Primer Parcial de Fonaments Matemàtics II. Telemàtica
febrer 2006

P1.- Considerem el conjunt $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ sobre el qual definim les següents operacions:

$$\begin{array}{rcl} (m,a)+(n,b) & = & (m+n, a+b) \\ (m,a).(n,b) & = & (mn, mb+na+ab) \end{array}$$

Demostrau:

a) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, +)$ és un grup abelià. **0,75 pt.**

b) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, +, .)$ és un anell amb element unitat. **0,75 pt.**

P2.- Discutiu i resoleu el següent sistema d'equacions: **2 pt.**

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2ax & + & by & + & 2z & = & 1 \\ 2ax & + & (2b-1)y & + & 3z & = & 1 \\ 2ax & + & by & + & (b+3)z & = & 2b-1 \end{array} \right.$$

P3.- Considerem els següents subespais vectorials de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ amb } a,b,c \in \mathbb{R} \right\}, \qquad G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

a) Demostrau que F és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. **0,5 pt.**

b) Calculau una base i la dimensió de F i G. **0,5 pt.**

c) Cercau una base i la dimensió de $F+G$ i la dimensió de $F \cap G$. **0,75 pt.**

d) Podem dir que $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = F \bigoplus G$. Si no és així, cercau un subespai vectorial H tal que $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = (F+G) \bigoplus H$. **0,25 pt.**

P4.- Donada la matriu

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Determina el valors dels paràmetres a i b per a que la matriu següent sigui diagonalitzable. **1 pt.**

b) Per als casos que sigui diagonalitzable, trobau la matriu diagonal. Igualment trobau una base formada per vectors propis per al cas que $a \neq 5$ i $a \neq -1$. **1 pt.**

c) En aquest darrer cas ($a \neq 5$ i $a \neq -1$), trobau la matriu del canvi de bases. **0,25 pt.**

P5.- Considerem l'espai vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ amb el producte escalar definit per $< A, B >=$Traça$(B^t.A)$

a) Demostrau que és un producte escalar i posau la seva expressió en funció dels elements de la matriu. Trobau també l'expressió de la norma d'un vector (matriu). **0,75 pt.**

b) Determinau si la base canònica

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

és ortonormal. **0,75 pt.**

c) Si $\mathcal{S}$ és el subespai de les matrius simètriques, trobau una base i $\mathcal{S}^{\perp}$. **0,75 pt.**

Duració de l'examen 4 hores.