Solució Control 2 Aplicacions Estadístiques. Data: 25/03/2011

Problema 1 *Una persona treu 5 bolles, amb reposició, d'una urna que conté 7 bolles blanques i 3 negres.*

a) Quina és la probabilitat de treure 3 blanques?

b) Quina és la probabilitat de treure 3 blanques i que alguna d'elles surti en la primera o la segona extracció?

Solució
Hi ha dues maneres de resoldre el problema, en ambdós casos definim els següents successos:
B="treure bolla blanca"
N="treure bolla negra"
A="treure 3 blanques"
C="treure bolla blanca en primera o segona extracció"

Mètode 1
Com les extraccions són amb reposició, en cada extracció tenim que: $P(B) = CF/CP = 7/10$ i $P(N) = CF/CP = 3/10$.
a)

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(BBBNN \cup BBNBN \cup BNBBN \cup NBBBN \cup BBNNB \cup \\
&\quad BNBNB \cup NBBNB \cup BNNBB \cup NBNBB \cup NNBBB) = \\
&= \text{(disjunts)} = \\
&= P(BBBNN) + P(BBNBN) + P(BNBBN) + P(NBBBN) + P(BBNNB) + \\
&\quad +P(BNBNB) + P(NBBNB) + P(BNNBB) + P(NBNBB) + P(NNBBB) = \\
&= \text{(en cada sumand, successos independents)} = \\
&= P(B)P(B)P(B)P(N)P(N) + P(B)P(B)P(N)P(B)P(N) + \cdots + P(N)P(N)P(B)P(B)P(B) = \\
&= 10 \cdot (7/10)^3 \cdot (3/10)^2 = 0{,}3087
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(BBBNN \cup BBNBN \cup BNBBN \cup NBBBN \cup BBNNB \cup \\
&\quad BNBNB \cup NBBNB \cup BNNBB \cup NBNBB) = \\
&= \text{(disjunts)} = \\
&= P(BBBNN) + P(BBNBN) + P(BNBBN) + P(NBBBN) + P(BBNNB) + \\
&\quad +P(BNBNB) + P(NBBNB) + P(BNNBB) + P(NBNBB) = \\
&= \text{(en cada sumand, successos independents)} = \\
&= P(B)P(B)P(B)P(N)P(N) + P(B)P(B)P(N)P(B)P(N) + \cdots + P(N)P(B)P(N)P(B)P(B) = \\
&= 9 \cdot (7/10)^3 \cdot (3/10)^2 = 0{,}27783
\end{aligned}$$

Mètode 2

CP=$VR_{10}^5 = 10^5$
a)

$$\begin{aligned}
CF_A &= \{\text{maneres de col.locar les 3 blanques}\} \cdot \\
&\quad \{\text{maneres de col.locar les 2 negres}\} \cdot \\
&\quad \{\text{maneres de col.locar les negres entre les blanques}\} = \\
&= VR_7^3 \cdot VR_3^2 \cdot PR_5^{32} = 7^3 \cdot 3^2 \cdot 10
\end{aligned}$$

$P(A) = \frac{CF_A}{CP} = \frac{7^3 \cdot 3^2 \cdot 10}{10^5} = 0{,}3087$

b)
Definim
D="no treure blanca ni en primera ni en segona extraccions"="treure NNBBB"
$CF_{A\cap C} = CF_A - CF_D = 7^3 \cdot 3^2 \cdot 10 - 7^3 \cdot 3^2 = 7^3 \cdot 3^2 \cdot 9$
$P(A \cap C) = \frac{CF_{A\cap C}}{CP} = \frac{7^3 \cdot 3^2 \cdot 9}{10^5} = 0{,}27783$

Problema 2 *En Toni, en Pep i na Maria es reuneixen per resoldre problemes d'estadística. Toni resol el* $40\,\%$ *del total dels problemes, Pep el* $30\,\%$ *i Maria el* $30\,\%$ *restant. Toni s'equivoca en un* $2\,\%$ *dels problemes que resol, Pep en el* $6\,\%$ *y Maria en l'*$1\,\%$*. Agafam a l'atzar un dels problemes resolts.*

a) Quina és la probabilitat que estigui ben resolt?

b) Si el problema està mal resolt, quina és la probabilitat que l'hagi resolt en Pep?

c) Quina és la probabilitat que estigui ben resolt i que l'hagi resolt en Toni?

Solució
Definim els següents successos:
A="problema fet per en Toni"
B="problema fet per en Pep"
C="problema fet per na Maria"
D="problema mal resolt"

De l'enunciat tenim:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0{,}4 \\ P(B) &= 0{,}3 \\ P(C) &= 0{,}3 \\ P(D|A) &= 0{,}02 \\ P(D|B) &= 0{,}06 \\ P(D|M) &= 0{,}01 \end{aligned}$$

a)
L'enunciat ens demana calcular $P(\bar{D}) = 1 - P(D)$.
Els successos A, B i C formen un **sistema complet de successos**, ja que:

I) $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ (això equival a dir que $A \cup B \cup C = \Omega$)

II) $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ (disjunts 2 a dos)

De manera que podem utilitzar la fòrmula de la probabilitat total:

$$P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) = 0{,}02 \cdot 0{,}4 + 0{,}06 \cdot 0{,}3 + 0{,}01 \cdot 0{,}3 = 0{,}029$$

Finalment:
$P(\bar{D}) = 1 - 0{,}029 = 0{,}971$

b)
Ens demanen:
$P(B|D) = \text{(teorema de Bayes)} = \frac{P(D|B) \cdot P(B)}{P(D)} = \frac{0{,}06 \cdot 0{,}3}{0{,}029} = 0{,}6207$

c)
Ens demanen:
$P(\bar{D} \cap A) = P(\bar{D}|A) \cdot P(A)$
De l'enunciat sabem que $P(D|A) = 0{,}02$, per tant $P(\bar{D}|A) = 0{,}98$.
Finalment:
$P(\bar{D} \cap A) = 0{,}98 \cdot 0{,}4 = 0{,}392$