7 Espais Euclidians

Prob 7.1 Quines de les següents funcions defineixen un producte escalar?:

a) $<(x_1,x_2),(y_1,y_2)>=x_1y_1+2x_2y_2+2y_1x_2-3x_1y_2$.

b) $<(x_1,x_2),(y_1,y_2)>=x_1y_1-x_2y_2$.

c) $<(x_1,x_2),(y_1,y_2)>=x_1y_1+2x_1y_2+3y_1x_2+7x_2y_2$.

d) $<(x_1,x_2),(y_1,y_2)>=x_1y_1+2x_2y_2+3x_1y_2+3x_2y_1$.

e) $<(x_1,x_2),(y_1,y_2)>=2x_1y_1+3x_2y_2+2x_1y_2+2x_2y_1$.

Justificau les respostes. Trobau la matriu, en la base canònica, d'aquelles funcions que siguin producte escalar.

Prob 7.2 En l'espai vectorial $M_3(\mathbb{R})$ de les matrius reals d'ordre 3, demostrau que: $<A,B>=tr(A\,B^t)$ és un producte escalar.

Prob 7.3 Sigui E un espai euclidià. Demostrau per a tot $x,y\in E$ les igualtats següents :

a) $2(\|x\|^2+\|y\|^2)=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2$ (llei del paral.lelogram).

b) $4<x,y>=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2$.

c) $2<x,y>=\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2$.

Prob 7.4 Sigui $\mathbb{R}^n$ l'espai vectorial euclidià amb el producte escalar habitual. Considerem el conjunt de vectors $\{u_1,u_2,u_3\}$ on $u_1=(3,1,1)$, $u_2=(-1,2,1)$ i $u_3=(\frac{-1}{2},-2,\frac{7}{2})$. Demostrau que és una base ortogonal de V i trobau les coordenades d'un vector qualsevol $u=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ en aquesta base.

Prob 7.5 Utilitzau el mètode de Gram-Schmidt per a trobar una base ortonormal del subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors $u=(-1,2,0)$ i $v=(2,0,-3)$.

Prob 7.6 Utilitzau el mètode de Gram-Schmidt per a trobar una base ortonormal del subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $u=(8,2,3,-2), v=(2,5,-1,2)$ i $w=(4,-8,5,-6)$.

Prob 7.7 Sigui $\mathbb{R}[x]$ l'espai vectorial dels polinomis a coeficients reals. Consideram el següent producte escalar,

$$<p,q>=\int_{-1}^{1}p(t)q(t)dt, \quad \text{amb} \quad p,q\in\mathbb{R}[x].$$

Aplicant el mètode de Gram-Schmidt al conjunt $\{1,t,t^2,\ldots,t^n,\ldots\}$ s'obtenen els *polinomis de Legendre normalitzats*. Calculau els tres primers polinomis de Legendre.

Prob 7.8 Considerem el subespai $S=\langle\{(1,0,1,0),(0,2,0,2)\}\rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

a) Calculau $S^\perp$, la seva dimensió i una base.

b) Comprovau que $\mathbb{R}^4=S\oplus S^\perp$.

c) Calculau la projecció ortogonal dels vectors $(1,1,1,1)$ i $(1,0,1,1)$ sobre S i explicau el seu significat.

Prob 7.9 Considerem el subespai $S =< x,\ x^2 - 3 >$ de l'espai vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ i el següent producte escalar a $\mathbb{R}_3[x]$ definit per

$$< p, q >= \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

a) Calculau $S^\perp$, la seva dimensió i una base.

b) Comprovau que $\mathbb{R}_3[x] = S \oplus S^\perp$ i que els vectors de les bases de S i del seu complement ortogonal són ortogonals.

c) Calculau la projecció ortogonal del vector x^3 i explicau el seu significat.

Prob 7.10 Sigui E un espai euclidià, i α l'angle format pels vectors x, y de E. Es defineix el cosinus de l'angle α per:

$$\cos(\alpha) = \frac{< x, y >}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Trobau l'expressió analí tica de la norma d'un vector i el cosinus de l'angle de dos vectors en $\mathbb{R}^2$ per aquelles funcions del problema 7.1 que siguin producte escalar.

Prob 7.11 Sigui $\mathbb{R}_2[t]$ l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals de grau menor o igual a 2. Consideram el següent producte:

$$< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)dt, \quad \text{amb} \quad p, q \in \mathbb{R}_2[t].$$

a) Demostrau que $< p, q >$ és un producte escalar a l'espai vectorial $\mathbb{R}_2[t]$. **(0.75 pt.)**

b) Trobau una base ortonormal d'aquest espai euclidià. **(0.75 pt.)**

(Examen, juny 2000)

Prob 7.12 Siguin els polinomis $p_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $p_2(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t$ i $p_3(t) = at^2 + bt + c$. Definim el següent producte escalar:

$$< p, q >= \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt, \quad \text{amb} \quad p, q \in \mathbb{R}_2[t].$$

on $\mathbb{R}_2[x]$ és l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals de grau menor o igual a 2.

a) Comprovau que els polinomis $p_1(t)$ i $p_2(t)$ són ortonormals entre sí respecte al producte escalar anterior. **(0.75 pt.)**

b) Trobau els coeficients a, b i c de $p_3(t)$ per tal que $p_1(t)$, $p_2(t)$ i $p_3(t)$ formin una base de vectors ortonormals de $\mathbb{R}_2[x]$ respecte a aquest producte escalar. **(0.75 pt.)**

(Examen, setembre 2000)

Prob 7.13 Sigui $< ., . >$ un producte escalar en un espai vectorial real, i sigui $\|.\|$ la norma associada a aquest producte escalar. Demostrau que les següents identitats són certes.

a) $\|cx+y\|^2 = c^2\|x\|^2 + 2c < x, y > +\|y\|^2$. **(0.5 pt.)**

b) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y^2\|$. **(0.5 pt.)**

(Examen, juny 2001)

Prob 7.14 Considerem el següent producte escalar definit en $\mathbb{R}_2[t]$:

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt, \quad \text{amb} \quad p, q \in \mathbb{R}_2[t].$$

Considerem ara els polinomis de $\mathbb{R}_2[t]$ $u_1(t) = a$, $u_2(t) = bt + c$ i $u_3(t) = dt^2 + et + f$. Quins valors han de tenir les constants a, b, c, d, e, f per tal que u_1, u_2 i u_3 formin una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[t]$? **(1 pt.)**
(Examen, setembre 2001)

Prob 7.15 Considerem el supespai vectorial de $\mathbb{R}^4$,

$$V =< (1, 1, 0, -1), (1, 0, 0, 4), (2, 0, 1, -1) >,$$

on hem definit el producte escalar usual.

a) Aplicant el mètode d'ortogonalizació de Gram-Scmidt cercau una base ortonormal de V. **0.75 pt.**

b) Si designem per $S =< (1, 1, 0, -1), (1, 0, 0, 4) >$ trobau el seu complement ortogonal. **0.75 pt.**

c) Trobau la projecció ortogonal de (1,2,3,-3) sobre S i sobre $S^\perp$ **0.5 pt.**

(Examen, febrer 2005)

Prob 7.16 Considerem la funció $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida per

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

a) Demostrar que és un producte escalar. **1 pt**

b) Trobau una base ortonormal del subespai vectorial S generat pels vectors $u = (1, 1, 2)$ i $v = (1, -1, 0)$. **1 pt**

c) Calculau $S^\perp$. **1 pt**

(Examen, juny 2005)

Prob 7.17 a) Indicau si alguna o les dues funcions següents formen un producte escalar. **1 pt**

- $< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1y_1 + 2x_1y_2$.
- $< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1y_1 + 2x_2y_2$

Nota: Els apartats següents es refereixen a la o les funcions anteriors que siguin producte escalar.

b) Trobau la matriu coordenada i escriviu la seva expressió coordenada. **0.5 pt**

c) Trobau l'expressió en coordenades de $\|(x_1, x_2)\|$ (norma d'un vector). **0.25 pt**

d) Donada la base $\{(1,2),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ cercau una base ortonormal, aplicant el mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt. **1 pt**

e) Sigui $S = \langle(1,1)\rangle$. Cercau el seu complement ortogonal $S^\perp$. **0.75 pt**

(Examen, setembre 2005)

Prob 7.18 Considerem l'espai euclidià $\mathbb{R}^4$, amb el producte escalar habitual. Sigui l'espai vectorial

$$H = \{(x,y,z,t) | 2x + y + 3z - t = 0,\ 3x + 2y - 4t = 0\}$$

a) Calculau una base de H. **0,7 pt.**

b) Calculau una base ortonormal de H. **0,8 pt.**

c) Trobau una base de $H^\perp$. **0,8 pt.**

d) Trobau les equacions que defineixen $H^\perp$. **0,7 pt.**

(Examen, juny 2006)

Prob 7.19 Considerem l'espai vectorial $\mathbb{R}_2[x]$. Definim el següent producte escalar, on $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$:

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

a) Si $S = \langle 1, 1-x\rangle$ trobau una base ortonormal de S. **3.5 pt.**

b) Trobau una base de $S^\perp$. **3.5 pt.**

c) Calculau la projecció ortogonal del vector $14 - 18x - 6x^2$ sobre S. **3 pt.**

(Control, curs 06/07)