatibles per a $i \neq j$, per tant, per la definició 2.7

$$P((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)|A) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap A)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|A)$$

Per tant, és una probabilitat i compleix totes les propietats corresponents a les probabilitats, com per exemple les de les proposicions 2.8, 2.9 i 2.11.

Exemple 1: Si $P(A|B) = 0.4$ i $P(B) = 0.5$ calculem $P(\bar{A}|B)$, $P(A \cap B)$ i $P(\bar{A} \cap B)$

a)
$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

b)
$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$$

c)
$$P(\bar{A} \cap B) = P(B)P(\bar{A}|B) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3$$

També haguéssim pogut fer

$$P(\bar{A}' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.2 = 0.3$$

Definició 2.16 *Direm que els successos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ són* **independents** *si per a qualsevol subconjunt $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}$ d'aquests, es compleix*

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2}) \ldots P(A_{ik})$$

En particular per a $n = 2$, direm que dos successos A i B són **independents** *si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.*

Proposició 2.17 *Dos successos A i B no nuls són independents si i només si $P(A|B) = P(A)$ o $P(B|A) = P(B)$.*

DEMOSTRACIÓ:

$\Rightarrow$) Si A i B són independents, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ara bé, $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$, per tant

$$P(A)P(B) = P(A)P(B|A), \quad \text{simplificant } P(B) = P(B|A)$$

anàlogament es podria demostrar que $P(A) = P(A|B)$

$\Leftarrow$) Suposem que es compleix $P(B|A) = P(B)$. Com $P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$ tenim que $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Anàlogament es veuria si $P(A|B) = P(A)$.

Exemple 1: Si $P(A|B) = 0.2$, $P(A|\bar{B}) = 0.3$ i $P(B) = 0.8$. Determinem si A i B són independents. Per a això calculem $P(A)$ i vegem si és igual a $P(A|B)$.

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A - B)}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\bar{B})}$$

Calculem ara $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$$

Per tant,

$$0.3 = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - 0.16}{0.2}$$

i aïllant tenim $P(A) = 0.22$ que és diferents de $P(A|B) = 0.2$, per tant no són independents.

Exemple 2: En una fàbrica de targes wifi internes es vol fer una prova de funcionament. Per a això s'envia de forma aleatòria un vector format per 10 bits, on cada bit té la mateixa probabilitat de ser 1 que 0. Suposem que els bits que formen el vector són independents entre ells. Calculem la probabilitat

a) De que tots els bits siguin 1

b) De que almenys un bit sigui 0

c) De que tres bits siguin 1 i 7 siguin 0

Designem per A_i=”El bit que ocupa el lloc i és 1”. Aleshores $P(A_i) = \frac{1}{2}$ per a $i = 1, \ldots, 10$.

a) Si tots els bits han de ser 1, tenint en compte que els A_i són independents,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{10}) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_{10}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

b) Designem per B=”Almenys un bit és zero”. Aleshores, $\bar{B}$=”Cap bit és zero” o el que és igual $\bar{B}$=”Tots els bits són 1”.

Per tant, tenint en compte l'apartat anterior

$$P(\bar{B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

d'aquí deduïm

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

c) Cerquem la probabilitat de que s'envïi el vector 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0, que seria

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \ldots \bar{A}_{10}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

ara bé la posició dels uns i els zeros pot variar de lloc en tantes formes com

$$PR_{10}^{3,7} = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

Per tant, si designam per C="3 bits siguin zeros i 7 bits uns" tenim

$$P(C) = 120\Big(\frac{1}{2}\Big)^{10} = \frac{120}{2^{10}} = \frac{15}{2^7}$$

Una altra forma de plantejar el problema seria tenint en compte els casos favorables i els possibles:

CP: $PR_{10}^{3,7} = \frac{10!}{3!7!} = 120$

CF: $VR_{2,10} = 2^{10}$

Per tant,

$$P(C) = \frac{CF}{CP} = \frac{120}{2^{10}} = \frac{15}{2^7}$$

Exemple 3: Llencem dos daus, calculem la probabilitat de que cada un d'ells mostri 5 punts com a mínim?.

Indicam per A_1 el succés d'obtenir un 5 o un 6 en el primer dau i per A_2 el d'obtenir un 5 o un 6 en el segon. Els successos A_1 i A_2 són independents.

Podem tractar aquest experiment de llençar dos daus com si es tractés d'un compost de dos experiments consecutius independents en que primer es llença un dau i després es llença el següent. Des d'aquest punt de vista, el succés A_1 només afecta al primer experiment i $P(A_1) = \frac{2}{6}$, anàlogament el succés A_2 només afecta al segon i $P(A_2) = \frac{2}{6}$ i per tant,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2) = \frac{2}{6}\frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

Aquest resultat s'hagués pogut obtenir directament tenint en compte l'espai mostral de llençar dos daus:

$$E = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

on els casos favorable són $\{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$, és a dir, n'hi ha 4 i possibles n'hi ha $VR_{6,2} = 6^2 = 36$. Per tant, la probabilitat és $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Exemple 4: D'un joc sencer de 52 cartes s'extreuen dues, però reposant la primera abans de treure la segona. Calculem la probabilitat de que almenys una carta sigui espasa?

A l'igual que l'exemple anterior, podem tractar aquest experiment com si es tractés d'un compost de dos experiments consecutius independents en que el primer extraiem una carta i després la tornem a introduir i extraiem una altra. Designem per A_1 el succés d'obtenir una espasa en la primera extracció i per A_2 el succés d'obtenir espasa en la segona, aleshores tenim

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{13}{52} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Per tant la probabilitat d'obtenir almenys una espasa és

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}.$$

També haguéssim pogut resoldre aquest exercici calculant la probabilitat del succés contrari, és a dir, que no hagués sortit cap espasa

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = \frac{19}{53} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

i la probabilitat d'obtenir almenys una espasa és

$$1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Igualment haguéssim pogut cercar el nombre de casos favorables i els possibles

CP: $52 \cdot 52$

CF: $52 \cdot 52 - 39.39 = 1183$

Per tant, la probabilitat és

$$\frac{CF}{CP} = \frac{1183}{2704} = \frac{7}{16}$$

Exemple 5: D'un joc sencer de 52 cartes n'extreim dues, calculem la probabilitat de que ambdues cartes siguin espases?.

Com a l'exemple anterior siguin A_1 i A_2 els successos consistents en extraure una espasa en la primera extracció i extreure una espasa en la segona extracció respectivament. Com la primer carta extreta no la tornem abans de extraure la segona aquests successos no són independents i tenim $P(A_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ i $P(A_2/A_1) = \frac{12}{51}$. Per tant:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2/A_1) = \frac{1}{4}\frac{12}{51} = \frac{1}{17}.$$

Altra forma:

CP: $C_{13,2}$

CF: $C_{52,2}$

Per tant, la probabilitat és

$$\frac{CF}{CP} = \frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} = \frac{1}{17}$$

Proposició 2.18 *Les següents afirmacions són equivalents:*

a) A i B són independents.

b) $\bar{A}$ i B són independents.

c) $\bar{A}$ i $\bar{B}$ són independents.

DEMOSTRACIÓ:

a) $\Rightarrow$ *b)* Suposem que A i B són independents.

$$P(\bar{A}|B) \overset{(1)}{=} 1 - P(A|B) \overset{(2)}{=} 1 - P(A) = P(\bar{A})$$

per tant, $\bar{A}$ i B són independents.

b) $\Rightarrow$ *c)* Suposem que $\bar{A}$ i B són independents

$$P(\bar{B}|\bar{A}) \overset{(1)}{=} 1 - P(B|\bar{A}) \overset{(2)}{=} 1 - P(B) = P(\bar{B})$$

per tant, $\bar{A}$ i $\bar{B}$ són independents.

c) $\Rightarrow$ *a)* Suposem que $\bar{A}$ i $\bar{B}$ són independents, aleshores

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}); \quad P(\bar{A} \cup B) = (1 - P(A))(1 - P(B)$$

Aleshores, $1 - P(A \cup B) = (1 - P(A))(1 - P(B)$ i operant

$$1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$

i simplificant ens queda $P(A \cap B)) = P(A)P(B)$ i per la definició 2.16 tenim que A i B són independents.

(1) Per la proposició 2.11 tenint en compte que la probabilitat condicionada és una probabilitat. (2) Per hipòtesi.

Definició 2.19 *Direm que els successos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formen un* **sistema complet de successos** *d'un determinat experiment aleatori d'espai mostral E, si es verifiquen les següent condicions:*

- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$.
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *són incompatibles dos a dos.*

Vegeu la figura 2.5

Teorema 2.20 (Teorema de la probabilitat total) *Siguin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema complets de successos tal que la probabilitat de cada un d'aquests és diferent de zero, i sigui B un succés qualsevol. La probabilitat de B ve donada per:*

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \ldots + P(A_n).P(B/A_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

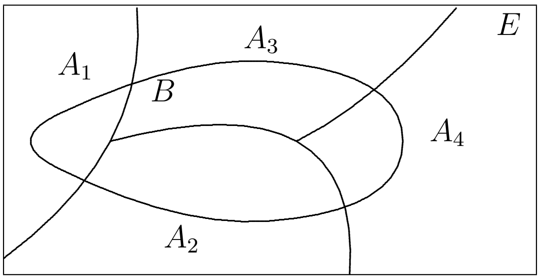

Figura 2.5: Sistema complet de successos

DEMOSTRACIÓ:

Designem per E l'espai mostral, aleshores $B = E \cap B$, ara bé, com $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és un sistema comple de successos tenim $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$, per tant,

$$B = E \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$$

i com $A_i \cap B$ són incompatibles dos a dos tenim

$$P(B) = P((A_1 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)) = P(A_1 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

Exemple 1: La probabilitat que un autobús que va de Palma de Valldemossa tengui un accident un dia ennuvolat és 0,09, i en un dia de sol, 0,005. Durant un període de deu dies ha fet set dies de sol i tres dies ennuvolats. Quina és la probabilitat que l'autobús tingui un accident?

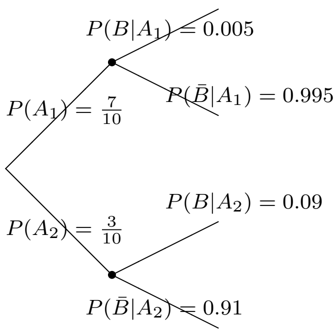

Figura 2.6: Diagrama d'arbre

Sigui B=”L’autobús tingui un accident”, A_1=”Faci un dia de sol” i A_2=”Faci un dia ennuvolat”. A_1, A_2 és un sistema complet de successos, per tant:

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) = \frac{7}{10}.0,005 + \frac{3}{10}.0,09 = 0,0305$$

Vegeu el diagrama d’arbre de la figura 2.6

Exemple 2: Una capsa conté tres monedes P, S, T, la primera de les quals és normal, la segona té dues cares, i la tercera està trucada de manera que la probabilitat que surti cara és $\frac{1}{3}$. Si agafem una moneda a l’atzar i la llancem, quina és la probabilitat que surti cara?

Sigui B=”Sortir cara”, A_1=”Triar la moneda P”, A_2=”Triar la moneda Sï A_3=”Triar la moneda T”. A_1, A_2, A_3 és un sistema complet de successos, per tant:

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + P(A_3).P(B/A_3) =$$
$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.1 + \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{11}{18}.$$

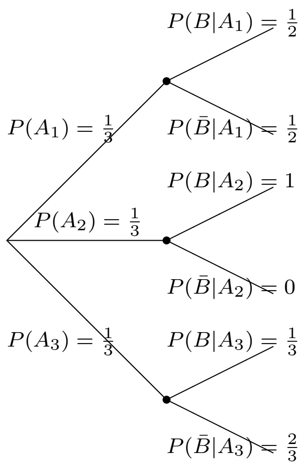

Figura 2.7: Diagrama d’arbre

Teorema 2.21 (Teorema de Bayes) *Siguin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema complets de successos tal que la probabilitat de cada un d’aquests és diferent de zero, i sigui B un succés qualsevol. La probabilitat $P(A_i/B)$ ve donada per:*

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \ldots + P(A_n).P(B/A_n)}$$

DEMOSTRACIÓ:

Sabem per la definició 2.13 que

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i) = P(B)P(A_i|B)$$

aïllant tenim

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{P(B)}$$

Ara bé, com $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és un sistema complets de successos, pel teorema 2.20 tenim

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \ldots + P(A_n).P(B/A_n)$$

i substituint

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \ldots + P(A_n).P(B/A_n)}$$

Exemple 1: La probabilitat que un autobús que va de Palma de Valldemossa tingui un accident un dia ennuvolat és 0,09, i en un dia de sol, 0,005. Durant un període de deu dies ha fet set dies de sol i tres dies ennuvolats. Sabent que s'ha produït un accident en aquests dies, trobau:

a) La probabilitat que s'hagi produït en un dia ennuvolat.

b) La probabilitat que s'hagi produït en un dia de sol.

Sigui B="L'autobús tengui un accident", A_1="Faci un dia de sol" i A_2="Faci un dia ennuvolat". A_1, A_2 és un sistema complet de successos, per tant (Vegeu figura 2.6):

a)

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2).P(B/A_2)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2)} = \frac{\frac{3}{10}.0,09}{\frac{7}{10}.0,005 + \frac{3}{10}.0,09} = 0,885.$$

b)

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1).P(B/A_1)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2)} = \frac{\frac{7}{10}.0,005}{\frac{7}{10}.0,005 + \frac{3}{10}.0,09} = 0,115.$$

Exemple 2: D'una població en què la probabilitat que els seus habitants tinguin tuberculosi és de 0,01, s'ha triat a l'atzar una persona i després d'observar-la pels raig X s'ha detectat que patia aquesta malaltia. La probabilitat que un aparell de raig X detecti que una persona té tuberculosi és 0,97 si en té realment, i 0,001 si no en té. Què podem dir del diagnòstic que s'ha fet a la persona triada a l'atzar?

Sigui B="L'aparell ha detectat que té tuberculosi", A_1="Tenir tuberculosi" i $\bar{A}_1$="No tenir tuberculosi". $A_1, \bar{A}_1$ és un sistema complet de successos, per tant: (vegeu la figura 2.8)

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1).P(B/A_1)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(\bar{A}_1).P(B/\bar{A}_1)} = \frac{0,01.0,97}{0,01.0,97 + 0,99.0,001} =$$

$$= 0,907.$$

Del diagnòstic podem dir que no encerta un 10% de les vegades.

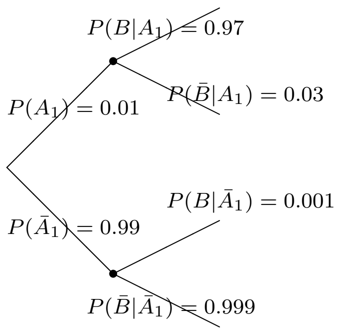

Figura 2.8: Diagrama d'arbre

Índex alfabètic