Classe pràctica 3. Enunciat

Prob 1 Definim sobre $\mathbb{R}_2[x]$ el següent producte escalar

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

i sigui $S = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] | a + b - c = 0\}$.

a) Trobau una base ortonormal de S. **3.5 pt.**

b) Trobau una base de $S^\perp$. **3.5 pt.**

c) Calculau la projecció ortogonal de $1 - 2x$ sobre S. **3 pt.**

(Examen, juny 2008)

Classe pràctica 3. Solució

Prob 1 Definim sobre $\mathbb{R}_2[x]$ el següent producte escalar

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

i sigui $S = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] | a + b - c = 0\}$.

a) Trobau una base ortonormal de S. **3.5 pt.**

b) Trobau una base de $S^{\perp}$. **3.5 pt.**

c) Calculau la projecció ortogonal de $1 - 2x$ sobre S. **3 pt.**

(Examen, juny 2008)

Solució:

a) Cerquem una base de S. Com $a + b - c = 0$ tenim $c = a + b$, per tant, els elements de S seran de la forma

$$a + bx + (a + b)x^2 = a(1 + x^2) + b(x + x^2)$$

Aleshores $S = \langle 1 + x^2, x + x^2\rangle$. Aquests dos polinomis són linealment independents, ja que si consideram l'isomorfisme $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ donat per $f(a + bx + cx^2) = (a, b, c)$ tenim que l'espai vectorial S' isomorf a S és $\langle (1, 0, 1),(0, 1, 1)\rangle$ i aquests elements són linealment independents (el segon té un zero més que l'anterior), per tant, $\{1 + x^2, x + x^2\}$ són linealment independents.

Tenim que una base de S és $\{1 + x^2, x + x^2\}$. Utilitzem el mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt per cercar una base ortonormal de S.

$$e_1' = 1 + x^2, \qquad \|e_1'\| = \sqrt{\langle 1 + x^2, 1 + x^2\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (1 + x^2)^2\,dx} = \sqrt{\int_0^1 (1 + 2x^2 + x^4)\,dx} = \sqrt{\frac{28}{15}}$$

$$e_2' = x + x^2 - \frac{\langle x + x^2, 1 + x^2\rangle}{\frac{28}{15}}(1 + x^2) = x + x^2 - \frac{\frac{77}{60}}{\frac{28}{15}}(1 + x^2) = x + x^2 - \frac{11}{16}(1 + x^2) = \frac{5}{16}x^2 + x - \frac{11}{16}$$

Aleshores, $\{1 + x^2, \frac{5}{16}x^2 + x - \frac{11}{16}\}$ és una base ortogonal de S. Cerque ara $\|e_2'\|$:

$$\|e_2'\| = \sqrt{\langle e_2', e_2'\rangle} = \sqrt{\int_0^1 \Big(\frac{5}{16}x^2 + x - \frac{11}{16}\Big)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 \Big(\frac{25}{256}x^4 + \frac{5}{8}x^3 + \frac{73}{128}x^2 - \frac{11}{8}x + \frac{121}{256}\Big)\,dx} = \sqrt{\frac{29}{192}}$$

Per tant, una base ortonormal és:

$$e_1 = \frac{1}{\|e_1'\|}e_1' = \sqrt{\frac{15}{28}}(1 + x^2), \qquad e_2 = \frac{1}{\|e_2'\|}e_2' = \sqrt{\frac{192}{29}}\Big(\frac{5}{16}x^2 + x - \frac{11}{16}\Big)$$

i la base ortonormal és $\Big\{\sqrt{\frac{15}{28}}(1 + x^2), \sqrt{\frac{192}{29}}\Big(\frac{5}{16}x^2 + x - \frac{11}{16}\Big)\Big\}$

b) Si $a + bx + cx^2 \in S^{\perp}$, aleshores,

$$\langle a + bx + cx^2, 1 + x^2\rangle = 0 \qquad \text{i} \qquad \langle a + bx + cx^2, x + x^2\rangle = 0$$

Operant tenim:

$$\langle a + bx + cx^2, 1 + x^2\rangle = \int_0^1 (a + bx + cx^2)(1 + x^2)\,dx = \int_0^1 (a + bx + (c + a)x^2 + bx^3 + cx^4)\,dx =$$

$$= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{(c+a)x^3}{3} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{4a}{3} + \frac{3b}{4} + \frac{8c}{15} = 0$$

Anàlogament,

$$\langle a+bx+cx^2, x+x^2\rangle = \int_0^1 (a+bx+cx^2)(x+x^2)\,dx = \int_0^1 [ax+(a+b)x^2+(b+c)x^3+cx^4]\,dx =$$

$$= \frac{ax^2}{2} + \frac{(a+b)x^3}{3} + \frac{(b+c)x^4}{4} + \frac{cx^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{5a}{6} + \frac{7b}{12} + \frac{9c}{20} = 0$$

Resolent el sistema $\frac{4a}{3} + \frac{3b}{4} + \frac{8c}{15} = 0,\ \frac{5a}{6} + \frac{7b}{12} + \frac{9c}{20} = 0$ tenim $a = \frac{19c}{110},\ b = -\frac{56c}{55}$, per tant, els elements de $S^\perp$ són de la forma

$$\frac{19c}{110} - \frac{56c}{55}\,x + c\,x^2 = \frac{c}{110}(19 - 112x + 110x^2)$$

Per tant, $S^\perp = \langle 19 - 112x + 110x^2\rangle$ i una base és: $\{19 - 112x + 110x^2\}$

c)

$$1 - 2x = a(1+x^2) + b(x+x^2) + c(19 - 112x + 110x^2) = (a+19c) + (b-112c)x + (a+b+110c)x^2$$

per tant, $a + 19c = 1$, $b - 112c = -2$, $a + b + 110c = 0$ que resolent ens queda $a = \frac{184}{203},\ b = -\frac{42}{29},\ c = \frac{1}{203}$ i

$$P_S(1-2x) = \frac{184}{203}(1+x^2) - \frac{42}{29}(x+x^2) = \frac{184}{203} - \frac{42}{29}\,x - \frac{110}{203}x^2$$