Problemes resolts Tema 1

Problema 1. Es llancen a l'aire dos daus de diferent color, un blanc i l'altre vermell. Sigui X la variable aleatòria "nombre de punts obtinguts amb el dau blanc", i Y la variable aleatòria "nombre més gran dels punts obtinguts amb els dos daus".

a) Determinau la llei conjunta.

b) Obteniu les lleis marginals.

c) Són independents?

Solució:

a) Tenim que $\Omega_X = \Omega_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Podem definir Z com la v.a. "nombre de punts obtinguts amb el dau vermell". Podem suposar que les v.a. X i Y són independents. La funció de probabilitat conjunta de (X, Y) és (considerant daus equilibrats):

$$
\begin{aligned}
P(X=x,Y=y) =&\ \ 0 \qquad \text{si } x \notin \Omega_X \quad \text{i} \quad y \notin \Omega_Y \\
P(X=1,Y=1) =&\ \ P(X=1,Z\leq 1) = P(X=1)\cdot P(Z\leq 1) = \\
=&\ \ P(X=1)\cdot P(Z=1) = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{36} \\
P(X=1,Y=2) =&\ \ P(X=1,Z=2) = P(X=1)\cdot P(Z=2) = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{36} \\
\vdots\ &\ \ \vdots \\
P(X=1,Y=6) =&\ \ P(X=1,Z=6) = P(X=1)\cdot P(Z=6) = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{36} \\
P(X=2,Y=1) =&\ \ 0 \quad \text{(succés impossible)} \\
P(X=2,Y=2) =&\ \ P(X=2,Z\leq 2) = P(X=2)\cdot P(Z\leq 2) = \\
=&\ \ P(X=2)\cdot(P(Z=1)+P(Z=2)) = \tfrac{1}{6}\cdot(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}) = \tfrac{2}{36} \\
P(X=2,Y=3) =&\ \ P(X=2,Z=3) = P(X=2)\cdot P(Z=3) = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{36} \\
\vdots\ &\ \ \vdots \\
P(X=3,Y=1) =&\ \ 0 \quad \text{(succés impossible)} \\
P(X=3,Y=2) =&\ \ 0 \quad \text{(succés impossible)} \\
P(X=3,Y=3) =&\ \ P(X=3,Z\leq 3) = P(X=3)\cdot P(Z\leq 3) = \\
=&\ \ P(X=3)\cdot(P(Z=1)+P(Z=2)+P(Z=3)) = \tfrac{1}{6}\cdot(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}) = \tfrac{3}{36} \\
\vdots\ &\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

Raonant de manera similar per a tots els valors possibles de (x, y) obtenim la següent taula per a la funció de probabilitat conjunta de (X, Y):

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	1/36	0	0	0	0	0
2	1/36	2/36	0	0	0	0
3	1/36	1/36	3/36	0	0	0
4	1/36	1/36	1/36	4/36	0	0
5	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36	0
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36

És fàcil comprovar que la suma de tots els valors de la taula és igual a 1.

b) Tenim que:

$$
\begin{aligned}
P(X=x) = \quad & P(X=x, Y=1) + P(X=x, Y=2) + \cdots + P(X=x, Y=6) \\
P(Y=y) = \quad & P(X=1, Y=y) + P(X=2, Y=y) + \cdots + P(X=6, Y=y)
\end{aligned}
$$

Per tant:

Y \ X	1	2	3	4	5	6	P(Y=y)
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	1/36	2/36	0	0	0	0	3/36
3	1/36	1/36	3/36	0	0	0	5/36
4	1/36	1/36	1/36	4/36	0	0	7/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36	0	9/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36	11/36
P(X=x)	6/36=1/6	6/36=1/6	6/36=1/6	6/36=1/6	6/36=1/6	6/36=1/6	

c) Si X i Y fòssin independents, per a qualsevol valor (x, y) s'hauria de verificar que $P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$. Podem comprovar que, per exemple, si $(x, y) = (1, 1)$:

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{36} \neq P(X=1) \cdot P(Y=1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36}$$

Per tant X i Y no són independents.

Problema 3. Dues persones A i B esperen trobar-se en un cert lloc entre les 5 i les 6. Cap d'elles esperarà l'altra més de 10 minuts. Si suposam que arriben independentment, calculau la probabilitat que se trobin en cada un dels dos casos següents:

a) Si la persona A arriba a les 5.30.

b) Si A i B arriben en qualsevol moment, a l'atzar.

Solució: Definim les següents variables aleatòries:
T_A: hora d'arribada de A al lloc de l'encontre
T_B: hora d'arribada de B al lloc de l'encontre
Com que l'hora d'arribada pot ésser qualsevol valor entre 5 i 6 (en hores), llavors podem considerar que $T_A \sim \mathcal{U}(5,6)$ i $T_B \sim \mathcal{U}(5,6)$, per tant:

$$f_{T_A}(t) = f_{T_B}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (5,6) \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

a)

$$\begin{aligned} P(\{\text{trobar-se si A arriba a les 5h30}\}) &= P(5\text{h}20 \leq T_B \leq 5\text{h}40) = \\ &= P(\tfrac{16}{3} \leq T_B \leq \tfrac{17}{3}) = \textstyle\int_{16/3}^{17/3} 1 \cdot dt = t]_{16/3}^{17/3} = \tfrac{17}{3} - \tfrac{16}{3} = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

on s'ha tengut en compte que 5h20min=5h+$\frac{1}{3}$h=$\frac{16}{3}$h i 5h40min=5h+$\frac{2}{3}$h=$\frac{17}{3}$h.

b)

$$P(\{\text{trobar-se si A i B arriben en qualsevol moment}\}) = P(|T_A - T_B| < 10\text{min}) = P(|T_A - T_B| < \frac{1}{6}) = P(R)$$

on s'ha tengut en compte que 10min=$\frac{1}{6}$h, R és el conjunt de valors (t_A, t_B) que cumpleixen la condició $|t_A - t_B| < \frac{1}{6}$ i

$$f_{T_A T_B}(t_A, t_B) = (\text{v.a. independents}) = f_{T_A}(t_A) \cdot f_{T_B}(t_B) = \begin{cases} 1 & \text{si } (t_A, t_B) \in (5,6)^2 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

(veure figura 1).

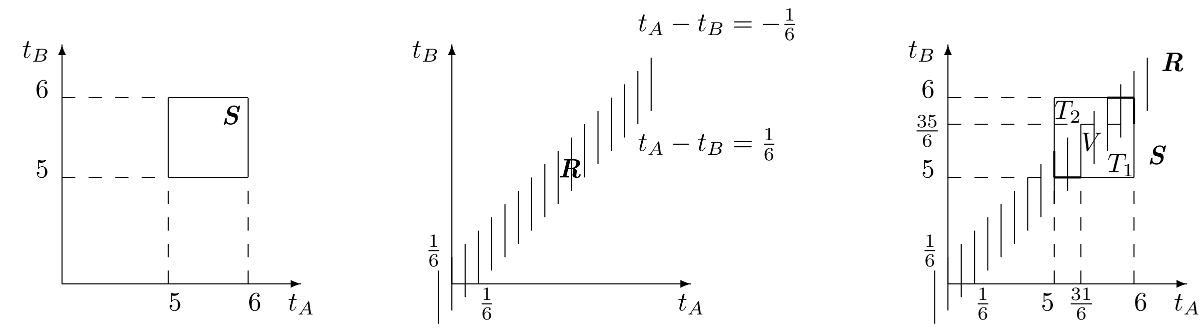

Figura 1: Esquerra: suport (S) de $f_{T_A T_B}(t_A, t_B)$. Centre: $R = \{(t_A, t_B)/\, |t_A - t_B| < \frac{1}{6}\}$. Dreta: $V = R \cap S$. (Nota: els dibuixos no estan a escala).

$$\begin{aligned} P(R) = \textstyle\iint_R f_{T_A T_B}(t_A, t_B)\, dt_A dt_B &= \textstyle\iint_{R\cap S} 1 \cdot dt_A dt_B = \text{area}(R \cap S) = \\ &= \text{area}(S) - \text{area}(T_1) - \text{area}(T_2) = \\ &= 1 - 2 \cdot \text{area}(T_1) = 1 - 2\tfrac{(6-\frac{31}{6})(\frac{35}{6}-5)}{2} = \tfrac{11}{36} \end{aligned}$$

on, per simetria (veure figura 1), area(T_1)=area(T_2) i, a més, area(S)=$(6-5)\cdot(6-5) = 1$.

Problema 4. Les variables aleatòries X_1i X_2 són independents i amb densitat comú

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

a) Determinau la densitat de $Y = X_1 + X_2$.

b) Determinau la densitat de $Z = X_1 - X_2$.

Solució:

a) Com que X_1 i X_2 són v.a. contínues, també ho serà Y. El càlcul de $f_Y(y)$ es pot fer de vàries maneres. En aquest exercici nosaltres ho farem en dos pasos: (1) primer calcularem $F_Y(y)$ (la funció de distribució de Y) i (2) trobarem $f_Y(y)$ derivant $F_Y(y)$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X_1 + X_2 \leq y) = \iint_{A_y} f_{X_1X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

on A_y és el conjunt de punts (x_1, x_2) que verifiquen la condició $x_1 + x_2 \leq y$ i s'ha aplicat la propietat del càlcul de la probabilitat d'un conjunt de punts. Observem que per a cada valor de y el conjunt de punts A_y serà diferent (veure la Figura 1-esquerra). A més, tenim que

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 1 \quad \text{i} \quad 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

ja que X_1 i X_2 són v.a. independents que tenen la funció de densitat donada a l'enunciat.

Per a calcular la integral anterior hem de dibuixar primer el suport de $f_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ (veure la Figura 1-dreta):

$$S = \{(x, y) / \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{i} \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

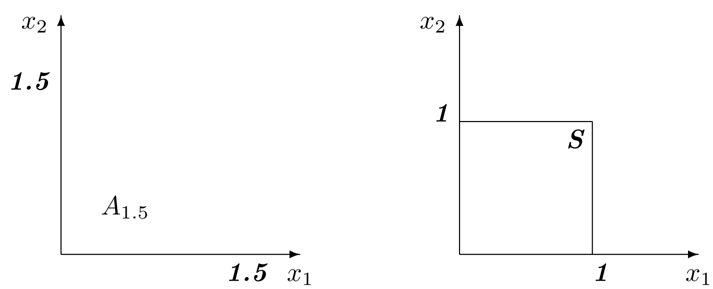

Figura 2: Esquerra: conjunt A_y per al valor $y = 1.5$. Dreta: suport de $f_{X_1X_2}(x_1, x_2)$.

Si tenim en compte el suport S la funció de distribució es calcula com:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X_1 + X_2 \leq y) = \iint_{A_y} f_{X_1X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \iint_{A_y \cap S} f_{X_1X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

En funció del valor de y tendrem diferents resultats per a la intersecció $A_y \cap S$. Podem trobar quatre casos diferents:

- $y < 0$, llavors $A_y \cap S = \emptyset$ i per tant $F_Y(y) = \iint_{\emptyset} f_{X_1X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 0$
- $y \geq 2$, llavors $A_y \cap S = S$ i per tant $F_Y(y) = \iint_S f_{X_1X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1$
- $0 \leq y < 1$, llavors $A_y \cap S = T$ (figura 2-esquerra) i

$$F_Y(y) = \iint_T f_{X_1X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \iint_T 1 \cdot dx_1 dx_2 = \text{area}(T) = \frac{y^2}{2}$$

- $1 \leq y < 2$, llavors $A_y \cap S = P$ (figura 2-dreta) i

$$F_Y(y) = \iint_P f_{X_1X_2}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 = \iint_P 1\cdot dx_1dx_2 = \text{area}(P) = \text{area}(S) - \text{area}(U) = 1 - \frac{(1-(y-1)^2}{2} = 1 - \frac{(2-y)^2}{2}$$

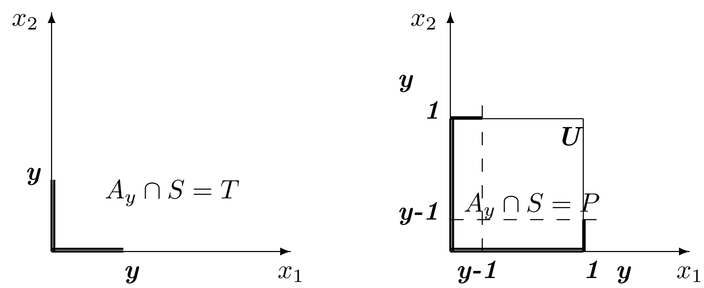

Figura 3: Esquerra: intersecció del conjunt A_y $(0 \leq y < 1)$ amb el suport de $f_{X_1X_2}(x_1,x_2)$ (triangle delimitat per línies gruixades). Dreta: intersecció del conjunt A_y $(1 \leq y < 2)$ amb el suport de $f_{X_1X_2}(x_1,x_2)$ (polígon delimitat per línies gruixades).

En conclusió:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{y^2}{2} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 - \frac{(2-y)^2}{2} & \text{si } 1 \leq y < 2 \\ 1 & \text{si } y \geq 2 \end{cases}$$

Derivant aquesta funció en cada un d'aquests intervals obtenim la funció de densitat de Y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{d}{dy}0 = 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{d}{dy}(\frac{y^2}{2}) = y & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ \frac{d}{dy}(1 - \frac{(2-y)^2}{2}) = 2 - y & \text{si } 1 \leq y < 2 \\ \frac{d}{dy}1 = 0 & \text{si } y \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \quad \text{ó} \quad y \geq 2 \\ y & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 2 - y & \text{si } 1 \leq y < 2 \end{cases}$$

b) La funció de densitat de $Z = X_1 - X_2$ es calcula de manera similar a l'apartat anterior. En aquest cas el conjunt $A_z = \{(x_1,x_2)/ \quad x_1 - x_2 \leq z\}$ té la forma que es mostra en la figura 3. Raonant de manera similar a l'apartat anterior arribarem a:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < -1 \quad \text{ó} \quad z \geq 1 \\ 1 + z & \text{si } -1 \leq z < 0 \\ 1 - z & \text{si } 0 \leq z < 1 \end{cases}$$

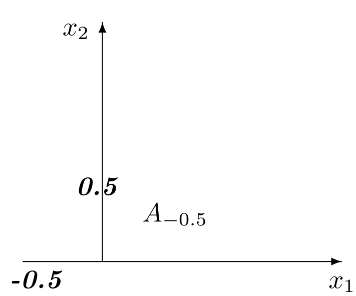

Figura 4: Conjunt A_z per al valor $z = -0.5$.

Problema 5. Obteniu la funció de distribució conjunta de les variables aleatòries X i Y la funció de densitat conjunta de les quals és:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2) & \text{si } x,y \in (0,1) \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

Solució:

El suport (S) de f_{XY} es mostra en la figura 1-esquerra. D'altra banda $F_{XY}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = P(X \leq \mathrm{x}, Y \leq \mathrm{y}) = P(A_{\mathrm{xy}})$, on A_{xy} és el conjunt de punts (x,y) tals que $x \leq \mathrm{x}$ i $y \leq \mathrm{y}$ (veure la figura 1-dreta).

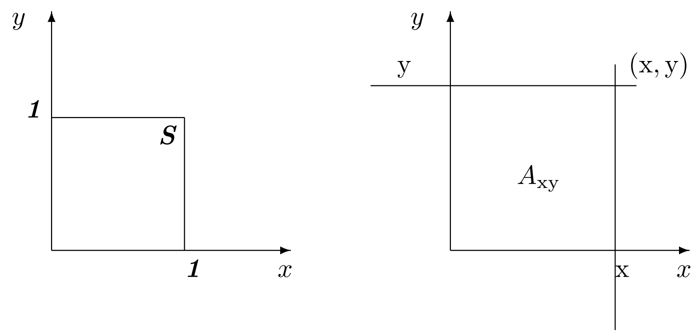

Figura 1: Esquerra: suport de $f_{XY}(x,y)$. Dreta: conjunt A_{xy} per a $\mathrm{x} > 0$ i $\mathrm{y} > 0$.

$$F_{XY}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \iint_{A_{\mathrm{xy}} \cap S} f_{XY}(x,y)\, dxdy$$

Depenent del valor de (x,y) la intersecció $A_{\mathrm{xy}} \cap S$ tendrà un valor o un altre. Si tenim en compte tots els casos possibles obtenim:

$$F_{XY}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} \text{si } \mathrm{x} \geq 1 \quad \text{i} \quad \mathrm{y} \geq 1 & 1 \\ \text{si } \mathrm{x} < 0 \quad \text{ó} \quad \mathrm{y} < 0 & 0 \\ \text{si } 0 \leq \mathrm{x} < 1 \quad \text{i} \quad 0 \leq \mathrm{y} < 1 & \int_0^{\mathrm{x}} \int_0^{\mathrm{y}} \frac{6}{5}(x+y^2)\, dydx = \frac{3}{5}yx^2 + \frac{2}{5}y^3x \\ \text{si } 0 \leq \mathrm{x} < 1 \quad \text{i} \quad \mathrm{y} \geq 1 & \int_0^{\mathrm{x}} \int_0^{1} \frac{6}{5}(x+y^2)\, dydx = \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x \\ \text{si } \mathrm{x} \geq 1 \quad \text{i} \quad 0 \leq \mathrm{y} < 1 & \int_0^{1} \int_0^{\mathrm{y}} \frac{6}{5}(x+y^2)\, dydx = \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}y^3 \end{cases}$$

Problema 6. Si X_1 i X_2 són dues variables aleatòries amb distribució de Poisson, independents i amb mitjanes respectives α i β, provau que $Y = X_1 + X_2$ també és una variable aleatòria Poisson (amb mitjana $\alpha + \beta$). (Nota: Una variable aleatòria que té aquesta propietat és diu que és *estable*)

Solució: Tenim que $X_1 \sim \text{Po}(\alpha)$ i $X_2 \sim \text{Po}(\beta)$, per tant:

$$P(X_1 = x) = \begin{cases} \frac{\alpha^x}{x!} e^{-\alpha} & \text{si } x \in \Omega_{X_1} \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega_{X_1} \end{cases} \qquad P(X_2 = x) = \begin{cases} \frac{\beta^x}{x!} e^{-\beta} & \text{si } x \in \Omega_{X_2} \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega_{X_2} \end{cases}$$

on $\Omega_{X_1} = \Omega_{X_2} = \{0, 1, 2, \cdots\}$.

$Y = X_1 + X_2$, per tant $\Omega_Y = \{0, 1, 2, \cdots\}$.
Podem calcular alguns valors de la funció de probabilitat de Y (tenint en compte que les v.a. X_1 i X_2 són independents):

$$\begin{aligned} P(Y = 0) = {} & P(X_1 + X_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) = \\ = {} & \tfrac{\alpha^0}{0!} e^{-\alpha} \cdot \tfrac{\beta^0}{0!} e^{-\beta} = e^{-\alpha} \cdot e^{-\beta} = e^{-(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 1) = {} & P(X_1 + X_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1) = \\ = {} & P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) = \\ = {} & \tfrac{\alpha^1}{1!} e^{-\alpha} \cdot \tfrac{\beta^0}{0!} e^{-\beta} + \tfrac{\alpha^0}{0!} e^{-\alpha} \cdot \tfrac{\beta^1}{1!} e^{-\beta} = (\alpha + \beta) e^{-(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

en general, si $y \in \Omega_Y$:

$$\begin{aligned} P(Y = y) = {} & P(X_1 = y, X_2 = 0) + P(X_1 = y - 1, X_2 = 1) + \cdots + P(X_1 = 0, X_2 = y) = \\ = {} & \textstyle\sum_{i=0}^{y} P(X_1 = y - i, X_2 = i) = \\ = {} & \textstyle\sum_{i=0}^{y} P(X_1 = y - i) \cdot P(X_2 = i) = \sum_{i=0}^{y} \frac{\alpha^{y-i}}{(y-i)!} e^{-\alpha} \cdot \frac{\beta^i}{i!} e^{-\beta} = \\ = {} & e^{-(\alpha+\beta)} \textstyle\sum_{i=0}^{y} \frac{1}{(y-i)!i!} \alpha^{y-i} \beta^i \end{aligned}$$

Com que $\binom{y}{i} = \frac{y!}{(y-i)!i!}$, podem escriure $\frac{1}{(y-i)!i!} = \frac{1}{y!} \binom{y}{i}$, i per tant:

$$P(Y = y) = e^{-(\alpha+\beta)} \frac{1}{y!} \sum_{i=0}^{y} \binom{y}{i} \alpha^{y-i} \beta^i$$

L'expressió dins el sumatori és el desenvolupament del binomi de Newton: $(\alpha + \beta)^y = \sum_{i=0}^{y} \binom{y}{i} \alpha^{y-i} \beta^i$.
De manera que, finalment:

$$P(Y = y) = \frac{(\alpha + \beta)^y}{y!} e^{-(\alpha+\beta)}$$

Aquesta expressió correspon a la funció de probabilitat d'una v.a. de Poisson amb paràmetre $\alpha + \beta$. Per tant podem concloure que $Y \sim \text{Po}(\alpha + \beta)$.

Problema 7. Durant un període T, el nombre X de cridades arribades a una centraleta és una variable aleatòria Poisson amb mitjana $\lambda \cdot T$, i el nombre Y de cridades que surten de la centraleta és una altra variable aleatòria Poisson amb mitjana $\mu \cdot T$. Suposant que Xi Y són independents, determinau la distribució condicional de Xdonat que $X + Y = n$.

Solució:

Ens demanen calcular $P(X = k|\, X + Y = n)$. Tenim que $X \sim \text{Po}(\lambda T)$ i $Y \sim \text{Po}(\mu T)$. D'altra banda, pel resultat del problema 6 sabem que $X + Y \sim \text{Po}(\lambda T + \mu T) = \text{Po}((\lambda + \mu)T)$.

$$\begin{aligned} P(X = k|\, X + Y = n) &= \tfrac{P(X=k \,\cap\, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \tfrac{P(X=k \,\cap\, Y=n-X)}{P(X+Y=n)} = \\ &= \tfrac{P(X=k \,\cap\, Y=n-k)}{P(X+Y=n)} = \tfrac{P(X=k)\cdot P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \end{aligned}$$

on s'ha aplicat que X i Y són v.a. independents.

$$P(X = k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} \qquad \text{si } k \in \{0, 1, \cdots\}$$

$$P(Y = n - k) = \frac{(\mu T)^{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\mu T} \qquad \text{si } n - k \in \{0, 1, \cdots\}$$

$$P(X + Y = n) = \frac{((\lambda + \mu)T)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)T} \qquad \text{si } n \in \{0, 1, \cdots\}$$

Combinant tots aquests valors de probabilitat i simplificant les expressions arribarem a:

$$P(X = k|\, X + Y = n) = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{(\lambda+\mu)^k} \frac{\mu^{(n-k)}}{(\lambda+\mu)^{(n-k)}} & \text{si } k \in \{0, 1, \cdots, n\} \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

Finalment, si observam que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ i $\frac{\mu}{\lambda+\mu} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, veurem que la funció de probabilitat anterior es pot escriure com

$$P(X = k|\, X + Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{(n-k)} & \text{si } k \in \{0, 1, \cdots, n\} \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

Aquesta funció de probabilitat correspon a una v.a. binomial amb paràmetres n i $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. Per tant:

$$X|_{X+Y=n} \sim B(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu})$$

Problema 8. Un proveïdor de serveis informàtics té una quantitat X de cents d'unitats d'un cert producte al principi de cada mes. Durant el mes es venen Y cents d'unitats del producte. Suposem que X i Y tenen una densitat conjunta donada per

$$f(x,y) = \begin{cases} 2/9 & \text{si } 0 < y < x < 3 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

a) Comprovau que f és una densitat.

b) Determinau $F_{X,Y}$.

c) Calculau la probabilitat que a final de mes s'hagi venut com a mínim la meitat de les unitats que hi havia inicialment.

d) Si s'han venut 100 unitats, quina és la probabilitat que n'hi haguèssin com a mínim 200 a principi de mes?

Solució:

a) Per demostrar que $f(x,y)$ és una funció de densitat hem de comprovar que f no agafa mai valors negatius (en efecte, els dos valors posibles de la funció, 0 i $\frac{2}{9}$; són no negatius) i que la següent integral es pot calcular i val 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = \iint_S \frac{2}{9}\,dxdy = \frac{2}{9}\cdot \text{area}(S) = \frac{2}{9}\cdot\frac{3\cdot 3}{2} = 1$$

on S és el suport de $f(x,y)$, què es mostra a la figura 1-esquerra.

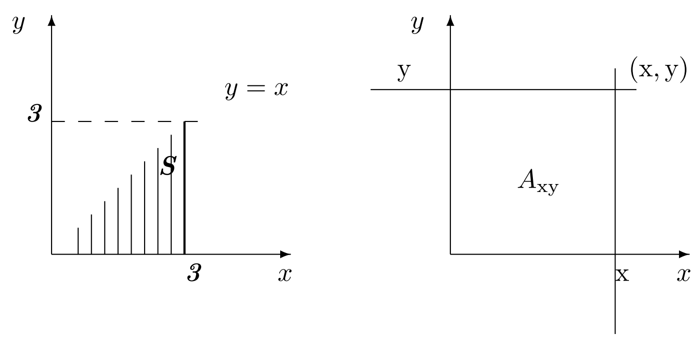

Figura 1: Esquerra: suport (S) de $f_{XY}(x,y)$ (zona ratxada). Centre: regió de punts (x,y) per al càlcul de la funció de distribució. Dreta: R, regió de punts tals que $y \geq x/2$.

b)

$$F_{XY}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = P(X \leq \mathrm{x}, Y \leq \mathrm{y}) = \iint_{A_{\mathrm{xy}}} f_{XY}(x,y)\,dxdy = \iint_{A_{\mathrm{xy}}\cap S} \frac{2}{9}\,dxdy = \frac{2}{9}\cdot \text{area}(A_{\mathrm{xy}}\cap S)$$

on A_{xy} és el conjunt de punts (x,y) tals que $x \leq \mathrm{x}$ i $y \leq \mathrm{y}$ (veure figura 1-dreta). El conjunt intersecció depenendrà del valor de x i de y:

$$F_{XY}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} \text{si } \mathrm{x} < 0 \quad \text{ó} \quad \mathrm{y} < 0 & 0 \\ \text{si } \mathrm{x} \geq 3 \quad \text{i} \quad \mathrm{y} \geq 3 & 1 \\ \text{si } 0 \leq \mathrm{x} < 3 \quad \text{i} \quad \mathrm{y} \geq \mathrm{x} & \frac{x^2}{2} \\ \text{si } 0 \leq \mathrm{x} < 3 \quad \text{i} \quad 0 \leq \mathrm{y} < \mathrm{x} & \frac{1}{9}(2xy - y^2) \\ \text{si } \mathrm{x} \geq 3 \quad \text{i} \quad 0 \leq \mathrm{y} < 3 & \frac{1}{9}(6y - y^2) \end{cases}$$

c)

$$P(Y \geq \frac{X}{2}) = P(R) = \iint_{R\cap S} \frac{2}{9}\, dxdy = \frac{2}{9} \cdot \text{area}(R \cap S)$$

on R és el conjunt de punts (x, y) tals que $y \geq \frac{x}{2}$ (veure figura 2-esquerra).

$$P(Y \geq \frac{X}{2}) = \frac{2}{9} \cdot (\text{area}(S) - \text{area}(T)) = \frac{2}{9} \cdot (\frac{9}{2} - \frac{3 \cdot 3/2}{2}) = \frac{1}{2}$$

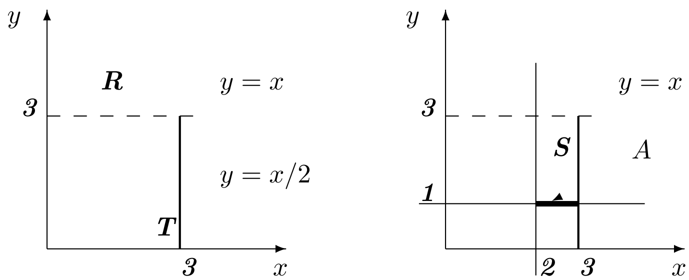

Figura 2: Esquerra: R, regió de punts tals que $y \geq x/2$. Dreta: A, regió de punts de S tals que $x \geq 2$ i $y = 1$.

d)

$$P(X \geq 2|Y = 1) = \frac{P(X \geq 2, Y = 1)}{f_Y(1)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\, dx = \begin{cases} \text{si } 0 \leq y < 3 & \int_y^3 \frac{2}{9}\, dx = \frac{2}{9}(3 - y) \\ \\ \text{en altre cas} & 0 \end{cases}$$

$$P(X \geq 2, Y = 1) = \iint_{x\geq 2\,\cap\, y=1} f_{XY}(x, y)\, dxdy = \int_A f_{XY}(x, 1)\, dx = \int_2^3 \frac{2}{9}\, dx = \frac{2}{9}$$

on A és la regió de punts del suport de $f_{XY}(x, y)$ tals que $x \geq 2$ i $y = 1$ (veure la figura 2-dreta).
El resultat final és:

$$P(X \geq 2|Y = 1) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}(3 - 1)} = \frac{1}{2}$$

Problema 11. Llançam a l'aire un dau equilibrat. Considerem dues variables aleatòries X i Y definides com:

$$X = \begin{cases} -1 & \text{si el resultat és imparell} \\ 1 & \text{si el resultat és parell} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -1 & \text{si el resultat és 1, 2 o 3} \\ 0 & \text{si el resultat és 4} \\ 1 & \text{si el resultat és 5 o 6} \end{cases}$$

a) Trobau la llei conjunta i la funció de distribució de X i Y.

b) Calculau $P(X+Y=0|Y\leq 0)$ i $P(X=1|X+Y=2)$.

Solució:

a) Com el dau està equilibrat, llavors $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$, on $\{i\}$ denota el succés "treure i". A més, tenim que $\Omega_X = \{-1,1\}$, $\Omega_Y = \{-1,0,1\}$ i $\Omega_{XY} = \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$.

$$\begin{aligned} P(X=x,Y=y) = &\ 0 \qquad \text{si } (x,y)\notin \Omega_{XY} \\ P(X=-1,Y=-1) = &\ P(\{1,3,5\}\cap\{1,2,3\}) = P(\{1,3\}) = P(\{1\}\cup\{3\}) = P(\{1\})+P(\{3\}) = \tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{6} \\ P(X=-1,Y=0) = &\ P(\{1,3,5\}\cap\{4\}) = P(\emptyset) = 0 \\ \vdots\ & \ \vdots \end{aligned}$$

raonant de manera similar per a tots els valors de Ω_{XY} obtenim la següent taula probabilitat conjunta, on també s'indiquen els valors de les probabilitats marginals (sumant per files o per columnes, per a valors de X o de Y fixats):

$X\backslash Y$	-1	0	1	$P(X=x)$
-1	2/6	0	1/6	1/2
1	1/6	1/6	1/6	1/2
$P(Y=y)$	1/2	1/6	1/3	

es pot comprovar que la suma de tots els valors de la taula de probabilitat conjunta és igual a 1.

Funció de distribució conjunta:

$$F_{XY}(x,y) = P(X\leq x, Y\leq y) =$$

$$= \begin{cases} x<-1 \quad \text{ó} \quad y<-1 & & 0 \\ x\geq 1 \quad \text{i} \quad y\geq 1 & & 1 \\ -1\leq x<1 \quad \text{i} \quad -1\leq y<0 & P(X=-1,Y=-1) = & \frac{1}{3} \\ -1\leq x<1 \quad \text{i} \quad 0\leq y<1 & P(X=-1,Y=-1)+P(X=-1,Y=0) = & \frac{1}{3} \\ -1\leq x<1 \quad \text{i} \quad y\geq 1 & P(X=-1,Y=-1)+P(X=-1,Y=0)+ & \\ & +P(X=-1,Y=1) = & \frac{1}{2} \\ x\geq 1 \quad \text{i} \quad -1\leq y<0 & P(X=-1,Y=-1)+P(X=1,Y=-1) = & \frac{1}{2} \\ x\geq 1 \quad \text{i} \quad 0\leq y<1 & P(X=-1,Y=-1)+P(X=-1,Y=0)+ & \\ & +P(X=1,Y=-1)+P(X=1,Y=0) = & \frac{2}{3} \end{cases}$$

b)

$$P(X+Y=0|Y\leq 0) = \frac{P(\{X+Y=0\}\cap\{Y\leq 0\})}{P(Y\leq 0)} = \frac{P(X=1,Y=-1)}{P(Y=-1)+P(Y=0)} = \frac{1/6}{1/2+1/6} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1|X+Y=2) = \frac{P(\{X=1\}\cap\{X+Y=2\})}{P(X+Y=2)} = \frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1,Y=1)} = 1$$

Problema 12. El nombre d'errors X per pàgina que comet un determinat escriptor és una variable aleatòria amb llei

$$P(X = x) = e^{-2} \cdot \frac{2^x}{x\,!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

Si una pàgina té x errors, el nombre de minuts Y que un revisor tarda en revisar i corregir cada pàgina és una variable aleatòria amb distribució:

$$P(Y = y|X = x) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } y = 1 + x \\ 3/5 & \text{si } y = 2 + x \\ 1/5 & \text{si } y = 3 + x \end{cases}$$

a) Trobau la probabilitat que es necessitin 4 minuts per revisar i corregir una pàgina elegida a l'atzar.

b) Si s'han utilitzat 4 minuts en la revisió i correcció d'una pàgina, quina és la probabilitat que hi hagués 3 errors?

Solució:

a) Ens demanen calcular $P(Y = 4)$, aplicant la fòrmula de la probabilitat total:

$$P(Y = 4) = P(Y = 4|X = 0) \cdot P(X = 0) + P(Y = 4|X = 1) \cdot P(X = 1) + P(Y = 4|X = 2) \cdot P(X = 2) + \cdots$$

Tenim a més que:

$$P(Y = y|X = 0) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } y = 1 + 0 = 1 \\ 3/5 & \text{si } y = 2 + 0 = 2 \\ 1/5 & \text{si } y = 3 + 0 = 3 \\ 0 & \text{resta de casos} \end{cases} \qquad \text{per tant} \qquad P(Y = 4|X = 0) = 0$$

$$P(Y = y|X = 1) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } y = 1 + 1 = 2 \\ 3/5 & \text{si } y = 2 + 1 = 3 \\ 1/5 & \text{si } y = 3 + 1 = 4 \\ 0 & \text{resta de casos} \end{cases} \qquad \text{per tant} \qquad P(Y = 4|X = 1) = 1/5$$

$$P(Y = y|X = 2) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } y = 1 + 2 = 3 \\ 3/5 & \text{si } y = 2 + 2 = 4 \\ 1/5 & \text{si } y = 3 + 2 = 5 \\ 0 & \text{resta de casos} \end{cases} \qquad \text{per tant} \qquad P(Y = 4|X = 2) = 3/5$$

$$P(Y = y|X = 3) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } y = 1 + 3 = 4 \\ 3/5 & \text{si } y = 2 + 3 = 5 \\ 1/5 & \text{si } y = 3 + 3 = 6 \\ 0 & \text{resta de casos} \end{cases} \qquad \text{per tant} \qquad P(Y = 4|X = 3) = 1/5$$

$$P(Y = y|X = 4) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } y = 1 + 4 = 5 \\ 3/5 & \text{si } y = 2 + 4 = 6 \\ 1/5 & \text{si } y = 3 + 4 = 7 \\ 0 & \text{resta de casos} \end{cases} \qquad \text{per tant} \qquad P(Y = 4|X = 4) = 0$$

raonant de manera similar comprovam que $P(Y = y|X = x) = 0$ si $x \geq 4$. Per tant:

$$P(Y = 4) = \frac{1}{5} e^{-2} \frac{2^1}{1!} + \frac{3}{5} e^{-2} \frac{2^2}{2!} + \frac{1}{5} e^{-2} \frac{2^3}{3!} = \frac{28}{15} e^{-2} = 0.2526$$

b)

$$P(X = 3|Y = 4) = \frac{P(X = 3, Y = 4)}{P(Y = 4)} = \frac{P(Y = 4|X = 3) \cdot P(X = 3)}{P(Y = 4)} = \frac{\frac{1}{5} e^{-2} \frac{2^3}{3!}}{\frac{28}{15} e^{-2}} = \frac{1}{7}$$

Problema 13. Suposem que la variable aleatòria X es selecciona a l'atzar de l'interval unitat, i aleshores la variable aleatòria Y es selecciona a l'atzar de l'interval $(0, X)$. Determinau la distribució de Y.

Solució: Per l'enunciat deduïm que Y és una v.a. contínua, per tant haurem calcular $f_Y(y)$.
Les dades del problema són: $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ i $Y|X \sim \mathcal{U}(0,X)$. De manera que:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases} \qquad f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < y < x \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

D'altra banda, sabem que $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$, per tant

$$f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

El suport d'aquesta funció de densitat es mostra en la següent figura.

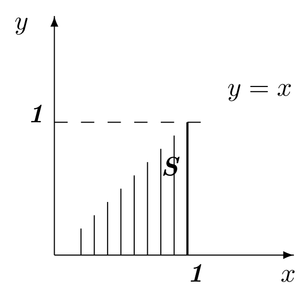

Figura 1: Suport de $f_{XY}(x,y)$ (zona ratxada).

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 < y < 1 & \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = (\ln(x)]_y^1 = \ln(1) - \ln(y) = -\ln(y) \\ \\ \text{en altre cas} & 0 \end{cases}$$

Problema 14. Un auditor selecciona a l'atzar un cert nombre X de factures d'un arxivador; X és un nombre a l'atzar entre 5 i 8. Sigui Y el temps en minuts que tarda en revisar-les. Suposem que (X,Y) té una llei conjunta donada per

$$P(X=x,Y=y)=\begin{cases}\frac{1}{4}\cdot\frac{10-x}{x}\cdot\left(\frac{x}{10}\right)^y & \text{si } x=5,6,7,8, y=1,2,\dots\\ 0 & \text{en cas contrari}\end{cases}$$

a) Trobau la distribució marginal de Y.

b) Trobau la distribució condicional de X donat que $Y=y$.

c) Calculau la probabilitat que hagi triat 6 factures sabent que ha tardat més de 3 minuts en revisar-les.

Solució:

a) Tenim que $\Omega_X=\{5,6,7,8\}$ i $\Omega_Y=\{1,2,\cdots\}$. Tenim que $P(Y=y)=0$ si $y\notin\Omega_Y$ i per als valors $y\in\Omega_Y$:

$$\begin{aligned} P(Y=y) = & \sum_{x\in\Omega_X} P(X=x,Y=y)=\\ = & P(X=5,Y=y)+P(X=6,Y=y)+P(X=7,Y=y)+P(X=8,Y=y)=\\ = & \tfrac{1}{4}\tfrac{10-5}{5}(\tfrac{5}{10})^y+\tfrac{1}{4}\tfrac{10-6}{6}(\tfrac{6}{10})^y+\tfrac{1}{4}\tfrac{10-7}{7}(\tfrac{7}{10})^y+\tfrac{1}{4}\tfrac{10-8}{8}(\tfrac{8}{10})^y=\\ = & \tfrac{1}{4}\left[(\tfrac{5}{10})^y+\tfrac{2}{3}(\tfrac{6}{10})^y+\tfrac{3}{7}(\tfrac{7}{10})^y+\tfrac{1}{4}(\tfrac{8}{10})^y\right]\end{aligned}$$

b)

$$P(X=x|Y=y)= \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=$$

$$=\begin{cases}\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{10-x}{x}\cdot\left(\frac{x}{10}\right)^y}{\frac{1}{4}\left[(\frac{5}{10})^y+\frac{2}{3}(\frac{6}{10})^y+\frac{3}{7}(\frac{7}{10})^y+\frac{1}{4}(\frac{8}{10})^y\right]}=\frac{10-x}{x}\frac{x^y}{5^y+\frac{2}{3}6^y+\frac{3}{7}7^y+\frac{1}{4}8^y} & \text{si } x\in\Omega_X, y\in\Omega_Y\\ 0 & \text{altrament}\end{cases}$$

c)

$$P(X=6|Y>3)=\frac{P(X=6,Y>3)}{P(Y>3)}=\frac{\sum_{y=4}^{\infty}P(X=6,Y=y)}{1-P(Y\le 3)}$$

$$\begin{aligned} P(Y\le 3)= & P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)=\\ = & \tfrac{1}{4}\left[(\tfrac{5}{10})^1+\tfrac{2}{3}(\tfrac{6}{10})^1+\tfrac{3}{7}(\tfrac{7}{10})^1+\tfrac{1}{4}(\tfrac{8}{10})^1\right]+\tfrac{1}{4}\left[(\tfrac{5}{10})^2+\tfrac{2}{3}(\tfrac{6}{10})^2+\tfrac{3}{7}(\tfrac{7}{10})^2+\tfrac{1}{4}(\tfrac{8}{10})^2\right]+\\ & +\tfrac{1}{4}\left[(\tfrac{5}{10})^3+\tfrac{2}{3}(\tfrac{6}{10})^3+\tfrac{3}{7}(\tfrac{7}{10})^3+\tfrac{1}{4}(\tfrac{8}{10})^3\right]=\tfrac{7}{20}+\tfrac{86}{400}+\tfrac{544}{4000}=\tfrac{1196}{4000}\end{aligned}$$

$$\sum_{y=4}^{\infty}P(X=6,Y=y)=\sum_{y=4}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{10-6}{6}\cdot\left(\frac{6}{10}\right)^y=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{6}\sum_{y=4}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^y=\frac{1}{6}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^4}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{12}\left(\frac{3}{5}\right)^4$$

on hem aplicat la fòrmula per a la suma d'infinits termes d'una progressió geomètrica: $S=\frac{a_0}{1-r}$, amb $a_0=(\frac{3}{5})^4$ i $r=\frac{3}{5}<1$.

La solució final és:

$$P(X=6|Y>3)=\frac{\frac{5}{12}\left(\frac{3}{5}\right)^4}{1-\frac{1196}{4000}}=\cdots=\frac{54}{299}=0.1806$$

Problema 15. Una diana consisteix en 3 cercles concèntrics amb radis respectius 1 cm, 2 cm i 3 cm. En una competició de tir, la distribució dels impactes en la diana i els voltants és tal que les desviacions horitzontal i vertical respecte del centre de la diana són independents i les dues segueixen una distribució normal N(0, 1 cm.). Determinau la proporció d'impactes dins cada anell de la diana. (Ind.: Utilitzau les coordenades polars).

Solució:

Anomenam A, B i C cada un dels anells de la diana (veure la figura 1). Denotam X, Y les coordenades de l'impacte en la diana. La distància de cada impacte al centre de la diana és $R = +\sqrt{X^2 + Y^2}$. Definim una nova variable $Z = X^2 + Y^2$, per tant $R = +\sqrt{Z}$. Tenim que:

$$
\begin{aligned}
P(\{\text{impacte en } A\}) = &\quad P(R \leq 1) = P(\sqrt{Z} \leq 1) = P(Z \leq 1) = F_Z(1) \\
P(\{\text{impacte en } B\}) = &\quad P(1 < R \leq 2) = P(1 < \sqrt{Z} \leq 2) = P(1 < Z \leq 4) = F_Z(4) - F_Z(1) \\
P(\{\text{impacte en } C\}) = &\quad P(2 < R \leq 3) = P(2 < \sqrt{Z} \leq 3) = P(4 < Z \leq 9) = F_Z(9) - F_Z(4)
\end{aligned}
$$

on $F_Z(z)$ és la funció de distribució de $Z = X^2 + Y^2$.

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X^2 + Y^2 \leq z) = P(A_z) = \iint_{A_z \cap S} f_{XY}(x, y)\, dxdy$$

A_z és el conjunt de punts (x, y) tals que $x^2 + y^2 \leq z$ i S és el suport de la funció de densitat conjunta de X i Y.

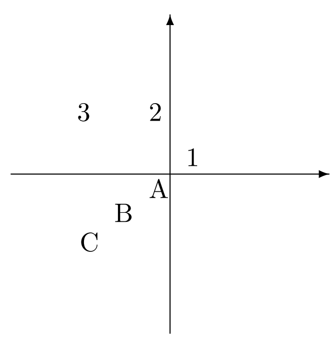

Figura 1: Diana

Com que X i Y són v.a. independents i ambdues són v.a. normals $N(0, 1)$, llavors:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) = &\quad \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} && \Omega_X = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \\
f_Y(y) = &\quad \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} && \Omega_Y = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \\
f_{XY}(x, y) = &\quad f_X(x) \cdot f_Y(y) = \tfrac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} && \Omega_{XY} = S = \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

Per tant:

$$F_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq z} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dxdy$$

Si feim un canvi de coordenades (x, y) a coordenades polars (r, θ):

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad x^2 + y^2 = r^2 \qquad dxdy = rdrd\theta \qquad A_z = \{r \leq \sqrt{z}, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

$$F_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} e^{-r^2/2}\, rdrd\theta = (\text{fent el canvi de variable } t = r^2/2) = \cdots = 1 - e^{-z/2}$$

De manera que:

$$\begin{aligned}
P(\{\text{impacte en } A\}) = &\quad F_Z(1) = 1 - e^{-1/2} = 0.3934 \\
P(\{\text{impacte en } B\}) = &\quad F_Z(4) - F_Z(1) = (1 - e^{-4/2}) - (1 - e^{-1/2}) = 0.47067 \\
P(\{\text{impacte en } C\}) = &\quad F_Z(9) - F_Z(4) = (1 - e^{-9/2}) - (1 - e^{-4/2}) = 0.124
\end{aligned}$$

Problema 16. Siguin X i Y dues variables aleatòries amb densitat conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

a) Calculau $f_X(x)$.

b) Calculau $f_Y(y|x)$.

c) Calculau $E(Y)$.

d) Calculau $E(Y|X)$, la raó de correlación $\eta_{Y|X}$ i ECM.

e) Calculau $E(E(Y|X))$ i comprovau que coincideix amb $E(Y)$.

f) Estimeu Y si sabem que $X = 0.75$.

Solució:

El suport de f_{XY} es mostra en la figura següent:

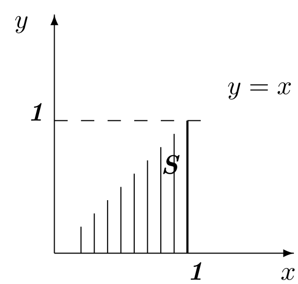

Figura 1: Suport de $f_{XY}(x,y)$ (zona ratxada).

a)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \begin{cases} \text{si } x \le 0 & 0 \\ \text{si } x > 1 & 0 \\ \text{si } 0 < x \le 1 & \int_0^x \frac{1}{x}\,dy = \frac{1}{x}\,(y]_0^x = \frac{x-0}{x} = 1 \end{cases}$$

Aquesta funció de densitat correspon a una v.a. uniforme en l'interval $(0,1)$, per tant: $X \sim \mathcal{U}(0,1)$.

b)

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \text{si } (x,y) \in S \Leftrightarrow 0 \le y \le x \le 1 & \frac{1/x}{1} = \frac{1}{x} \\ \text{en cas contrari} & 0 \end{cases}$$

Aquesta funció de densitat correspon a una v.a. uniforme en l'interval $(0,x)$, per tant: $Y|_X \sim \mathcal{U}(0,X)$.

c) $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy$, d'altra banda,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \begin{cases} \text{si } y \le 0 & 0 \\ \text{si } y > 1 & 0 \\ \text{si } 0 < y \le 1 & \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = (\text{ln}x]_y^1 = (\text{ln}1 - \text{ln}y) = -\text{ln}y \end{cases}$$

Per tant:

$$E(Y) = \int_0^1 -y\text{ln}y\,dy = \left(\text{per parts: } \begin{cases} u = \text{ln}y & du = \frac{1}{y}dy \\ dv = y\,dy & v = \frac{y^2}{2} \end{cases}\right) = \cdots = \left(\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \text{ln}y\right)\right]_0^1 = \cdots = \frac{1}{4}$$

d) El suport de $f_{Y|X}(y|x)$ és el mateix que el de $f_{XY}(x,y)$ (veure figura 1), per tant:

$$E(Y|X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)\, dy = \begin{cases} \text{si } 0 < x \leq 1 & \int_0^x y \cdot \frac{1}{x}\, dy = \frac{1}{x} \left(\frac{y^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{x}\frac{x^2}{2} = \frac{x}{2} \\ \text{en cas contrari} & 0 \end{cases}$$

Si denotam $Y^* = E(Y|X)$, llavors l'error quadràtic mitjà (ECM) és $\text{ECM} = E((Y^* - Y)^2)$ i la raó de correlació $\eta_{Y|X} = \frac{\text{Var}(Y^*)}{\text{Var}(Y)} = 1 - \frac{\text{ECM}}{\text{Var}(Y)}$, per tant $\text{ECM} = \text{Var}(Y)(1 - \eta_{Y|X})$.

$$\begin{aligned}
E(Y) &= (\text{apartat c}) = \tfrac{1}{4} \\
E(Y^2) &= \textstyle\int_0^1 -y^2 \ln y \, dy = \left(\text{per parts: } \left\{ \begin{array}{ll} u = y\ln y & du = (\ln y + 1)dy \\ dv = y\, dy & v = \frac{y^2}{2} \end{array} \right\}\right) = \\
&= \cdots = \left(\tfrac{y^3}{3}(\tfrac{1}{3} - \ln y)\right]_0^1 = \cdots = \tfrac{1}{9} \\
\text{Var}(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 = \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{16} = \tfrac{7}{144} \\
E(Y^*) &= E(E(Y|X)) = (\text{apartat e}) = E(Y) = \tfrac{1}{4} \\
E(Y^{*2}) &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} E(Y|X)^2 f_X(x)\, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{4}\, dx = \left(\frac{x^3}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12} \\
\text{Var}(Y^*) &= E(Y^{*2}) - E(Y^*)^2 = \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{48} \\
\eta_{Y|X} &= \tfrac{\text{Var}(Y^*)}{\text{Var}(Y)} = \tfrac{1/48}{7/144} = \tfrac{3}{7} \\
\text{ECM} &= \text{Var}(Y)(1 - \eta_{Y|X}) = \tfrac{7}{144}(1 - \tfrac{3}{7}) = \tfrac{1}{36}
\end{aligned}$$

e)

$$E(E(Y|X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y|X) f_X(x)\, dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\, dx = \left(\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Observem que aquest resultat coincideix amb $E(Y)$ (recordem que $E(E(Y|X)) = E(Y)$).

f) $E(Y|X = 0.75) =$ (a partir del resultat de l'apartat d) $= \frac{0.75}{2} = \frac{3}{8}$.

Problema 17. Considerem un experiment amb tres possibles resultats E_1, E_2 i E_3 amb probabilitats respectives p, q i r tals que $p+q+r=1$. En una seqüència de n proves independents de l'experiment, denotem per X el nombre de vegades que ocorr E_1, i per Y el nombre de vegades que ocorr E_2. Es sap que el vector (X,Y) té una distribució anomenada **trinomial** que ve donada per:

$$P(X=i, Y=j) = \frac{n!}{i!\, j!\, k!}\, p^i\, q^j\, r^k\,, \quad k = n-i-j$$

a) Provau que les distribucions marginals són binomials.

b) Determinau el vector mitjana i la matriu de covariàncies de (X,Y).

c) Provau que les distribucions condicionals són binomials.

d) Obteniu l'expressió de $E(Y|X=i)$ $\forall i = 0,\dots,n$.

e) Comprovau que el coeficient de correlació entre $E(Y|X)$ i X és igual a -1 i, per tant, $E(Y|X)$ és una funció lineal de X, $E(Y|X) = aX+b$, amb $a<0$.

f) Determinau els coeficients a i b a partir de l'expressió obtinguda a l'apartat (d).

Solució:

a) Per a valors de $i \notin \{0,1,2,\cdots,n\}$, $P(X=i)=0$. Per a valors $i \in \{0,1,2,\cdots,n\}$:

$$P(X=i) = \sum_{j\in\Omega_Y} P(X=i,Y=j) = \sum_{j=0}^{n-i} P(X=i,Y=j) = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p^i q^j r^{(n-i-j)}$$

on s'ha tengut en compte que si $X=i$ llavors Y no pot prendre un valor superior a $n-i$.

$$P(X=i) = \frac{n!}{i!} p^i \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{j!(n-i-j)!} q^j r^{(n-i-j)} = \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} q^j r^{(n-i-j)}$$

on s'ha aplicat la igualtat: $\binom{n-i}{j} = \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}$, per tant: $\frac{1}{j!(n-i-j)!} = \frac{1}{(n-i)!}\binom{n-i}{j}$.

Si ara aplicam la definició del binomi de Newton: $(q+r)^{(n-i)} = \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} q^j r^{(n-i-j)}$, obtenim:

$$P(X=i) = \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (q+r)^{(n-i)}$$

i com que $q+r = 1-p$, i a més $\frac{n!}{i!(n-i)!} = \binom{n}{i}$, llavors:

$$P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{(n-i)}$$

Aquesta expressió correspon a la funció de probabilitat d'una v.a. binomial amb paràmetres n i p. Per tant podem concloure que $X \sim B(n,p)$.

Seguint un raonament similar per a la funció de probabilitat marginal de Y arribariem a: $Y \sim B(n,q)$.

b) Vector de mitjanes: $(E(X), E(Y))$. A l'apartat anterior s'ha demostrat que $X \sim B(n,p)$ i $Y \sim B(n,q)$. Per tant, mirant les taules d'esperances per a una v.a. binomial trobam: $E(X) = np$, $E(Y) = nq$.

Matriu de covariàncies: $K = \begin{pmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_{YY} \end{pmatrix}$.

Tenim que $\sigma_{XX} = \mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \text{(taules)} = np(1-p)$ i $\sigma_{YY} = \mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2 = \text{(taules)} = nq(1-q)$.

$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} ijP(X=i, Y=j)$$

Observam que quan $i = 0$ o $j = 0$ el factor $ijP(X = i, Y = j)$ serà igual a zero, per tant basta començar els sumatoris amb el valor 1. Cal observar també que el segon sumatori no pot arribar fins a n, ja que, si s'obtenen i resultats de tipus E_1, només es poden obtenir un màxim de $n-i$ resultats de tipus E_2. Pel mateix motiu, com el segon sumatori comença en $j = 1$, el primer pot prendre com a màxim el valor $n-1$.

A més, podem fer les substitucions: $k = n - i - j$ i $r = 1 - p - q$.

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-i} ij\frac{n!}{i!j!k!}p^i q^j r^k = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i\frac{n!}{i!}p^i \sum_{j=1}^{n-i} j\frac{1}{j!(n-i-j)!}q^j(1-p-q)^{n-i-j} = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n!}{(i-1)!}p^i \sum_{j=1}^{n-i} \frac{1}{(j-1)!(n-i-j)!}q^j(1-p-q)^{n-i-j} =
\end{aligned}$$

Descomposam q^j en $q^{j-1}q$ i feim el canvi de variable $m = j-1$.

$$E(XY) = q\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n!}{(i-1)!}p^i \sum_{m=0}^{n-i-1} \frac{1}{m!(n-i-m-1)!}q^m(1-p-q)^{n-i-m-1}$$

Utilitzam la relació: $\binom{n-i-1}{m} = \frac{(n-i-1)!}{m!(n-i-1-m)!}$.

$$E(XY) = q\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!}p^i \sum_{m=0}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{m} q^m(1-p-q)^{n-i-m-1}$$

Observam que el segon sumatori és igual al binomi de Newton:

$$(q + (1-p-q))^{n-i-1} = (1-p)^{n-i-1}$$

Per tant:

$$E(XY) = q\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!}p^i(1-p)^{n-i-1}$$

Descomposam p^i en $p^{i-1}p$ i feim el canvi de variable $s = i-1$.

$$\begin{aligned}
E(XY) &= qp\sum_{s=0}^{n-2} \frac{n!}{s!(n-s-2)!}p^s(1-p)^{n-s-2} = \\
&= qpn(n-1)\sum_{s=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{s!(n-s-2)!}p^s(1-p)^{n-s-2}
\end{aligned}$$

Aplicant l'expressió del binomi de Newton a aquest sumatori obtenim:

$$E(XY) = qpn(n-1)(p+1-p)^{n-2} = qpn(n-1)1^{n-2} = qpn(n-1)$$

En conclusió:

$$\sigma_{XY} = qpn(n-1) - qpn^2 = -qpn$$

i la matriu de covariàncies queda:

$$K = \begin{pmatrix} np(1-p) & -npq \\ -npq & nq(1-q) \end{pmatrix}$$

c)

$$P(X=i|Y=j)=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(Y=j)}=\begin{cases}\frac{\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}p^iq^jr^{(n-i-j)}}{\frac{n!}{j!(n-j)!}q^j(1-q)^{(n-j)}} & \text{si } j\in\{0,1,\cdots,n\}, i\in\{0,1,\cdots,n-j\}\\ 0 & \text{altrament}\end{cases}$$

simplificant l'expressió anterior:

$$\begin{aligned}P(X=i|Y=j) = & \frac{(n-j)!}{i!(n-i-j)!}p^i\frac{r^{n-i-j}}{(1-q)^{n-j}}=\binom{n-j}{i}p^i\frac{r^{n-i-j}}{(1-q)^{(n-i-j)}(1-q)^i}=\binom{n-j}{i}\left(\frac{p}{1-q}\right)^i\left(\frac{r}{1-q}\right)^{(n-i-j)}=\\ = & \binom{n-j}{i}\left(\frac{p}{1-q}\right)^i\left(\frac{1-p-q}{1-q}\right)^{(n-i-j)}=\binom{n-j}{i}\left(\frac{p}{1-q}\right)^i\left(1-\frac{p}{1-q}\right)^{(n-i-j)}\end{aligned}$$

per a valors $j\in\{0,1,\cdots,n\}$, $i\in\{0,1,\cdots,n-j\}$. Aquesta funció de probabilitat correspon a una v.a. binomial amb paràmetres $n-j$ i $\frac{p}{1-q}$, per tant podem concloure:

$$X|_{Y=j}\sim B(n-j,\frac{p}{1-q})$$

De manera similar demostraríem: $Y|_{X=i}\sim B(n-i,\frac{q}{1-p})$

d) Com que $X|_{Y=j}\sim B(n-j,\frac{p}{1-q})$ i $Y|_{X=i}\sim B(n-i,\frac{q}{1-p})$ mirant les taules de moments de la v.a. binomial tenim que:

$$\begin{aligned}E(X|_{Y=j}) &= (n-j)\tfrac{p}{1-q} && \text{si } j=0,1,\cdots,n\\ \mathrm{Var}(X|_{Y=j}) &= (n-j)\tfrac{p}{1-q}(1-\tfrac{p}{1-q}) && \text{si } j=0,1,\cdots,n\\ E(Y|_{X=i}) &= (n-i)\tfrac{q}{1-p} && \text{si } i=0,1,\cdots,n\\ \mathrm{Var}(Y|_{X=i}) &= (n-i)\tfrac{q}{1-p}(1-\tfrac{q}{1-p}) && \text{si } i=0,1,\cdots,n\end{aligned}$$

e) Si denotam $Y^*=E(Y|_X)$, llavors

$$\eta_{E(Y|_X)X}=\eta_{Y^*X}=\frac{\mathrm{Cov}(Y^*,X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y^*)}\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$

on $\mathrm{Var}(X)=np(1-p)$.

D'altra banda tenim que $Y^*=E(Y|_X)=(n-X)\frac{q}{1-p}$, per tant

$$\begin{aligned}E(Y^*) &= E(E(Y|_X))=(\text{propietat})=E(Y)=nq\\ \mathrm{Var}(Y^*) &= \mathrm{Var}\left((n-X)\tfrac{q}{1-p}\right)=\mathrm{Var}\left(n\tfrac{q}{1-p}-\tfrac{q}{1-p}X\right)=\\ &= \tfrac{q^2}{(1-p)^2}\mathrm{Var}(X)=\tfrac{q^2}{(1-p)^2}np(1-p)=\tfrac{npq^2}{1-p}\\ \mathrm{Cov}(Y^*,X) &= E(Y^*X)-E(Y^*)E(X)\\ E(Y^*X) &= E\left((n-X)\tfrac{q}{1-p}X\right)=n\tfrac{q}{1-p}E(X)-\tfrac{q}{1-p}E(X^2)=n\tfrac{q}{1-p}np-\tfrac{q}{1-p}(np-np^2+n^2p^2)=\\ &= \tfrac{q}{1-p}(n^2p-np+np^2-n^2p^2)=\tfrac{npq}{1-p}(n-1+p-np)\end{aligned}$$

on s'ha aplicat que $E(X^2)=\mathrm{Var}(X)+E(X)^2=np(1-p)+(np)^2$.

Simplificant les expressions anteriors obtenim: $\mathrm{Cov}(Y^*,X)=-npq$, de manera que:

$$\eta_{E(Y|_X)X}=\frac{-npq}{\sqrt{\frac{npq^2}{1-p}}\sqrt{np(1-p)}}=\frac{-npq}{npq}=-1$$

que és el que ens demanaven demostrar.

f) $E(Y|_X)=(n-X)\frac{q}{1-p}=-\frac{q}{1-p}X+n\frac{q}{1-p}=aX+b$, on $a=-\frac{q}{1-p}$ i $b=n\frac{q}{1-p}$.

Problema 18. En l'exercici 1,

a) Determinau $E(X|Y)$.

b) Calculau $E(E(X|Y))$, i comprovau que coincideix amb $E(X)$.

Solució:

a) $E(X|Y) = E(X|_{Y=y}) = \sum_{x\in\Omega_X} x \cdot P(X=x|Y=y)$ on $P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$. A partir de les taules de les funcions de probabilitat conjunta i marginals (veure solució del problema 1) obtenim la següent taula per a la funció de probabilitat condicionada:

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1/36}{1/36}=1$	0	0	0	0	0
2	$\frac{1/36}{3/36}=1/3$	$\frac{2/36}{3/36}=2/3$	0	0	0	0
3	$\frac{1/36}{5/36}=1/5$	$\frac{1/36}{5/36}=1/5$	$\frac{3/36}{5/36}=3/5$	0	0	0
4	$\frac{1/36}{7/36}=1/7$	$\frac{1/36}{7/36}=1/7$	$\frac{1/36}{7/36}=1/7$	$\frac{4/36}{7/36}=4/7$	0	0
5	$\frac{1/36}{9/36}=1/9$	$\frac{1/36}{9/36}=1/9$	$\frac{1/36}{9/36}=1/9$	$\frac{1/36}{9/36}=1/9$	$\frac{5/36}{9/36}=5/9$	0
6	$\frac{1/36}{11/36}=1/11$	$\frac{1/36}{11/36}=1/11$	$\frac{1/36}{11/36}=1/11$	$\frac{1/36}{11/36}=1/11$	$\frac{1/36}{11/36}=1/11$	$\frac{6/36}{11/36}=6/11$

Aplicant la fòrmula de l'esperança condicionada obtenim, per a cada valor de Y:

Y	$E(X\|_{Y=y})$
1	$1\cdot 1 = 1$
2	$1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$
3	$1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$
4	$1\cdot\frac{1}{7}+2\cdot\frac{1}{7}+3\cdot\frac{1}{7}+4\cdot\frac{4}{7}=\frac{22}{7}$
5	$1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{9}+5\cdot\frac{5}{9}=\frac{35}{9}$
6	$1\cdot\frac{1}{11}+2\cdot\frac{1}{11}+3\cdot\frac{1}{11}+4\cdot\frac{1}{11}+5\cdot\frac{1}{11}+6\cdot\frac{6}{11}=\frac{51}{11}$

b)

$$\begin{aligned}
E(E(X|Y)) = {} & E(X|_{Y=1})\cdot P(Y=1)+E(X|_{Y=2})\cdot P(Y=2)+E(X|_{Y=3})\cdot P(Y=3)+ \\
& +E(X|_{Y=4})\cdot P(Y=4)+E(X|_{Y=5})\cdot P(Y=5)+E(X|_{Y=6})\cdot P(Y=6)= \\
= {} & 1\cdot\tfrac{1}{36}+\tfrac{5}{3}\cdot\tfrac{3}{36}+\tfrac{12}{5}\cdot\tfrac{5}{36}+\tfrac{22}{7}\cdot\tfrac{7}{36}+\tfrac{35}{9}\cdot\tfrac{9}{36}+\tfrac{51}{11}\cdot\tfrac{11}{36}=\tfrac{7}{2}
\end{aligned}$$

D'altra banda:

$$\begin{aligned}
E(X) & = 1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)+3\cdot P(X=3)+4\cdot P(X=4)+5\cdot P(X=5)+6\cdot P(X=6)= \\
& = 1\cdot\tfrac{1}{36}+2\cdot\tfrac{1}{36}+3\cdot\tfrac{1}{36}+4\cdot\tfrac{1}{36}+5\cdot\tfrac{1}{36}+6\cdot\tfrac{1}{36}=\tfrac{7}{2}
\end{aligned}$$

Problema 22. Es llancen a l'aire dos daus sense biaix. Siguin N_1 i N_2 els valors obtinguts en els dos daus. Posem $X = N_1 + N_2$ i $Y = \mid N_1 - N_2 \mid$. Obteniu la distribució conjunta de X i Y i comprovau que X i Y estan incorrelacionades. Són independents?

Solució:

Tenim que $\Omega_{N_1} = \Omega_{N_2} = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ i que $P(N_1 = i)P(N_2 = i) = \frac{1}{6}$ si $i \in \Omega_{N_1}$, ja que els daus no tenen biaix. A més, com poden considerar que els daus són independents, llavors $P(N_1 = i, N_2 = j) = P(N_1 = i) \cdot P(N_2 = j)$.

Cada parell de valors (N_1, N_2) genera un parell de valors (X, Y). El conjunt de tots els valors (X, Y) possibles es mostra en la taula següent:

$N_2 \backslash N_1$	1	2	3	4	5	6
1	$X=2$ $Y=0$	$X=3$ $Y=1$	$X=4$ $Y=2$	$X=5$ $Y=4$	$X=6$ $Y=5$	$X=7$ $Y=6$
2	$X=3$ $Y=1$	$X=4$ $Y=0$	$X=5$ $Y=1$	$X=6$ $Y=2$	$X=7$ $Y=3$	$X=8$ $Y=4$
3	$X=4$ $Y=2$	$X=5$ $Y=1$	$X=6$ $Y=0$	$X=7$ $Y=1$	$X=8$ $Y=2$	$X=9$ $Y=3$
4	$X=5$ $Y=3$	$X=6$ $Y=2$	$X=7$ $Y=1$	$X=8$ $Y=0$	$X=9$ $Y=1$	$X=10$ $Y=2$
5	$X=6$ $Y=4$	$X=7$ $Y=3$	$X=8$ $Y=2$	$X=9$ $Y=1$	$X=10$ $Y=0$	$X=11$ $Y=1$
6	$X=7$ $Y=5$	$X=8$ $Y=4$	$X=9$ $Y=3$	$X=10$ $Y=2$	$X=11$ $Y=1$	$X=12$ $Y=0$

Per tant, el conjunt de valors possibles per a X i Y són: $\Omega_X = \{2, 3, \cdots, 12\}$ i $\Omega_Y = \{0, 1, \cdots, 5\}$. I les probabilitats de cada parell (x, y) es calculen a partir de les probalitats de N_1 i N_2 observant la taula anterior. Per exemple:

$$P(X = 2, Y = 0) = P(N_1 = 1, N_2 = 1) = P(N_1 = 1) \cdot P(N_2 = 1) = \tfrac{1}{36}$$

$$P(X = 2, Y = 1) = 0$$

$$P(X = 3, Y = 0) = 0$$

$$P(X = 3, Y = 1) = P(N_1 = 2, N_2 = 1) + P(N_1 = 1, N_2 = 2) = \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{36} = \tfrac{2}{36}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Els valors de la funció de probabilitat conjunta de (X, Y) es mostren en la taula següent. També es mostren els valors de les probabilitats marginals.

$Y \backslash X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$P(X = i)$
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
1	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{8}{36}$
3	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{6}{36}$
4	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{4}{36}$
5	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$
$P(Y = j)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

Podem comprovar que X i Y no són independents ja que, per exemple, $P(X = 2, Y = 2) = 0 \neq P(X = 2) \cdot P(Y = 2) = \frac{2}{36} \cdot \frac{8}{36}$.
Per comprovar si X i Y són incorrelades hem de demostrar que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, i per tant $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \textstyle\sum_{i\in\Omega_X} \sum_{j\in\Omega_Y} i \cdot j \cdot P(X = i, Y = j) = \\
&= 0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{36} + 0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{36} + \cdots + 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{36} + 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 5 \cdot 7 \cdot \frac{2}{36} = \frac{490}{36} \\
E(X) &= \textstyle\sum_{i\in\Omega_X} i \cdot P(X = i) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7 \\
E(Y) &= \textstyle\sum_{j\in\Omega_Y} j \cdot P(Y = j) = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + \cdots + 5 \cdot \frac{2}{36} = \frac{70}{36}
\end{aligned}$$

Comprovam que $E(X) \cdot E(Y) = 7 \cdot \frac{70}{36} = \frac{490}{36} = E(XY)$, per tant les variables estan **incorrelades**.

Problema 23. El nombre de clients que arriben a una estació de servei durant un temps t és una variable aleatòria de Poisson amb paràmetre $\beta \cdot t$. El temps necessari per servir cada client és una variable aleatòria exponencial amb paràmetre α. Determinau la llei de la variable aleatòria que dóna el nombre de clients que arriben durant el temps de servei T d'un determinat client. Es suposa que les arribades de clients són independents del temps de servei dels clients. (Nota: $\displaystyle\int_o^\infty r^k\, e^{-r}\, dr = \Gamma(k+1) = k!$)

Solució: Denotam:

X_t: nombre de clients que arriben a una estació de servei en un temps t, $X_t \sim \mathrm{Po}(\beta t)$

T: temps necessari per a servir a cada client, $T \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$

Z: nombre de clients que arriben durant el temps de servei T d'un client

T és un v.a. contínua amb funció de densitat:

$$f_T(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

X_t és una v.a. discreta amb funció de probabilitat:

$$P(X_t = i) = \begin{cases} \frac{(\beta t)^i}{i!} e^{-\beta t} & \text{si } i \in \{0, 1, \cdots\} \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

Observem que Z és una v.a. discreta i el seu conjunt de valors possibles és $\Omega_Z = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Si $i \notin \Omega_Z$, $P(Z = i) = 0$. Si $i \in \Omega_Z$, aplicam la fòrmula de la probabilitat total per a calcular $P(Z = i)$, tenint en compte que T és una v.a. contínua:

$$P(Z = i) = \int_0^{+\infty} P(Z = i | T = t) \cdot f_T(t)\, dt$$

D'altra banda, $Z = i|_{T=t}$ és el succés "arriben i clients a l'estació de servei en un temps t", per tant és equivalent al succés $X_t = i$. De manera que

$$P(Z = i | T = t) = P(X_t = i) = \frac{(\beta t)^i}{i!} e^{-\beta t} \qquad \text{si } i \in \{0, 1, \cdots\}$$

La integral queda:

$$P(Z = i) = \int_0^{+\infty} \frac{(\beta t)^i}{i!} e^{-\beta t} \cdot \alpha e^{-\alpha t}\, dt = \frac{\alpha \beta^i}{i!} \int_0^{+\infty} t^i e^{-(\alpha+\beta)t}\, dt$$

Per aplicar la nota de l'enunciat hem de fer el canvi de variable:

$$r = (\alpha + \beta) t \qquad t = \frac{r}{\alpha + \beta} \qquad dr = \alpha + \beta$$

i la integral s'escriu:

$$P(Z = i) = \frac{\alpha \beta^i}{i!} \frac{1}{(\alpha + \beta)^{i+1}} \int_0^{+\infty} r^i e^{-r}\, dr = \frac{\alpha \beta^i}{i!} \frac{1}{(\alpha + \beta)^{i+1}} i! = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^i = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^i$$

Observem que aquesta funció de probabilitat correspon a la d'una v.a. geomètrica amb paràmetre $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ que comença a 0:

$$Z \sim \mathrm{Geom}(\frac{\alpha}{\alpha + \beta})$$

Problema 25. Una persona contreu el virus d'una certa malaltia que requereix hospitalització. Sigui X la variable aleatòria que dóna el temps, en setmanes, que tarda en manifestar-se la malaltia. Sigui Y la variable aleatòria que expressa el temps total, també en setmanes, des de que el virus s'ha contret fins que el pacient és donat d'alta. Se suposa que en el moment que apareixen els símptomes el malalt és hospitalitzat. Se sap que X i Y tenen una densitat conjunta donada per:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x \cdot e^{-y} & \text{si } 0 \leq x \leq y < +\infty \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

a) Trobau les corbes i les rectes de regressió i estudiau la bondat dels ajustaments.

b) Calculau la probabilitat que un pacient estigui hospitalitzat menys d'una setmana. $(\mathbf{1 - e^{-1}})$

c) Suposant que el pacient és donat d'alta avui després de 5 dies hospitalitzat, quina és la probabilitat que contragués el virus fa menys de dues setmanes? (**Ind.**: Fes un canvi de les variables (X, Y) a les noves variables $(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = (Y - X, Y)$.) $(\mathbf{1 - \frac{16}{7} e^{-\frac{9}{7}} = 0.37})$

Solució:

a) Calcularem primer les corbes de regressió $Y^* = E(Y|X)$ i $X^* = E(X|Y)$.

$$E(Y|X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy$$

Necessitam calcular primer la funció de densitat de Y condicionada a X. Aplicam la definició:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

La funció de densitat marginal de X es calcula com:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) dy = \begin{cases} x \geq 0 & \int_x^{+\infty} x e^{-y} dy = x e^{-x} \\ \\ x < 0 & 0 \end{cases}$$

Per tant:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{xe^{-y}}{xe^{-x}} = e^{x-y} & \text{si } 0 \leq x \leq y < +\infty \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

Finalment,

$$E(Y|X) = \int_x^{+\infty} y e^{x-y} dy = e^x \int_x^{+\infty} y e^{-y} dy = (\text{integram per parts}) = 1 + x$$

Seguim un procediment similar per calcular $E(X|Y)$:

$$E(X|Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) dx = \begin{cases} y \geq 0 & \int_0^y x e^{-y} dx = \frac{y^2}{2} e^{-y} \\ \\ y < 0 & 0 \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{xe^{-y}}{\frac{y^2}{2} e^{-y}} = \frac{2x}{y^2} & \text{si } 0 \leq x \leq y < +\infty \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

$$E(X|Y) = \int_0^y x\frac{2x}{y^2}dx = \frac{2}{3}y$$

Podem calcular també les rectes de regressió:

$$Y^{**} = aX + b \qquad \text{amb } a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)} \qquad \text{i} \qquad b = E(Y) - aE(X)$$

$$X^{**} = a'X + b' \qquad \text{amb } a' = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)} \qquad \text{i} \qquad b' = E(X) - a'E(Y)$$

No obstant, com l'equació de la corba de regressió $Y^* = E(Y|X)$ és l'equació d'una recta, sabem que $Y^{**} = Y^*$. A més, com l'equació de la corba de regressió $X^* = E(X|Y)$ és també l'equació d'una recta, tendrem que $X^{**} = X^*$.

b) Anomenam Z el temps d'hospitalització. Aquest temps es calcula com la diferència entre el temps que tarda un pacient en ésser donat d'alta i el temps en què es manifesten els primers simptomes. Per tant $Z = Y - X$. Volem calcular $P(Z < 1)$.

$$P(Z < 1) = P(Y - X < 1) = \iint_R f_{XY}(x,y)dxdy$$

on R és la regió del pla formada pels punts (x,y) que verifiquen la condició $y - x < 1$:

$$R = \{(x,y) \ / \ y - x < 1\}$$

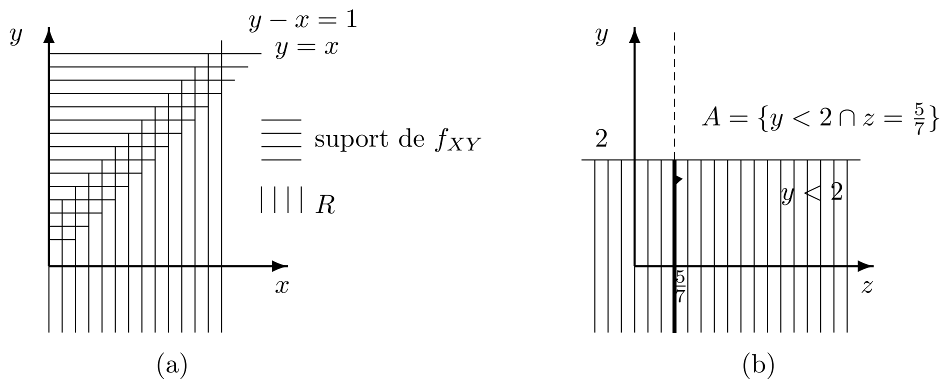

Figura 1:

La integral anterior prendrà un valor diferent de zero només en la regió d'intersecció de R amb el suport de la funció (veure figura 1a), de manera que tendrem:

$$P(Z < 1) = \int_0^{+\infty}\int_x^{1+x} xe^{-y}dydx = \cdots = 1 - \frac{1}{e}$$

c) Ens demanen calcular

$$P(Y < 2|_{Z=\frac{5}{7}}) = \frac{P(Y < 2 \cap Z = \frac{5}{7})}{f_Z(\frac{5}{7})} = \frac{P(A)}{f_Z(\frac{5}{7})}$$

on A és el conjunt de punts (z,y) que verifiquen les condicions $y < 2$ i $z = \frac{5}{7}$ (veure figura 1b). De manera que:

$$P(A) = \int_{-\infty}^{2} f_{ZY}(\frac{5}{7}, y)dy$$

Observam com per calcular els valors anteriors necessitam conèixer f_Z i f_{ZY}. Tenim dues maneres de fer-ho: càlcul directe o utilitzant transformacions. Ho farem de les dues maneres:

Càlcul directe de f_Z i f_{ZY}

Com Y i Z són v.a. contínues hem de calcular en primer lloc les funcions de distribució. A partir d'aquestes podrem obtenir, per derivació, les funcions de densitat.

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Y - X \leq z) = P(R_z) = \iint\limits_{R_z} f_{XY}(x,y)dxdy$$

on R_z és la regió del pla formada pels punts (x,y) que verifiquen la condició $y - x \leq z$. Aquesta regió varia per a cada valor de z i té una forma similar a la mostrada en la figura 1a. La intersecció entre R_z i el suport de la funció f_{XY} serà nul.la per a valors de $z < 0$. Per tant:

$$F_Z(z) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \int_x^{z+x} xe^{-y} dydx = \cdots = 1 - e^{-z} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Derivant aquesta funció obtenim la funció de densitat de Z:

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} e^{-z} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Per obtenir f_{ZY} seguim un procediment similar a l'anterior:

$$F_{ZY}(z,y) = P(Z \leq z, Y \leq y) = P(Y - X \leq z, Y \leq y) = P(R_{zy}) = \iint\limits_{R_{zy}} f_{XY}(x,y)dxdy$$

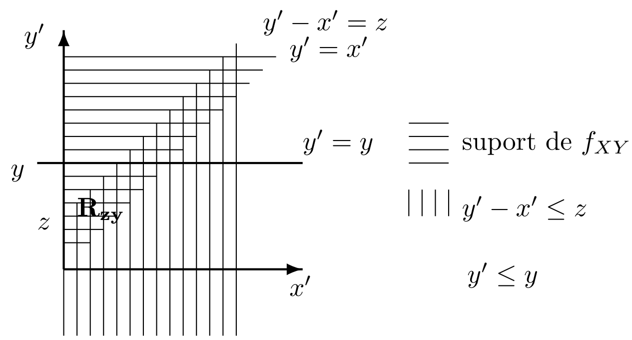

Figura 2:

on R_{zy} és la regió del pla formada pels punts (x', y') que verifiquen les condicions $y' \leq y$ i $y' - x' \leq z$. Aquesta regió varia per a cada valor y i z (veure figura 2). En particular, La intersecció entre R_{zy} i el suport de la funció f_{XY} serà nul.la quan $y < 0$ o bé $z < 0$. Per tant:

$$F_{ZY}(z,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \text{ o } z < 0 \\ \int_0^{y-z} \int_x^{x+z} xe^{-y} dydx + \int_{y-z}^{y} \int_x^{y} xe^{-y} dydx = \cdots = 1 - e^{-z} - ze^{-y}(1 + y - \frac{z}{2}) & \text{si } y \geq z \geq 0 \\ \int_0^y \int_x^y xe^{-y} dydx = \cdots = 1 - e^{-y}(\frac{y^2}{2} + y + 1) & \text{si } z > y \geq 0 \end{cases}$$

Derivant aquesta funció obtenim f_{YZ}:

$$f_{ZY}(z,y) = \frac{\partial^2 F_{ZY}(z,y)}{\partial z \partial y} = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \text{ o } z < 0 \\ e^{-y}(y - z) & \text{si } y \geq z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z > y \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-y}(y - z) & \text{si } y \geq z \geq 0 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

Càlcul de f_Z i f_{ZY} utilitzant transformacions de v.a.

Feim el canvi de variables $(\mathcal{U},\mathcal{V}) = (Y-X,Y)$. En notació matricial aquest canvi s'escriu com:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U} \\ \mathcal{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Amb aquest canvi tenim que $Z = \mathcal{U}$ i per tant $f_{ZY} = f_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ i $f_Z = f_{\mathcal{U}}$.

La funció de densitat conjunta de $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ es pot calcular a partir de la funció de densitat conjunta de X i Y amb la fòrmula:

$$f_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(u,v) = \frac{f_{XY}(A^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{|\det(A)|}$$

on A és la matriu associada a la transformació lineal. Tenim doncs:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \quad \det(A) = -1$$

Per tant:

$$f_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(u,v) = \frac{f_{XY}(v-u,v)}{|-1|} = f_{XY}(v-u,v) = \begin{cases} (v-u)e^{-v} & \text{si } 0 \leq v-u \leq v \\ \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

La condició $0 \leq v-u \leq v$ és equivalent a $v \geq u \geq 0$, de manera que obtenim la mateixa funció de densitat conjunta que fent el càlcul directe.

$f_{\mathcal{U}}$ es calcula com una llei marginal a partir de $f_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$:

$$f_{\mathcal{U}}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(u,v)dv = \begin{cases} \int_u^{+\infty}(v-u)e^{-v}dv = \cdots = e^{-u} & \text{si } u \geq 0 \\ \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

que és el mateix resultat obtingut amb el càlcul directe.

Ara ja podem resoldre l'apartat c):

$$P(Y<2|_{Z=\frac{5}{7}}) = \frac{\int_{-\infty}^{2} f_{ZY}(\frac{5}{7},y)dy}{f_Z(\frac{5}{7})} = \frac{\int_{5/7}^{2}\ e^{-y}(y-\frac{5}{7})dy}{e^{-5/7}} = \frac{e^{-5/7}-\frac{16}{7}e^{-2}}{e^{-5/7}} = 1-\frac{16}{7}e^{-9/7}$$

Problema 28. Siguin X_1, X_2 variables aleatòries independents tals que

$$P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 2) \text{ si } i = 1, 2$$

Sigui Y_k la v.a. que designa el nombre de variables X_i iguals a k amb $k = 1, 2$. Trobau la distribució conjunta de (Y_1, Y_2) i el seu vector de mitjanes i la seva matriu de covariàncies.

Solució: Per l'enunciat del problema sabem que:

$$\Omega_{X_1} = \{1, 2\} \qquad P(X_1 = 1) = p \qquad P(X_1 = 2) = 1 - p$$

$$\Omega_{X_2} = \{1, 2\} \qquad P(X_2 = 1) = p \qquad P(X_2 = 2) = 1 - p$$

Com que X_1 i X_2 són independents, llavors $P(X_1 = i, X_2 = j) = P(X_1 = i) \cdot P(X_2 = j)$.

A més, per la definició de Y_1 i Y_2 tenim que:

$$\Omega_{Y_1} = \{0, 1, 2\} \qquad \Omega_{Y_2} = \{0, 1, 2\}$$

$$P(Y_1 = i, Y_2 = j) = 0 \qquad \text{si } i \notin \Omega_{Y_1} \quad \text{ó} \quad j \notin \Omega_{Y_2}$$

$$P(Y_1 = 0, Y_2 = 0) = P(\text{cap variable } X_1,\, X_2 \text{ igual a 1 o a 2}) = 0 \quad \text{(impossible)}$$

$$P(Y_1 = 0, Y_2 = 1) = P(\text{cap variable } X_1,\, X_2 \text{ igual a 1, una única igual a 2}) = 0 \quad \text{(impossible)}$$

$$P(Y_1 = 0, Y_2 = 2) = P(X_1 = 2, X_2 = 2) = P(X_1 = 2) \cdot P(X_2 = 2) = (1 - p)^2$$

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 0) = P(\text{cap variable } X_1,\, X_2 \text{ igual a 2, una única igual a 1}) = 0 \quad \text{(impossible)}$$

$$\begin{aligned} P(Y_1 = 1, Y_2 = 1) &= P(X_1 = 1, X_2 = 2) + P(X_1 = 2, X_2 = 1) = \\ &= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2) \cdot P(X_2 = 1) = 2p(1 - p) \end{aligned}$$

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 2) = P(\text{una única variable } X_1,\, X_2 \text{ igual a 1, dues iguals a 2}) = 0 \quad \text{(impossible)}$$

$$P(Y_1 = 2, Y_2 = 0) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = p^2$$

$$P(Y_1 = 2, Y_2 = 1) = P(\text{una única variable } X_1,\, X_2 \text{ igual a 2, dues iguals a 1}) = 0 \quad \text{(impossible)}$$

$$P(Y_1 = 2, Y_2 = 2) = P(\text{dues variables } X_1,\, X_2 \text{ iguals a 1 i dues iguals a 2}) = 0 \quad \text{(impossible)}$$

Aquests resultats es poden resumir en la següent taula, on es mostren també les funcions de probabilitat marginals.

$Y_2 \backslash Y_1$	0	1	2	$P(Y_2 = j)$
0	0	0	p^2	p^2
1	0	$2p(1-p)$	0	$2p(1-p)$
2	$(1-p)^2$	0	0	$(1-p)^2$
$P(Y_1 = i)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2	

Es pot comprovar que la suma de tots els valors de la probabilitat conjunta, així com la suma de les probabilitats marginals, és igual a 1.

El vector de mitjanes $(E(Y_1), E(Y_2))$ és el següent:

$$E(Y_1) = 0 \cdot P(Y_1 = 0) + 1 \cdot P(Y_1 = 1) + 2 \cdot P(Y_1 = 2) = 2p(1 - p) + 2p^2 = 2p$$

$$E(Y_2) = 0 \cdot P(Y_2 = 0) + 1 \cdot P(Y_2 = 1) + 2 \cdot P(Y_2 = 2) = 2p(1 - p) + 2(1 - p)^2 = 2 - 2p = 2(1 - p)$$

La matriu de covariàncies és: $K = \begin{pmatrix} \sigma^2_{Y_1} & \sigma_{Y_1Y_2} \\ \sigma_{Y_1Y_2} & \sigma^2_{Y_2} \end{pmatrix}$

$E(Y_1^2) = 0^2 \cdot P(Y_1 = 0) + 1^2 \cdot P(Y_1 = 1) + 2^2 \cdot P(Y_1 = 2) = 2p(1-p) + 4p^2 = 2p(1+p)$

$\sigma^2_{Y_1} = E(Y_1^2) - E(Y_1)^2 = 2p + 2p^2 - (2p)^2 = 2p(1-p)$

$E(Y_2^2) = 0^2 \cdot P(Y_2 = 0) + 1^2 \cdot P(Y_2 = 1) + 2^2 \cdot P(Y_2 = 2) = 2p(1-p) + 4(1-p)^2 = 2(1-p)(2-p)$

$\sigma^2_{Y_2} = E(Y_2^2) - E(Y_2)^2 = 2(1-p)(2-p) - (2-2p)^2 = 2(1-p)p$

$E(Y_1Y_2) = 0 \cdot 2 \cdot P(Y_1 = 0, Y_2 = 2) + 1 \cdot 1 \cdot P(Y_1 = 1, Y_2 = 1) + 2 \cdot 0 \cdot P(Y_1 = 2, Y_2 = 0) = 2p(1-p)$

$\sigma_{Y_1Y_2} = E(Y_1Y_2) - E(Y_1) \cdot E(Y_2) = 2p(1-p) - 2p \cdot 2(1-p) = -2p(1-p)$

De manera que la matriu de covariàncies queda finalment:

$$K = \begin{pmatrix} 2p(1-p) & -2p(1-p) \\ \\ -2p(1-p) & 2p(1-p) \end{pmatrix} = 2p(1-p) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calculam el coeficient de correlació:

$$\rho_{Y_1Y_2} = \frac{\sigma_{Y_1Y_2}}{\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}} = \frac{-2p(1-p)}{\sqrt{2p(1-p)}\sqrt{2p(1-p)}} = -1$$

Aquest valor de $\rho_{Y_1Y_2}$ indica que existeix una relació lineal entre les variables Y_1 i Y_2.

Problema 29. Sigui (X, Y) un vector aleatori que té distribució uniforme a $(0,1) \times (0,1)$. Calculau la distribució conjunta i les marginals de (U, V) on $U = \max(X, Y)$ i $V = \min(X, Y)$.

Solució: Calcularem primer $F_{UV}(u, v)$ i a continuació derivarem per a trobar les funcions de densitat conjunta i marginals.

$$F_{UV}(u, v) = P(U \leq u, V \leq v) = P(\max(X, Y) \leq u, \min(X, Y) \leq v) = P(A_{uv})$$

on A_{uv} és el conjunt de punts (x, y) tals que $\max(x, y) \leq u$ i $\min(X, Y) \leq v$.
Podem escriure A com la intersecció de dos conjunts: $A_{uv} = A_u^{\max} \cap A_v^{\min}$, on

$$A_u^{\max} = \{(x, y) \,/\, \max(x, y) \leq u\} \qquad \text{i} \qquad A_v^{\min} = \{(x, y) \,/\, \min(x, y) \leq v\}$$

En la figura 1 es mostra la forma que tenen aquests conjunts.

D'altra banda,

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} K & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{i} \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

El suport d'aquesta funció es mostra en la figura 1. El valor de K es troba aplicant la propietat $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x, y)\, dxdy = \iint_{\Omega_{XY}} f_{XY}(x, y)\, dxdy = 1$. Fent la integral comprovam que $K = 1$.

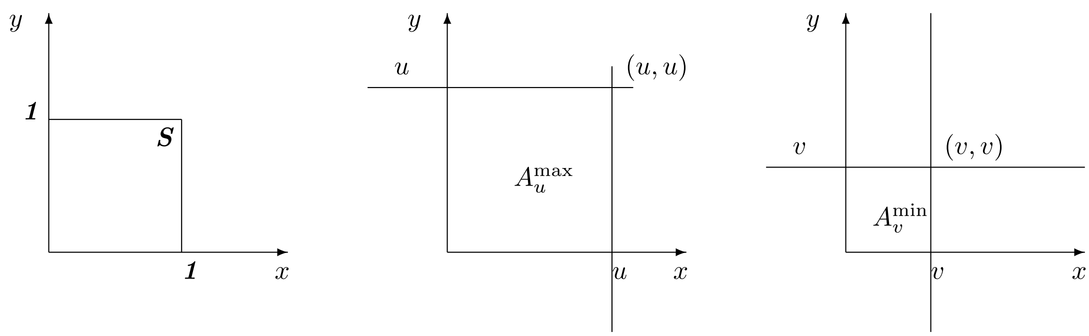

Figura 1: Esquerra: suport de $f_{XY}(x, y)$. Centre: conjunt $A_u^{\max}$ per a $u > 0$. Dreta: conjunt $A_v^{\min}$ per a $v > 0$.

Ara ja podem calcular $F_{UV}(u, v)$:

$$F_{UV}(u, v) = \iint_{A_u^{\max} \cap A_v^{\min} \cap \Omega_{XY}} f_{XY}(x, y)\, dxdy = \iint_{A_u^{\max} \cap A_v^{\min} \cap \Omega_{XY}} 1\, dxdy = \text{area}(A_u^{\max} \cap A_v^{\min} \cap \Omega_{XY})$$

L'àrea de la intersecció d'aquests conjunts dependrà dels valors de u iv. Tenint en compte totes les possibilitats arribarem al següent resultat:

$$F_{UV}(u, v) = \begin{cases} \text{si } u < 0 \text{ ó } v < 0 & 0 \\ \text{si } 0 \leq u \leq 1 \text{ i } 0 \leq v < u & 2uv - v^2 \\ \text{si } 0 \leq u \leq 1 \text{ i } v \geq u & u^2 \\ \text{si } u > 1 \text{ i } v \leq 1 & 2v - v^2 \\ \text{si } u > 1 \text{ i } v > 1 & 1 \end{cases}$$

Dividint aquesta funció en cada interval obtenim la funció de densitat conjunta:

$$f_{UV}(u, v) = \frac{\partial^2 F_{UV}(u, v)}{\partial u\, \partial v} = \begin{cases} \text{si } u < 0 \text{ ó } v < 0 & \frac{\partial^2 0}{\partial u\, \partial v} = 0 \\ \text{si } 0 \leq u \leq 1 \text{ i } 0 \leq v < u & \frac{\partial^2 2uv - v^2}{\partial u\, \partial v} = 2 \\ \text{si } 0 \leq u \leq 1 \text{ i } v \geq u & \frac{\partial^2 u^2}{\partial u\, \partial v} = 0 \\ \text{si } u > 1 \text{ i } v \leq 1 & \frac{\partial^2 2v - v^2}{\partial u\, \partial v} = 0 \\ \text{si } u > 1 \text{ i } v > 1 & \frac{\partial^2 1}{\partial u\, \partial v} = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq v < u \leq 1 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

Les funcions de densitat marginals s'obtenen integrant aquesta funció:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u,v)\,dv = \begin{cases} \text{si } 0 \le u \le 1 & 2u \\ \text{altrament} & 0 \end{cases} \qquad f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u,v)\,du = \begin{cases} \text{si } 0 \le v \le 1 & 2-2v \\ \text{altrament} & 0 \end{cases}$$

Problema 30. Sigui (X,Y) un vector aleatori distribuït uniformement al cercle unitat. Siguin les variables aleatòries $U=\sqrt{X^2+Y^2}$ i $V=\arctan\frac{Y}{X}$.

a) Demostrau que U i V són v.a. independents.

b) Siguin R i Θ dues variables aleatòries independents amb distribució uniforme a l'interval unitat i a l'interval $(0,2\pi)$ respectivament. El vector aleatori (R,Θ) té la mateixa distribució que el (U,V)?

Solució:

a) Per demostrar que U i V són independents hem de provar que $f_{UV}(u,v)=f_U(u)\cdot f_V(v)$. Primer calcularem $f_{UV}(u,v)$ i a partir d'aquí trobarem les densitats marginals.

Calcularem $f_{UV}(u,v)$ utilitzant la fòrmula:

$$f_{UV}(u,v)=f_{XY}(h_1(u,v),h_2(u,v))\cdot|J_{h_1h_2}(u,v)| \qquad \text{on} \qquad J_{h_1h_2}(u,v)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial v}\\ \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial v}\end{pmatrix}$$

on les funcions $h_1(u,v)$ i $h_2(u,v)$ són les inverses de $u=g_1(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ i $v=g_2(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$. Tenim que $x=h_1(u,v)=u\cdot\cos v$ i $y=h_2(u,v)=u\cdot\sin v$. Per tant:

$$J_{h_1h_2}(u,v)=\det\begin{pmatrix}\cos v & -u\cdot\sin v\\ \sin v & u\cdot\cos v\end{pmatrix}=u\cdot\cos^2 v+u\cdot\sin^2 v=u$$

La funció de densitat de (X,Y) és de la forma

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}K & \text{si } (x,y)\in S\\ 0 & \text{en cas contrari}\end{cases}$$

El suport S d'aquesta funció es mostra en la figura següent:

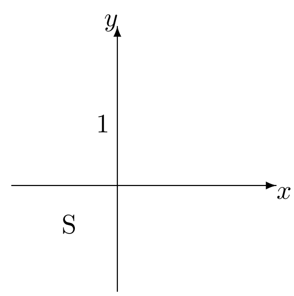

Figura 1: S: suport de $f_{XY}(x,y)$.

El valor de K es troba aplicant la propietat $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x,y)\,dxdy=\iint_S f_{XY}(x,y)\,dxdy=1$. Com que $\iint_S f_{XY}(x,y)\,dxdy=\iint_S K\,dxdy=K\cdot\text{area}(S)$ i $\text{area}(S)=\pi\cdot 1^2$, llavors $K=\frac{1}{\pi}$.

De manera que:

$$f_{UV}(u,v)=u\cdot f_{XY}(u\cdot\cos v,u\cdot\sin v)=\begin{cases}\frac{u}{\pi} & \text{si } (u\cdot\cos v,u\cdot\sin v)\in S\\ 0 & \text{en cas contrari}\end{cases}=\begin{cases}\frac{u}{\pi} & \text{si } 0\le u\le 1 \quad 0\le v\le 2\pi\\ 0 & \text{en cas contrari}\end{cases}$$

Les funcions de densitat marginals són:

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u,v)\,dv=\begin{cases}\text{si } 0\le u\le 1 & 2u\\ \text{altrament} & 0\end{cases} \qquad f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u,v)\,du=\begin{cases}\text{si } 0\le v\le 2\pi & \frac{1}{2\pi}\\ \text{altrament} & 0\end{cases}$$

Es comprova que $f_U(u)\cdot f_V(v)=f_{UV}(u,v)$, per tant hem demostrat que U i V són v.a. independents.

b) Si $R\sim\mathcal{U}(0,1)$ i $\Theta\sim\mathcal{U}(0,2\pi)$, llavors: $f_R(r)=\begin{cases}\text{si } 0\le r\le 1 & 1\\ \text{altrament} & 0\end{cases}$ i $f_\Theta(\theta)=\begin{cases}\text{si } 0\le\theta\le 2\pi & \frac{1}{2\pi}\\ \text{altrament} & 0\end{cases}$

Com que R i Θ són v.a. independents, la seva funció de densitat conjunta és:

$$f_{R\Theta}(r,\theta) = f_R(r) \cdot f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{si } 0 \leq r \leq 1 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi & \frac{1}{2\pi} \\ \text{altrament} & 0 \end{cases}$$

Com que $f_{R\Theta}$ és diferent de f_{UV} podem afirmar que (R,Θ) i (U,V) tenen distribucions diferents.

Problema 31. Siguin X i Y dues v.a. exponencials independents. Trobau la funció de densitat de $Z = |X - Y|$.

Solució: Calcularem primer $F_Z(z)$ i a continuació derivarem per a trobar $f_Z(z)$.

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(|X - Y| \le z) = \begin{cases} P(-z \le X - Y \le z) & \text{si } z \le 0 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

Per al cas $z \ge 0$ denotam R el conjunt de punts (x, y) tals que $-z \le x - y \le z$ (figura 1), de manera que

$$P(-z \le X - Y \le z) = \iint_R f_{XY}(x, y)\, dxdy$$

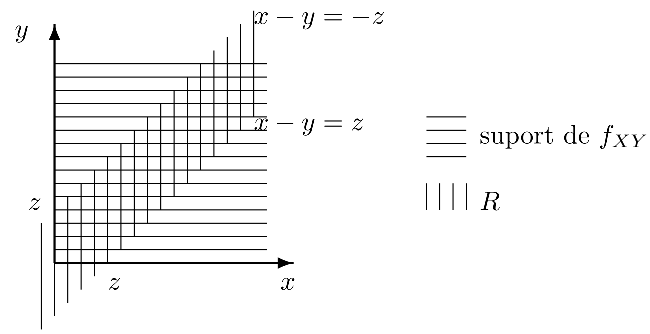

Figura 1:

D'altra banda, X i Y són v.a. exponencials independents. Si denotam els seus paràmetres com λ i α, respectivament, llavors:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \le 0 \end{cases}$$

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \lambda\alpha e^{-\lambda x - \alpha y} & \text{si } x > 0 \text{ i } y > 0 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

El suport de $f_{XY}(x, y)$ són els valors de x i y positius, per tant el càlcul de $P(-z \le X - Y \le z)$ queda:

$$\begin{aligned} P(-z \le X - Y \le z) &= \iint_{R\cap\Omega_{XY}} \lambda\alpha e^{-\lambda x - \alpha y}\, dxdy = \\ &= \int_0^z \left(\int_0^{x+z} \alpha e^{-\lambda x - \alpha y}\, dy \right) dx + \int_z^{+\infty} \left(\int_{x-z}^{x+z} \alpha e^{-\lambda x - \alpha y}\, dy \right) dx = \\ &= \cdots = 1 - e^{-\lambda z} + \tfrac{\lambda}{\lambda+\alpha}(e^{-\lambda z} - e^{-\alpha z}) \end{aligned}$$

En conclusió:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda z} + \frac{\lambda}{\lambda+\alpha}(e^{-\lambda z} - e^{-\alpha z}) & \text{si } z \ge 0 \\ \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

I la funció de densitat de Z és per tant:

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} \frac{d}{dz}\left(1 - e^{-\lambda z} + \frac{\lambda}{\lambda+\alpha}(e^{-\lambda z} - e^{-\alpha z})\right) = \frac{\lambda\alpha}{\lambda+\alpha}(e^{-\lambda z} + e^{-\alpha z}) & \text{si } z \ge 0 \\ \\ \frac{d0}{dz} = 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$