

## Cas continu

Recordatori:

una **v.a. contínua** és aquella que pot prendre un nombre infinit de valors. Per aquest motiu no es pot definir la funció de probabilitat d'una v.a. contínua, però sí la seva funció de distribució i també una **funció de densitat**, que ens informa de com es distribueix la probabilitat entre els valors de la variable.

*Exemple 5:*

*Experiment=triar a l'atzar un valor entre 0 i 1,  $X$ =valor triat*

En aquest tema:

Es diu que dues variables aleatòries  $X$  i  $Y$  són **conjuntament contínues** si les probabilitats dels successos associats a  $(X, Y)$  es poden expressar en termes de la integral (doble) d'una **funció de densitat de probabilitat**  $f_{XY}(x, y)$ .

### Propietats

1.  $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$
2. Funció de densitat marginal de  $X$ :  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$
3. Funció de densitat marginal de  $Y$ :  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$
4. Donat un conjunt  $A$ :  $P((X, Y) \in A) = \iint_A f_{XY}(x, y) dx dy$
5. Funció de distribució conjunta:  $F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(x, y) dx dy$
6.  $f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$
7. si  $X$  i  $Y$  són v.a. independents:  $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

*Exemple 6:*

*(Exercici 2ab) La funció de densitat conjunta de dues variables aleatòries absolutament contínues és:*

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x + xy) & \text{si } (x, y) \in (0, 1)^2 \\ 0 & \text{en tot altre cas} \end{cases}$$

- a) Determinau  $k$ .
- b) Trobau les funcions de densitat marginals.

*Exemple 7:*

*(Exercici 8abc) Un proveïdor de serveis informàtics té una quantitat  $X$  de cents d'unitats d'un cert producte al principi de cada mes. Durant el mes es venen  $Y$  cents d'unitats del producte. Suposem que  $X$  i  $Y$  tenen una densitat conjunta donada per*

$$f(x, y) = \begin{cases} 2/9 & \text{si } 0 < y < x < 3 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

- a) Comprovau que  $f$  és una densitat.
- b) Determinau  $F_{X,Y}$ .
- c) Calculau la probabilitat que a final de mes s'hagi venut com a mínim la meitat de les unitats que hi havia inicialment.

*Exemple 8:*

*(Exercici 4a) Les variables aleatòries  $X_1$  i  $X_2$  són independents i amb densitat comú*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

*Determinau la densitat de  $Y = X_1 + X_2$ .*

Exercicis proposats: 4b, 5, 15, 16a, 3