5 Aplicacions Lineals

Prob 5.1 Demostrau que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida per $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2)$ no és lineal.

Prob 5.2 Considerau les següents aplicacions $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^k, k = 3, 4$ definides per:

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= (y+z, x+z, x+z); \\ f_2(x,y,z) &= (2x, 3y, x+y+z); \\ f_3(x,y,z) &= (x-y, x+y, z); \\ f_4(x,y,z) &= (x-y-z, y-x-z, z-x, y); \\ f_5(x,y,z) &= (x+y+2z, 2x-z, x-y-3z) \end{aligned} .$$

a) Provau que totes elles són lineals.

b) Trobau $f_1 \circ f_1$, $f_3 \circ f_2$, $f_4 \circ f_3$.

c) Sigui $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + 2z = 0\}$, trobau una base i la dimensió de $f_1(S)$ i de $f_4(S)$

d) Sigui $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + z = 0\}$, trobau una base i la dimensió de $f_2^{-1}(T)$ i de $f_5^{-1}(T)$

e) Sigui $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x - 2y + z = 0, y + 2z - t = 0\}$, trobau una base i la dimensió de $f_4^{-1}(T)$

Prob 5.3 Considerau les aplicacions lineals del problema 5.2.

a) Trobau de cada una la matriu associada respecte de les bases canòniques.

b) Determinau quines d'entre elles són monomorfismes, quines epimorfismes i quines isomorfismes.

c) Trobau el nucli de f_i i la seva imatge. Comprovau si $\mathrm{Ker} f_i \oplus \mathrm{Im} f_i$ per $i = 1, 2, 3, 4, 5$

d) Trobau les matrius associades a les aplicacions lineals $f_1 \circ f_1$, $f_3 \circ f_2$, $f_4 \circ f_3$ respecte a les bases canòniques.

e) De les que siguin isomorfismes trobau f_i^{-1}

Prob 5.4 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme que té per matriu associada en la base canònica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinau bases de $Ker\ f$ i $Im\ f$. Demostrau que $Ker\ f$ i $Im\ f$ són suplementaris. Es verifica que $f^2 = f$?

Prob 5.5 Considerem $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'aplicació definida per:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & -b-c \\ b+c & d-a \end{pmatrix}$$

Demostrau que f és un endomorfisme i trobau la matriu de f en la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Trobau bases de $Ker\ f$, $Im\ f$ i $Ker\ f \cap Im\ f$.

Prob 5.6 Considereu l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donada per $f(x, y, z) = (2x + y, y - z)$. Calculau la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ i després en les bases $(1, 1, 1); (0, 1, 2); (0, 2, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ i $(2, 1); (1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$.

Prob 5.7 Calculau el rang de les següents aplicacions lineals:

a) $f(x_1, x_2) = (0, x_1, x_1)$.

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 - x_2 - 3x_3)$.

c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3)$

d) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0, x_1 + x_2)$.

e) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$.

Prob 5.8 Donades les aplicacions lineals $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$, $g(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, 2x_1)$ i $h(x_1, x_2) = (x_1, -x_2, x_1 - 3x_2)$, calculeu:

a) Les matrius F, G i H associades a f, g i h respectivament.

b) Comprovau que la matriu associada a l'aplicació lineal $2f + g$ és $2F + G$.

c) Comprovau que la matriu associada a l'aplicació lineal $(3h) \circ f$ és $3HF$.

d) Quan es pugui, calculau les aplicacions inverses de f, g i h. Comprovau, si escau, que les seves matrius associades són respectivament F^{-1}, G^{-1} i H^{-1}.

e) Calculau $h \circ (g + f)$, $h \circ g \circ g$, $h \circ f \circ g$.

Prob 5.9 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f(x, y, z) = (x + z, 0, x + y)$$

a) Demostreu que f és una aplicació lineal.

b) Calculeu el nucli i el conjunt imatge de l'aplicació f i doneu una base i la dimensió.

c) Determineu si f és injectiva i si és exhaustiva.

(Examen, febrer 2000)

Prob 5.10 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donada per $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + z)$

a) Calculau $Im\ f$, $Ker\ f$ donant una base.

b) Completau, si és necessari, una base de $Im\ f$ a una base de $\mathbb{R}^3$.

c) Comprovau que $Im\ f \bigoplus Ker\ f = \mathbb{R}^3$

(Examen, juny 2000)

Prob 5.11 Considereu la base B de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1)$. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme donat per $f(x, y, z) = (2x - y - z, x + z, 3y + 3z)$.

a) Donat un vector qualsevol $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, trobau les seves coordenades en la base B.

b) Trobau la matriu de l'endomorfisme f en la base B (inicial i final).

c) Calculeu $Im\ f$, $Ker\ f$, una base de cada un i les seves dimensions.

(Examen, setembre 2000)

Prob 5.12 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfisme que en qualque base té per matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiau segons els valors de α quan f és monomorfisme, epimorfisme o automorfisme.
(Examen, febrer 2001)

Prob 5.13 Considerem la matriu de nombres reals: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

a) Trobau l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que té A com a matriu associada en la base canònica.

b) Trobau una base de $Im\ f$ i una altra de $Ker\ f$.

c) Completeu una base de $Im\ f$ a una base de $\mathbb{R}^3$.

(Examen, juny 2001)

Prob 5.14 Considereu els següents endomorfismes en $\mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (x - 3z, 2y - z, y + z), \qquad g(x, y, z) = (x, y - z, z)$$

a) Trobeu la Imatge i el Nucli de l'aplicació $f + g$.

b) Completeu la base de la Imatge de $f - g$ a una base de $\mathbb{R}^3$

(Examen, setembre 2001)

Prob 5.15 Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida com $f(x, y) = (x + 2y, y, x - 2y)$

a) Trobau la matriu associada a l'aplicació en les bases canòniques inicial i final.

b) Ídem per a les bases $\{(1, 0), (1, 1)\}$ i $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 2)\}$.

c) Calculau la imatge i el nucli de l'aplicació.

(Examen, febrer 2002)

Prob 5.16 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Trobau l'aplicació lineal f que té la matriu A com a matriu associada en la base canònica (inicial i final).

b) Trobau les bases de $Im\ f$ i $Ker\ f$.

c) És f un isomorfisme? Justificau la resposta.

(Examen, juny 2002)

Prob 5.17 Considerem $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'aplicació definida per

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & -b-c \\ b+c & d-a \end{pmatrix}$$

a) Desmostrau que f és un endomorfisme.

b) Cercau la matriu associada a f en la base canònica de $\mathcal{M}_2$.

c) Cercau una base de $Im\ f$.

d) Cercau una base de $Ker\ f$.

e) Cercau una base de $Im\ f \cap Ker\ f$.

(Examen, setembre 2002)

Prob 5.18 Sigui $\mathbb{R}_2[x]$ l'espai vectorial (de dimensió 3) format pels polinomis reals de grau menor o igual a 2 amb coeficients reals:

$$\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Considerau l'endomorfisme f de $\mathbb{R}_2[x]$ en $\mathbb{R}_2[x]$ definit com:

$$f(ax^2 + bx + c) = (a+b)x^2 + (c-b)x + (2a+b+c)$$

a) Calculau la dimensió i una base de $\text{Ker}f$.

b) Calculau la dimensió i una base de $\text{Im}f$.

(Examen, febrer 2003)

Prob 5.19 Considerem l'espai vectorial V sobre un cos $\mathcal{K}$. Sigui $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ la base canònica de V i f un endomorfisme de V tal que $f(u_1) = u_1 + u_2$, $f(u_2) = u_2 + u_3$ i $f(u_3) = 0$. Calcular:

a) L'expressió matricial de l'endomorfisme en la base canònica B inicial i final.

b) $Ker(f)$ i la seva dimensió.

c) $Im(f)$ i la seva dimensió.

d) El conjunt de vectors de V invariants per l'endomorfisme f.

(Indicació: es diu que un vector w és invariant per f si $f(w) = w$).

(Examen, juny 2003)

Prob 5.20 Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida com $f(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$,

a) Trobar la matriu associada a f en la base canònica.

b) És f un monomorfisme? Justificar-ho.

c) És f un epimorfisme? Justificar-ho.

d) És f un automorfisme? Justificar-ho.

(Examen, setembre 2003)

Prob 5.21 Siguin $B = \{(1,1),(1,0)\}$ una base de l'espai vectorial de $\mathbb{R}^2$ i $B' = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ una base de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$. Definim l'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donada per $f(x,y) = (y, x, x-y)$.

a) Demostrau que f és lineal.

b) Trobau la matriu associada a aquesta aplicació lineal en les bases B i B'.

c) Trobau Imf i Ker$f$ i la dimensió de cada un d'ells.

d) Indicau si l'aplicació és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

(Examen, juny 2004)

Prob 5.22 Donada l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida com

$$f(x,y,z) = (x-2y+z, y, z+x).$$

a) Demostrau que és aplicació lineal.

b) Trobau Imf, Ker$f$ i la dimensió de cada un d'ells.

c) Indicau si l'aplicació és un epimorfisme, un monomorfisme i/o un isomorfisme.

d) Calculau la matriu associada a l'aplicació en la base (inicial i final): $\{(0,1,1),(0,2,0),(1,-1,0)\}$

e) És el vector $(1,2,1)$ un vector propi de l'aplicació?

(Examen, setembre 2004)

Prob 5.23 Donada l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(x,y,z) = (x+y, x+z, y+z)$,

a) Demostrau, aplicant la definició, que és una aplicació lineal. **0.5 pt.**

b) Trobau una base i la dimensió de Ker f i Im f. **0.5 pt.**

c) És monomorfisme, epimorfisme o isomorfisme? Raonau la resposta. **0.25 pt.**

d) Si $S = <(1,0,0),(1,1,0)>$, trobau una base i la dimensió de $f^{-1}(S)$ i $f(S)$ **0.75 pt.**

(Examen, febrer 2005)

Prob 5.24 Considerau l'aplicació lineal entre espais vectorials reals $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$, definida per

$$f(a+bi) = (a, b, a+b).$$

Considerau també els vectors:

$$u_1 = 1+i,\ u_2 = 1-i,\ v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (1,1,2),\ v_3 = (1,-1,0)$$

i els conjunts $B_1 = \{u_1, u_2\}$ i $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$.

a) Escriviu la matriu de f en les bases canòniques (als espais de sortida i d'arribada) **0,5 pt**

b) Calculau la dimensió i una base de Ker f i de Im f **1 pt**

c) Escriviu la matriu de f en les bases B_1 i B_2. **1 pt**

(**NOTA:** Considerau el conjunt del nombres complexos $\mathbb{C}$ com a parells, és a dir, com a elements de $\mathbb{R}^2$, $a+bi = (a,b)$, però posau els resultats corresponents en nombres complexos)

(Examen, juny 2005)

Prob 5.25 Considerem les aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$ i $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $g(x,y,z) = (x+y, x+z)$.

a) Defineix, de forma semblant a com hem definit f i g, l'aplicació $g \circ f$. **0,3 pt.**

b) Trobau les matrius associades a f, g i $g \circ f$. Quina relació hi ha entre aquestes matrius? Comprovar-ho. **0,3 pt.**

c) Cercau una base i la dimensió de $Im\ f$ i $Ker\ g$, i indicau, només amb les dades d'aquest apartat, si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva. És g injectiva? Per què? **0,6 pt.**

d) Tenint en compte només els rangs de les matrius associades a les aplicacions g i $g \circ f$, podries dir si aquestes són exhaustives, injectives o bijectives? Raonau la resposta i indicau si ho són. **0,6 pt.**

e) Donada la base $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\{(1,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ trobau la matriu associada a g respecte a aquestes base. Podries saber quin seria el rang d'aquesta matriu sense calcular-la? Raonau la resposta. **0,6 pt.**

f) Aplicant la definició de vector propi, trobau algun vector propi i el seu valor propi corresponent, de l'endomorfisme f. **0,6 pt.**

(Examen, juny 2006)

Prob 5.26 Sigui $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, .)$ l'espai vectorial de les matrius quadrades d'ordre 3 sobre $\mathbb{R}$. Considerem el subconjunt $\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ format per les matrius triangulars superiors i $\mathcal{S}$ el de triangulars inferiors. Establim l'aplicació $f : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ tal que $f(A) = A^t$.

a) Demostrau que $\mathcal{T}$ és un subespai vectorial de $M_3(\mathbb{R})$. Trobau una base. **0,5 pt.**

b) Demostrau que f és una aplicació lineal. **0,5 pt.**

c) Trobau $f(\mathcal{T})$. **0,75 pt.**

d) Trobau la matriu associada a l'aplicació lineal respecte a les bases canòniques (inicial i final). **0,5 pt.**

e) Quins elements de $\mathcal{T}$ són vectors propis? **0,75 pt.**

(Examen, setembre 2006)