Classe pràctica 1. Enunciat

Prob 1 Sigui la variable aleatòria X que té per funció de densitat:

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, \qquad \text{per a } -\infty < x < \infty$$

a) Trobau el valor de a. **1.5 pt.**

b) Trobau la funció de distribució de X. **1.5 pt.**

c) Calculau el primer quartil de X, és a dir, el menor valor de x tal que $P(X \leq x) = \frac{1}{4}$ **2 pt.**

(Examen, juny 2009)

Prob 2 El volum que una màquina d'omplida automàtic diposita en llaunes d'una beguda gasosa té una distribució normal de mitjana 12,4 unces de líquid i desviació estàndard de 0,1 onces de líquid.

a. Quina és la probabilitat de que el volum dipositat sigui menor que 12 unces de líquid? **1 pt.**

b. Si es rebutgen les llaunes que tenen menys de 12,1 o més de 12,6 unces de líquid, quina és la proporció de llaunes rebutjades? **1 pt.**

c. Calculau especificacions que siguin simètriques respecte a la mitjana, de forma que s'inclogui al 99% de totes les llaunes. **1 pt.**

d. Quin valor ha de donar-se a la mitjana per a que el 99,9% de totes les llaunes continguin més de 12 unces de líquid? **1 pt.**

e. Quin valor ha de donar-se a la mitjana per a que el 99,9% de totes les llaunes contingui més de 12 unces de líquid si la desviació estàndard es pot reduir a 0,05 unces de líquid? **1 pt.**

(Examen, setembre 2009)

Classe pràctica 1. Solució

Prob 1 Sigui la variable aleatòria X que té per funció de densitat:

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, \qquad \text{per a } -\infty < x < \infty$$

a) Trobau el valor de a. **1.5 pt.**

b) Trobau la funció de distribució de X. **1.5 pt.**

c) Calculau el primer quartil de X, és a dir, el menor valor de x tal que $P(X \leq x) = \frac{1}{4}$ **2 pt.**

(Examen, juny 2009)

Solució:

a) Com és una funció de densitat s'ha de complir que a ha de ser positiu i

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} a \arctan x]_{-t}^{t} = a\frac{\pi}{2} - a\frac{-\pi}{2} = a\pi = 1$$

Aïllant tenim $a = \frac{1}{\pi}$.

b)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1/\pi}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{\pi} \arctan t]_{-\infty}^{x} = \frac{\arctan x}{\pi} + \frac{1}{2}$$

c) Hem de cercar x de forma que $F(x) = \frac{1}{4}$. És a dir,

$$\frac{\arctan x}{\pi} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Aïllant tenim $\arctan x = -\frac{\pi}{4}$. Per tant, $x = -1$

Prob 2 El volum que una màquina d'omplida automàtic diposita en llaunes d'una beguda gasosa té una distribució normal de mitjana 12,4 unces de líquid i desviació estàndard de 0,1 onces de líquid.

a. Quina és la probabilitat de que el volum dipositat sigui menor que 12 unces de líquid? **1 pt.**

b. Si es rebutgen les llaunes que tenen menys de 12,1 o més de 12,6 unces de líquid, quina és la proporció de llaunes rebutjades? **1 pt.**

c. Calculau especificacions que siguin simètriques respecte a la mitjana, de forma que s'inclogui al 99% de totes les llaunes. **1 pt.**

d. Quin valor ha de donar-se a la mitjana per a que el 99,9% de totes les llaunes continguin més de 12 unces de líquid? **1 pt.**

e. Quin valor ha de donar-se a la mitjana per a que el 99,9% de totes les llaunes contingui més de 12 unces de líquid si la desviació estàndard es pot reduir a 0,05 unces de líquid? **1 pt.**

(Examen, setembre 2009)

Solució:

Ens trobem amb una distribució $N(12,4;0,1)$

a) $P(X < 12) = P(Z < \frac{12-12,4}{0,1}) = P(Z < -4) = 1 - P(Z < 4) = 0,0000316712$

b) $P(X < 12,1) + P(X > 12,6) = P(Z < \frac{12,1-12,4}{0,1}) + P(Z > \frac{12,6-12,4}{0,1}) = P(Z < -3) + P(Z > 2) = 0,0241$

c) $P(-a < Z < a) = 0,99$, per tant, $P(Z < a) - P(Z < -a) = P(Z < a) - 1 + P(Z < a) = 2P(Z < a) - 1 = 0,99$. Aïllant, $P(Z < a) = 0,995$ que cercant a les taules ens dóna $a = 2,58$. Per trobar el valor de X tendríem

$$\frac{X - 12,4}{0,1} = 2,58; \qquad X = 12,658$$

Això ens diu que el valor superior a 12,4 és 12,658, és a dir augmentam 0,258. Per tant, el valor inferior serà 12,4-0,258=12,142.

Aleshores $P(12,142 < X < 12,658) = 0,99$

d) Tenim que $P(Z > z) = 0,999$, per tant, aquest valor de z és negatiu i equivaldria al valor positiu $-z$ que complís $P(Z < -z) = 0,999$, que és $-z = 3,09$.

Aquest valor correspondrà al valor 12 d'una variable aleatòria Y que segueix una distribució normal $N(\mu;0,1)$ per tant,

$$\frac{12 - \mu}{0,1} = -3,09 \qquad \mu = 12,309$$

e) Anàlogament al cas anterior, el valor de z que compleix $P(Z > z) = 0,999$ és $z = -3,09$.

Ara bé, aquest valor correspon al valor 12 d'una variable aleatòria $N(\mu;0,05)$, per tant,

$$\frac{12 - \mu}{0,05} = -3,09 \qquad \mu = 12,1545$$