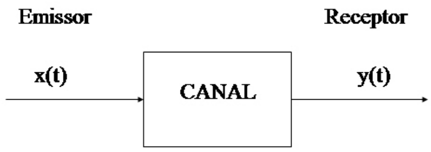
Tema 4. Anàlisi i processament de senyals aleatoris

La importància dels processos estocàstics en l'estudi dels sistemes de comunicacions

Un sistema de comunicacions es composa d'un senyal d'informació que s'envia a través d'un canal de transmissió des d'un emissor fins a un receptor. Esquemàticament:



L'efecte del canal damunt el senyal original es modela mitjançant una funció $h(t)$. Si el canal és un sistema lineal invariant en el temps (LTI), llavors $h(t)$ rep el nom de **resposta impulsional** del canal. La relació entre $x(t)$ i $y(t)$ és:

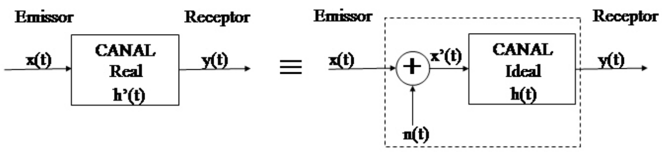
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)h(t-s)ds$$

Una altra manera d'expressar la relació entre l'entrada i la sortida del canal és utilitzant la transformada de Fourier. Per propietats d'aquesta transformada es té:

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

on $X(f)$, $Y(f)$ i $H(f)$ són les transformades respectives de $x(t)$, $y(t)$ i $h(t)$.

Qualsevol canal de transmissió real, a part de modificar el senyal original segons una certa funció $h(t)$, també modifica de manera aleatòria aquest senyal. Es diu llavors que el canal introdueix **renou**. Una manera freqüent de modelar un canal real és la següent:



És a dir, l'efecte del canal es modela afegint un terme aleatori $n(t)$ al senyal original. La suma d'aquests dos termes és el que entra en un canal ideal (no sorollós) amb resposta impulsional $h(t)$. Per tant:

$$y(t) = h(t) * x'(t)$$

on

$$x'(t) = x(t) + n(t)$$

La funció $n(t)$ és una funció que varia de manera aleatòria al llarg del temps. Es tracta per tant de la realització d'un **procés aleatori**. **L'estudi dels processos aleatoris ens permet** per tant **estudiar el comportament del renou en sistemes de comunicacions**. En molts de casos $n(t)$ es modela com un procés gaussià, per les seves propietats d'ergodicitat, que fan senzill l'estudi del seu comportament.

El comportament del renou quan passa pel canal ve determinat per l'expressió:

$$y(t) = h(t) * (x(t) + n(t)) = h(t) * x(t) + h(t) * n(t) = y_{\text{id}}(t) + n_{\text{canal}}(t)$$

on $y_{\text{id}}(t)$ és la sortida del canal ideal (sense renou) i $n_{\text{canal}}(t)$ és el renou de sortida del canal. Idealment es dessitja que aquest darrer terme sigui el més petit possible, per aconseguir-ho s'afegeixen a la sortida del canal uns sistemes anomenats **filtres** que modifiquen $h(t)$ per aconseguir que el renou de sortida sigui petit.

Des del punt de vista freqüencial, l'expressió $n_{\text{canal}}(t) = h(t) * n(t)$ s'escriu:

$$N_{\text{canal}}(f) = H(f) \cdot N(f)$$

on $N(f)$ és la transformada de Fourier de $n(t)$.

El problema és que $n(t)$ no és més que una realització d'un procés aleatori i pot tenir diferents formes, per tant no ens dóna una informació vàlida relativa al procés. Per aquest motiu, en lloc de calcular $N(f)$ es calcula la següent transformada:

$$S_N(f) = \mathcal{TF}\{R_N(\tau)\}$$

$S_N(f)$ s'anomena **densitat espectral de potència** del procés aleatori i és igual a la transformada de Fourier de la funció d'autocorrelació.

La raó d'utilitzar $S_N(f)$ en lloc de $N(f)$ és que la funció d'autocorrelació reflecteix bé el comportament temporal del procés: si el procés canvia ràpidament llavors esdevé ràpidament incorrelat amb si mateix i $R_X(\tau)$ decreix ràpidament; en canvi, si el procés varia lentament amb el temps llavors es manté correlat amb sí mateix durant un període gran i $R_X(\tau)$ decreix lentament. Això és degut a la propietat següent:

$$P(X(t)X(t+\tau) > \varepsilon) \leq \frac{\tau}{\varepsilon^2}(R_X(0) - R_X(\tau))$$

Per tant, la transformada de Fourier de $R_X(\tau)$ (la densitat espectral de potència) reflexa les freqüències implicades en el canvi del procés aleatori: altes freqüències indiquen canvis ràpids mentre que baixes freqüències indiquen canvis lents, igual que per a qualsevol altra senyal no aleatòria. En conclusió:

$$N_{\text{canal}}(f) = H(f) \cdot S_N(f)$$

Renou blanc Gaussià

És habitual que en molts de problemes de comunicacions el renou es modeli com un *renou blanc Gaussià amb mitjana* 0 *i densitat espectral de potència* $\frac{N_0}{2}$. Això significa que el renou es modela com un procés aleatori Gaussià $X(t)$, estacionari, amb una distribució de potència constant per a totes les freqüències: $S_X(f) = \frac{N_0}{2}$.

En conseqüència:

$$R_X(\tau) = \mathcal{TF}^{-1}\{S_N(f)\} = \frac{N_0}{2}\delta(t) \qquad \text{en particular:} \qquad R_X(0) = \frac{N_0}{2}$$

D'altra banda:

$$\begin{aligned} R_X(0) &= R_X(t,t) = E(X(t) \cdot X(t)) = E((X(t))^2) = \mathrm{Var}(X(t)) + E(X(t))^2 = \\ &= (\text{el procés té mitjana } 0) = \mathrm{Var}(X(t)) \end{aligned}$$

En conclusió:

$$X(t) \sim N(0, \frac{N_0}{2})$$