4 Classes Pràctiques d'Espais Vectorials

Classe pràctica 1

Prob 4.1 Considerem l'espai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ amb } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Demostrau que F és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. **3 pt.**

b) Trobau un sistema generador de F. **2 pt.**

(Examen, febrer 2006. Primer apartat i part del segon)

Prob 4.2 Donats els espais vectorials $V =< (1, 2, 3), (-1, 0, 2) >$ i $W = \{(x, y, z)|y - 2x = 0\}$,

a) És W un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$? Raonau la resposta. **2 pt.**

b) Quina o quines equacions han de complir x, y i z per poder dir que $(x, y, z) \in V$?. Expressau l'espai vectorial V en una forma semblant a com està expressat l'espai vectorial W. **3 pt.**

(Examen, febrer 2005. Primer i segon apartats)

Solució classe pràctica 1

Prob 4.1 Considerem l'espai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ amb } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Demostrau que F és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. **3 pt.**

b) Trobau un sistema generador de F. **2 pt.**

(Examen, febrer 2006. Primer apartat i part del segon)

Solució:

a) Hem de veure que si $u, v \in F$ i $t, s \in \mathbb{R}$, aleshores $tu + sv \in F$.

Siguin $t, s \in \mathbb{R}$ i $u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ b' & c' & a' \end{pmatrix} \in F$.

Vegem que $tu + sv \in F$. Efectivament,

$$t\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ b' & c' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & tb & tc \\ tb & tc & ta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sa' & sb' & sc' \\ sb' & sc' & sa' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta+sa' & tb+sb' & tc+sc' \\ tb+sb' & tc+sc' & ta+sa' \end{pmatrix} \in F$$

b) Un element qualsevol d'F el podem posar de la següent forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

és un sistema generador de F.

Prob 4.2 Donats els espais vectorials $V =< (1, 2, 3), (-1, 0, 2) >$ i $W = \{(x, y, z) | y - 2x = 0\}$,

a) És W un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$? Raonau la resposta. **2 pt.**

b) Quina o quines equacions han de complir x, y i z per poder dir que $(x, y, z) \in V$?. Expressau l'espai vectorial V en una forma semblant a com està expressat l'espai vectorial W. **3 pt.**

(Examen, febrer 2005. Primer i segon apartats)

Solució:

a) $W = \{(x, y, z) | y - 2x = 0\}$

Sigui $(x, y, z), (x', y', z') \in W$ es compleix:

1) $y - 2x = 0$ i 2) $y' - 2x' = 0$ (2)
Vegem primer $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \in W$. Efectivament, per (2):

$$(y + y') - 2(x + x') = y - y' - 2x - 2x' = (y - 2x) + (y' - 2x') = 0 - 0 = 0$$

Per tant, compleix el requisit per esser un element de W

En segon lloc veurem si $s(x, y, z) = (sx, sy, sz) \in W$. Efectivament, per (2)

$$sy - 2sx = s(y - 2x) = s.0 = 0$$

i també compleix el requisit de pertànyer a W, aleshores W és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$

b) Si $(x, y, z) \in V$ aleshores $\{(1, 2, 3), (-1, 0, 2), (x, y, z)\}$ són linealment dependents i per tant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad 4x - 5y + 2z = 0$$

D'aquí deduïm $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4x - 5y + 2z = 0\}$