

3 Sistemes d'Equacions Lineals

Prob 3.1 Classifiqueu i resolueu (quan es pugui) els sistemes d'equacions lineals següents:

a)

$$\left. \begin{array}{rrrr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 4 \end{array} \right\}$$

b)

$$\left. \begin{array}{rrrrrr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 2 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \end{array} \right\}$$

c)

$$\left. \begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array} \right\}$$

d)

$$\left. \begin{array}{rr} x_1 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_2 & + & x_4 & = & 1 \end{array} \right\}$$

Prob 3.2 Resolueu utilitzant la regla de Cramer els sistemes següents:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{rrrr} x & + & y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{rrrr} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ x & - & y & + & 3z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & 7z & = & 11 \end{array} \right\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{rrrr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{rr} x & + & y & = & 2a \\ y & + & z & = & 2b \\ z & + & t & = & 2c \\ x & + & t & = & 2d \end{array} \right\}$$

$$\text{e) } \left. \begin{array}{rrrrr} x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & 2 \\ 2x & + & 2y & - & z & - & 6t & = & 3 \end{array} \right\}$$

Prob 3.3 Un metge ordena a un pacient prendre, cada dia, 5 unitats de vitamina A, 13 unitats de vitamina B i 23 unitats de vitamina C. Tres empreses diferents fabriquen pastilles de vitamines. Les pastilles de la primera empresa contenen 1 unitat de vitamina A, 2 de vitamina B i 4 de vitamina C. Les de la segona empresa contenen 1 unitat de vitamina A, 1 de vitamina B i 3 de vitamina C. I les de la tercera empresa 0 unitats de vitamina A, 1 de vitamina B i 1 de vitamina C.

a) Trobau totes les combinacions de pastilles que proporcionen exactament la quantitat de vitamines requerida (no s'admeten fraccions de pastilla)

b) Si cada empresa cobra per pastilla 3 dècims d'euro, 2 dècims d'euro i 5 dècims d'euro, respectivament, trobau quin é el tractament més econòmic.

Prob 3.4 Trobau un polinomi de grau 3 (un polinomi de la forma $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$) que té una gràfica que passa pels punts $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ i $(2,-15)$. Dibuixar de manera aproximada la gràfica del polinomi trobat.

Prob 3.5 Discutiu i resoleu segons els valors dels paràmetres els sistemes següents:

$$\left. \begin{array}{rrcr} \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{rrcr} 2x & + & \lambda y & & & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & \lambda z & = & 1 \\ & - & y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & - & z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & 3z & = & a \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{rrcr} \lambda x & + & y & - & z & = & \lambda \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & 2\lambda z & = & 2 \end{array} \right\}$$

Prob 3.6 Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ i $A = \begin{pmatrix} -1 & -a & a^2 \\ a & -a^2 & a \\ a & 1 & -a^3 \end{pmatrix}$

- Calculeu el rang de A segons els valor de a .
- Calculeu A^{-1} quan A sigui invertible.
- Resoleu el següent sistema d'equacions lineals segons el valors dels paràmetres a i b .

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Examen, juny 2000)

Prob 3.7 Discuti el següent sistema en funció del paràmetre a i resoleu-lo quan tengui solució.

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & (a^2 - 14)z & = & a + 2 \end{array} \right\}$$

(Examen, setembre 2001)

Prob 3.8 Donat el següent sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{rrcr} b \cos \gamma + c \cos \beta & = & a \\ c \cos \alpha + a \cos \gamma & = & b \\ a \cos \beta + b \cos \alpha & = & c \end{array} \right\}$$

- Carcau l'expressió matricial del sistema d'equacions anterior, considerant que les incògnites són $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$.
- Utilitzau la regla de Cramer per demostra que $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

(Examen, setembre 2002)

Prob 3.9 Discutiu i resoleu el següent sistema segons els valors de $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{array}{rcl} -x + z - t & = & 4 \\ y - z + at & = & 1 \\ x - y + t & = & b \\ ax + y - z & = & c \end{array} \right\}$$

(Examen, febrer 2004)

Prob 3.10 Discutiu i resoleu el següent sistema, segons els valors d' a i $b \in \mathbb{R}$: **2 pt.**

$$\left. \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & -1 \\ 2x + az & = & 2 \\ -x - y - az & = & b \end{array} \right\}$$

(Examen, febrer 2005)

Prob 3.11 Contestau els següents apartats:

a) Sense aplicar la regla de Sarrus, resoleu el següent determinant **0.75 pt**

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}$$

b) Discutiu i resoleu el següent sistema d'equacions lineals. **2.25 pt**

$$\left. \begin{array}{rcll} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array} \right\}$$

(Examen, setembre 2005)

Prob 3.12 Discutir i resoldre el sistema **6 pt.**

$$\left. \begin{array}{rcl} ax & + & 2z & = & 2 \\ 5x & + & 2y & = & 1 \\ x & - & 2y & + & bz & = & 3 \end{array} \right\}$$

(Control, curs 06/07)

Prob 3.13 Discutiu i resoleu, segons els valors del paràmetre k , els següents sistemes d'equacions lineals:

$$a) \left. \begin{array}{rcl} x + y & = & 7 \\ kx - y & = & 11 \\ x - 4y & = & k \end{array} \right\} \quad b) \left. \begin{array}{rcl} 2x - ky + 6z & = & 0 \\ x + 3y - kz & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{rcl} x + y & = & k \\ kx - y & = & 13 \\ 5x + 3y & = & 16 \end{array} \right\} \quad d) \left. \begin{array}{rcl} kx + y + z & = & k^2 \\ x - y + z & = & 1 \\ 3x - y - z & = & 1 \\ 6x - y + z & = & 3k \end{array} \right\}$$

Prob 3.14 Discutiu i resoleu el següent sistema d'equacions: **3 pt.**

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (1+t)x & + & 3y & - & z & = & -3 \\ x & + & y & + & (t-3)z & = & -4 \\ (t+1)x & - & y & + & z & = & 5 \\ x & - & y & + & (t+1)z & = & 6 \end{array} \right.$$

(Examen, setembre 2006)