Solució Control 3 Aplicacions Estadístiques. Data: 20/04/2011

Problema 1 *En una universitat s'ha observat que el 60 % dels estudiants que es matriculen ho fan en una carrera de Ciències, mentre que l'altre 40 % ho fan en carreres d'Humanitats. Si un determinat dia es realitzen 20 matrícules, calcular la probabilitat que:*

a) hi hagi igual nombre de matrícules en Ciències i en Humanitats;

b) el nombre de matrícules en Ciències sigui menor que en Humanitats;

c) hi hagi almenys 8 matrícules en Ciències;

d) no hi hagi més de 12 matrícules en Ciències.

e) Si les cinc primeres matrícules són d'Humanitats, calcular la probabilitat que en total hi hagi igual nombre de matrícules en Ciències i en Humanitats.

Solució
Podem definir dues variables aleatòries que ens ajudaran a resoldre el problema:
X: nombre de matrícules en Ciències (del total de 20 matrícules)
Y: nombre de matrícules en Humanitats (del total de 20 matrícules)

A partir de les dades de l'enunciat deduïm que:
$X \sim B(20, 0{,}6)$
$Y \sim B(20, 0{,}4)$

Es tracta per tant de dues variables de tipus **binomial**. Com que volem resoldre el problema amb l'ajuda de les taules i en aquestes només estan tabulats els valors per a $n = 20$ i $p = 0{,}4$, plantejarem les preguntes del problema en termes de la variable Y.

a) $P(X = 10) = P(Y = 10) = P(Y \leq 10) - P(Y \leq 9) = \text{(taules)} = 0{,}8725 - 0{,}7553 = 0{,}1172$

b) $P(X < 10) = P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10) = \text{(taules)} = 1 - 0{,}8725 = 0{,}1275$

c) $P(X \geq 8) = P(Y \leq 12) = \text{(taules)} = 0{,}9790$

d) $P(X \leq 12) = P(Y \geq 8) = 1 - P(Y < 8) = 1 - P(Y \leq 7) = \text{(taules)} = 1 - 0{,}4159 = 0{,}5841$

e) Sabem que ja hi ha 5 matriculats d'Humanitats (del total de 20 persones matriculades). Perquè hi hagi el mateix nombre total de matriculats de Ciències i d'Humanitats (és a dir, 10 de cada tipus), el nombre de matriculats d'Humanitats entre les 15 persones que queden per matricular-se ha d'ésser igual a 5.

Definim una nova variable:
Y': nombre de matrícules en Humanitats (del total de 15 matrícules que queden per fer-se)

Tenim que $Y' \sim B(15, 0{,}4)$.

Per tant:
$P(Y' = 5) = P(Y' \leq 5) - P(Y' \leq 4) = \text{(taules)} = 0{,}4032 - 0{,}2173 = 0{,}1859$

Problema 2 *L'empresa* EMPIPATSA *vol comenar a produir bosses de pipes de pes nominal 100g. La normativa vigent exigeix que el pes del producte envasat no pot ser inferior al 95 % del pes nominal. L'empresa considera que el pes del producte envasat seguirà una llei normal de paràmetres 98g i desviació típica 1g. Es demana:*

a) Demostreu que la probabilitat que una bossa no compleixi la normativa és igual a 0,0013.

b) Calculeu la probabilitat que el pes d'una bossa que compleixi la normativa sigui més petit que el pes nominal.

c) Calculeu la probabilitat que una caixa de 20 bosses contingui exactament 3 bosses que no compleixen la normativa.

Solució
Definim la variable aleatòria següent:
X: pes (en grams) d'una bossa de pipes

A partir de les dades de l'enunciat tenim que $X \sim N(98, 1^2)$.

a) $P(X < 95) =$ (és v.a. contínua) $= P(X \leq 95) = F_X(95) = F_Z(\frac{95-98}{1}) = F_Z(-3) = 1 - F_Z(3) =$ (taules) $= 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$

b) $P(X < 100|_{X \geq 95}) = \frac{P(95 \leq X < 100)}{P(X \geq 95)}$

$P(95 \leq X < 100) =$ (és v.a. contínua) $= F_X(100) - F_X(95) = F_Z(\frac{100-98}{1}) - F_Z(\frac{95-98}{1}) = F_Z(2) - F_Z(-3) =$ (taules i apartat a) $= 0{,}9772 - 0{,}0013 = 0{,}9759$

$P(X \geq 95) = 1 - P(X < 95) =$ (apartat a) $= 1 - 0{,}0013 = 0{,}9987$

Per tant: $P(X < 100|_{X \geq 95}) = \frac{0{,}9759}{0{,}9987} = 0{,}9771$

c) Definim una nova variable:
Y: nombre de bosses que no cumpleixen la normativa (en una capsa de 20 bosses)

A partir de les dades de l'enunciat i de l'apartat a) deduïm: $Y \sim B(20, 0{,}0013)$

$P(Y = 3) = \binom{20}{3} \cdot 0{,}0013^3 \cdot (1 - 0{,}0013)^17 = 2{,}45 \cdot 10^{-6}$