Classe pràctica 3. Enunciat

Prob 4 Considerem la variable aleatòria X que té per funció de densitat

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Sigui $Y = e^X$.

a) Calculau k. (A partir d'ara considerarem la funció de densitat amb aquest valor de k) **2 pt.**

b) Aplicau la desigualtat de Txebixef per calcular el valor a més petit tal que $P(|X - \mu| < a) \geq 0.8$ **2.5 pt.**

c) Calculau el valor real de a. **2.5 pt.**

d) Calculau la funció de densitat i distribució de Y **3 pt.**

(Control, curs 07/08)

Classe pràctica 3. Solució

Prob 4 Considerem la variable aleatòria X que té per funció de densitat

$$f(x) = \begin{cases} kx+1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Sigui $Y = e^X$.

a) Calculau k. (A partir d'ara considerarem la funció de densitat amb aquest valor de k) **2 pt.**

b) Aplicau la desigualtat de Txebixef per calcular el valor a més petit tal que $P(|X-\mu| < a) \ge 0.8$ **2.5 pt.**

c) Calculau el valor real de a. **2.5 pt.**

d) Calculau la funció de densitat i distribució de Y **3 pt.**

(Control, curs 07/08)

Solució:

a) S'ha de complir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, per tant,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 (kx+1)\,dx = k\frac{x^2}{2} + x\Big]_0^1 = \frac{k+2}{2} = 1$$

per tant, $k = 0$ i la funció de densitat quedaria

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Per tant tenim una distribució uniforme $U(0,1)$

b) Com és una funció uniforme tenim

$$\mu = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}; \qquad \sigma = \frac{(1-0)^2}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

per tant, aplicant Txebixef tenim

$$P(|X-\mu| < a) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{a^2} = 1 - \frac{\frac{1}{12}}{a^2} = 0.8$$

i $a = 0.645$

c) Per cercar el valor real de a utilitzarem la funció de densitat de X

$$P(|X - \frac{1}{2}| < a) = P(-a < X - \frac{1}{2} < a) = P(\frac{1}{2} - a < X < \frac{1}{2} + a) = 0.8$$

Vegem si existeix un valor de $a < \frac{1}{2}$ que compleix la condició indicada. Sabem que la funció de distribució d'una distribució uniforme és

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x & 0 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

per tant,

$$P(\frac{1}{2} - a < X < \frac{1}{2} + a) = F(\frac{1}{2} + a) - F(\frac{1}{2} - a) = \frac{1}{2} + a - \frac{1}{2} + a = 2a = 0.8$$

d'aquí deduïm que $a = 0.4$

També ho podem fer de la següent forma

$$P(\frac{1}{2}-a<X<\frac{1}{2}+a)=\int_{\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}+a} f_X(x)\,dx=\int_{\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}+a} dx=2a=0.8; \qquad a=0.4$$

d) Cerquem primer la funció de distribució.

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(e^X\leq y)=P(X\leq \ln y)=F_X(\ln y)=\ln y$$

i això per a $1\leq Y\leq e$. Per tant,

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & x\leq 1 \\ \ln y & 1<y\leq e \\ 1 & x>e \end{cases}$$

i derivant tenim la funció de densitat:

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{y} & 1<y\leq e \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$