Tema 3. PROBABILITAT

ESTADISTICA
DESCRIPTIVA

(Mostra)

ESTADISTICA
INFERENCIAL

(Població)

Teoria de Probabilitats

Proporciona un llenguatge i unes eines matemàtiques per a estudiar els fenòmens aleatoris.

Definicions bàsiques:

- **Experiment** (fenòmen) **aleatori**: aquell per al qual no podem prediure el resultat

  Exemples: resultat del llançament d'una moneda, resultat del llançament d'un dau, mitjana d'una mostra

- **Espai mostral** (Ω): conjunt de tots els resultats possibles d'un experiment aleatori

  Exemple: Ω={cara, creu} en l'experiment de llançar una moneda,
  Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6} en l'experiment de llançar un dau

- **Succés elemental**: cadascun dels resultats possibles d'un experiment aleatori (elements de Ω). Notació: majúscules

  Exemple: A_1={cara}, A_2={creu} en l'experiment de llançar una moneda
  A_1={1}, A_2={2}, etc. en l'experiment de llançar un dau

- **Succés**: qualsevol combinació de successos elementals. Notació: majúscules

  Exemple: A= "cara o creu"={cara, creu}, B="no treure cara"={creu} en l'experiment de llançar una moneda
  A= "treure parell"={2, 4, 6}, B="treure més de 4"={5, 6} en l'experiment de llançar un dau

Operacions bàsiques amb successos:

- **Unió**: la unió de dos successos A i B és un nou succés que conté tots els elements de A i de B.

  Notació: A U B significa "A o B"

  Exemple: en el llançament d'un dau,
  si A= "parell"={2, 4, 6} i B="major que 4"={5, 6}
  llavors A U B = "parell o major que 4"={2, 4, 5, 6}

- **Intersecció**: la intersecció de dos successos A i B és un nou succés que conté els elements comuns a A i a B.

  Notació: $A \cap B$ significa "A i B (simultàniament)"

  Exemple: en el llançament d'un dau,
  si A= "parell"={2, 4, 6} i B="major que 4"={5, 6}
  llavors $A \cap B$ = "parell i major que 4"={6}

Operacions bàsiques amb successos:

- **Succés complementari**: el succés complementari d'un succés A és un nou succés format per tots els successos elementals no continguts en A.

  Notació: $\overline{A}$ significa "no A"

  Exemple: en el llançament d'un dau, si A= "parell"={2, 4, 6}
  llavors $\overline{A}$ ="no parell"={1, 3, 5}

- **Succés impossible**: aquell que no pot passar

  Notació: $\emptyset$ significa "impossible"

  Exemple: en el llançament d'un dau,
  si A= "parell"={2, 4, 6} i B="imparell"={1, 3, 5}
  llavors $A \cap B$ = "parell i imparell"= $\emptyset$ (impossible)

  Dos successos A i B es diuen **disjunts** o **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$

- **Succés segur**: aquell que sempre passa

  Notació: Ω (espai mostral) significa "segur"

  Exemple: en el llançament d'un dau,
  si A= "parell"={2, 4, 6} i B="imparell"={1, 3, 5}
  llavors $A \cup B$ = "parell o imparell"={1, 2, 3, 4, 5, 6}=Ω (segur)

Probabilitat d'un succés:

És un número entre 0 i 1 que indica la freqüència esperada (a llarg plaç) d'ocurrència del succés.

Notació: $P(A)$ significa "probabilitat del succés A"

Exemple: en l'experiment consistent en llançar una moneda,
si $A=\{cara\}$ llavors $P(A)=P(cara)=1/2=0,5$
ja que s'espera que, si la moneda no està trucada,
surti 1 cara de cada 2 llançaments

Probabilitat d'un succés:

Propietats bàsiques:

- $P(\Omega)=1$ (la probabilitat del succés segur és 1)
- $P(\emptyset)=0$ (la probabilitat del succés impossible és 0)
- $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (probabilitat de la unió)
- Si $A\cap B=\emptyset$ (successos disjunts) llavors $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$
- Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son **disjunts dos a dos** ($A_1\cap A_2=\emptyset$, $A_1\cap A_3=\emptyset$, $\cdots$) llavors
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$$
- $P(\overline{A})=1-P(A)$ (probabilitat del succés complementari)

Càlcul de probabilitats:

Si tots els successos elementals d'un experiment aleatori tenen la mateixa probabilitat d'ocòrrer (son **equiprobables**), es pot calcular la probabilitat de qualsevol succés A com:

$$P(A)=\frac{CF_A}{CP}$$

CF_A: **casos favorables** a A
(nombre de successos elementals que composen A)

CP : **casos possibles**
(nombre total de successos elementals)

Exemple: P(parell) en el llançament d'un dau equilibrat
si A="parell"={2, 4, 6}, a més Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}
llavors

$$P(parell)=P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

on card(C)significa "nombre d'elements del conjunt C"

Càlcul de probabilitats:

En ocasions, per a calcular el nombre de casos favorables i casos possibles hem d'utilitzar fòrmules de **Combinatòria**

Variacions amb repetició:

Model: n bolles numerades en una urna. Treim 1 bolla, apuntam el número i la tornam a l'urna (reposició). Repetim k vegades.

Resultat: nombre de resultats possibles

(variacions amb repetició de n elements agafats de k en k) $VR_n^k = n^k$

Exemple: resultats del sorteig de l'ONCE $VR_{10}^5 = 10^5$

Càlcul de probabilitats:

En ocasions, per a calcular el nombre de casos favorables i casos possibles hem d'utilitzar fòrmules de **Combinatòria**

Variacions sense repetició:

Model: n bolles numerades en una urna. Treim 1 bolla, apuntam el número i no la tornam a l'urna (sense reposició). Repetim $k \leq n$ vegades.

Resultat: nombre de resultats possibles

(variacions sense repetició de n elements agafats de k en k)

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple: maneres de repartir 10 caramels entre 6 nins (un caramel per a cada nin, al final queden 4 dins la bossa)

$$V_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = 151200$$

Nota: en el cas k=n (treim totes les bolles) les variacions sense repetició s'anomenen **permutacions**

$$P_n = V_n^n = n!$$

Exemple: paraules diferents que es poden formar amb les lletres de la paraula TESI

$$P_4 = 4! = 24$$

Càlcul de probabilitats:

En ocasions, per a calcular el nombre de casos favorables i casos possibles hem d'utilitzar fòrmules de **Combinatòria**

Permutacions amb repetició:

Model: n bolles de color en una urna, r colors diferents.

k_1 bolles del 1^er color, k_2 del 2^on, etc. Treim totes les bolles.

Resultat: nombre de resultats possibles

(permutacions de n elements amb repetició de k_1, k_2, …, k_r)

$$PR_n^{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_r!}$$

Exemple: paraules diferents que es poden formar amb les lletres de la paraula ESTADISTICA

$$PR_{11}^{1222121} = \frac{11!}{1!2!2!2!1!2!1!} = 2494800$$

Càlcul de probabilitats:

En ocasions, per a calcular el nombre de casos favorables i casos possibles hem d'utilitzar fòrmules de **Combinatòria** (continuació)

Combinacions:

Model: n bolles numerades en una urna. Treim k bolles simultàniament.

Resultat: nombre de resultats possibles (dos resultats són iguals si contenen bolles amb els mateixos números, no importa l'ordre)

(combinacions de n elements agafats de k en k)

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple: resultats del sorteig de la Loteria Primitiva

$$C_{49}^6 = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = 13983816$$

Càlcul de probabilitats:

En ocasions, per a calcular el nombre de casos favorables i casos possibles hem d'utilitzar fòrmules de **Combinatòria** (continuació)

Combinacions amb repetició:

Model: n bolles numerades en k urnes. Treim1 bolla de cada urna.

Resultat: nombre de resultats possibles (dos resultats són iguals si contenen bolles amb els mateixos números, no importa l'ordre)

(combinacions amb repetició de n elements agafats de k en k)

$$CR_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Exemple: quantes fitxes té un dominó?

$$CR_7^2 = C_8^2 = \binom{8}{2} = 28$$

Probabilitat Condicionada:

La probabilitat condicionada entre dos succesos és la freqüència d'ocurrència (a llarg plaç) d'un dels successos relativa a l'ocurrència de l'altre succés.

Notació: P(A|B) significa "probabilitat del succés A condicionada pel succés B"

$$P(A|B) = \frac{CF_{A\cap B}}{CF_B} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$CF_{A\cap B}$: **casos favorables** a A ∩ B
(nombre de successos elementals que composen A ∩ B)

CF_B : **casos favorables** a B
(nombre de successos elementals que composen B)

Exemple: en l'experiment de llançar un dau,
si A="major que 2"={3, 4, 5, 6} i B="imparell"={1, 3, 5}
llavors

$$P(A|B) = \frac{P(\{3,5\})}{P(\{1,3,5\})} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

Probabilitat Condicionada:

Propietat (**Teorema de Bayes**):

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$$

Propietat (**Fòrmula de la Probabilitat Total**):

Si $B_1, B_2, \cdots, B_n$ són successos que verifiquen

$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots B_n = \Omega$$
$$B_1 \cap B_2 = \emptyset$$
$$B_1 \cap B_3 = \emptyset$$
$$\vdots$$

(disjunts 2 a 2)

llavors es diu que formen un **sistema complet de successos** i per a qualsevol succés A tenim

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)\cdot P(B_n)$$

Independència de successos:

Dos successos es consideren **independents** si la probabilitat de cada un d'ells no està condicionada per l'altre, és a dir, si

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{i si} \quad P(B \mid A)=P(B)$$

o, el que és equivalent aplicant la definició de probabilitat condicionada:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemple: en l'experiment de llançar un dau,
si A="múltiple de 3"={3, 6} i B="imparell"={1, 3, 5}

$$P(A|B)=\frac{P(\{3\})}{P(\{1,3,5\})}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{1}{3} \quad = \quad P(A)=P(\{3,6\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

com que P(A)=P(A | B) llavors els successos A i B són independents,
es verifica que

$$P(A\cap B)=P(\{3\})=\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)=P(\{3,6\})\cdot P(\{1,3,5\})=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}$$

Independència de successos:

Propietat:

Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son independents entre si, llavors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Observació:

Si A i B **no** son **independents**, llavors $P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$

en general, si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ no son independents entre si, llavors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1 | A_2 \cap \cdots \cap A_n) \cdot P(A_2 \cap \cdots \cap A_n | A_3 \cap \cdots \cap A_n) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$