4 Tema 4. Funcions de vàries variables. Integració

En aquest tema estudiarem el concepte d'integració de funcions reals amb vàries variables. Més concretament ens limitarem a funcions de dues variables. Veurem que la integració múltiple és una generalització a vàries variables del concepte d'integració per una variable introduït en la assignatura de Matemàtiques I.

4.1 Integral doble en dominis rectangulars

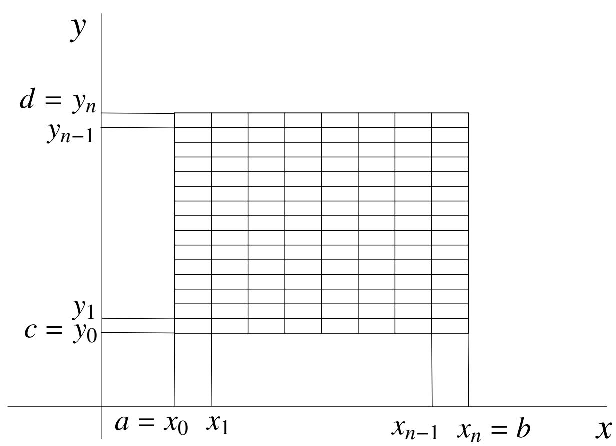
Per introduir la definició d'integral doble necessitam uns conceptes preliminars.

Definició 4.1.1. *Sigui* $R = [a,b] \times [c,d]$ *un rectangle de* $\mathbb{R}^2$. *Direm* ***partició regular d'ordre n*** *del rectangle* R *a dues col.leccions de* $n+1$ *punts equidistants* $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, $i = 0,\dots,n$ *que verifiquen:*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b\,, \quad x_{i+1} - x_i = \tfrac{b-a}{n} = \triangle x \quad \textit{(increment de x).}$$

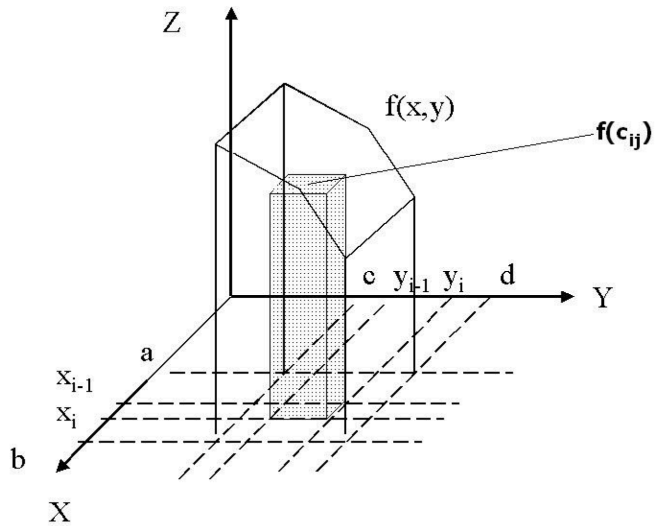
$$c = y_0 < y_1 < \cdots y_n = d\,, \quad y_{i+1} - y_i = \tfrac{d-c}{n} = \triangle y \quad \textit{(increment de y).}$$

Queden determinats n^2 *rectangles petits:* $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]\,,\ i,j = 0,\dots,n-1\,.$



Definició 4.1.2. *Siguin* $f : A \to \mathbb{R}$, R *un rectangle tal que* $R \subset A \subset \mathbb{R}^2$ *i* R_{ij} *una partició regular de* R *d'ordre* n. *Definim* ***suma de Riemann de f associada a la partició*** *com:*

$$s_n = \sum_{i,j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \triangle x \triangle y\,, \qquad c_{ij} \in R_{ij}.$$



Observació De la definició anterior s'observa clarament que la suma de Riemann depèn de l'el.lecció de c_{ij} dins el rectangle R_{ij}.

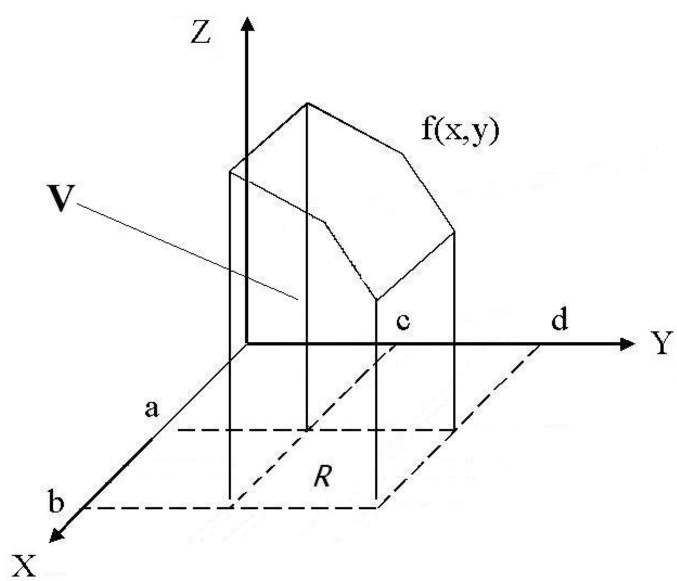
Ara ja podem donar la definició d'integral.

Definició 4.1.3. *Si la successió $\{s_n\}$ de sumes de Riemann té límit i és independent de l'ele.lecció dels $c_{ij} \in R_{ij}$, direm que **f és integrable en R** i el valor de la integral és aquest límit.*

Notació Es poden util.litzar les següents notacions per a representar una integral doble:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy\,; \qquad \int_R f(x,y)\,dx\,dy\,; \qquad \int_R f(x,y)\,dA\,; \qquad \int_R f\,dx\,dy$$

Observació Si la funció f verifica que $f(x,y) \geq 0\ \ \forall (x,y) \in R$, la seva integral és el volum del sòlid de base R limitat superiorment per la gràfica de f i lateralment pels plans $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$.



A partir d'aquestes definicions i de certes propietats de les funcions de diverses variables, es poden obtenir els següents resultats.

Teorema 4.1.1. *Tota funció contínua en el rectangle R és integrable.*

Teorema 4.1.2. *Siguin f i g dues funcions integrables en R i sigui $c \in \mathbb{R}$ una constant, llavors:*

a) $f+g$ *és integrable en R. Es verifica* $\displaystyle\int_R (f+g)\,dx\,dy = \int_R f\,dx\,dy + \int_R g\,dx\,dy$

b) $c\,f$ *és integrable en R. Es verifica* $\displaystyle\int_R (c\,f)\,dx\,dy = c\int_R f\,dx\,dy$

Teorema 4.1.3. *Sigui R un rectangle tal que $R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_m$ on R_i són rectangles que tenen en comú com a molt un costat. Es verifica que si f és integrable per a cada R_i, $i = 1, \ldots, m$, llavors f és integrable en R. Es compleix que*

$$\int_R f\,dA = \sum_{i=1}^{m} \int_{R_i} f\,dA$$

Teorema 4.1.4. *Siguin f i g dues funcions integrables en R tals que $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in R$. Llavors*

$$\int_R f\,dA \leq \int_R g\,dA$$

El següent resultat conegut com el **Teorema de Fubini** és molt interessant ja que ens permetrà calcular les integrals dobles com a integrals d'una variable que ja sabem fer.

Teorema 4.1.5. *Sigui R el rectangle $R = [a,b] \times [c,d]$ i $f : R \to \mathbb{R}$, una funció contínua. Aleshores*

$$\int_R f\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Observació Existeixen funcions integrables que no són contínues a les quals també és pot aplicar el teorema de Fubini.

Exemple 4.1.1. *Sigui $R = [0,1] \times [0,1]$. Calculau* $\displaystyle I = \int_R (x^3 y - \sqrt{xy})dx\,dy$.

Com que la funció $f(x,y) = x^3 y - \sqrt{xy}$ és contínua en R podem aplicar el teorema de Fubini per calcular la integral. Ho podem fer de dues maneres (evidentment basta fer-ne una de les dues):

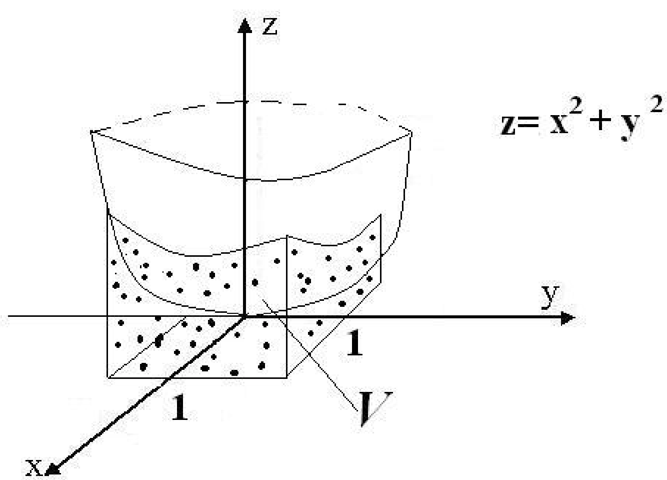
1. $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 (x^3 y - \sqrt{xy}) dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^4 y}{4} - \frac{2}{3} x \sqrt{xy} \right]_0^1 dy =$

$\displaystyle\int_0^1 (\frac{y}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{y})\, dy = \left[\frac{y^2}{8} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 y\sqrt{y} \right]_0^1 = -\frac{23}{72}\,.$

2. $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 (x^3 y - \sqrt{xy}) dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3 y^2}{2} - \frac{2}{3} y \sqrt{xy} \right]_0^1 dx =$

$\displaystyle\int_0^1 (\frac{x^3}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{x})\, dx = \left[\frac{x^4}{8} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 x\sqrt{x} \right]_0^1 = -\frac{23}{72}\,.$

Exemple 4.1.2. *Calculau el volum del sòlid limitat per la superfície* $z = x^2 + y^2$ *i el rectangle* $R = [-1,1] \times [-1,1]$.



Com que la funció $f(x,y) = x^2 + y^2$ és tal que $f \geq 0$ en R, llavors el volum se pot obtenir fent $\displaystyle\int_R f\, dA$ i ja que f és contínua, podem aplicar el teorema de Fubini:

$$V = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{-1}^1 dy = \int_{-1}^1 (\frac{2}{3} + 2y^2)\, dy =$$

$$\left[\frac{2}{3} y + \frac{2}{3} y^3 \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}\,.$$

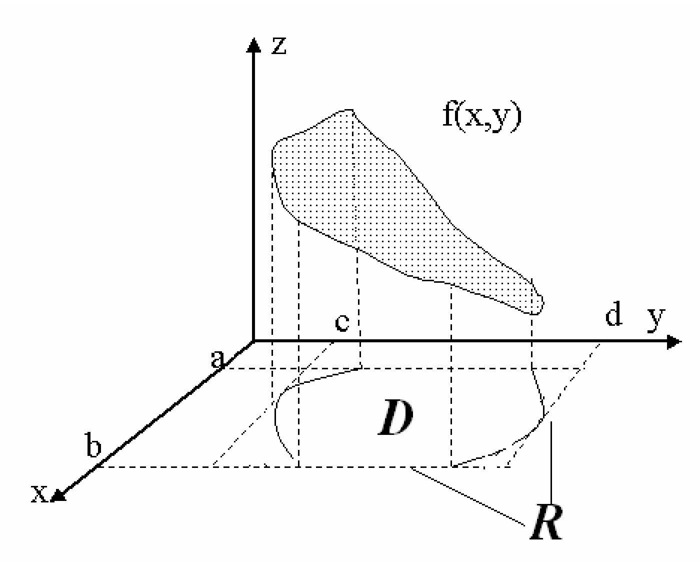
4.2 Integració en dominis més generals

Donarem ara una definició que ens permetrà considerar la integral doble sobre regions més generals que els rectangles abans considerats.

Definició 4.2.1. *Sigui D un subconjunt de $\mathbb{R}^2$ que està fitat. Sigui $f : D \to \mathbb{R}$ una funció que és integrable sobre un rectangle R tal que $D \subset R$. Podem estendre f en tot el rectangle R de la manera següent:*

$$f_1(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si \quad (x,y) \in D \\ \\ 0 & si \quad (x,y) \notin D \end{cases}$$

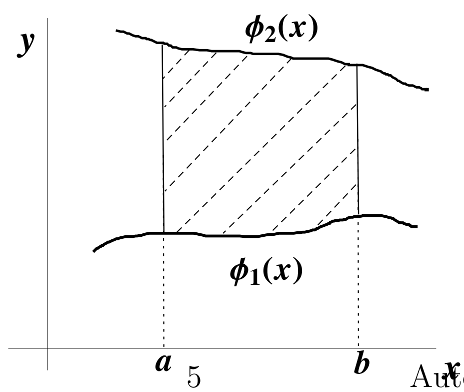
Llavors definim $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dA = \int_R f_1(x,y)\,dA\,.$



Consideram tres tipus de dominis en $\mathbb{R}^2$. (Un domini és un conjunt fitat i obert).

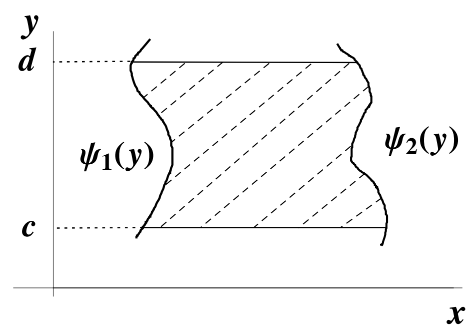
Domini de tipus 1. Siguin ϕ_1, $\phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ dues funcions contínues. D és un domini de tipus 1 si és de la forma:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$



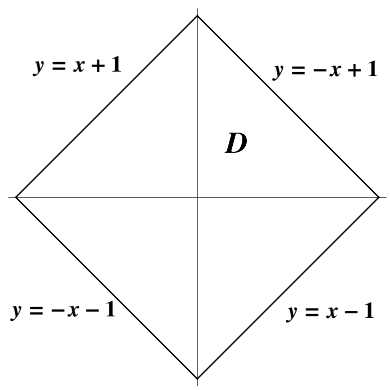
Domini de tipus 2. Siguin $\psi_1,\ \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ dues funcions contínues. D és un domini de tipus 2 si és de la forma:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$



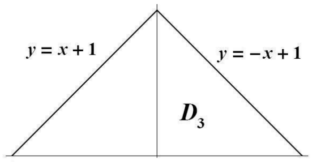
Domini de tipus 3. Direm que D és un domini de tipus 3 si és de tipus 1 i de tipus 2 a la vegada.

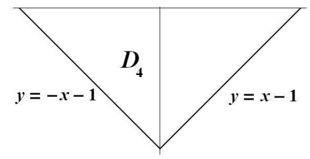
Observació Convé notar que hi ha regions que no són de cap dels tipus anteriors però que es poden descompondre en trossos que sí ho són, per exemple la regió D donada per:



es pot descompondre amb dues regions de tipus 1:

o dues regions de tipus 2:





El següent resultat basat en el teorema de Fubini ens proporciona un mètode per a calcular integrals sobre aquests dominis.

Teorema 4.2.1. *a) Sigui D un domini de tipus 1 i $f : D \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Aleshores*

$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

b) Sigui D un domini de tipus 2 i $f : D \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Aleshores

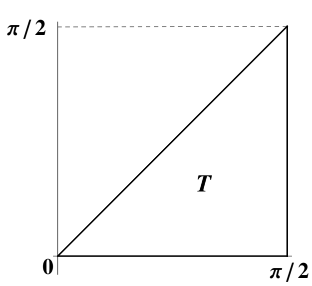
$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

El següent resultat és conseqüència del fet que la integral doble d'una funció positiva proporciona el volum que queda per davall de la superfície.

Corol.lari 4.2.1. *L'àrea d'un domini D es pot calcular per la següent integral:*

$$\int_D 1\,dA\,.$$

Exemple 4.2.1. *Calculau* $\displaystyle\int_T (x^3y+\cos x)\,dA$ *on T és el triangle de vèrtexs* $(0,0)$, $(\pi/2,0)$ *i* $(\pi/2,\pi/2)$.



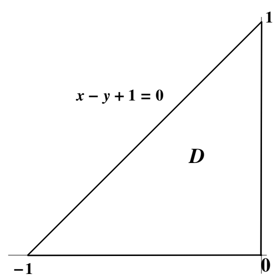
El triangle T ho podem escriure com $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leq x \leq \pi/2, \quad 0 \leq y \leq x\}$. Per tant és un domini de tipus 1. Aleshores

$$\int_T (x^3 y + \cos x)\, dA = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^x (x^3 y + \cos x)\, dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{x^3 y^2}{2} + y \cos x \right]_0^x dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^5}{2} + x \cos x \right) dx = \left[\frac{x^6}{12} + x \sin x + \cos x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1$$

Exemple 4.2.2. *Calculau el volum del tetraedre limitat pels plans* $x = 0, y = 0, z = 0$ *i* $z = 1 + x - y$.

Si feim $z = 0$ a l'equació del pla $z = 1 + x - y$ obtenim la recta $1 + x - y = 0$. Llavors el domini D ho podem escriure com $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leq y \leq 1, \quad y - 1 \leq x \leq 0\}$.



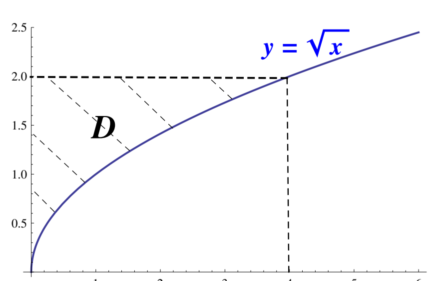
Per tant és un domini de tipus 2. Aleshores

$$\int_D (1 + x - y)\, dA = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^0 (1 + x - y)\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[x + \frac{x^2}{2} - yx \right]_{y-1}^0 dy =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (y^2 - 2y + 1) dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} - y^2 + y \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Observació Com és evident, els dominis de tipus 3 es poden integrar utilitzant qualsevol de les dues possibilitats donades al teorema anterior.

Exemple 4.2.3. *Calculau* $\int_D y(1 - \cos x)\, dA$ *on* D *és el domini limitat per* $x = 0, y = 2$ *i* $y = \sqrt{x}$.



El domini D és un domini de tipus 3 ja que ho podem escriure com:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 4, \quad \sqrt{x} \le y \le 2\} \ \text{(domini de tipus 1)}.$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le 2, \quad 0 \le x \le y^2\} \ \text{(domini de tipus 2)}.$$

Podem calcular la nostra integral de dues maneres:

$$\int_D y(1-\cos x)\, dA = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 y(1-\cos x)\, dy \right) dx = \int_0^4 \left[\frac{y^2}{2}(1-\cos x) \right]_{\sqrt{x}}^2 dx =$$

$$\int_0^4 \left(2 - \frac{x}{2}\right)(1-\cos x)\, dx = \left[2x - \frac{x^2}{4} - 2\sin x + \frac{1}{2}(\cos x + x\sin x) \right]_0^4 = \frac{7}{2} + \frac{\cos 4}{2}$$

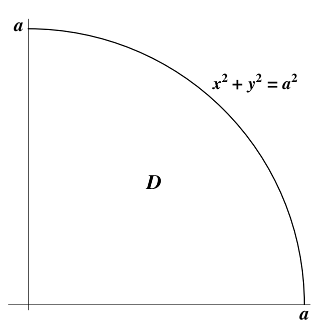
O també

$$\int_D y(1-\cos x)\, dA = \int_0^2 \left(\int_0^{y^2} y(1-\cos x)\, dx \right) dy = \int_0^2 [yx - y\sin x]_0^{y^2} dy =$$

$$\int_0^2 (y^3 - y\sin y^2) dy = \left[\frac{y^4}{4} + \frac{1}{2}\cos y^2 \right]_0^2 = \frac{7}{2} + \frac{\cos 4}{2}$$

De fet si estam integrant en dominis de tipus 3 a vegades potser molt interessant fer un canvi d'ordre d'integració per facilitar els càlculs.

Exemple 4.2.4. *Calculau* $I = \displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}\, dy \right) dx \qquad a > 0\,.$



Per calcular I tendríem primer que trobar una primitiva de la funció $f(y) = \sqrt{a^2-y^2}$.
Per fer-ho consideram el canvi de variable següent: $y = a\sin t\,,\ dy = a\cos t\, dt$

$$\int \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\; a \cos t\, dt = a^2 \int \cos^2 t\, dt$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{y}{a} + \frac{y}{a^2} \sqrt{a^2 - y^2} \right) .$$

On hem utilitzat: $t = \arcsin \frac{y}{a}$; $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \frac{y}{a^2} \sqrt{a^2 - y^2}$.

Ara tendríem que substituir els límits d'integració i després encara fer l'altra integral respecte a x, quedant una integral molt complicada.

Però si feim un canvi d'ordre d'integració tenim:

$$I = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2 - y^2}\, dx \right) dy = \int_0^a \left[x \sqrt{a^2 - y^2} \right]_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dy = \int_0^a (a^2 - y^2) dy =$$

$$\left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{2}{3} a^3 .$$

4.3 Canvi de variables en la integració múltiple

Moltes vegades per realitzar una integral és útil realitzar un canvi de variables. Ara donarem la definició formal d'un canvi de variables en dimensió n.

Definició 4.3.1. *Sigui* $D \subset \mathbb{R}^n$ *i* $g : D \to \mathbb{R}^n$. *Direm que* g *és una* ***transformació regular*** *en* D *si es verifica:*

1) g és diferenciable i la seva derivada és continua en D.

2) g és injectiva en D.

3) El determinant de la matriu jacobiana de g sigui distint de zero.

Si ens restringim a $\mathbb{R}^2$, el canvi de variables més utilitzat és el de les **coordenades polars** que podem definir per:

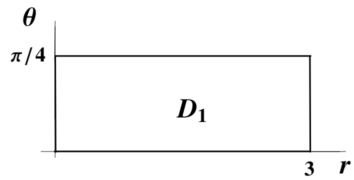
sigui $g : D \to \mathbb{R}^2$ on $D = (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ i $g(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. És molt fàcil comprovar que es verifiquen les dues primeres condicions de la definició anterior i també:

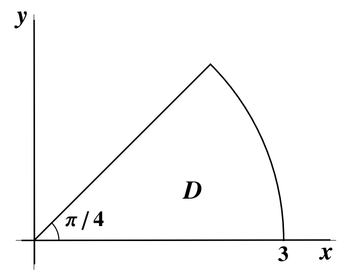
$$\det(J_g) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r \sin\theta \\ \sin\theta & r \cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0 \text{ en } D.$$

Un altre canvi de variables que pot ser útil és el de les **coordenades polars generalitzades** definit per:

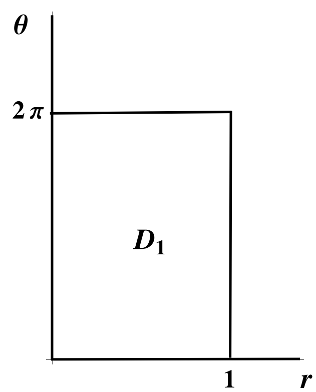
sigui $g : D \to \mathbb{R}^2$ on $D = (0, 1) \times [0, 2\pi)$ $a > 0, b > 0$ i $g(r, \theta) = (a\, r \cos\theta, b\, r \sin\theta)$ que verifica també les tres condicions d'una transformació regular i és té que $\det(J_g) = a\,b\,r$.

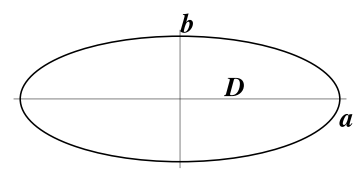
Observació Des d'un punt de vista geomètric les coordenades polars transformen rectangles en seccions circulars





i les coordenades polars generalitzades rectangles en seccions el.liptiques.





Podem donar ara el **teorema del canvi de variable** que ens permetrà canviar de variables quan sigui convenient.

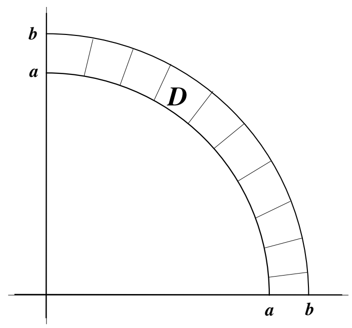
Teorema 4.3.1. *Sigui* $g : D_1 \to D$ *una transformació regular i sigui* $f : D \to \mathbb{R}$ *una funció integrable. Llavors*

$$\int_D f = \int_{D_1} (f \circ g)|det(J_g)|$$

Observació En el cas particular de les coordenades polars tendrem que:

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Exemple 4.3.1. *Calculau l'àrea de la regió del primer quadrant D limitada per les circumferències* $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$, *amb* $0 < a < b$.



Sabem que l'àrea es pot calcular per $A(D) = \int_D dx\, dy$.

Si consideram les coordenades polars els càlculs seran més senzills:

$$A(D) = \int_{D_1} r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\int_a^b r\, dr \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_a^b d\theta =$$

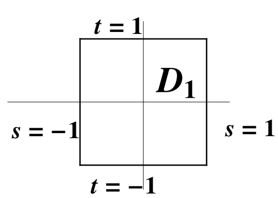
$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (b^2 - a^2) d\theta = \frac{1}{2} \left[(b^2 - a^2)\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2).$$

Exemple 4.3.2. *Calculau* $I = \int_D xy\, dx\, dy$ *on D es és paral.lelogram de la pàgina 52.*

Com hem comentat abans aquest domini és una unió de dues regions o bé de tipus 1 o bé de tipus 2, llavors per fer la integral hauríem de fer la suma de dues integrals.

$$I = \int_{D_1} xy\, dx\, dy + \int_{D_2} xy\, dx\, dy, \qquad \text{o bé} \qquad I = \int_{D_3} xy\, dx\, dy + \int_{D_4} xy\, dx\, dy.$$

En canvi si consideram les variables $s = x + y$, $t = x - y$, el paral.lelogram D es transforma en el quadrat D_1



Llavors considerant el canvi de variables invers $x = (s+t)/2$, $y = (s-t)/2$ podem definir la transformació regular

$$g(s, t) = \left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2} \right)$$

El determinant de la matriu jacobiana del canvi de variables ve donat per:

$$\det(J_g) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = |-1/2| = 1/2\,.$$

Per tant si aplicam el teorema del canvi

de variable per a calcular la integral tenim:

$$I = \int_{D_1} \left(\frac{s+t}{2}\right)\left(\frac{s-t}{2}\right)\frac{1}{2}\,ds\,dt = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(s^2-t^2)ds\right)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left[\frac{s^3}{3} - st^2\right]_{-1}^{1} dt = \frac{2}{8}\int_{-1}^{1}(\frac{1}{3} - t^2)dt = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 0\,.$$