Final de Fonaments Matemàtics II. Telemàtica (juny 2005)

ÀLGEBRA (2 hores)

P1.- Demostrau que el conjunt de matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos bx & -\sin bx \\ \sin bx & \cos bx \end{pmatrix}$$

amb $b \neq 0$ real fix i $x \in \mathbb{R}$ qualsevol, té estructura de grup commutatiu amb l'operació de multiplicació. (**NOTA:** El producte de matrius compleix la propietat associativa, per tant no fa falta demostrar-la) **2 pt**

P2.- A l'espai vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ consideram els polinomis:

$$p_1(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 3;\ p_2(x) = x^2 - 5x + 5;\ p_3(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 2;$$

$$p_4(x) = -3x - 4;\ p_5 = 4x^3 + 8x^2 + x - 8$$

i els subespais $F =< p_1(x), p_2(x) >$ i $G =< p_3(x), p_4(x), p_5(x) >$

a) Calculau la dimensió i donau una base de F. **0,25 pt**

b) Calculau la dimensió i donau una base de G. **0,25 pt**

c) Calculau la dimensió i donau una base de $F + G$. **1 pt**

d) Demostrau que el polinomi $q(x) = p_3(x) + p_4(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x - 2$ és una base de $F \cap G$ **1 pt**

P3.- Considerau l'aplicació lineal entre espais vectorials reals $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$, definida per

$$f(a + bi) = (a, b, a + b).$$

Considerau també els vectors:

$$u_1 = 1 + i,\ u_2 = 1 - i,\ v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (1, 1, 2),\ v_3 = (1, -1, 0)$$

i els conjunts $B_1 = \{u_1, u_2\}$ i $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$.

a) Escriviu la matriu de f en les bases canòniques (als espais de sortida i d'arribada) **0,5 pt**

b) Calculau la dimensió i una base de Ker f i de Im f **1 pt**

c) Escriviu la matriu de f en les bases B_1 i B_2. **1 pt**

(**NOTA:** Considerau el conjunt del nombres complexos $\mathbb{C}$ com a parells, és a dir, com a elements de $\mathbb{R}^2$, $a + bi = (a, b)$, però posau els resultats corresponents en nombres complexos)

P4.- Considerem la funció $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida per

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

a) Demostrar que és un producte escalar. **1 pt**

b) Trobau una base ortonormal del subespai vectorial S generat pels vectors $u = (1, 1, 2)$ i $v = (1, -1, 0)$. **1 pt**

c) Calculau $S^{\perp}$. **1 pt**

PROBABILITAT (2 hores)

P5.- En una aula tenim 6 alumnes de telemàtica i 8 d'informàtica. Triem a l'atzar un grup de 5 alumnes.

a) Calcular la probabilitat que hi hagi 3 alumnes de telemàtica i 2 d'informàtica. **0,5 pt**

b) Quina seria la probabilitat de que un alumne concret de telemàtica formi part del grup? **0,5 pt**

c) Quina seria la probabilitat que dos alumnes concrets d'informàtica no estiguin a la vegada en el grup? **0,5 pt**

Suposem ara que una empresa ens demana un informàtic o telemàtic per dirigir un grup d'investigació i l'hem de triar d'entre l'alumnat que tenim dins l'aula. Per això fem tres grups, el grup A format per tres telemàtics i dos informàtics, el grup B format per un telemàtic i 3 informàtics i el grup C per la resta de l'alumnat. Seleccionam a l'atzar un dels grups i després triam a l'atzar un alumne.

a) Cercau la probabilitat de triar un telemàtic. **0,75 pt**

b) Si l'alumne seleccionat és un telemàtic, cercau la probabilitat haver triat el grup C. **0,75 pt**

P6.- No tots els passatgers que reserven un bitllet d'avió l'agafen. Per estalviar pèrdues, una companyia aèria reserva 130 bitllets per un vol on només hi caben 120 passatgers. La probabilitat de que una persona que reserva un bitllet d'avió no l'agafi és de 0,10. Suposarem que el comportament dels passatgers és independent. Considerem la variable aleatòria X que ens dóna el nombre de persones que es presenten per a viatjar.

a) Quina és la probabilitat de que tots els que han reservat bitllet s'hi presentin per viatjar? **0,5 pt**

b) Quina és la probabilitat de que el vol se'n vagi amb algun seient buit? **0,5 pt**

c) Quina és la probabilitat de que el vol se'n vagi amb més de la meitat de passatge? **0,5 pt**

d) Quina és la probabilitat de que hagi "overbooking" (excés de contractació)? **0,5 pt**

e) Calculau l'esperança matemàtica i la desviació típica de X **0,5 pt**

f) Utilitzau la desigualtat de Txebixef per calcular els seients que hauria de tenir l'avió per assegurar que haurà "overbooking" menys del 10% de les vegades. Suposau que la mitjana i desviació típica són les de l'apartat anterior. **0,5 pt**

P7.- Considerem la variable aleatòria X de funció de densitat

$$f_X(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{altres} \end{cases}$$

i la variable aleatòria $Y = \ln X$

1. Cercau el valor d'a per a que sigui una funció de densitat. **0,5 pt**
2. Calculau la probabilitat que la variable X prengui un valor comprès entre 1,5 i 1,8. I entre 0 i 1,5. **0,5 pt**
3. Cercau l'Esperança matemàtica i la variància de X. **0,5 pt**
4. Calculau $E(\ln X)$ i $Var(\ln X)$ a partir de la funció f_X. **0,75 pt**
5. Cercau la funció de distribució i de densitat de Y. **1 pt**
6. Calculau $E(Y)$ i $Var(Y)$ a partir de la funció f_Y. **0,75 pt**

Examen final: totes les preguntes. Duració: 4:00 hores.
Per aprovar l'assignatura s'ha de treure com a mínim un 3 de cada part i la mitjana ha de ser superior o igual a 5.