Fonaments Matemàtics II. Telemàtica
Control 1. Sistemes d'equacions. Curs 09/10

P1.- a) Calculau, sense aplicar la regla de Sarrus i sense desenvolupar pels elements d'una fila o columna, el determinant següent: **3 pt.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Discutiu i resoleu el sistema **7 pt.**

$$\left.\begin{array}{llllc} x & +y & +z & = & \lambda \\ x & +y & +\lambda z & = & 1 \\ x & +\lambda y & +z & = & 1 \\ \lambda x & +y & +z & = & 1 \end{array}\right\}$$

Solució:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3+\lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 3+\lambda & 1 & \lambda & 1 \\ 3+\lambda & \lambda & 1 & 1 \\ 3+\lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$= (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} (3+\lambda)(\lambda-1)^3$$

(1) A la primera columna li sumam les altres 3.
(2) Permutam la 1a i 4a fila, amb la qual cosa el determinant canviarà de signe i permutam la 2a i 3a fila, i el determinant tornarà a canviar de signe (aleshores tendrà el mateix signe que abans dels canvis)
(3) A la 2a, 3a i 4a columna li restam la primera.
(4) El determinant d'una matriu triangular és igual al producte dels elements de la diagonal principal.

b) Tenim la matriu dels coeficients M i amplida A següents

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem el determinant de la matriu ampliada

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3+\lambda)(\lambda-1)^3$$

segons hem vist a l'apartat anterior.

Igualant a zero el determinant tenim $\lambda = -3$ o $\lambda = 1$. Per tant,

1) Per a $\lambda \neq -3$ i $\lambda \neq 1$.

Hem trobat un menor de 4t ordre diferents de zero, per tant el rang de la matriu ampliada és 4. Com la matriu dels coeficients té tres columnes, el seu rang no pot ser 4, per tant rang $M \neq$ rang A i a les hores el sistema és incompatible

2) $\lambda = 1$. Tenim el següent sistema que resoldrem per Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenim que el rang $M =$ rang $A <$ nú. incògnites. Per tant el sistema és compatible i indeterminat.

Hem de resoldre el sistema

$$x + y + z = 1$$

que té per solució $x = 1 - y - z$ amb y i z qualsevol.

3) Per a $\lambda = -3$. Tenim el següent sistema que resoldrem per Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ens queda que rang $M =$ rang $A =$ núm incògnites, per tant el sistema és compatible i determinat i la solució l'obtenim resolent el sistema

$$\left.\begin{array}{cccc} x & +y & +z & = & -3 \\ & -4y & & = & 4 \\ & & -4z & = & 4 \end{array}\right\}$$

que té per solució $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$