Tema 2. Suma de variables aleatòries.

1) Sigui $W = X + Y + Z$, on X, Y i Z són variables aleatòries amb mitjana 0 i variància 1, i amb $Cov(X,Y) = 1/4, Cov(X,Z) = 0, Cov(Y,Z) = -1/4$.

a) Trobau l'esperança i la variància de W. (Sol.:$\mathbf{0};\mathbf{3}$)

b) Repetiu l'apartat (a) suposant que X, Y i Z estan incorrelacionades. (Sol.:$\mathbf{0};\mathbf{3}$)

2) Siguin $X_1, \dots, X_n$ variables aleatòries amb la mateixa mitjana μ i covariàncies

$$Cov(X_i, X_j) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } i = j \\ \rho\sigma^2 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

on $|\rho| < 1$. Determinau la mitjana i la variància de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. (Sol.:$\mathbf{n}\mu; \mathbf{n}\sigma^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\rho\sigma^{\mathbf{2}}(\mathbf{n}-\mathbf{1})$)

3) Ídem que l'anterior però amb $Cov(X_i, X_j) = \sigma^2\rho^{|i-j|}$ per $i, j = 1, \dots, n$ amb $\sigma > 0$ i $|\rho| < 1$. (Sol.:$\mathbf{n}\mu; \frac{\sigma^{\mathbf{2}}}{(\mathbf{1}-\rho)^{\mathbf{2}}}(\mathbf{n} - \mathbf{2}\rho - \mathbf{n}\rho^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\rho^{\mathbf{n+1}})$)

4) Sigui $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ on X_i són v.a. independents i amb distribució $B(n_i, p)$ per a $i = 1, \dots, k$. Utilitzau la funció generadora de probabilitats per demostrar que S_k segueix una distribució $B(\sum_{i=1}^k n_i, p)$. Explicau aquest resultat.

5) Demostrau que la suma de n v.a. Poisson independents és també Poisson amb paràmetre la suma dels paràmetres.

6) Sigui N una v.a. que pren valors enters positius. Sigui $X_1, \dots, X_N$ una seqüència de N v.a. iid. Considerem $S_N = \sum_{k=1}^N X_k$.

a) Calculau $E(S_N|N)$. (Sol.:$\mathbf{NE(X)}$).

b) Calculau $E(S_N) = E(E(S_N|N))$. (Sol.:$\mathbf{E(N)E(X)}$)

c) Demostrau que $E(e^{j\omega S_N}|N) = \Phi_{X_1}(\omega)^N$.

d) Demostrau que $\Phi_{S_N}(\omega) = G_N(\phi_{X_1}(\omega))$ on $G_N(z) = E(z^N)$ és la funció generadora de probabilitats de N.(ind.: $\Phi_{S_N}(\omega) = E(E(e^{j\omega S_N}|N))$).

7) Sigui $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$ una seqüència de v.a. iid. que pren valors enters. Sigui N una v.a. que pren valors enters positius. Sigui $S_N = \sum_{k=1}^N X_k$

a) Trobau la mitjana i la variància de S_N.

b) Demostrau que $G_{S_N}(z) = E(z^{S_N}) = G_N(G_{X_1}(z))$.

8) Suposem que el nombre de treballs que arriben a una tenda en una hora segueix una distribució Poisson amb mitjana L. Cada treball requereix X_j segons per completar-se, on cada X_j és independent de les demés i pren els valors "3" o "6" amb la mateixa probabilitat.

a) Trobau la mitjana i la variància del temps total de treball (W) mesurat en minuts en un període d'una hora. (Sol.:$\mathbf{E(W)} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\mathbf{L}, \mathbf{Var(W)} = \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{2}}\mathbf{L}$)

b) Trobau $G_W(z) = E(z^W)$.

9) Suposem que el nombre d'emissions de partícules per part d'un objecte radioactiu en t segons és una variable aleatòria N_t de Poisson amb mitjana λt. Utilizau la desigualtat de Txebicheff per obtenir una fita de la probabilitat que $|N_t/t - \lambda|$ superi un valor donat ε. (Sol.:$\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\varepsilon^2 \cdot t}}$)

10) Suposem que el 10% dels votants estan a favor d'una certa legislació. Es fa una enquesta entre la població i s'obté una freqüència relativa $f_n(A)$ com una estimació de la proporció anterior. Determinau, aplicant la desigualtat de Txebicheff, quants de votants s'haurien d'enquestar perquè la probabilitat que $f_n(A)$ difereixi de 0.1 menys de 0.02 sigui al menys 0.95 (Sol.:**4500**). Què podem dir si no coneixem el valor de la proporció? (Sol.:**12500**) Repetiu el mateix però aplicant el teorema del límit central. (Sol.:**865 si sabem que $\mathbf{p = 0.1}$ i 2401 altrament**)

11) Es llança a l'aire un dau regular 100 vegades. Aplicau la desigualtat de Txebicheff per obtenir una fita de la probabilitat que el nombre total de punts obtinguts estigui entre 300 i 400. (Sol.:**0.883**). Quina probabilitat s'obté aplicant el teorema del límit central? (Sol.:**0.9964**)

12) Es sap que, en una població, la talla dels individus mascles adults és una variable aleatòria X amb mitjana $\mu_x = 170$ cm i desviació típica $\sigma_x = 7$ cm. Es tria una mostra aleatòria de 140 individus. Calculau la probabilitat que la mitjana mostral $\overline{x}$ difereixi de μ_x en menys d'1 cm. (Sol.:**0.909**)

13) Quantes vegades hem de llançar un dau sense biaix per tenir com a mínim un 95% de seguretat de que la freqüència relativa del "6" disti menys de 0.01 de la probabilitat teòrica 1/6? (Sol.:**5336**)

14) Es llança a l'aire una moneda sense biaix n vegades. Calculau n de manera que la freqüència relativa del nombre de cares difereixi de 1/2 en menys de 0.01 amb probabilitat 0.95. (Sol.:**9604**)

15) El nombre de missatges que arriben a un multiplexor és una variable aleatòria de Poisson amb una mitjana de 10 missatges per segon. Estimau la probabilitat que arribin més de 650 missatges en un minut. (Ind.: Utilizau el teorema del límit central) (Sol.:**0.0207**)

16) El nombre d'errors d'impremta per pàgina d'un llibre segueix una llei de Poisson, amb un nombre mitjà d'errors per pàgina igual a 2. En un llibre de 300 pàgines, quina és la probabilitat que en una o més pàgines hi hagi més de 5 errors? Calculau-la directament, aproximant per una Poisson, i aproximant per una normal. (Sol.: **0.9934, 0.9931, 0.9849**)

17) Un canal de transmissió binari té una probabilitat d'error igual a 0.15. Estimau la probabilitat que hi hagi 20 o menys errors en una transmissió de 100 bits. (Sol.: **0.9382, ó 0.917 si aproximam per una Poisson**)

18) S'ha de calcular la suma de 100 números reals. Suposem que els números s'han aproximat per l'enter més pròxim de manera que cada número té un error uniformement distribuït en $(-1/2, 1/2)$. Utilitzau el teorema del límit central per estimar la probabilitat que l'error total en la suma dels 100 números superi 6. (Sol.: **0.0376**)

19) Un radiofar està alimentat per una bateria amb un temps de vida útil T governat per una distribució exponencial amb una esperança d'un mes. Trobau el nombre mínim de bateries que s'han de suministrar al radiofar perquè que sigui operatiu al menys un any amb probabilidad 0.99. (Sol.: **24**)

20) Si obtenim 447 cares en 1000 llançaments d'una moneda suposadament regular, hi ha algun indici per suposar que no ho és? (Sol.: **Sí**)

21) En un museu venen diàriament 1000 entrades i la proporció esperada de visitants estrangers és del 35%. Quina és la probabilitat que en una setmana visitin el museu més de 5000 espanyols? (Sol.: **Pràcticament 0**)

22) La mitjana de bolígrafs que es venen diàriament en una papereria és 30, i la desviació típica 5. Aquests valors són 20 i 4 per al nombre de quaderns venuts. Es sap, a més, que el coeficient de correlació entre les vendes de ambdós productes és 0.7. Quina és la probabilitat que el nombre total dels dos articles venuts durant un trimestre estigui comprès entre 4300 i 4600 unitats? (Sol.: **0.894**)

23) El nombre N d'usuaris que arriben a un sistema durant un cert període és una variable aleatòria amb llei Po(λ). Sigui $p \in (0, 1)$ la probabilitat que un usuari que arriba al sistema rebi servei. Determinau la llei de la variable aleatòria que compta el nombre d'usuaris que reben servei. (Sol.:Po($\lambda\mathbf{p}$))