PARCIAL DE FONAMENTS MATEMÀTICS II. (FEBRER 2001)

P1.- Considerem el següent conjunt:

$$M = \left\{ M(x) | M(x) = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ on } a \text{ és un real no nul fixat i } x \in \mathbb{R} \right\}$$

Demostrau que M amb el producte usual de matrius és grup abelià. **(1.5 pt.)**

P2.- Demostrau o refutau amb un contraexemple si les següents afirmacions són certes o falses

a) Si A i B són dues matrius quadrades invertibles llavors $A + B$ és invertible. **(0.5 pt.)**

b) Si A i B són invertibles llavors $(A^{-1}B)^t$ també és invertible. **(0.5 pt.)**

c) Si $A^2 = A$ i A no és la matriu nul·la llavors A és invertible. **(0.5 pt.)**

d) Si A és invertible i $Av = \lambda v$ (amb $\lambda \neq 0$) llavors $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$. **(0.5 pt.)**

P3.- Calculau la inversa de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ 0 & 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-3} & 2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.5 pt.)

P4.- Considerem els subespais vectorials W_1 i W_2 de $\mathbb{R}^4$ generats pel $\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\}$ i $\{(1,1,0,1),(1,2,-1,2),(3,5,-2,5)\}$.

a) Calculau bases i dimensions de W_1, W_2 i $W_1 + W_2$. **(1 pt.)**

b) Calculau una base i la dimensió de $W_1 \cap W_2$. **(0.5 pt.)**

c) Completau una base de $W_1 \cap W_2$ a una base de $\mathbb{R}^4$. **(0.5 pt.)**

P5.- Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfisme que en qualque base té per matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiau segons els valors de α quan f és monomorfisme, epimorfisme o automorfisme. **(0.5 pt.)**

P6.- Considerem que s'emeten tres valors en un canal de comunicació x_0, x_1 i x_2. Aquests valors es passen repetidament per un filtre definit per:

$$S_n = \frac{1}{2}S_{n-1} + \frac{5}{2}S_{n-2} + S_{n-3} \text{ per a } n \geq 3.$$

$$S_0 = x_0, \quad S_1 = x_1, \quad S_2 = x_2$$

a) Calculau una matriu A tal que $A \begin{pmatrix} S_{n-1} \\ S_{n-2} \\ S_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_n \\ S_{n-1} \\ S_{n-2} \end{pmatrix}$ **(0.5 pt.)**

b) Diagonalitzau A i calculau A^{n-2} en funció de la matriu diagonal i de les matrius de canvi de base. Aquesta expressió donarà directament S_n en funció de n, x_0, x_1 i x_2. **(1.5 pt.)**

Duració de l'examen 3:30 hores.