Fonaments Matemátiques II

Probabilitat

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears

Manuel Moyà Quintero

Índex

Capítol 5

Moments i funcions d'una variable aleatòria

5.1 Moments

Definició 5.1 *Direm que una variable aleatòria X té un* **moment d'ordre k** *respecte a l'origen si existeix*

a) Quan X és una variable aleatòria discreta, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, amb la funció de probabilitat f_X,

$$\mu'_k = \sum_i x_i^k f_X(x_i)$$

b) Quan X és una variable aleatòria contínua,

$$\mu'_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx$$

Aquests moments també els representarem per $E(X^k)$.

Com a cas particular tenim el moment de primer ordre $\mu'_1 = E(X)$, que el representam en general per μ i és el que hem anomenat **Esperança matemàtica, valor esperat o mitjana** d'una variable aleatòria X.

Exemple 1: Calculau l'esperança matemàtica d'una variable contínua rectangular o uniforme.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}$$

que confirma la intuïció que l'esperança matemàtica és el punt mitjà de l'interval.

Exemple 2: Sigui X el nombre de vegades que s'analitza un dispositiu fins que té un missatge preparat per a la seva transmissió. Si suposam que la terminal produeix missatges segons una successió de proves Bernouilli independents, aleshores X té una distribució geomètrica de paràmetre p. Quin és el nombre esperat de vegades que s'analitza el dispositiu?

La variable aleatòria X seria $X = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k f_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} \overset{(1)}{=} \frac{1}{p}$$

(1) S'ha de tenir en compte que:

$$\sum_{k>0} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Proposició 5.2 *Si X és una variable aleatòria amb densitat f_X simètrica respecte a la recta $x = a$, és a dir, $f_X(a-x) = f_X(a+x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, aleshores, si existeix, $E(X) = a$.*

La simetria no ens assegura sempre l'existència de l'esperança matemàtica.

Proposició 5.3 *Es compleixen les següent propietats:*

a) $E(cte) = cte$.

b) $E(aX + b) = aE(X) + b$.

c) *Si* $a < x < b$ *aleshores* $a < E(X) < b$.

d) *Si X és una variable aleatòria no negativa aleshores* $E(X) \geq 0$.

Definició 5.4 *Direm que una variable aleatòria X té un* **moment d'ordre k** *respecte a la mitjana si existeix*

a) Quan X és una variable aleatòria discreta,

$$\mu_k = E[(X-\mu)^k] = \sum_i (x_i - \mu)^k f_X(x_i).$$

b) Quan X és una variable aleatòria contínua,

$$\mu_k = E[(X-\mu)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k f_X(x)dx.$$

Definició 5.5 *Al moment de segon ordre respecte a la mitjana l'anomenam* **variància** *de la distribució i el representarem per σ^2 o $Var(X)$, i a la seva arrel quadrada σ l'anomenarem* **desviació típica** *o* **desviació estàndard** *de la distribució.*

Per veure que representen μ i σ^2 en una distribució de probabilitat discreta, podem representar sobre un eix les probabilitats $f(x_i)$ com a masses puntual corresponents als punts x_i. El moment de primer ordre, μ, dóna el centre de gravetat d'aquest conjunt de masses i, per tant, el podem utilitzar com una mesura de centralització de la distribució.

El moment de segon ordre respecte a la mitjana, σ^2, tendeix a ser petit si la majoria de les masses estan concentrades a prop de μ i no hi ha masses situades molt lluny de μ. Quant més disperses estiguin les masses respecte a la mitjana, més probable és que σ^2 es faci més gran. D'aquesta forma, la variància d'una distribució es pot utilitzar com una mesura de dispersió. En podrien donar exemples de distribucions per als que la variància és una mala mesura de dispersió, però en general no succeeix.

Proposició 5.6 *Donada una variable aleatòria X, $\sigma_X^2 = E(X^2) - E(X)^2$.*

Exemple 1: Si X és una variable aleatòria uniforme $U(a,b)$, sabem que $E(X) = \frac{a+b}{2}$,

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \left. \frac{x^3}{3(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

per tant,

$$\sigma_X^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemple 2: Sigui X una variable aleatòria que segueix una distribució $Ge(p)$, amb $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Sabem que $E(X) = \frac{1}{p}$, per tant,

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 f_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p q^{k-1} = \frac{q+1}{p^2}$$

aleshores,

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{q+1}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Proposició 5.7 *La variància compleix les següents propietats*

a) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$, on a i b són nombres reals.

b) $Var(cte) = 0$.

5.2 Desigualtats de Markov i Txebixef

Proposició 5.8 (Desigualtat de Markov)
Si X és una variable aleatòria positiva amb $E(X)$ finita, aleshores

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}, \ \forall a > 0$$

Com a conseqüència tenim que si X és una variable aleatòria, amb $E(X)$ finita, aleshores

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}, \ \forall a > 0$$

Exemple 1: En el procés de fabricació d'un determinat aparell electrònic, es fabrica un xip d'espessor mitjà 5mm. Fitau la probabilitat que l'espessor sigui menor que 6mm.

Li direm X a la variable aleatòria que ens dóna l'espessor d'aquests xips. Com només ens donen la mitjana utilitzarem la desigualtat de Markov que efectuar aquest càlcul.

$$P(X < 6) = 1 - P(X \geq 6) \geq 1 - \frac{5}{6} = 0,1667$$

Proposició 5.9 (Desigualtat de Txebixef)

Si X és una variable aleatòria amb $E(X) = \mu$ i $Var(X) = \sigma^2$ aleshores,

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}, \ \forall a > 0$$

DEMOSTRACIÓ:

Considerem la variable aleatòria $Y = X - \mu$, per tant, $Y^2 = (X - \mu)^2$, que evidentment és positiva.

Per altra part

$$E(Y^2) = E((X - \mu)^2) = Var(X)$$

per tant, $E(Y^2)$ és finit i aleshores podem aplicar la desigualtat de Markov a la variable Y^2 i tenim

$$P(Y^2 \geq a^2) \leq \frac{E(Y^2)}{a^2} = \frac{E((X - \mu)^2)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Ara bé,

$$P(Y^2 \geq a^2) = P((X-\mu)^2 \geq a^2) = P(|X-\mu| \geq a)$$

Per tant,

$$P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Aquesta inequació també la podem expressar d'una altra forma. Com

$$P(|X-\mu| \geq a) = 1 - P(|X-\mu| < a) = 1 - P(\mu - a < X < \mu + a)$$

tenim $1 - P(\mu - a < X < \mu + a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$ i aïllant

$$P(\mu - a < X < \mu + a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Observació: Si substituïm a per $a\sigma$ en la desigualtat de Txebixef tenim

$$P(|X-\mu| \geq a\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(a\sigma)^2} = \frac{1}{a^2}$$

que és una altra forma d'expressar la desigualtat de Txebixef.

En la segona expressió que hem vist tenim que

a) Si $a = 1$, $P(|X - E(X)| \geq \sigma) \leq 1$

b) Si $a = 2$, $P(|X - E(X)| \geq 2\sigma) \leq 0,25$

c) Si $a = 3$, $P(|X - E(X)| \geq 3\sigma) \leq 0,111$

d) Si $a = 4$, $P(|X - E(X)| \geq 4\sigma) \leq 0,0025$

La qual cosa vol dir que, per exemple, per $a = 2$ una variable aleatòria que segueixi qualsevol tipus de distribució d'esperança i variància finita, la probabilitat que un valor s'allunyi de la mitjana més de dues vegades la desviació típica és menor o igual a 0,25. és a dir, només el 25% dels valors estaran allunyats de la mitjana mes de 2σ.

Exemple 1: Sabem que la mitjana i la desviació típica del temps de resposta d'un sistema multiusuari és 15 i 3 unitats de temps respectivament. Aleshores

$$P(|X - 15| \geq 5) \leq \frac{9}{25} = 0,36$$

que ens diu que la probabilitat que el valor d'aquesta variable aleatòria es separi de la mitjana en més de 5 unitats és de 0.36.

Exemple 2: En el procés de fabricació d'un determinat aparell electrònic, es fabrica un xip d'espessor mitjà 5 mm i desviació típica 0.5 mm. Fitau la probabilitat que l'espessor sigui menor que 3 mm o major que 7 mm.

$$P((X < 3) \ o \ (X > 7)) = 1 - P(3 < X < 7) =$$
$$= 1 - P(5 - 2 < X < 5 + 2) \overset{(1)}{\leq} \frac{0.5^2}{2^2} = 0.0625$$

(1) ja que $P(\mu - a < X < \mu + a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2}$, per tant, $1 - P(\mu - a < X < \mu + a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$

5.3 Funcions de variables aleatòries discretes

Proposició 5.10 *Sigui $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ una variable aleatòria discreta amb i sigui $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicació. Aleshores $Y = h(X)$ és també una variable aleatòria discreta. A més, si f_X i F_X són les funcions de probabilitat i distribució de X,*

$$f_Y(y) = \sum_{x_i | h(x_i) = y} f_X(x_i) \qquad F_Y(y) = \sum_{x_i | h(x_i) \leq y} f_X(x_i)$$

DEMOSTRACIÓ:

Si $Y = h(X)$ és una aplicació, aleshores $card(Y) \leq card(X)$ i si X és una variable aleatòria discreta, té un nombre finit o infinit numerable d'elements, per tant, Y també té un nombre finit o infinit numerable d'elements i per tant seria discreta.

A més, si $y \in Y$, tenim que existeixen $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}$ tals que $h(x_{i_j}) = y$, per tant,

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(h(X) = y) = P(X = h^{-1}(y)) = P((X = x_{i_1}) \cup (X = x_{i_2}) \cup \ldots) =$$
$$= P(X = x_{i_1}) + P(X = x_{i_2}) + \ldots = \sum_{x_i | h(x_i) = y} f_X(x_i)$$

Calculem ara $F_Y(y)$,

$$F_Y(y) = \sum_{k \leq y} f_Y(k) = \sum_{k \leq y} \left(\sum_{x_i | h(x_i) = k} f_X(x_i) \right) = \sum_{x_i | h(x_i) \leq y} f_X(x_i)$$

Exemple 1: Considerem l'experiment aleatori de llançar un dau. Sigui X la variable aleatòria que ens dóna el nombre que surt, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Sigui Y la variable aleatòria corresponent a la paritat dels resultats, és a dir, $Y = \{0, 1\}$ on serà 0 si ha sortit un nombre parell i 1 si ha sortit un nombre senar. Cerquem les funcions de probabilitat i distribució de Y

L'aplicació h és la següent:

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & 1 & \mapsto & 1 \\ & 2 & \mapsto & 0 \\ & 3 & \mapsto & 1 \\ & 4 & \mapsto & 0 \\ & 5 & \mapsto & 1 \\ & 6 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Per tant,

$$f_Y(0) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) = \sum_{x_i | h(x_i)=0} f_X(x_i) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(1) = P(X=1) + P(X=3) + P(X=5) = \sum_{x_i | h(x_i)=1} f_X(x_i) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

La funció de probabilitat seria

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ y = 0,1 \\ 0 & Altres \end{cases}$$

i la funció de distribució és

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{2} & si\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

5.4 Funcions d'una variable aleatòria contínua

Sigui X una variable aleatòria contínua i $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sigui $Y = h(X)$. Evidentment Y no té perquè ser una variable aleatòria contínua, ja que pot ser discreta.

En general sol ser més fàcil cercar primer la funció de distribució de Y de la següent forma:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y)$$

En el cas que la variable aleatòria Y sigui discreta i volem cercar la funció de probabilitat de Y tendríem $f_Y(y) = P(Y = y) = F_Y(y^+) - F_Y(y^-)$

Exemple 1:

La funció de densitat d'una variable aleatòria X és:

$$f_X(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in (-1,0] \\ -x+1 & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

Definim la variable aleatòria $Y = g(X)$, on g és la funció

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in (-\infty,-1/2] \\ 0 & \text{si } x \in (-1/2,1/2] \\ 1 & \text{si } x \in (1/2,\infty) \end{cases}$$

Determinau la funció de densitat i la de distribució de Y.

Solució:

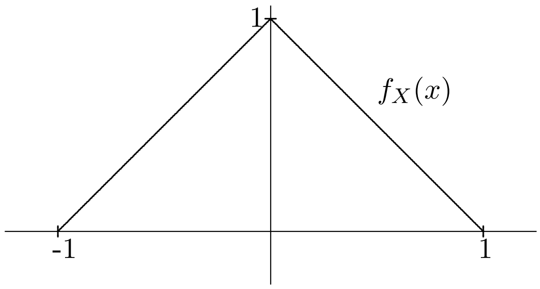

Figura 5.1: Asímptotes

Cerquem primer la funció de distribució (Vegeu la figura 5.1):

- Per $y < -1$ tenim que $F_Y(y) = 0$.
- Per $-1 \leq y < 0$ tenim $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(Y = -1) = P(X \leq -\frac{1}{2})$ que representa l'àrea d'un triangle de base $\frac{1}{2}$ i alçada $f_X(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Aquesta àrea és $\frac{1}{8}$.
- Per $0 \leq y < 1$ tenim que $F_Y(y) = P(Y \leq 0) = P(Y = -1) + P(Y = 0) = P(X \leq \frac{1}{2})$ que seria l'àrea sota la funció f des de -1 fins a $\frac{1}{2}$. Aquesta àrea seria $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ ja que l'àrea del darrer triangle és $\frac{1}{8}$ i la del triangle gros és $\frac{1}{2}$, per tant l'àrea de la regió entre $X = 0$ i $X = \frac{1}{2}$ és $\frac{3}{8}$.
- Finalment per $1 \leq y$ tenim que $F_Y(y) = 1$

La funció de distribució serà, per tant,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & si & y < -1 \\ \frac{1}{8} & si & -1 \leq y < 0 \\ \frac{7}{8} & si & 0 \leq y < 1 \\ 1 & si & y \geq 1 \end{cases}$$

Cerquem ara la funció de probabilitat de Y. Y és una variable discreta que pot prendre únicament els valors $\{-1, 0, 1\}$

- Per $Y = -1$ tenim $f_Y(-1) = F_Y(-1^+) - F_Y(-1^-) = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$.
- Per $Y = 0$ tenim $f_Y(0) = F_Y(0^+) - F_Y(0^-) = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.
- Per $Y = 1$ tenim $f_Y(1) = F_Y(1^+) - F_Y(1^-) = 1 - \frac{7}{8} - 0 = \frac{1}{8}$.

Per tant, la funció $f_X(x)$ és la següent:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & si \quad y = -1 \\ \frac{3}{4} & si \quad y = 0 \\ \frac{1}{8} & si \quad y = 1 \\ 0 & \quad altrament \end{cases}$$

En el cas que la variable aleatòria Y sigui contínua i volem cercar la funció de probabilitat de Y tendríem $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$

Exemple 2:

Sigui X una variable aleatòria contínua i $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció lineal $h(x) = ax + b$ on $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$. Definim la variable aleatòria $Y = h(X)$. Cercau la funció de densitat i distribució de Y.

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y)$

- Si $a > 0$, $F_Y(y) = P(X \leq \frac{y-b}{a}) = F_X(\frac{y-b}{a})$.
- Si $a < 0$, $F_Y(y) = P(X \geq \frac{y-b}{a}) = 1 - P(X \leq \frac{y-b}{a}) = 1 - F_X(\frac{y-b}{a})$.

Cerquem ara la funció de densitat:

- Si $a > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(x)}{dx}\frac{dx}{dy} = f_X(x)\frac{d\frac{y-b}{a}}{dy} = f_X(x)\frac{1}{a}$$

- Si $a < 0$,

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d(1 - F_X(x))}{dx}\frac{dx}{dy} = -f_X(x)\frac{d\frac{y-b}{a}}{dy} = -f_X(x)\frac{1}{a}$$

5.5 Moments d'una funció d'una variable aleatòria

Definició 5.11 *Anomenam* **esperança matemàtica**, **valor esperat** *o* **mitjana** *d'una funció $g(X)$ d'una variable aleatòria X, de funció de densitat f_X, a*

a) Si X és una variable aleatòria discreta,

$$E(g(X)) = \sum_i g(x_i) f_X(x_i).$$

b) Si X és una variable aleatòria contínua

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Les esperances existeixen si les sèries o integrals són absolutament convergents.

Proposició 5.12 Es compleixen les següent propietats:

a) $E(\sum_{k=1}^{n} g_k(X) = \sum_{k=1}^{n} E(g_k(X))$.

b) Si X és una variable aleatòria no negativa aleshores $E(X) \geq 0$.

c) Si $g(X) \leq h(X)$ aleshores $E(g(X)) \leq E(h(X))$.

Índex alfabètic