Classe pràctica 2. Enunciat

Prob 3 Observant el nombre de taxis que hi ha diàriament a les 7h del matí ens donam compte que segueix una distribució de Poisson de mitjana 20.

a) Calculau la probabilitat que un dia qualsevol hi hagi entre 10 i 30 taxis. **2 pt.**

A causa del caos circulatori que provoca aquesta quantitat de taxis per l'arribada del tren de les 7h, el batle de la localitat decideix fer un aparcament per a que els taxis no quedin en doble fila.

b) Quantes places hauria de tenir l'aparcament per a que poguessin aparcar tots els taxis, almenys el 95.% dels dies? **2 pt.**

Suposem que no sabem quina distribució segueix el nombre de taxis que hi ha a les 7h, però sabem que segueix una determinada distribució de mitjana i desviació típica les corresponents a la de Poisson vista anteriorment,

c) Quantes places hauria de tenir l'aparcament per a que poguessin aparcar tots els taxis el 95% dels dies? **2 pt.**

Passades les 7h, el temps que hi ha entre l'arribada de dos taxis segueix una distribució exponencial de funció de densitat

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}x} & x > 0 \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

Efectuam el canvi de variable $Y = 2X + 6$,

d) Trobau la funció de distribució i de densitat de la variable aleatòria Y **4 pt.**

(Control, curs 08/09)

Classe pràctica 2. Solució

Prob 3 Observant el nombre de taxis que hi ha diàriament a les 7h del matí ens donam compte que segueix una distribució de Poisson de mitjana 20.

a) Calculau la probabilitat que un dia qualsevol hi hagi entre 10 i 30 taxis. **2 pt.**

A causa del caos circulatori que provoca aquesta quantitat de taxis per l'arribada del tren de les 7h, el batle de la localitat decideix fer un aparcament per a que els taxis no quedin en doble fila.

b) Quantes places hauria de tenir l'aparcament per a que poguessin aparcar tots els taxis, almenys el 95.% dels dies? **2 pt.**

Suposem que no sabem quina distribució segueix el nombre de taxis que hi ha a les 7h, però sabem que segueix una determinada distribució de mitjana i desviació típica les corresponents a la de Poisson vista anteriorment,

c) Quantes places hauria de tenir l'aparcament per a que poguessin aparcar tots els taxis el 95% dels dies? **2 pt.**

Passades les 7h, el temps que hi ha entre l'arribada de dos taxis segueix una distribució exponencial de funció de densitat

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}x} & x > 0 \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

Efectuam el canvi de variable $Y = 2X + 6$,

d) Trobau la funció de distribució i de densitat de la variable aleatòria Y **4 pt.**

(Control, curs 08/09)

Solució:

a) Designem per $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ la variable aleatòria que ens dóna el nombre de taxis que hi ha les 7h. Aquesta variable segueix una distribució de Poisson $Po(20)$. Com el paràmetre és 20¿5, podem aproximar aquesta distribució a una normal normal de mitjana 20 i variància 20. Designem per Y la variable aleatòria corresponent a aquesta distribució.

$$P(10 \leq X \leq 30) = P(9.5 < Y < 30.5) = P\Big(\frac{9.5 - 20}{\sqrt{20}} < z < \frac{30.5 - 20}{\sqrt{20}}\Big) = P(-2.35 < Z < 2.35) =$$

$$= P(Z < 2.35) - P(Z < -2.35) = P(Z < 2.35) - (1 - P(Z < 2.35)) = 2P(z < 2.35) - 1 = 2.0.9906 - 1 = 0.9812$$

b) Ens demanen que trobem a de forma que $P(X \leq a) \geq 0.95$.

$$P(X \leq a) = P(Y < a + 0.5) = P\Big(Z < \frac{a + 0.5 - 20}{\sqrt{20}}\Big) = 0.95$$

Mirant les taules tenim

$$\frac{a - 19.5}{\sqrt{20}} = 1.645; \qquad a = 19.5 + \sqrt{20} \cdot 1.645 = 26.86$$

Per tant, hauria de tenir 27 places.

c) Farem servir la desigualtat de Txebixef per a una mitjana de 20 i una desviació típica de $\sqrt{20}$

$$P(20 - b < X < 20 + b) \geq 1 - \frac{20}{b^2} = 0.95$$

aïllant b tenim $b = 20$

Per tant hauria de tenir 20+20=40 places.

d) Cerquem primer la funció de distribució

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2X + 6 \leq y) = P\Big(X \leq \frac{y-6}{2}\Big) = F_X\Big(\frac{y-6}{2}\Big) = 1 - e^{-\frac{1}{20}\frac{y-6}{2}} = 1 - e^{-\frac{y-6}{40}}$$

i aquesta expressió és vàlida per a $y > 6$, ja que quan $x = 0$, $y = 6$. Per tant,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 6 \\ 1 - e^{-\frac{y-6}{40}} & y \geq 6 \end{cases}$$

.

Finalment cerquem la funció de densitat de Y,

$$f_Y(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \frac{1}{40} e^{-\frac{y-6}{40}}$$

Per tant,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 6 \\ \frac{1}{40} e^{-\frac{y-6}{40}} & y \geq 6 \end{cases}$$