Sabent que a un canal donat la probabilitat de transmetre correctament una trama és PRR. Com es podria calcular el nombre total de trames necessàries a transmetre per assegurar, amb certa probabilitat, que es transmetran n trames correctament?

Plantejament:

Denotam:
p: probabilitat d'èxit en la transmissió d'una trama (PRR)
P_{min}: probabilitat mínima de transmetre correctament n trames
X: nombre de trames correctes en N transmissions

X és una v.a. de tipus binomial: $X \sim B(N,p)$ i el problema consisteix en calcular el valor de N mínim que assegura que

$$P(X \geq n) \geq P_{min}$$

Resolució:

La dificultat del problema és que no es pot donar una fòrmula per al càlcul del valor de N ja que els valors de estan tabulats. No obstant, es pot escriure un petit programa que calculi una bona aproximació numèrica, no és dificil i si estàs interesat pots passar pel despatx perquè t'ho expliqui.

Et donc dos exemples de resolució utilitzant taules:

Exemple 1:

Si n és petit es pot utilitzar la taula de la binomial. Per exemple, suposem $p = 0.9$, $P_{min} = 0.9$ i $n = 10$:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) \geq 0.9$$

$$P(X \leq 9) \leq 1 - 0.9 = 0.1$$

Hauriem de mirar la columna de la taula binomial corresponent a $p = 0.9$ i per a $k = 9$, però a la taula de la binomial només surten valors de p fins a $p = 0.5$. Per solucionar això definim una nova variable Y=nombre transmisions errònies de N, com que $Y = N - X$, llavors:

$$P(X \geq 10) = P(N - Y \geq 10) = P(Y \leq N - 10) \geq 0.9$$

Miram la columna de la taula binomial corresponent a $p = 0.9$ i per a $k = N - 10$ per a valors de $N = 10, 11, \cdots$. En aquest cas trobam que la solució és $N = 13$ ja que en aquest cas $P(X \geq 10) = P(Y \leq 3) = 0.9658 > 0.9$.

Exemple 2:

Si n és gran, la v.a. binomial es pot aproximar per una Gaussiana, que també està tabulada. Per exemple, suposem $p = 0.9$, $P_{min} = 0.9$ i $n = 100$:

$$P(X \geq 100) = 1 - P(X < 100) = 1 - P(X \leq 99) \geq 0.9$$

$$P(X \leq 99) \leq 1 - 0.9 = 0.1$$

$$P(X \leq 99) \approx P(X' \leq 99.5) = F_{X'}(99.5)$$

on $X' \sim N(N \cdot p, N \cdot p \cdot (1-p)) = N(0.9 \cdot N, 0.09 \cdot N)$. Per tant:

$$F_{X'}(99.5) = F_Z(\frac{99.5 - 0.9 \cdot N}{\sqrt{0.09 \cdot N}}) \leq 0.1$$

Com el valor 0.1 no surt a la taula de la normal estàndar aplicam la propietat $F_Z(z) = 1 - F_Z(-z)$:

$$F_Z(\frac{99.5 - 0.9 \cdot N}{\sqrt{0.09 \cdot N}}) = 1 - F_Z(-\frac{99.5 - 0.9 \cdot N}{\sqrt{0.09 \cdot N}}) \leq 0.1$$

Per tant

$$F_Z(-\frac{99.5 - 0.9 \cdot N}{\sqrt{0.09 \cdot N}}) \geq 0.9$$

Mirant la taula:

$$-\frac{99.5 - 0.9 \cdot N}{\sqrt{0.09 \cdot N}} \geq 1.29$$

Resolent aquesta equació trobarem N:

$$-99.5 + 0.9N \geq 1.29\sqrt{0.09N}$$

$$(-99.5 + 0.9N)^2 \geq 1.29^2 \cdot 0.09N$$

$$0.81N^2 - 179.25N + 9900.25 \geq 0$$

Resolent l'equació de segon grau:

$$(N - 115.17)(N - 106.12) \geq 0$$

La inequació té dues solucions: $N < 106.12$ i $N > 115.17$. La primera no és vàlida ja que dóna valors de probabilitat molt baixos. La solució final és per tant $N = 116$.