# Classes Pràctiques d'Aplicacions Lineals

## Classe pràctica 2

**Prob 2** Considerem l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[x] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & p(x) & \mapsto & (p(0), p(1)) \end{array}$$

1) Demostrau que $f$ és una aplicació lineal. **1.5 pt.**

2) Trobau el nucli de $f$ i una base. **1.5 pt.**

3) Trobau la imatge de $f$ i una base. **1.5 pt.**

(Examen setembre 2008)

**Prob 3** Si $p(x)$ és un polinomi de $\mathbb{R}_n[x]$, designem per $p'(x)$ la seva derivada. Considerem l'aplicació

$$f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

definida com: $f(p(x)) = p'(x)$.

a) Demostrau que és una aplicació lineal. **1.5 pt.**

b) Trobau la matriu associada a aquesta aplicació lineal respecte a les bases canòniques. **1.5 pt.**

c) Trobau la matriu associada a aquesta aplicació lineal si consideram la base canònica de $\mathbb{R}_3[x]$ i la base $\{1, 1+x, 1+x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. **2 pt.**

(Examen, febrer 2004)

## Solució classe pràctica 2

**Prob 2** Considerem l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & p(x) & \mapsto & (p(0), p(1)) \end{array}$$

1) Demostrau que $f$ és una aplicació lineal. **1.5 pt.**

2) Trobau el nucli de $f$ i una base. **1.5 pt.**

3) Trobau la imatge de $f$ i una base. **2 pt.**

**Solució:**

1) $f$ és aplicació lineal

- Vegem que $f((p+q)(x)) = f(p(x)) + f(q(x))$. Efectivament,

  $$f((p+q)(x)) = ((p+q)(0), (p+q)(1)) = (p(0)+q(0), p(1)+q(1)) = (p(0), p(1))+(q(0), q(1)) = f(p(x))+f(q(x))$$

- Vegem que $f((tp)(x)) = tf(p(x))$,

  $$f((tp)(x)) = ((tp)(0), (tp)(1)) = (tp(0), tp(1)) = t(p(0), p(1)) = tf(p(x))$$

2) Considerem l'isomorfisme $h : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que $h(a + bx + cx^2) = (a, b, c)$. Com són isomorfes en lloc de considerar l'aplicació $f$ podem considerar l'aplicació $f'$ definida per:

$$\begin{array}{rccc} f': & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (a, b, c) & \mapsto & (a, a+b+c) \end{array}$$

Cerquem $Ker\, f'$

$$Ker\, f' = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | f'(a, b, c) = (0, 0)\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a = 0, a + b + c = 0\}$$

Per trobar una base resolem el sistema $a = 0, a+b+c = 0$, i tenim $a = 0,\ b = -c$, per tant, $(a, b, c) \in Ker\, f'$ si

$$(a, b, c) = (0, -c, c) = c(0, -1, 1)$$

Aleshores una base del nucli de $f'$ és $\{(0, -1, 1)\}$ i de $f$, $\{-x + x^2\}$ i $Ker\, f = \langle -x + x^2 \rangle$

3) Cerquem $Im\, f'$. Una base de $\mathbb{R}^3$ és $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, per tant,

$$Im\, f' = \langle f'(1, 0, 0), f'(0, 1, 0), f'(0, 0, 1)\rangle = \langle (1, 1), (0, 1), (0, 1)\rangle$$

Els vectors $\{(1, 1), (0, 1)\}$ són linealment independents, ja que cada un té davant un zero més que l'anterior. Per altra part, com $dim\, \mathbb{R}^2 = 2$ tenim que $\{(1, 1), (0, 1)\}$ és una base de $Im\, f'$ i per tant, una base de $Im\, f$.

Finalment $Im\, f = \langle (1, 1), (0, 1)\rangle = \mathbb{R}^2$

**Prob 3** Si $p(x)$ és un polinomi de $\mathbb{R}_n[x]$, designem per $p'(x)$ la seva derivada. Considerem l'aplicació

$$f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$$

definida com: $f(p(x)) = p'(x)$.

a) Demostrau que és una aplicació lineal. **1.5 pt.**

b) Trobau la matriu associada a aquesta aplicació lineal respecte a les bases canòniques. **1.5 pt.**

c) Trobau la matriu associada a aquesta aplicació lineal si consideram la base canònica de $\mathbb{R}_3[x]$ i la base $\{1, 1 + x, 1 + x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. **2 pt.**

(Examen, febrer 2004)

a) Sigui $p_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$, i $p_2(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$. Aleshores:

$$f(p_1(x) + p_2(x)) = f(a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2 + (d_1 + d_2)x^3) =$$
$$= b_1 + b_2 + 2(c_1 + c_2)x + 3(d_1 + d_2)x^2 = (b_1 + 2c_1x + 3d_1x^2) + (b_2 + 2c_2x + 3d_2x^2) =$$
$$= p_1'(x) + p_2'(x)$$

Per altra part,

$$f(tp_1(x)) = f(ta_1 + tb_1x + tc_1x^2 + td_1x^3) = tb_1 + 2tc_1x + 3td_1x^2 =$$
$$= t(b_1 + 2c_1x + 3d_1x^2) = tp_1'(x)$$

Per tant, és una aplicació lineal.

b) Cerquem les imatges dels elements de la base canònica:

$$f(1) = 0; \quad f(x) = 1; \quad f(x^2) = 2x; \quad f(x^3) = 3x^2$$

Per tant, les coordenades de les imatges de la base canònica són, respectivament:

$$f(1) \to (0,0,0); \quad f(x) \to (1,0,0);$$
$$f(x^2) \to (0,2,0); \quad f(x^3) \to (0,0,3)$$

i la matriu associada a l'aplicació lineal és:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Posem les imatges dels elements de la base canònica en combinació lineal dels elements de la nova base.

$$f(1) = 0 = 0.1 + 0.(1+x) + 0.(1+x^2); \quad f(x) = 1 = 1.1 + 0.(1+x) + 0.(1+x^2);$$
$$f(x^2) = 2x = -2.1 + 2.(1+x) + 0.(1+x^2);$$
$$f(x^3) = 3x^2 = -3.1 + 0.(1+x) + 3.(1+x^2)$$

Per tant, les coordenades de les imatges en la nova base seran:

$$f(1) \to (0,0,0); \quad f(x) \to (1,0,0);$$
$$f(x^2) \to (-2,2,0); \quad f(x^3) \to (-3,0,3)$$

i la matriu associada a l'aplicació lineal en aquestes bases seria:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$