Fonaments Matemàtiques II

Àlgebra Lineal

Departament de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears

Manuel Moyà Quintero

Índex

Capítol 2

Determinants

Definició 2.1 *Donarem una definició recursiva del **determinant** d'una matriu quadrada.*

Per a $n = 1$, el determinant de la matriu $A = (a_{11})$ és $|A| = |a_{11}| = a_{11}$,

per a $n \geq 2$ el determinant d'una matriu quadrada d'ordre n, $A = (a_{ij})$, és la suma

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

on A_{ij} és el nombre que obtenim multiplicant $(-1)^{i+j}$ pel determinant de la matriu C_{ij} que s'obté eliminant la fila i i columna j de la matriu A.

Per tant, si l'ordre d'A és n, l'ordre de C_{ij} és $n-1$.

Donat l'element a_{ij} de A, anomenam **menor complementari** de a_{ij}, al determinant que s'obté de la matriu A eliminant la filera i i la columna j. El representarem per M_{ij}.

A A_{ij} l'anomenarem **adjunt** de l'element a_{ij}. Per tant, $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Tenint en compte aquesta nomenclatura, podem dir que el determinant d'una matriu quadrada és igual als elements de la primera fila pels seus adjunts.

Proposició 2.2 *En el cas d'una matriu $A = (a_{ij})$, d'ordre 2, el determinant és*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

DEMOSTRACIÓ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

Ara bé, com $A_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}| = a_{22}$ i $A_{12} = (-1)^{1+2}|a_{21}| = -a_{21}$ tenim

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Notem que en cada sumand hi ha un element de cada filera i un de cada columna.

Exemple:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = -19$$

Proposició 2.3 *En el cas d'una matriu d'ordre 3, el determinant és*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ \quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \end{array}$$

DEMOSTRACIÓ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Però

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32};$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{21}a_{31}$$

substituint tenim

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{21}a_{31}) =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Notem que en cada sumand hi ha un element de cada filera i un de cada columna.

Observem la següent regla per calcular un determinant d'ordre 3, anomenada la **Regla de Sarrus**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

que si observam aquest resultat l'obtenim sumand els productes de les diagonals de tres elements que van cap a la dreta i restant el producte dels elements de les diagonals de tres elements que van cap a l'esquerra.

Exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) - (-2) \cdot 3 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 1 = 64$$

Teorema 2.4 *El determinant d'una matriu $A = (a_{ij})$ d'ordre n és igual als elements d'una fila (resp. columna) pels seus adjunts,*

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

o bé

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

No es fa la demostració, ja que està fora dels objectius d'aquest curs.

Exemple:

Desenvoluparem el determinant següent pels elements de la segona fila,

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 14 + 24 + 26 = 64$$

Es compleix que en cada sumand hi ha un element de cada filera i un de cada columna i hi ha tants de sumands com possibilitats hi ha de triar un element i només un element de cada fila i de cada columna.

Si designem a les fileres de A per $A_1, \ldots, A_n$, també representarem el determinant de A per $|A| = D(A_1, \ldots, A_n)$.

Nota: En aplicacions dels determinants en problemes reals, un determinant d'una matriu 25×25 és pot considerar com un determinant d'una matriu petita. Ara bé, el càlcul del determinant per el procediment vist anteriorment requereix tal quantitat de càlculs que un superordinador que pogués fer un bilió de multiplicacions per segon, hauria de treballar més de 500 000 anys per a efectuar aquest càlcul. Per aquest motiu cercarem un altre procediment pel càlcul de determinants.[5]

Proposició 2.5 *El determinant d'una matriu triangular és igual al producte dels elements de la diagonal principal*

DEMOSTRACIÓ:

Ho farem per inducció sobre l'ordre de la matriu.

Per a $n = 1$, $A = (a_{11})$

$$|a_{11}| = a_{11} \text{ (per definició)}$$

Suposem cert per a $n-1$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1(n-1)} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{i(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\ldots a_{(n-1)(n-1)}$$

Vegem que és cert per a n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} a_{11}(a_{22}\dots a_{nn}) = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$$

(1) Per hipòtesi d'inducció

Proposició 2.6 *(***Propietats***)*

1. *Si un determinant té una fila o columna de zeros, el determinant és 0.*

2. *Si dues files (resp. columnes) de A permuten entre si, el determinant de la nova matriu és* $-|A|$*.*

3. *Si una fila (resp. columna) de A es multiplica per un escalar* t*, el determinant de la nova matriu és igual a* $t|A|$*.*

4. *Si dues files (resp. columnes) de A són iguals o proporcionals,* $|A| = 0$*.*

5. *Si una matriu té una fila (resp. columna) que és suma de dos nombres, el seu determinant és igual a la suma d'altres dos determinants, un amb el primer sumand i l'altre amb el segon sumand.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. *Si en una matriu quadrada, una fila (resp. columna) és combinació lineal de les altres, el determinant és 0.*

7. *Si a una fila (resp. columna) li sumam un nombre t multiplicat per una altra fila (resp. columna), el determinant no varia*

8. *Si a una fila (resp. columna) de A la sumem una combinació lineal de les altres, el determinant no varia.*

Demostració:

1) Considerem el determinant següent que el desenvoluparem pels elements de la fila i que són tots zeros,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{i1} + 0 \cdot A_{i2} + \dots + 0 \cdot A_{in} = 0$$

2) Ho farem per inducció.

Per a $n = 2$ es compleix, ja que si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

tenim que $|B| = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -|A|$

Suposem que és cert per a $n-1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{j(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{j(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

Vegem que és cert per a n. Siguin les matrius A i B següents:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cerquem $|B|$. Per això desenvolupam pels elements d'una fila que no sigui cap de les que es permuten. Sense perdre generalitat podem suposar que és la fila 1

$$|B| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{j(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= -a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \dots - a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{j(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{11}A_{11} - \dots - a_{1n}A_{1n} = -(a_{11}A_{11} + \dots + a_{1n}A_{1n}) = -|A|$$

(1) Per hipòtesi d'inducció.

3) Sigui

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{i1} & ta_{i2} & \dots & ta_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cerquem el que val $|B|$ i per a això el desenvoluparem pels elements de la fila i

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{i1} & ta_{i2} & \dots & ta_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= ta_{i1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)2} & a_{(i-1)3} & \dots & a_{(i-1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i+1)2} & a_{(i+1)3} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + ta_{in}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= ta_{i1}A_{i1} + \dots + ta_{in}A_{in} = t(a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}) = t|A|$$

4) Si una matriu A té dues files iguals, aleshores si permutam les dues files iguals, la matriu ens queda la mateixa, però el determinant canvia de signe, segons hem vist a l'apartat anterior, per tant tenim que $|A| = -|A|$ i aïllant, $2|A| = 0$ i $|A| = 0$.

Si la matriu A té dues files proporcionales, tenim

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{i1} & ta_{i2} & \dots & ta_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} t \cdot 0 = 0$$

(1) Per la propietat anterior.
(2) Ja que té dues files iguals.

5) Desenvolupam el determinant inicial pels elements de la fila i (la que és suma de dos nombres),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{i1}+b_{i1})A_{i1}+\ldots+(a_{in}+b_{in})A_{in} =$$

$$= a_{i1}A_{i1}+\ldots+a_{in}A_{in}+b_{i1}A_{i1}+\ldots+b_{in}A_{in} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6) És conseqüència de les dues anteriors.
7)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+ta_{j1} & a_{i2}+ta_{j2} & \dots & a_{in}+ta_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{j1} & ta_{j2} & \dots & ta_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(1) Per la propietat 5; (2) Per la propietat 3; (3) Per la propietat 4

8) És conseqüència immediata de 7

Exemple 1: El següent determinant és zero, ja que té una fila on tots són zeros.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Exemple 2: El següent determinant canvia de signe, ja que permutam dues columnes.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Exemple 3: En el següent determinant podem treure fora del determinant un factor.

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & 15 \\ -1 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemple 4: El següent determinant és zero, ja que té dues columnes proporcionals (la segona és el doble de la primera).

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \\ 6 & -12 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemple 5: El següent determinant és zero, ja que la primera fila és combinació lineal de les altres dues (dues vegades la segona més la tercera),

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemple 6: Vegem ara una utilitat important de les propietats dels determinant que ens servirà per calcular determinant d'ordre major de 3, i és fer tot zeros excepte un, en una fila o columna, per poder desenvolupar el determinant per aquesta fila o columna. En el següent exemple mantindrem l'element (4,2) i farem zeros la resta dels elements de la segona columna.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -11 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} -7 & 0 & -16 & -37 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -11 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -7 & -16 & -37 \\ 2 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & -11 \end{vmatrix} = 450$$

(1) A la 3a fila li restam la 4a; (2) A la 1a fila li restam la 4a multiplicada per 5; (3) Desenvolupam el determinant pels elements de la 2a columna.

Nota: Calcular un determinant $n \times n$ usant operacions per fila requereix aproximadament $2n^3/3$ operacions aritmètiques. Qualsevol ordinador modern pot calcular un determinant 25×25 en una fracció de segon, ja que només es requereixen aproximadament 10 000 operacions.[5]

Proposició 2.7 *El determinant d'A és igual al de la seva transposada.*

DEMOSTRACIÓ:

Ho farem per inducció sobre l'ordre del determinant.

Per a $n = 1$ es compleix de forma evident.

Suposem que és cert per a $n - 1$

Vegem que es compleix per a n.

Es pot comprovar fàcilment que les matrius corresponents a l'adjunt de l'element (i, j) de la matriu A i la corresponent a l'adjunt de l'element (j, i) de A^t són transposades l'una de l'altra. Per tant si desenvolupam la matriu $B = A^t$ pels elements de la primer columna tenim:

$$|B| = |A^t| = a_{11}B_{11} + a_{12}B_{21} + \ldots + a_{1n}B_{n1}$$

però com hem dit abans, les matrius corresponents als adjunts B_{ij} i A_{ji} són transposades i d'ordre $n - 1$, per tant, per hipòtesi d'inducció $B_{ij} = A_{ji}$. Aleshores

$$|A^t| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = |A|$$

Proposició 2.8 *Si A i B són dues matrius d'ordre n, $|AB| = |A||B|$.*

La demostració d'aquesta proposició surt dels objectius d'aquests apunts.

Proposició 2.9 *Si A és una matriu quadrada d'ordre n la suma dels productes dels elements d'una fila (resp. columna) pels adjunts d'una paral·lela és zero.*

DEMOSTRACIÓ:

Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ i consideram la suma dels productes dels elements de la fila i pels adjunts de la fila j tendríem

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}$$

Vegem que aquesta suma és zero. Si consideram la matriu $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ on la fila i i j són iguals tenim, per aquest motiu, que $|B| = 0$; però si desenvolupam aquest determinant pels elements de la fila j tenim:

$$|B| = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0$$

que era el que volíem veure.

Proposició 2.10 *Una matriu quadrada $A \in M(n)$ té inversa si i només si $|A| \neq 0$. I en aquest cas,*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$$

on B és la matriu que té per elements (i, j) l'adjunt de l'element (j, i).

DEMOSTRACIÓ:

$\Longrightarrow$) Si té inversa vol dir que existeix A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I$, per tant, $|A \cdot A^{-1}| = |I| = 1$. Però per la proposició 2.8 tenim

$$|A \cdot A^{-1}| = |A||A^{-1}| = 1$$

i com el producte és diferent de zero tenim $|A| \neq 0$.

$\Longleftarrow$) S'ha de complir que $A \cdot A^{-1} = I$,

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1i} & A_{2i} & \dots & A_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Calculem l'element (i, j) on $i \neq j$, del producte de les dues matrius. Per això multiplicarem la fila i de la primera per la columna j de la segona

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}$$

tenim que aquesta expressió és la suma dels productes de la fila i de la matriu A pels adjunts de la fila j, que segons hem vist a la proposició 2.9 és zero.

Calculem ara l'element (i, i)

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

que és $|A|$ (per definició del determinant d'una matriu). Per tant tenim

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1i} & A_{2i} & \dots & A_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, cerquem la inversa d'aquesta matriu. Primer veurem si en té, i per a això cercarem $|A|$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 3$$

i ara cerquem B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Adj\ A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 37 & -10 & 2 \\ -9 & 3 & 0 \\ 17 & -5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} 37 & -9 & 17 \\ -10 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 37 & -9 & 17 \\ -10 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuació tenim dues proposicions, que no es demostraran, que ens ajudarà a cercar el rang d'una matriu.

Proposició 2.11 *Les files (resp. columnes) d'una matriu quadrada són linealment independents si i només si* $|A| \neq 0$.

Exemple: Determinau si són dependents o independents les files de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

Solució:

Cerquem el determinant corresponent a la matriu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

per tant són linealment independents.

Definició 2.12 *S'anomena* ***menor*** *de A al determinant d'una submatriu quadrada de A.*

Exemple: Trobau menors de diferent ordre de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & -6 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

No té menors d'ordre 4, ja que no podem trobar cap matriu de quart ordre.

Exemples de menors de 3r ordre serien: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -6 & -2 \end{vmatrix}$ que l'obtendríem eliminant la tercera columna; $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -6 & 7 & -2 \end{vmatrix}$ que l'obtendríem eliminant la primera columna; etc.

Exemples de menors de 2n ordre serien: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$ que l'obtendríem eliminant la segona fila i les columnes segona i tercera; $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ que l'obtendríem eliminant la tercera fila i les columna primera i tercera; etc.

Exemples de menors de 1r ordre serien: $|1|$ que s'obtendria eliminant les files primera i tercera i les columnes primera, tercera i quarta; etc.

Proposició 2.13 *El rang d'una matriu A és igual a l'ordre del major menor no nul.*

Exemple 1: Donada la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ trobau el seu rang.

Cerquem els menors de tercer ordre, que només en té un:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant tots els menors de tercer ordre (en aquest cas només 1) són zero, per tant, el rang ha de ser menor que 3.

Cerquem si hi ha algun menor de segon ordre diferent de zero, en aquest cas el rang seria 2. Si tots els menors de segon ordre fossin zero, el rang hauria de ser menor que 2. En aquest cas considerem que menor que s'obté eliminant la tercera fila i la tercera columna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

com hem trobat un menor de segon ordre diferent de zero, el rang és 2.

En el següent exemple cercarem el rang d'una matriu amb paràmetres i combinarem els dos procediments que hem vist: per menors i per Gauss

Exemple 2: Trobau el rang de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -a & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & a+2 & -5 \end{pmatrix}$ segons els valors del paràmetre a.

Considerem el menor de 3r ordre, i vegem quan és diferent de zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -a & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -a - 2 = 0$$

a) Quan $a \neq -2$ hem trobat un menor de 3r ordre diferent de zero, per tant el rang de la matriu és 3.

b) Quan $a = -2$ tendríem la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ i per cercar el rang ho farem per Gauss, ja que en cas contrari hauríem de mirar si tots els altres menors de 3r ordre són zero per poder dir que el rang és menor que 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant el rang és 2.

Índex alfabètic