2 Determinants

Prob 2.1 Comprovau amb les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Prob 2.2 Calculau els determinants següents[1]

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad e) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Prob 2.3 Comprovau sense fer els càlculs que els següents determinants són nuls:

$$\begin{vmatrix} 123 & -97/2 \\ -246 & 97 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & -47 & -29 \\ -9/2 & 1 & 3 \\ -3 & 2/3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}$$

Prob 2.4 Aplicant les propietats dels determinants calculau: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$. Expressau el resultat final en forma de producte de tres factors.

(Examen, juny 2004)

Prob 2.5 Calculau els determinants següents[2]

$$a) \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad c) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

[1] a) 1; b) -91; c) 7; d) -510; e) 3^6

[2] a) $ab(b-a)$; b) 1; c) $(a+3)(a-1)^3$; d) $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$; e) $(x+1)^{n-1}$

$$d)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \qquad e)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & x & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & -1 & x & \dots & \dots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & x \end{vmatrix}$$

Prob 2.6 Calculau el següent determinant[1] sabent que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 1$

$$\begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ 3p+a & 3q+b & 3r+c \\ 2p & 2q & 2r \end{vmatrix}$$

(Examen, febrer 2002)

Prob 2.7 Calculau el següent determinant[2]

$$\begin{vmatrix} a^2-b^2 & a(a+b) & -b(a+b) \\ \ln(ab) & \ln a & \ln b \\ \sqrt{12} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

(Examen, febrer 2000)

Prob 2.8 Demostrau, sense desenvolupar el determinant, la següent igualtat:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)^3$$

(Examen, setembre 2000)

Prob 2.9 Sabent que els nombres 147, 336 i 189 són divisibles per 21 provau, sense calcular, que el següent determinant també és divisible per 21:

$$\begin{vmatrix} -4 & -3 & -8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

(Examen, febrer 2003)

Prob 2.10 Aplicant les propietats de determinants (sense aplicar la regla de Sarrus) calculau el següent determinant i indicau per a quins valors d'x es fa 0

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & 1 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix}$$

(Control, curs 07/08)

[1] -2
[2] 0

Prob 2.11 Calculau les inverses (si existeixen) de les matrius següents.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prob 2.12 Calculau el rang de les següents matrius segons els valors dels diferents paràmetres:

$$a) \begin{pmatrix} m & 2 & 0 & m \\ 3 & -1 & 0 & m \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 3 & a+1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} t & 1 & 2s & 1 \\ 2s & 1 & 2s & 1+3t \\ s & 0 & s & 2t \end{pmatrix}$$