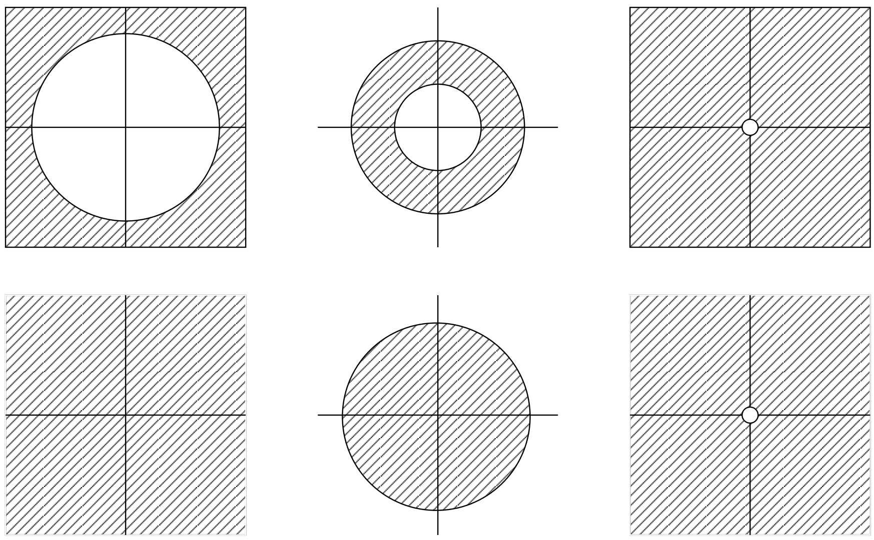
Processament Digital del Senyal
Problemes Tema 3

1. Determineu la transformada $\mathcal{Z}$ i la ROC dels senyals següents:
   (a) $x[n] = (-2, 1, 0, 3, \underline{0})$.
   (b) $x[n] = (-2, 1, 0, 3, \underline{3})$.
   (c) $x[n] = (-2, 1, \underline{0}, 3)$.
   (d) $x[n] = (\underline{3}, 1, -1)$.
2. Determineu la transformada $\mathcal{Z}$ i la ROC dels senyals següents:
   (a) $x[n] = u[n]$.
   (b) $x[n] = (1 + n)u[n]$.
   (c) $x[n] = (a^n + a^{-n})u[n]$.
   (d) $x[n] = a^n u[n] - a^{-n}u[-n - 1]$.
   (e) $x[n] = \cos(\omega n)u[n]$.
   (f) $x[n] = n\cos(\omega n)u[n]$.
   (g) $x[n] = a^n \cos(\omega n)u[n]$.
   (h) $x[n] = na^n \cos(\omega n)u[n]$.
   (i) $x[n] = (n^2 + n)a^{n-1}u[n - 1]$.

   On a i ω són paràmetres arbitraris.
3. Determineu la transformada $\mathcal{Z}$ i la ROC dels senyals següents:
   (a) $x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{si } n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, & \text{si } n < 0 \end{cases}.$
   (b) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n - 1]$.
4. Tenim uns senyals amb les propietats:

- x_1 és de durada finita i causal.
- x_2 és de durada finita i anticausal.
- x_3 és de durada finita i no és ni causal ni anticausal.
- x_4 és de durada infinita i causal.
- x_5 és de durada infinita i anticausal.
- x_6 és de durada infinita i no és ni causal ni anticausal.

Digueu quina d'aquestes ROC correspon a cada cas: (noteu que el quadrat exterior simbolitza l'infinit)



5. Trobeu la transformada $\mathcal{Z}$ dels senyals

   (a) $y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$.

   (b) $y_2[n] = x[2n]$.

   (c) $y_3[n] = \begin{cases} x[n/2] & \text{si } n \text{ és parell} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

   en funció de la transformada del senyal x.

6. Calculeu els senyals causals que tenen per transformada $\mathcal{Z}$ els següents:

   (a) $X(z) = \dfrac{1+3z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$.

   (b) $X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$.

(c) $X(z) = \dfrac{z^{-6} + z^{-7}}{1 - z^{-1}}$.

(d) $X(z) = \dfrac{1 + 2z^{-2}}{1 + z^{-2}}$.

7. D'un senyal tant sols coneixem l'expresió tancada de la transformada $\mathcal{Z}$:
$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(3 - z^{-1})}.$$
Digueu quantes possibles ROC diferents pot tenir i, per cadascuna d'aquestes, trobeu el senyal corresponent.

8. Trobeu el senyal que té per transformada i ROC els següents:

   (a) $X(z) = \log(1 - 2z)$, ROC $= (0, 1/2)$.
   (b) $X(z) = \log(1 - z^{-1})$, ROC $= (1, \infty)$.
   (c) $X(z) = e^z + e^{1/z}$, ROC $= (0, \infty)$.

9. Sigui $x[n]$ un senyal amb transformada $X(z)$. Trobeu la transformada dels senyals:

   (a) $x^*[n]$, on x^* és el complexe conjugat de x.
   (b) $\Re(x[n])$.
   (c) $\Im(x[n])$.

   Deduiu propietats de simetria per a senyals reals i imaginaris purs.

10. Un sistema LTI s'excita amb el senyal graó unitat $x[n] = u[n]$; la sortida que s'observa és $y[n] = (\frac{1}{2})^{n+1} u[n-1]$.

    (a) Trobeu la transformada de la resposta impulsional del sistema $H(z)$.
    (b) Trobeu la resposta impulsional del sistema.

11. L'entrada a un sistema LTI és $x[n] = u[-n-1] + (\frac{1}{2})^n u[n]$. De la sortida tant sols coneixem la expresió tancada per a la transformada,
$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})},$$
mentre que desconeixem la seva ROC.

    (a) Determineu la ROC de $Y(z)$.
    (b) Determineu la resposta impulsional del sistema.

12. Sigui $x[n]$ un senyal causal.

    (a) Calculeu $\lim_{z\to\infty} X(z)$.

    (b) Demostreu que si $X(z)$ ve donat per un quocient de polinomis, $X(z) = P(z)/Q(z)$, aleshores $\deg P \leq \deg Q$.

13. Sigui $x[n]$ un senyal causal tal que la seva transformada $\mathcal{Z}$ té com a zeros $z_1 = -1$ i com a pols $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = -\frac{1}{2}$, $p_3 = p_4^* = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$. Determineu el diagrama de zeros i pols i la ROC dels senyals $x_1[n] = x[n-2]$, $x_2[n] = x[-n-2]$ i $x_3[n] = e^{jn\pi/3}x[n]$.

14. Disenyeu un sistema LTI causal tal que quan s'excita amb el senyal

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

    la sortida és

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

    Seguiu els pasos:

    (a) Trobeu la transformada de la resposta impulsional necessària.

    (b) Trobeu aquesta resposta impulsional.

    (c) Trobeu una equació en diferències finites que implementi el sistema.

    (d) Trobeu la realització canònica del sistema.

    (e) Discutiu l'estabilitat del sistema.

15. Sigui $\mathcal{T}$ un sistema causal caracteritzat per l'equació en diferències finites:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = x[n].$$

    Feu servir la caracterització d'estabilitat d'un sistema causal en funció dels pols de $H(z)$ per trobar les condicions que han de complir els paràmetres a_1 i a_2 per tal que el sistema sigui estable.

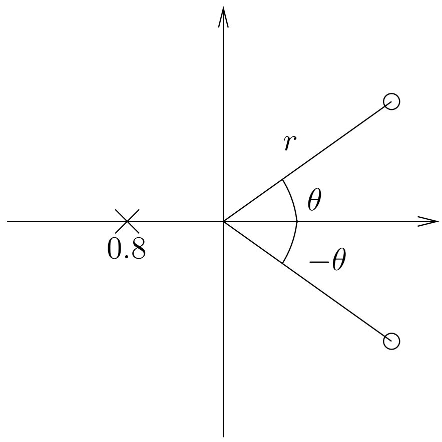
16. Un sistema té 3 pols situats a $z = -3$, -0.5 i 2 i un zero situat a $z = 1$.

    (a) Suposant que el sistema és estable, trobeu-ne la ROC.

    (b) Suposant que el sistema és causal, trobeu-ne la ROC.

    (c) És possible que un sistema estable i causal tingui aquesta configuració de zeros i pols?

17. D'un sistema LTI en coneixem el diagrama de zeros i pols: on $r = 1.5$



i $\theta = \pi/6$.

(a) Trobeu la funció de transferència sabent que $H(1) = 1$.

(b) Trobeu la resposta impulsional.

(c) Discutiu l'estabilitat del sistema.

18. Demostreu que si $x[n]$ és un senyal causal, aleshores

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0].$$

Doneu un resultat d'aquest estil per a senyals anticausals.