Soluciones problemas del Tema 2

1) a) $E(W) = E(X+Y+Z) = E(X)+E(Y)+E(Z) = 0$; $Var(W) = Var(X)+Var(Y)+Var(Z)+2(Cov(X,Y)+Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)) = 1+1+1+2\left(\frac{1}{4}+0-\frac{1}{4}\right) = 3$
b) La esperanza será la misma. Al ser incorreladas $Var(W) = Var(X)+Var(Y)+Var(Z) = 3$

2) $E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n\mu$. $Var(S_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(X_i,X_j) = \sigma^2+\rho\sigma^2+\sum_{i=2}^{n-1}(\sigma^2+\rho\sigma^2+\rho\sigma^2)+\sigma^2+\rho\sigma^2 = n\sigma^2+2\rho\sigma^2(n-1)$.

3) $E(S_n) = n\mu$.
$Var(S_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(X_i,X_j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i Cov(X_i,X_j)+\sum_{j=i+1}^n Cov(X_i,X_j)\right) =$
$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i \sigma^2\rho^{i-j}+\sum_{j=i+1}^n \sigma^2\rho^{j-i}\right) = \sum_{i=1}^n \sigma^2\left(\sum_{k=0}^{i-1}\rho^k+\sum_{k=1}^{n-i}\rho^k\right) =$
$\sigma^2\sum_{i=1}^n\left(\frac{1-\rho^i}{1-\rho}+\frac{\rho-\rho^{n-i+1}}{1-\rho}\right) = \frac{\sigma^2}{1-\rho}\sum_{i=1}^n(1-\rho^i+\rho-\rho^{n-i+1}) =$
$\frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}\left(n-2\rho-n\rho^2+2\rho^{n+1}\right)$.

4) Tenemos que X_i sigue una ley $B(n_i,p)$ para $i=1,\ldots,k$.
La función generadora de probabilidades de una v.a. X_i es

$$G_{X_i}(z) = E(z^{X_i}) = \sum_{s=0}^{n_i} z^k \binom{n}{s} p^s(1-p)^{n_i-s} = \sum_{s=0}^{n_i}\binom{n}{s}(zp)^s(1-p)^{n_i-s} = (zp+q)^{n_i}$$

donde $q = 1-p$.
Entonces, al ser las z^{X_i} v.a. independientes, tenemos que:
$G_{S_k}(z) = E(z^{S_k}) = E(\Pi_{i=1}^k z^{X_i}) = \Pi_{i=1}^k E(z^{X_i}) = \Pi_{i=1}^k(zp+q)^{n_i} = (zp+q)^{\sum_{i=1}^k n_i}$
Pero esta última función resulta ser la función generadora de probabilidades de una v.a. $B(\sum_{i=1}^k n_i,p)$ y por lo tanto S_k es una binomial con esos parámetros.
Ya hemos discutido en temas anteriores, de distintas maneras, que la suma de binomiales independientes y con la misma probabilidad de éxito es otra binomial con la misma probabilidad de éxito y número de repeticiones igual a la suma de las repeticiones de cada binomial. La explicación es clara, pues al ser independientes y del mismo parámetro, la suma de ellas cuenta el número de éxitos en todas las repeticiones de la prueba.

5) Sean $X_1,\ldots,X_n$ v.a. i.i.d. $Po(\lambda_i)$. Intuitivamente $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ será también una v.a. $Po(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$ pues recordemos que la Poison se puede entender, bajo determinadas condiciones, como un cierto límite de una v.a. binomial.
Para comprobar esta propiedad podemos hacerlo de forma directa o utilizando la función característica o la generadora de probabilidades (ya que es una v.a. discreta no negativa que toma valores enteros).
La función característica de X_i es $\Phi_{X_i}(\omega) = e^{\lambda_i(e^{-j\omega}-1)}$ entonces
$\Phi_{S_n}(\omega) = \Pi_{i=1}^n\Phi_{X_i}(\omega) = \Pi_{i=1}^n e^{\lambda_i(e^{-j\omega}-1)} = e^{\sum_{i=1}^n\lambda_i(e^{-j\omega}-1)} = e^{(\sum_{i=1}^n\lambda_i)(e^{-j\omega}-1)}$
que es la función característica de una v.a. $Po(\sum_{i=1}^n\lambda_i)$.
Si recurrimos a la función generadora de probabilidades tenemos que
$G_{X_i}(z) = E(z^{X_i}) = \sum_{k\geq 0} z^k\frac{\lambda_i^k}{k!}e^{-\lambda_i} = \sum_{k\geq 0}\frac{(z\lambda_i)^k}{k!}e^{-\lambda_i} = e^{-\lambda_i}\sum_{k\geq 0}\frac{(z\lambda_i)^k}{k!} = e^{-\lambda_i}e^{k\lambda_i} = e^{\lambda_i(z-1)}$
Ahora
$G_{S_n}(z) = E(z^{S_n}) = E(\Pi_{i=1}^n z^{X_i}) = \Pi_{i=1}^n E(z^{X_i}) = \Pi_{i=1}^n e^{\lambda_i(z-1)} = e^{(\sum_{i=1}^n\lambda_i)(z-1)}$ que es la función generadora de probabilidades de una $Po(\sum_{i=1}^n\lambda_i)$ y por lo tanto S_n sigue esta ley de probabilidad.

6) En este problema estudiamos la distribución de la suma de una cantidad aleatoria de variables aleatorias i.i.d.
a) $E(S_N|N=n) = E(S_n) = nE(X_1)$ entonces $E(S_N|N) = NE(X_1)$.
b) $E(S_N) = E(E(S_N|N)) = E(NE(X_1)) = E(N)E(X_1)$.
c) $E(e^{j\omega S_N}|N=n) = E(e^{j\omega S_n}) = (\Phi_{X_1}(\omega))^n$ luego $E(e^{j\omega S_N}|N) = (\Phi_{X_1}(\omega))^N$.
d) $\Phi_{S_N}(\omega) = E(e^{j\omega S_N}) = E(E(e^{j\omega S_N}|N)) = E\left((\Phi_{X_1}(\omega))^N\right) = G_N(\Phi_{X_1}(\omega))$.

7) Las v.a. X_i para $i = 1, \ldots, k$ son i.i.d. y toman valores enteros positivos luego tienen función generadora de probabilidades $G_{X_i}(z) = E(z^{X_i})$.
a) Por el problema anterior tenemos que $E(S_N|N) = NE(X_1)$ y entonces
$E(S_N) = E(E(S_N|N)) = E(NE(X_1)) = E(X_1)E(N)$
La varianza es $Var(S_N) = E(S_N^2) - (E(S_N))^2$
Para calcularlo utilizaremos que $E(S_N^2) = E(E(S_N^2/N))$
$E(S_N^2|N=n) = E((\sum_{i=1}^N X_i)^2|N=n) = E\left((\sum_{i=1}^n X_i)^2\right) = Var(\sum_{i=1}^n X_i) + (E(\sum_{i=1}^n X_i))^2 = nVar(X_1) + (nE(X_1))^2$
Entonces $E(S_N^2|N) = NVar(X_1) + (NE(X_1))^2$
Ahora
$Var(S_N) = E(E(S_N^2|N)) - (E(S_N))^2 = E(N)Var(X_1) + E(N^2)(E(X_1))^2 - (E(X_1)E(N))^2 = E(N)Var(X_1) + (E(X_1))^2 Var(N)$
b) Recordemos que si X s una v.a. que toma valores enteros no negativos su función generadora de probabilidades es
$G_X(z) = E(Z^X)$ y su función característica es, como siempre, $\Phi_X(\omega) = E(e^{j\omega X})$
Entonces $\Phi_X(-j\ln z) = E(e^{-jj(\ln z)N}) = E(e^{\ln z^N}) = E(z^N) = G_X(z)$
Por otra parte aplicando el problema 9d) a S_N
$\Phi_{S_N}(\omega) = G_N(\Phi_{X_1}(\omega))$
De esta última propiedad junto con la primera observación se sigue que
$G_{S_N}(z) = \Phi_{S_N}(-j\ln z) = G_N(\Phi_X(-j\ln z)) = G_N(G_X(z))$

8) La v.a. N sigue una ley $Po(L)$. La v.a. X_i nos da el tiempo de ejecución del trabajo y sabemos que $P(X_i = 2) = P(X_i = 6) = \frac{1}{2}$, siendo estos tiempos independientes para $i = 1, 2, \ldots$.
Sea $W = \sum_{i=1}^N X_i$ el tiempo total de ejecución de los N trabajos llegados en una hora.
a) Aplicando resultados de problemas anteriores tenemos que $E(W) = E(N)E(X_1) = L\frac{1}{2}(3+6)) = \frac{9}{2}L$
$Var(W) = E(N)Var(X_1) + E(X_1)^2 Var(N) = L(Var(X_1) + E(X_1)^2) = L \cdot E(X_1^2)$
Ahora $E(X_1^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 6^2) = \frac{45}{2}$
Entonces $Var(W) = L\frac{45}{2}$
b) Por problemas anteriores sabemos que $G_W(z) = G_N(G_Z(z))$
Como N es una $Po(L)$ sabemos que $G_N(z) = E(Z^N) = e^{L(z-1)}$ por otra parte
$G_{X_i}(z) = E(z^{X_1}) = z^3\frac{1}{2} + z^6\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(z^3 + z^6)$
Entonces $G_W(z) = G_N(G_Z(z)) = G_N(\frac{1}{2}(z^3 + z^6)) = e^{L(\frac{1}{2}(z^3+z^6)-1)}$

9) Tenemos que N_t sigue una ley $Po(\lambda t)$
Recordemos que una expresión de la desigualdad de Cheb. es
$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$ con $a > 0$, $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma$.

En nuestro caso $E(N_t) = \lambda t$ y $Var(N_t) = \lambda t$ ya que es Poisson.
Entonces tomando $a = \varepsilon t$ podemos escribir
$P(|N_t - \lambda t| \geq \varepsilon) = P(|N_t - \lambda t| \geq \varepsilon t) \leq \frac{\lambda t}{(\varepsilon t)^2} = \frac{\lambda}{\varepsilon^2 t}$

10) Sea A = estar a favor de la ley y sea $f_n(A)$ la frecuencia relativa de individuos a favor de la ley entre n votantes. Sabemos que $P(A) = 0.1$
Por Cheb. Consideremos las v.a. $X_1, \ldots, X_n$ definidas como sigue
$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si el i-ésimo encuestado no está a favor} \\ 1 & \text{si el i-ésimo encuestado está a favor} \end{cases}$
Bajo estas condiciones X_i sigue una ley $Ber(0.1)$, supondremos independencia entre las respuestas (es decir los sujetos de la encuesta no se influyen unos a otros, o lo que es lo mismo la encuesta está bien hecha).
Entonces la frecuencia de respuesta a favor en una encuesta de tamaño n se puede poner como

$$f_n(A) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

y también sabemos que $\sum_{i=1}^n X_i$ sigue una ley $B(n, 0.1)$ por lo tanto $E(\sum_{i=1}^n X_i) = n0.1$ y $Var(\sum_{i=1}^n X_i) = n \cdot 0.1 \cdot 0.9$
Entonces
$P(|f_n(A) - p| < 0.02) = P(|\sum_{i=1}^n X_i - np| < n0.02) \geq 1 - \frac{pq}{n(0.02)^2} = 0.95$
Ahora en la última igualdad nos pondremos en el peor caso $p = q = \frac{1}{2}$; que es cuando se alcanza el máximo de $\frac{pq}{n(0.02)^2}$ y por lo tanto el mínimo de $1 - \frac{pq}{n(0.02)^2}$
Luego por Cheb. y poniéndonos en el peor caso se tienen que encuestar al menos a $n = 12500$ individuos para obtener la precisión deseada en la frecuencia como estimador de la proporción poblacional de individuos a favor de la legislación. Si sabemos que $p = 0.1$ entonces $n = 4500$.
Por T.L.C.:
Veamos que aplicando el teorema del límite central podemos reducir notablemente el tamaño de la encuesta.
Con la notación anterior
$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{npq}}$ tiende tener una distribución normal estándar cuando $n \to +\infty$.
Entonces
$P(|f_n(A) - p| < 0.02) = P(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - p\right| < 0.02) = P(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{n}\right| < 0.02) = P(|\sum_{i=1}^n X_i - np| < n0.02) = P(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{npq}}\right| < \frac{n0.02}{\sqrt{npq}}) \approx P(|Z| \leq \frac{n0.02}{\sqrt{npq}}) = 2F_Z(\frac{n(0.002)}{\sqrt{npq}}) - 1$
Donde Z es una normal estándar y F_Z su función de distribución. Entonces el n buscado se puede calcular desde la ecuación
$0.95 = P(|Z| \leq \frac{n0.02}{\sqrt{npq}}) = 2F_Z(\frac{n(0.002)}{\sqrt{npq}}) - 1$
ahora $F_Z(\frac{n(0.02)}{\sqrt{npq}}) = \frac{1.95}{2} = 0.975$
Mirando en las tablas distribución normal estándar obtenemos que
$F_Z(1.96) = 0.975$ y podemos despejar n de $\frac{n(0.02)}{\sqrt{npq}} = 1.96$ obteniéndose que
$n = pq\left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2$
Ahora si sabemos que $p = 0.1$ entonces
$n = 864.36$ luego necesitaremos encuestar al menos a 865 personas.

Si no conocemos p nos pondremos en el peor de los casos que es en el que la proporción poblacional es $p = 0.5$ y entonces $n = 2401$.
Luego en cualquier caso mejoramos una barbaridad la estimación por la desigualdad de Cheb.
Notemos que en el espíritu de este problema están resumidos todos los problemas que requieran el cálculo a priori del tamaño de una muestra con el objetivo de estimar la proporción de individuos de una población que poseen una determinada característica.

11) Tenemos una suma de 100 v.a. X_i i.i.d. con función de probabilidad
$f_{X_i}(k) = P(X_i = k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } k = 1,2,3,4,5,6 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$
para $1 = 1, \ldots, 100$.
Entonces $E(X_i) = 3.5$ y $Var(X_i) = \frac{35}{12}$
por lo tanto si $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$ tenemos que
$E(S_{100}) = 100 \cdot 3.5 = 350$; al ser independientes $Var(S_{100}) = 100\frac{35}{12}$ y entonces $\sigma_{S_100} = \sqrt{100\frac{35}{12}}$
Nos piden la probabilidad de que S_{100} esté entre 300 y 400,utilizando una de las expresiones de la des. de Cheb. tenemos que
$P(300 \leq S_{100} \leq 400) = P(300 - 350 \leq S_{100} - 350 \leq 400 - 350) = P(-50 \leq S_{100} \leq 50) \geq 1 - \frac{100\frac{35}{12}}{50^2} = \frac{53}{60} = 0.8833$
Bajo estas condiciones también podemos utilizar el T.L.C. y sabemos que la distribución de la v.a.
$\frac{S_{100} - E(S_{100})}{\sigma_{S_{100}}} = \frac{S_{100} - 350}{\sqrt{100\frac{35}{12}}}$
se aproxima a una normal estándar a medida que n crece, por lo tanto, (si Z es una v.a. normal estándar):
$P(300 \leq S_{100} \leq 400) = P(\frac{300-350}{\sqrt{100\frac{35}{12}}} \leq \frac{S_{100}-350}{\sqrt{100\frac{35}{12}}} \leq \frac{400-350}{\sqrt{100\frac{35}{12}}}) \approx P(\frac{50}{\sqrt{100\frac{35}{12}}} \leq Z \leq \frac{50}{\sqrt{100\frac{35}{12}}}) = 2F_Z(\frac{50}{\sqrt{100\frac{35}{12}}}) - 1 = 2F_Z(2.9277) - 1 \approx 2F_Z(2.93) - 1 = 20.9985 - 1 = 0.997$
Donde la primera aproximación ($\approx$) es debida al T.C.L. y la segunda es la que proviene de las tablas de la normal estándar.
Nota: Aunque es un procedimiento casi en desuso para conseguir una mejor aproximación del valor de $F_Z(2.9277)$ se suele interpolar este valor entre los dos más cercanos. En este caso los más cercanos, en nuestras tablas, resultan ser:
$F_Z(2.92) = 0.9982$ y $F_Z(2.92) = 0.9985$
Entonces si consideramos que estamos aproximando la función F_Z por una poligonal que pasa por los puntos tabulados podemos interpolar el valor de $F_Z(2.9277)$ (por semejanza de triángulos), es decir

$$\frac{F_Z(2.9277) - 0.9982}{0.9985 - 0.9982} = \frac{2.9277 - 2.92}{2.93 - 2.92}$$

de donde $F_Z(2.9277) = \frac{0.00770.0003}{0.01} + 0.9982 = 0.0000231 + 0.9982 = 0.9982231 \approx 0.9982$.
Finalmente el resultado será $2F_Z(2.9277) - 1 \approx 2 \cdot 0.9982 - 1 = 0.9964$
De todas maneras si deseamos más precisión podemos utilizar el Mathematica, Excel, Minitab, SPSS, MathLab etc..., o programar un algoritmo de aproximación.

12) Sea $X=$ talla de un individuo seleccionado al azar de la población. Sabemos que X es normal de media $\mu = 170$ cm. y desviación típica $\sigma_X = 7$.

Tenemos una m.a. de 140 individuos cada resultado será una v.a. X_i para $i = 1, \ldots, n$ distribuidas igual que X e independientes.
Sea $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{1} 40X_i}{140}$ la media aritmética de las alturas de los 140 individuos. Sabemos que $\mu_{\overline{X}} = \mu_X = 170$ y que $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{140}} = \frac{7}{\sqrt{140}}$
Nos piden calcular $P(|\overline{X} - \mu_X| < 1) = P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{140}}}\right| < \frac{1}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{140}}}\right) \approx P\left(|Z| < \frac{1}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{140}}}\right) = 2F_Z(1.69) - 1 = 20.9545 - 1 = 0.909$
Donde $\approx$ es debida al T.L.C. y Z es una v.a. normal estándar.

13) Sea $f_n(6)$ la frecuencia relativa de 6 en n lanzamientos de un dado.
Sea $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si sale un 6} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
Bajo las condiciones del problema las v.a. X_i son i.i.d. $Ber(\frac{1}{6})$
Sea $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ la media aritmética de los n lanzamientos, es evidente que $\overline{X}_n = f_n(6)$.
Además su esperanza y su varianza son

$$E(\overline{X}_n) = \frac{1}{6} \text{ y } Var(\overline{X}_n) = \frac{\frac{1}{6}\frac{5}{6}}{n} = \frac{5}{36n}$$

Entonces
$P(|f_n(6) - \frac{1}{6}| < 0.01) = P\left(\left|\frac{\overline{X}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right| < \frac{0.01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right) \approx P\left(|Z| < \frac{6\sqrt{n}0.01}{\sqrt{5}}\right) = 2F_Z(\frac{6\sqrt{n}0.01}{\sqrt{5}}) - 1 = 0.95$
Donde en $\approx$ hemos utilizado el T.L.C. y Z es una normal estándar.
Ahora tenemos que
$F_Z(\frac{6\sqrt{n}0.01}{\sqrt{5}}) = \frac{1.95}{2} = 0.975$
Mirando en las tablas de la distribución normal obtenemos que $F_Z(1.96) = 0.975$
Entonces
$\frac{6\sqrt{n}0.01}{\sqrt{5}} = 1.96$ de donde $n = \frac{5}{36}(1.96)^2 = 5335.555$.
Por lo tanto, utilizando el T.L.C., el tamaño de la muestra para asegurar que la frecuencia muestral difiera de la real en menos de 0.01 con una probabilidad del 0.95 es al menos $n = 5336$.

14) De forma similar a los problemas anteriores:
$f_n(\text{cara}) = \overline{X}_n$ con X_i v.a. i.i.d. $Ber(\frac{1}{2})$
$P(|f_n(\text{cara}) - \frac{1}{2}| < 0.01) = P\left(\left|\frac{\overline{X}_n - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{0.25}{n}}}\right| < \frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.25}{n}}}\right) \approx P\left(|Z| < \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{0.25}}\right) = 2F_Z(\frac{\sqrt{n}0.01}{\sqrt{0.25}}) - 1 = 0.95$
Entonces $F_Z(\frac{\sqrt{n}0.01}{\sqrt{0.25}}) = 0.975$ mirando en las tablas $F_Z(1.96) = 0.975$
Por lo tanto $\frac{\sqrt{n}0.01}{\sqrt{0.25}} = 1.96$ de donde $n = 9604$.
Por el T.L.C. necesitamos una muestra de al memos tamaño $n = 9694$ para asegurar que la frecuencia muestral de caras diferirá de la frecuencia poblacional en menos de 0.01 con probabilidad 0.95

15) Sea N_t= número de mensajes que llegan al multiplexor en t segundos. Nos dicen que N_t sigue una distribución $Po(10t)$ y nos piden $P(N_{600} > 650)$.
Podemos calcularlo directamente pero necesitaremos de Mathematica u otro programa similar:
$P(N_{60} > 650) = 1 - P(N_{60} \leq 650) = 1 - \sum_{k=0}^{650} \frac{(600)^k}{k!} e^{-600} = 1 - 0.979346 = 0.0206544$
Pero podemos también aproximar esta probabilidad de la siguiente forma
$P(N_{60} > 650) = 1 - P(N_{60} \leq 650) \approx 1 - P\left(Z \leq \frac{650+0.5-600}{\sqrt{600}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{50.5}{\sqrt{600}}\right) = 1 - F_Z(2.06165) \approx 1 - F_Z(2.06) = 1 - 0.9803 = 0.0197$

Donde en la primera $\approx$ hemos utilizado el T.L.C. y la corrección de continuidad de Fisher y en la segunda hemos aproximado por el valor más cercano en la tablas de la función de distribución normal estándar.

16) Sea $N=$ número de errores en una página, sabemos que sigue una distribución $Po(2)$. Entonces $P(N > 5) = 1 - P(N \leq 5) = 1 - 0.9834 = 0.0166$
Sea X_i la v.a. que vale 1 si la i-ésima página tiene más de 5 errores y cero en caso contrario. Suponiendo independencia entre los errores de las distintas páginas tenemos que las v.a. X_i i.i.d. $Ber(0.0166)$.
Sea $X = \sum_{i=1}^{300} X_i$ el número total de errores entre las 300 páginas, esta v.a. seguirá una distribución $B(300, 0.0166)$
Entonces $E(X) = 4.98$, $Var(X) = 4.89733$ y $\sigma_X = 2.21299$.
Nos piden $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$
De forma exacta la probabilidad será
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \end{pmatrix} (1 - 0.0166)^{300} = 0.993407$
Aproximando por una Poisson de media $300 \cdot 0.0166$
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - \frac{(300 \cdot 0.0166)^0}{0!} e^{-3000.0166} = 1 - e^{-4.98} = 0.993126$
Aplicando T.L.C. con corrección de continuidad de Fisher
$P(X = 0) \approx P\left(\frac{-0.5-4.98}{2.21299} \leq Z \leq \frac{0.5-4.98}{2.21299}\right) = F_Z(-2.02441) - F_Z(-2.47629) = 1 - F_Z(2.02441) - 1 + F_Z(2.4629) = -F_Z(2.02441) + F_Z(2.4629) \approx -F_Z(2.02) + F_Z(2.48) = -0.9783 + 0.9934 = 0.0151$
Luego la probabilidad buscada es aproximadamente $P(X \geq 1) = 1 - 0.0151 = 0.9849$

17) Tenemos que $P(\text{Error}) = 0.15$. Sea $X =$número de errores en la transmisión de 100 bits (supuestamente transmitidos de forma independiente). Bajo estas condiciones X sigue una ley $B(100, 0.15)$.
Nos piden $P(X \leq 20)$.
Aproximando por una $Po(15)$ tenemos que
$P(X \leq 20) \approx e^{-15} \sum_{k=0}^{20} \frac{15^k}{k!} = 0.917$
Donde la última igualdad se calculó con el Mathematica ya que nuestras tablas no llegan a $\lambda = 15$ (otras tablas llegan).
Aproximando por una normal tenemos que
$P(X \leq 20) \approx P\left(Z \leq \frac{20+0.5-15}{\sqrt{15(1-0.15)}}\right) = P(Z \leq \frac{5.5}{3.5701}) = F_Z(1.54031) \approx F_Z(1.54) = 0.9382$

18) Sea R_i los 100 números reales entonces $R_i = X_i + E_i$ donde las E_i son v.a. i.i.d. $U(-0.5, 0.5)$. Entonces $\sum_{i=1}^{100} R_i = \sum_{i=1}^{100} (X_i + E_i) = \sum_{i=1}^{100} X_i - \sum_{i=1}^{100} E_i$
Luego el error total es $|\sum_{i=1}^{100} E_i|$. Por otra parte
$E(\sum_{i=1}^{100} E_i) = 100 \cdot 0 = 0$ y $Var(\sum_{i=1}^{100} E_i) = 100 \cdot \frac{1}{12}$ y su desviación típica es $\sqrt{\frac{100}{12}}$.
Por último la probabilidad que se pide es
$P(|\sum_{i=1}^{100} E_i| > 6) = 1 - P(|\sum_{i=1}^{100} E_i| \leq 6) = 1 - P(-6 \leq \sum_{i=1}^{100} E_i \leq 6) \approx$
$1 - P\left(\frac{-6-0}{\sqrt{\frac{100}{12}}} \leq Z \leq \frac{6-0}{\sqrt{\frac{100}{12}}}\right) = 1 - (2F_Z(2.08) - 1) = 2(1 - 0.9812) = 0.0376$
Para la aproximación hemos utilizado el T.L.C.

19) Nos dicen que el periodo de vida útil de una batería del radiofaro es una v.a. T que sigue

una ley exponencial con $E(T) = 1$ mes. Sea T_i el tiempo de duración de la i-ésima batería. Suponemos que las duraciones de las baterías son v.a. i.i.d.
El tiempo de vida de n baterías será $X_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$, entonces $E(X_n) = n$ y $Var(X_n) = n$. Nos piden el número de baterías n necesario para asegurar que $P(X_n > 12) = 0.99$.
Luego $0.99 = P(X_n > 12) = 1 - P(X_n \leq 12) \approx 1 - F_Z(\frac{12-n}{\sqrt{n}})$
Donde en $\approx$ hemos utilizado el T.L.C.
Ahora $F_Z(\frac{12-n}{\sqrt{n}}) = 1 - 0.99 = 0.01$ mirando en las tablas de la distribución normal estándar tenemos que $F_Z(2.33) = 0.9901 \approx 0.99$ y por lo tanto $F_Z(-2.33) \approx 0.01$. Así que tenemos que resolver la ecuación

$$\frac{12-n}{\sqrt{n}} = -2.33$$

Notemos que si n es solución de la ecuación anterior entonces $12 - n < 0$. Resolviendo la ecuación $\left(\frac{12-n}{\sqrt{n}}\right)^2 = (-2.33)^2$ Las soluciones son $n = 23.23$ y $n = 6.19887$; desechamos esta última por ser inferior a 12. Por lo tanto la aproximación por el T.L.C. nos asegura que necesitamos al menos 24 baterías para asegurar que el radiofaro tendrá energía para un año con probabilidad 0.99

20) Nos piden si una moneda de la que se obtuvieron 447 caras en 1000 lanzamientos puede considerarse regular, es decir, que su probabilidad de cara es 0.5.
Sea X=número de caras obtenido en 1000 lanzamientos de esta moneda. La distribución de X será una $B(1000, p)$ donde p es la probabilidad de cara.
Entonces
$P(X \leq 447) \approx F_Z(\frac{447+0.5-p1000}{\sqrt{1000p(1-p)}})$
Supongamos que $p = 0.5$, entonces
$P(X \leq 477/p = 0.5) = F_Z(-3.32039) = 1 - F_Z(3.32039) \approx 1 - F_Z(3.32) = 1 - 0.9995 = 0.0005$
Es decir, si $p = 0.5$, es muy raro que esto suceda. Solamente 5 de cada 10000 veces que lancemos esta moneda en 1000 ocasiones resultará un número de caras igual o inferior a 447.
Si alguien quiere saber técnicas más precisas para la resolución de esta problema tendrá que estudiar lo que se llama contraste de hipótesis estadístico. Un buen resumen se encuentra en [1] de la bibliografía complementaria.

21) Es similar a los anteriores.

22) Es similar a los anteriores.

23) Sea N=número de clientes que llegan en un periodo de tiempo, nos dicen que N sigue una ley $Po(\lambda)$. Cuando llega un cliente tiene una probabilidad p de recibir servicio. Este evento queda modelizado para el i-ésimo cliente por la v.a.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si recibe servicio} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Así la variable que cuenta el número de usuarios que reciben servicio es $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ que es la suma de un número aleatorio de variables aleatorias. Se nos pide que determinemos la distribución de S_N.
Por el problema 11b) tenemos que, bajo estas condiciones, $G_{S_N} = G_N(G_{X_1}(z))$.

Sabemos que la función generadora de probabilidades de una v.a. N con distribución $Po(\lambda)$ es $G_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$ y la de una v.a. X_1 con distribución $Ber(p)$ es $G_{X_1}(z) = q + pz$. Entonces $G_{S_N}(z) = G_N(G_{X_1}(z)) = e^{\lambda(q+pz-1)} = e^{\lambda p(z-1)}$
que resulta ser la función generadora de probabilidades de una $Po(\lambda p)$. Por lo tanto S_N sigue una distribución $Po(\lambda p)$.
También podemos resolver el problema de forma directa. Si k es un entero no negativo tenemos que $P(S_N = k) = \sum_{n \leq 0} P(S_n = k|N = n)P(N = n) = \sum_{n \leq k} P(S_n = k|N = n)P(N = n) = \sum_{n \leq k} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k q^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$
Que es la función de probabilidad de una v.a. con distribución $Po(\lambda)$, los detalles de la última suma se dejan al lector.