

## Tema 3. Processos aleatoris

En els temes anteriors hem estudiat les *variables aleatòries*, que són nombres aleatoris associats a un experiment aleatori. En aquest tema estudiarem el *processos aleatoris* o *estocàstics*, que són **seqüències de nombres aleatoris** associades a un experiment.

Exemples de processos aleatoris són:

1. el só que rebem en un receptor de ràdio quan sintonitzam una freqüència buida
2. el dèbil senyal elèctric que detectam amb un voltímetre en un circuit sense alimentació
3. la seqüència de bits que rebem quan transmetem un senyal binari per un canal amb renou

Veurem en el tema següent que el *renou* en un sistema de comunicacions es modela en termes matemàtics com un procés aleatori, per això, l'estudi de les propietats dels processos aleatoris ens serà útil per aprendre a controlar el nivell de renou en les comunicacions.

### Formalització dels processos aleatoris

Cada una de les seqüències de nombres que obtenim quan repetim varies vegades el mateix experiment aleatori es diu **realització del procés aleatori**. Formalment això ho podem escriure de la següent manera:

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega & \longrightarrow & \text{conjunt de funcions} \\ \omega_1 & \longrightarrow & X(\omega_1, t) \\ \omega_2 & \longrightarrow & X(\omega_2, t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

on  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  és l'espai mostral de l'experiment (el conjunt de tots els resultats possibles).  $X$  denota el procés aleatori i les funcions  $X(\omega_1, t)$ ,  $X(\omega_2, t)$ , etc. representen les seqüències de nombres associades a cada repetició de l'experiment.

Cadascuna d'aquestes funcions és una *realització* del procés. Si aquestes funcions són contínues deim que el procés és un **procés aleatori en temps continu**, mentre que si les funcions són discretes parlem de **procés aleatori en temps discret**.

El terme “temps” fa referència a l'índex  $t$  de les funcions  $X(\omega_1, t)$ ,  $X(\omega_2, t)$ , etc i s'utilitza per abús de llenguatge, ja que en molts de casos les seqüències de nombres associades al procés representen la seva evolució temporal.

#### Exemple 1:

Sigui  $\xi$  un nombre aleatori seleccionat a l'atzar en l'interval  $[-1, 1]$ . Definim el següent procés aleatori:  $X(\xi, t) = \xi \cos(2\pi t)$ . Dibuixau algunes realitzacions del procés.

#### Exemple 2:

Una partícula es desplaça d'esquerra a dreta amb un moviment constant i de dalt a baix de manera aleatòria segons la següent llei:  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n + 1, y_n + A)$ , on  $A$  és una v.a. que pren valors equiprobables  $+1$  o  $-1$ . Dibuixau algunes de les possibles trajectòries de la partícula i raonau per què es pot considerar un procés aleatori.