2 Tema 2. Funcions de vàries variables. Límits i continuïtat

2.1 Introducció a les funcions de diverses variables

Sovint en el món real, el valor d'una quantitat no depèn només d'una variable. Sinó de dues o més variables. Per exemple:

- Suposem que tenim una làmina metàl.lica i ens interessa estudiar la temperatura en diversos punts de la làmina a l'instant t. Si representam els punts de la làmina per parells (x, y) de nombres reals, llavors la temperatura T es pot expressar com una funció de dues variables de localització x, y i d'una variable temporal t (temps).

  Així, la temperatura T depèn, en aquest cas, de tres variables i ho escrivim de la forma $T(x, y, t)$.

Per tant és interessant considerar funcions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ amb n i m finits i naturals no nuls i, el nostre interès es centrarà en estendre els conceptes de límit, continuïtat, derivabilitat i integració que ja coneixem per funcions reals de variable real a funcions de diverses variables.

Començarem donant els conceptes bàsics com són: domini i rang, gràfica i corbes de nivell d'una funció de dues variables i després generalitzarem a funcions de 3 i més variables.

2.2 Conceptes bàsics

Definició 2.2.1 (Funció real de dues variables reals)**.** *Sigui $D \subset \mathbb{R}^2$. Una **funció de dues variables** és una regla que assigna a cada parell $(x, y) \in D$ un únic nombre real denotat per $f(x, y)$.*

Ho escriurem com

$$\begin{aligned} f \,:\, D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

El conjunt D s'anomena **domini** de f i el **rang** de f és el conjunt format pels valors de $f(x, y)$ quan $(x, y) \in D$.

$$\operatorname{rang}(f) = \{f(x, y) \,:\, (x, y) \in D\}$$

Sovint denotarem una funció de dues variables per $z = f(x, y)$ on x, y direm que són les variables independents i z la variable dependent.

Observació Si una funció f ve donada per una fórmula sense especificar el seu domini, aleshores el domini D de f ve donat pel conjunt de parells $(x, y) \in D$ pels quals l'expressió donada defineix un número real.

Habitualment una funció $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ no estarà definida en tot $\mathbb{R}^2$, com per exemple

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{x+y}\right)$$

que no existeix on $x+y=0$.

Exemple 2.2.1. *Sigui* $f(x,y) = \sqrt{1-x+y}$*. Avaluau* $f(2,1)$*,* $f(-4,3)$ *i trobau el seu domini.*

Solució Tenim que

$f(2,1) = \sqrt{1-2+1} = 0$ $\qquad$ $f(-4,3) = \sqrt{1+4+3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

El seu domini ve donat per

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{1-x+y} \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1-x+y \geq 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq x-1\}$$

En la figura 1 podeu veure la seva representació gràfica.

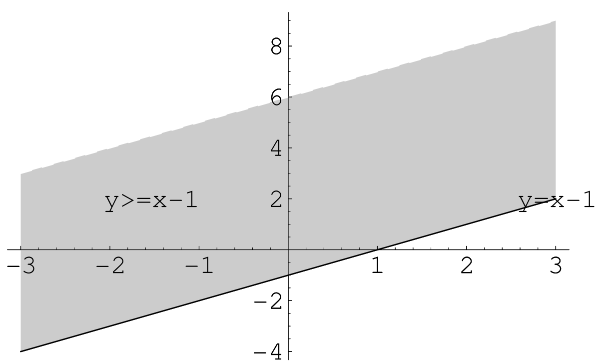

Figura 1: Domini de la funció $f(x) = \sqrt{1-x+y}$

Exemple 2.2.2. *Sigui* $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$*. Avaluau* $f(3,2)$ *i trobau el seu domini.*

Solució

$$f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

El domini està format pels punts $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tals que

$$\frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1} \in \mathbb{R}^2 \iff x+y+1 \geq 0 \ \text{ i } \ x-1 \neq 0.$$

Per tant $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \,:\, y \geq -x - 1 \quad \text{i} \quad x \neq 1\}$

Si el representam gràficament el domini està format pel semiplà que queda per damunt la recta $y = -x - 1$ llevat dels punts que estan sobre la recta $x = 1$.

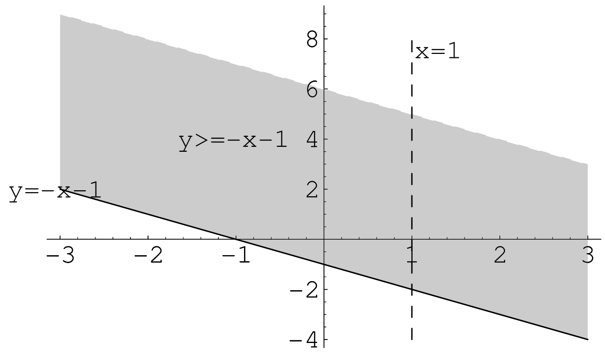

Figura 2: Domini de la funció $f(x) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

Definició 2.2.2 (Gràfica d'una funció de dues variables)**.** *Si f és una funció de dues variables amb domini D,* ***la gràfica de*** *f és el conjunt*

$$S = G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}.$$

De la definició observam que la gràfica és una superfície en $\mathbb{R}^3$ d'equació $z = f(x, y)$. La seva projecció sobre el pla xy és el domini D (vegeu la Figura 3).

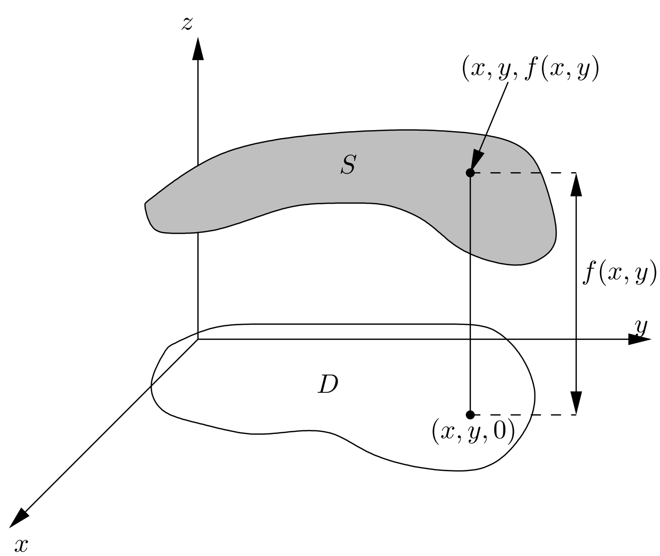

Figura 3: Projecció d'una funció real de dues variables reals

A diferència de funcions d'una variable, dibuixar la gràfica d'una funció de dues variables és bastant més complicat, a més quan la funció és de més de dues variables (o bé una funció vectorial) la representació gràfica és impossible.

Exemple 2.2.3. *Dibuixau la gràfica de la funció* $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

Solució La gràfica de f ve donada per l'equació $z = 6-3x-2y$, és a dir, $3x+2y+z = 6$, que no és més que l'equació d'un pla. És el pla que passa pels punts $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ i $(0, 0, 6)$.

Exemple 2.2.4. *Sigui* $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. *Calculau el domini, el rang i dibuixau la gràfica de* g.

Solució

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 9 - x^2 - y^2 \geq 0\},$$

però, $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ si, i només si, $x^2 + y^2 \leq 9$ i, per tant, el domini és el disc de centre $(0, 0)$ i radi 3.

Per altra part

$$\text{rang}(g) = \{z \in \mathbb{R} \ : \ z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \ (x, y) \in D\}$$

z és una arrel quadrada positiva, per tant, $z \geq 0$.

Per altra banda

$$9 - x^2 - y^2 \leq 9 \implies \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$$

així

$$\text{rang}(g) = \{z \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq z \leq 3\} = [0, 3]$$

La gràfica ve donada per l'equació

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

si elevam al quadrat ambdós membres de l'equació resulta

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2 \iff x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

que és l'equació d'una esfera de centre l'origen $(0, 0, 0)$ i radi 3. Però com que $z \geq 0$, la gràfica és la semiesfera superior.

Un mètode útil per estudiar la gràfica d'una funció real de dues variables reals és fent ús de les nomenades corbes de nivell.

Definició 2.2.3. *Sigui* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. *El conjunt de punts del pla* xy *que satisfan l'equació* $f(x, y) = k$, *s'anomena* ***corba de nivell*** k, *on* k *és constant i* $k \in$ *rang*(f).

Per exemple, suposem que la superfície $z = f(x, y)$ és una muntanya. Si volem dibuixar un mapa bidimensional de la muntanya, podem dibuixar en el pla les corbes d'altura

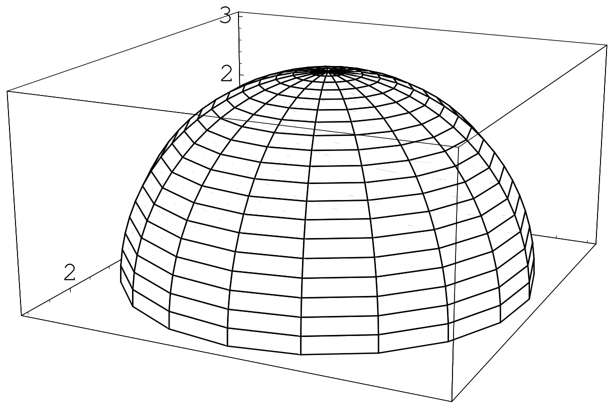

Figura 4: Gràfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

constant, indicant amb una etiqueta aquesta altura, obtenint així un mapa topogràfic de la superfície $z = f(x, y)$.

Altres exemples de corbes de nivell són les que apareixen en els mapes de predicció metereològica. Les corbes corresponents als punts amb la mateixa temperatura són les isotermes i les corresponents als punts amb la mateixa pressió atmosfèrica són les isòbares.

Exemple 2.2.5. *Dibuixau les corbes de nivell de les funcions següents per als valors de k indicats.*

Solució

1.- $f(x, y) = 6 - 3x - 2y\,, \qquad k = -6, 0, 6.$

$$6 - 3x - 2y = k \implies 3x + 2y + k - 6 = 0$$

és l'equació d'una família de rectes amb pendent $-\frac{3}{2}$.

$$\begin{array}{ll} k = -6 & \qquad 3x + 2y - 12 = 0, \\ k = 0 & \qquad 3x + 2y - 6 = 0, \\ k = 6 & \qquad 3x + 2y = 0. \end{array}$$

2.- $f(x, y) = 4x^2 + y^2\,, \qquad k = 1, 4.$

Tenim que $4x^2 + y^2 = k \iff \frac{4x^2}{k} + \frac{y^2}{k} = 1 \iff \frac{x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{k} = 1$, que és la família d'el.lipses de semieixos $\frac{\sqrt{k}}{2}$ i $\sqrt{k}$ i centrades a l'origen $(0, 0)$.
L'equació de la gràfica de f ve donada per $z = 4x^2 + y^2$ que resulta l'equació d'un paraboloide el.líptic. (Veure la figura 7).

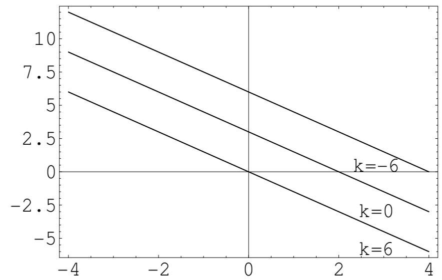

Figura 5: Corbes de nivell de la funció $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

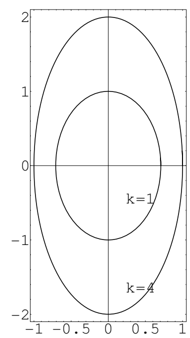

Figura 6: Corbes de nivell de la funció $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

Aquesta superfície és una paraboloide ja que si fixam $x = k$ obtenim $z = y^2 + 4k^2$ que és una paràbola en el pla yz i si fixam $y = c$ obtenim $z = 4x^2 + c^2$ que és una paràbola en el pla xz.

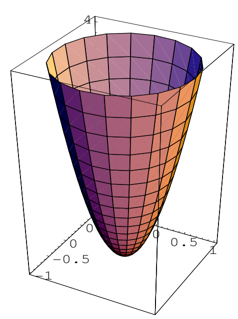

Figura 7: Gràfica de $f(x, y) = 4x^2 + y^2$.

Definició 2.2.4 (Funció real de tres variables reals)**.** *Sigui $D \subset \mathbb{R}^3$. Una **funció real de tres variables**, f, és una regla que assigna a cada terna ordenada (x, y, z) del domini D un únic número real denotat per $f(x, y, z)$.*

És clar que no podem dibuixar la gràfica d'una funció de tres variables ja que seria necessari un espai de dimensió 4. Per poder intuir el comportament d'una funció de tres variables, es poden estudiar les nomenades superfícies de nivell.

Definició 2.2.5. *Si $k \in rang(f)$, k constant, s'anomena **superfície de nivell** k a la superfície de $\mathbb{R}^3$ definida per $f(x,y,z) = k$.*

Exemple 2.2.6. *Suposem que la temperatura T en cada punt (x,y,z) d'una regió R, ve donada per $T(x,y,z) = 100 - x^2 - y^2 - z^2$ graus celsius. Descriviu les superfícies isotermes per a $T > 0$.*

Solució $T(x,y,z) = k$, amb $k > 0$ obtenim $100 - x^2 - y^2 - z^2 = k$, aleshores $x^2 + y^2 + z^2 = 100 - k$.

Si $100 - k > 0$ obtenim la família d'esferes amb centre l'origen de coordenades i $r = \sqrt{100-k}$.

Si $100 - k = 0$, aleshores $k = 100$ i obtenim l'origen de coordenades.

Definició 2.2.6 (Funció real de n variables reals)**.** *Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$. Una **funció real de n variables** és una regla que assigna a cada n-pla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ del conjunt D un únic número real denotat per $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

$$\begin{array}{cccc} f: & D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longrightarrow & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}$$

El conjunt D s'anomena **domini** de f i el **rang** de f és el conjunt format pels valors de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ quan $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$,

$$\text{rang}(f) = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\}.$$

De la mateixa manera definim el **graf** d'una funció $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ com el conjunt de punts

$$S = G(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\}$$

També en aquest cas, es pot generalitzar el concepte de corba de nivell.

Si k és constant i $k \in \text{rang}(f)$, les solucions de l'equació $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k$ formen una regió de l'espai de dimensió n, anomenada **superfície de nivell** k.

Definició 2.2.7 (Funció vectorial de n variables reals)**.** *Donat $D \subset \mathbb{R}^n$ s'anomena **funció vectorial de variable vectorial o funció de diverses variables** amb domini D a una regla que assigna a cada punt $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ un únic punt $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Ho escriurem com*

$$\begin{array}{cccc} f: & D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longrightarrow & (y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{array}$$

Tenim que per les funcions $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ podem escriure

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

amb $y_j = f_j(x)$ per a tot $j : 1 \leq j \leq m$ on $f_j : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se'n diuen les **funcions components o funcions coordenades** de f.

Exemple 2.2.7. *La funció* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *donada per* $f(x, y, z) = (xy + z, x^2 + y^2 + z^2)$ *és una funció bidimensional de variable tridimensional. Llavors les seves funcions coordenades són* $f_1(x, y, z) = xy + z$ *i* $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

2.3 Límits de funcions de diverses variables

Definició 2.3.1 (Límit d'una funció)**.** *Sigui* $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, x_0 *punt d'acumulació de* D, $b \in \mathbb{R}^m$ *s'anomena* ***límit*** *de* f *en* x_0 *i se denota per*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

si donat $\varepsilon > 0$, *existeix* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in D$ *verifica que* $0 < d(x, x_0) = \|x - x_0\| < \delta$ *llavors* $d(f(x), b) = \|f(x) - b\| < \varepsilon$.

Donarem ara dues caracteritzacions del límit d'una funció en un punt.

Teorema 2.3.1. *Sigui* $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, x_0 *punt d'acumulació de* D *i* $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. *Aleshores*

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ *si, i només si,* $\lim_{x \to x_0} f_i(x) = b_i$ *per a tot* $i = 1, \ldots, m$.

b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ *si, i només si, per a cada* $\{x_k\} \subset D$ *tal que* $x_k \to x_0$ *tenim que* $f(x_k) \to b$.

Notem que aquesta darrera caracterització és la mateixa que es dona pel límit d'una funció d'una variable real.

Conseqüència del primer apartat del teorema anterior, en molts situacions serà suficient considerar funcions

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ja que fàcilment ho podrem aplicar al cas vectorial.

En el següent resultat observam que, com en el cas de funcions reals d'una variable real es satisfan moltes de les propietats elementals dels límits:

Teorema 2.3.2. *Siguin* $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un punt d'acumulació de* D, b, b_1, $b_2 \in \mathbb{R}^m$ *i* $c \in \mathbb{R}$. *Aleshores, tenim que:*

(i) Si el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existeix, aleshores és únic.*

(ii) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ *aleshores,* $\lim_{x \to x_0} c\, f(x) = c\, b$.

(iii) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = b_1$ *i* $\lim_{x \to x_0} g(x) = b_2$ *aleshores,* $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = b_1 + b_2$.

(iv) Si $m = 1$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = b_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = b_2$ *aleshores,* $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = b_1 \cdot b_2$.

(v) Si $m = 1$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = b \neq 0$ *i* $f(x) \neq 0$ *aleshores,* $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$.

En la definició general de límit d'una funció de diverses variables, la variable x pot acostar-se a x_0 de manera arbitrària. Ara presentam el concepte de límit segons un subconjunt que sorgeix quan ens restringim a que x s'acosti a x_0 d'una manera determinada, com per exemple segons una recta o en general una corba contínua qualsevol. Correspon a la generalització dels límits laterals, ja estudiats en el cas de funcions d'una variable.

Definició 2.3.2 (Límit d'una funció segons un subconjunt)**.**

Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \subset D$ *i* x_0 *punt d'acumulació de* E. *Direm que* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *segons el subconjunt* E *és* l, *i ho escriurem*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = l$$

si, i només si, f *restringida a* E *té límit* l *quan* x *s'acosta a* x_0.

Teorema 2.3.3.

a) Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \subset D$ *i* x_0 *punt d'acumulació de* E. *Si existeix* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *aleshores, existeix* $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = l$.

b) Siguin $E_1, E_2, \ldots, E_r \subset D$ *tals que* $D = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_r$ *i* x_0 *punt d'acumulació de cada* E_i $i = 1, \ldots, r$. *Si existeixen* $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_i}} f(x) = l$ *per a tot* $i = 1, \ldots, r$ *aleshores, tenim que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Observació En el cas de funcions de dues variables, per tenir una idea de quin és el possible valor de

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$$

és molt útil calcular el límit segons els següents subconjunts:

1.- Segons rectes que passen per (a, b).

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y - b = m(x - a)\}.$$

2.- Segons paràboles que passem per (a, b).

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y - b = k(x - a)^2\},$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x - a = n(y - b)^2\}.$$

Si els límits segons aquests subconjunts depenen del paràmetre (k, m o n) aleshores podem dir que el límit en el punt (a, b) de la funció donada no existeix. Però, si tots aquestes límits agafem el mateix valor, sigui aquest l, només podem dir que si existeix el límit aleshores tindrà aquest valor comú i haurem de fer ús d'altres eines per comprovar que efectivament el límit val l.

Exemple 2.3.1. *Sigui la funció*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Estudiau l'existència de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Solució Estudiem el límit segons les rectes $y = mx$ (són les que passen per $(0, 0)$)

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x, y) &= \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x\,mx}{x^2 + m^2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 m}{x^2(1 + m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2}. \end{aligned}$$

Aquest límit depèn del pendent de la recta, aleshores no existeix $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

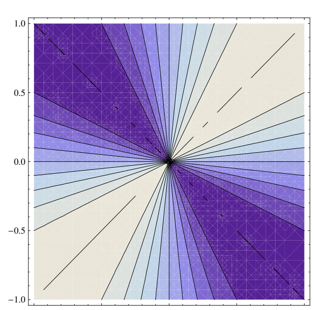

Figura 8: Representació gràfica de les corbes de nivell de la funció $f(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Exemple 2.3.2. *Sigui la funció*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y}{x^2+y} & si\ y\neq -x^2,\\ 0 & si\ y=-x^2.\end{cases}$$

Estudiau l'existència de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Solució Calculem primer els límits segons les rectes $y=mx$.

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{x^2+mx}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{m}{x+m}=1.\end{aligned}$$

no depèn de m.

Calcularem ara el límit segons les paràboles $y=kx^2$ (que passen per $(0,0)$)

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} f(x,kx^2)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+kx^2}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k}=\frac{k}{1+k}\quad (\text{si } k\neq -1),\end{aligned}$$

i, com aquest límit depèn de k, aleshores no existeix $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2.3.1 Càlcul de límits utilitzant les coordenades polars

El pròxim resultat permet fer el càlcul d'alguns límits utilitzant les coordenades polars.

Proposició 2.3.1. *Una condició necessària i suficient perquè:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=a$$

és que

$$\lim_{r\to 0^+} f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)=a \qquad \textit{per a qualsevol } \theta\in[0,2\pi)$$

Exemple 2.3.3. *Sigui la funció*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Estudiau l'existència de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Solució Es pot veure que el límits segons, rectes i paràboles sempre valen 0. Però això no ens permet assegurar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Ara bé si existeix ha de ser 0.

Vegem si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Ho feim per coordenades polars:

$$\lim_{r\to 0^+} f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta) = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\,\cos^2\theta\; r\,\sin\theta}{r^2\,\cos^2\theta + r^2\,\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\,\cos^2\theta\,\sin\theta}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} r\,\cos^2\theta\,\sin\theta = 0 \qquad\qquad \text{per a qualsevol } \theta\in[0,2\pi)$$

ja que $\cos^2\theta\,\sin\theta$ està fitat i r tendeix a zero.

Per tant, aplicant la proposició 2.3.1 podem afirmar ara que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Definició 2.3.3 (Límits iterats)**.** *Sigui* $f : D\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *i* $(a,b)\in D$. *Siguin* C_1, C_2 *entorns de* a *i* b *respectivament tals que es puguin considerar les funcions*

$$\begin{array}{rccc} p_1: & C_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(x,y) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} p_2: & C_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longrightarrow & f(x,y) \end{array}$$

Suposem que existeix la funció

$$\begin{array}{rccl} \phi_1: & C_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \lim\limits_{y\to b} p_2(y) = \lim\limits_{y\to b} f(x,y) \end{array}$$

Anomenam ***límit iterat*** *al límit*

$$\lim_{x\to a}\phi_1(x) = \lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right]$$

De manera anàloga, l'altre límit iterat s'obté de suposar que existeix la funció

$$\begin{array}{rccl} \phi_2: & C_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longrightarrow & \lim\limits_{x\to a} p_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x,y) \end{array}$$

i considerar el límit

$$\lim_{y\to b}\phi_2(y) = \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right]$$

Exemple 2.3.4. *Calculau els dos límits iterats de la funció* $f(x,y) = x^2y + 5xy^3 + 6x$ *quan* $(x,y)\longrightarrow(2,0)$.

Solució

$$\lim_{x\to 2}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{x\to 2}\left[\lim_{y\to 0}(x^2y + 5xy^3 + 6x)\right] = \lim_{x\to 2}\,[6x] = 12$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 2} f(x,y)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 2}(x^2y+5xy^3+6x)\right] = \lim_{y\to 0}\left[4y+10y^3+12\right] = 12$$

Proposició 2.3.2. *Sigui* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$.

a) Suposem que existeixen els límits $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x,y)$ *per a tot* y *d'un entorn de* b*. Aleshores*

$$\lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right] = l$$

b) Suposem que existeixen els límits $\displaystyle\lim_{y\to b} f(x,y)$ *per a tot* x *d'un entorn de* a*. Aleshores*

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right] = l$$

Observació Notem que, si es verifiquen les condicions de la proposició i els límits iterats són distints, aleshores podem afirmar que no existeix $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

Exemple 2.3.5. *Considerem la funció*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiau l'existència de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Solució Per trobar el límits iterats, calculam primer els límits següents

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Per tant

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

i, com que, els dos límits iterats són diferents tenim que no existeix $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2.4 Continuïtat

Definició 2.4.1. *Sigui $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Direm que f és una* ***funció contínua en un punt*** *$x_0 \in D$ si per a cada $\varepsilon > 0$ hi ha un $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ sempre que $x \in D$ i $\|x - x_0\| < \delta$.*

Observacions

1.- Si x_0 és un **punt aïllat** de D, (això vol dir que existeix un $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon) \cap D = \{x_0\}$), aleshores qualsevol funció és contínua en x_0.

2.- Si x_0 és un punt d'acumulació de D, dir que f és contínua en x_0 equival a dir que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 2.4.1. *Considerem ara algunes de les funcions estudiades als exemples de la subsecció anterior.*

1.- Les funcions

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{i} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2+y} & \text{si } y \neq -x^2 \\ 0 & \text{si } y = -x^2 \end{cases}$$

no són contínues en $(0,0)$ ja que hem vist que no existeixen els límits $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ i $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

2.- La funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

és contínua en $(0,0)$ ja que hem comprovat que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Definició 2.4.2. *Sigui $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Direm que f és una funció* ***contínua en*** *D si és contínua en cada punt de D.*

Observació Les propietats elementals de les funcions contínues d'una variable real tenen versions corresponents per les funcions de diverses variables. Així, la suma, producte, quocient (quan està ben definit) de funcions contínues són també contínues, com també ho és la composició de funcions contínues.

Teorema 2.4.1. *Siguin* $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *i* $c \in \mathbb{R}$. *Aleshores,*

(i) Si f *és contínua en* x_0 *aleshores, la funció* $c\,f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *donada per* $(cf)(x) = c\,f(x)$ *és contínua en* x_0.

(ii) Si f *i* g *són funcions contínues en* x_0 *aleshores, la funció* $f + g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *donada per* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ *és contínua en* x_0.

(iii) Si $m = 1$ *i* f, g *són funcions contínues en* x_0 *aleshores, la funció* $f\,g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *donada per* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ *és contínua en* x_0.

(iv) Si $m = 1$ *i* f *és una funció no contínua nul.la en* x_0 *aleshores, la funció*

$$\frac{1}{f} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{donada per} \quad \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \textit{és contínua en } x_0.$$

Com a conseqüència immediata dels dos primers apartats del teorema anterior tenim el següent resultat.

Teorema 2.4.2. *Tota funció lineal* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *és una funció contínua.*

La relació entre la continuïtat d'una funció vectorial i la continuïtat de les seves funcions coordenades ve donada pel següent resultat.

Proposició 2.4.1. *Sigui* $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *i* $x_0 \in D$. *Aleshores* f *és contínua en* x_0 *si, i només si,* f_i *és contínua en* x_0 *per a tot* $i = 1, \ldots, m$.

El següent teorema que ens dona la continuïtat de la composició de funcions.

Teorema 2.4.3. *Siguin* $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *tals que* $f(D) \subset B$. *Si* f *és contínua en* $a \in D$ *i* g *és contínua en* $b = f(a)$ *aleshores,* $g \circ f$ *és contínua en* a.

Observació Aquest darrer teorema, al igual que en el cas de funcions reals de variable real, ens permet deduir la continuïtat de moltes funcions de diverses variables.

Exemples

1.- Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x, y) = \sin(x^2 y)$.

El domini de f és $\mathbb{R}^2$ i si consideram les funcions $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donades per $g(x, y) = x^2 y$ i $h(z) = \sin z$ aleshores $f = h \circ g$.

Com que g és contínua en tot $\mathbb{R}^2$ i h és una funció contínua en tot $\mathbb{R}$ tenim que, f és contínua en tot $\mathbb{R}^2$.

2.- Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

El domini de f és $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ i si consideram les funcions $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ donades per $g(x,y) = x^2+y^2$ i $h(z) = \ln z$ verifiquen que $g(D) \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, aleshores $f = h \circ g$.

Com que g és contínua en tot $\mathbb{R}^2$ i h és una funció contínua en $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tenim que, f és contínua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3.- Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{x+y}$.

El domini de f és
$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+y=0\}$$
i si consideram les funcions $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ donades per $g(x,y) = x+y$ i $h(z) = \frac{e^z}{z}$ verifiquen que $g(D) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, aleshores $f = h \circ g$.

Com que g és contínua en tot $\mathbb{R}^2$ i h és una funció contínua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tenim que, f és contínua en D.

4.- Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = \ln(\cos(x^2+y^2))$.

El domini de f és
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x^2+y^2 < \frac{\pi}{2} + 2\pi n\,, \quad n \in \mathbb{Z}\}$$
i si consideram les funcions $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donades per $g(x,y) = x^2+y^2$, $h(z) = \cos z$ i $k(u) = \ln u$ verifiquen que $h(g(D)) \subset \mathbb{R}^+$, aleshores $f = k \circ h \circ g$.

Com que g és contínua en tot $\mathbb{R}^2$, h és contínua en tot $\mathbb{R}$ i k és contínua en $\mathbb{R}^+$ tenim que, f és contínua en D.

Per acabar donam un resultat que ja teníem per funcions d'una variable.

Teorema 2.4.4 (Teorema de Weierstrass)**.** *Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua i D és compacte, aleshores f és fitada i té un màxim i un mínim en D.*