PROBLEMES ESTADÍSTICA ENGINYERIA
DISTRIBUCIONS DE PROBABILITAT CONTÍNUES NOTABLES

1) Consideremos una v.a. X que sigue una distribución $\mathcal{U}(0, 100)$. Calcular $P(2 < X \leq 3)$, $P(X < 3X)$, $P(X + 1 < 3)$, $P(X^2 < 50)$

2) Consideremos una v.a. X que sigue una distribución $\mathcal{U}(-5, 5)$. Calcular: $P(2 < X \leq 3)$, $P(X < 3X)$, $P(X + 1 < 3)$, $P(X^2 < 5)$

3) Dibujar y hallar el área encerrada bajo la curva normal estándar en cada uno de los casos siguientes:

a) Entre $z = 0$ y $z = 1.2$.

b) Entre $z = -0.68$ y $z = 0$.

c) Entre $z = -0.46$ y $z = 2.21$.

d) Entre $z = 0.81$ y $z = 1.94$.

e) A la izquierda de $z = -0.6$.

f) A la derecha de $z = -1.28$.

g) A la derecha de $z = 2.05$ o a la izquierda de $z = -1.44$.

h) El valor z tal que el área a su izquierda es 0.4960.

i) El valor z tal que el área a su derecha es 0.9678.

j) El valor $z > 0$ tal que el área comprendida entre $-z$ y z es 0.6318.

4) Dada una distribución normal con $\mu = 30$ y $\sigma = 6$, encontrar:

a) El área de la curva normal a la derecha de $x = 17$.

b) El área de la curva normal a la izquierda de $x = 22$.

c) El área de la curva normal entre $x = 32$ y $x = 41$.

d) El valor de x que tiene el 80.23% del área de la curva normal a la izquierda.

e) El valor δ tal que $P(\mu - \delta \leq X \leq \mu + \delta) = 0.75$.

5) Dada la v.a. X distribuida normalmente con media 18 y desviación típica 2.5, encontrar:

a) $P(X \leq 15)$.

b) El valor de k tal que $P(X < k) = 0.2236$.

c) El valor de k tal que $P(X > k) = 0.1814$.

d) $P(17 < X < 21)$.

[1] Sol.: $P(2 < X \leq 3) = \frac{1}{100}$, $P(X < 3X) = 1$, $P(X + 1 < 3) = \frac{1}{50}$, $P(X^2 < 50) = \frac{\sqrt{50}}{100}$
[2] Sol.: $P(2 < X \leq 3) = \frac{1}{10}$, $P(X < 3X) = \frac{1}{2}$, $P(X + 1 < 3) = \frac{7}{10}$, $P(X^2 < 5) = \frac{\sqrt{5}}{5}$
[3] Sol.: a) 0.3849, b) 0.2517, c) 0.6636, d) 0.1828, e) 0.2743, f) 0.8997, g) 0.0951, h) -0.01, i) -1.85, j) 0.9
[4] Sol.: a) 0.9850, b) 0.0918, c) 0.3371, d) 35.1, e) $\delta = 6.9$

6) Cuartiles:
Dada una v.a. continua X, llamaremos cuartil de orden q $(0 \leq q \leq 1)$ a cualquier valor, $x_q \in \Re$ tal que

$$P(X \leq x_q) = q$$

Sea X una v.a. tal que $X \sim \mathcal{U}(0, 100)$. Calcular sus cuartiles 0.25, 0.5, 0.75. Dar una fórmula general para el cuartil q de una v.a. $X \sim \mathcal{U}(a, b)$.

7) A los cuartiles 0.25, 0.5 y 0.75 se les denomina primer, segundo, y tercer cuartil respectivamente. Al cuartil 0.5 también se le denomina mediana. Los percentiles son los cuartiles formados por centésimas partes de la unidad.

a) Calcular el primer cuartil, el tercel cuartil y la mediana para una v.a. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

b) Calcular el percentil 0.25 y el percentil 0.96 para una v.a. Y con distribución normal de media 1 y varianza 4.

8) Un ejecutivo de televisión está estudiando propuestas para nuevas series. A su juicio, la probabilidad de que una serie tenga audiencia mayor que 17.35 es 0.25; además la probabilidad de que la serie tenga audiencia mayor que 19.2 es 0.15. Si la incertidumbre de este ejecutivo puede representarse mediante una v.a. normal, ¿cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

9) Supongamos que el número de horas que un auxiliar administrativo necesita para aprender el nuevo programa de facturación es una v.a. X con distribución normal. Si el 84.13% de los auxiliares emplean más de tres horas y sólo el 22.96% más de nueve, ¿cuánto valen μ_X y σ_X^2?

10) Si X es una v.a. con distribución normal estándar y se define $Y = 2X - 1$, calcular la probabilidad de que Y no se aparte de su media más de una desviación típica.

11) Si un conjunto de calificaciones de un examen de estadística se aproxima a la distribución normal con media 74 y desviación típica 7.9, encontrar:

a) La calificación más baja de apto si el 10% de los estudiantes de nota más baja se les declararon no aptos.

b) El notable de puntuación más alta si el 5% de los estudiantes tiene un sobresaliente.

c) El notable más bajo si al 5% de los estudiantes se les dió sobresaliente y al siguiente 25% se le dió notable.

12) La vida promedio de un cierto tipo de motor pequeño es de 10 años con una desviación típica de 2 años. El fabricante repone sin cargo todos los motores que fallen dentro del periodo de garantía. Si está dispuesto a reponer sólo el 3% de los motores que fallan, ¿cuál debe ser la duración de la garantía que otorgue? (Suponer que las vidas de los motores siguen una distribución normal.)

13) La compra media que realiza un cliente en un determinado comercio, es de 82 euros, siendo la desviación estándar 5 euros. Todos los clientes que compran entre 88 y 94 euros son clientes clasificados como preferentes. Si las compras están distribuidas aproximadamente como una normal y 8 clientes son preferentes, ¿cuántos clientes tiene este comercio?

[5]Sol.: a) 0.1151, b) 16.1, c) 20.275, d) 0.5403
[6]Sol.: $x_{0.25} = 25$, $x_{0.5} = 50$, $x_{0.75} = 75$, $x_q = (b - a)q + a$ con $0 \leq q \leq 1$
[7]Sol.: a) $x_{0.25} = -0.67$, $x_{0.75} = 0.67$, $x_{0.5} = 0$, b) $y_{0.25} = -0.34$, $y_{0.96} = 4.6$
[8]Sol.: $\mu = 14$, $\sigma = 5$
[9]Sol.: $\mu_X = 6.4483$, $\sigma_X^2 = 11.8906$
[10]Sol.: 0.6826
[11]Sol.: a) 63.888, b) 86.956, (tomando $0.95 \approx 0.9495 = F_z(1.64)$), c) 78.108
[12]Sol.: 6.24
[13]Sol.: 75

14) La variable aleatoria X sigue una ley $N(\mu, \sigma^2)$. Sabemos que $\mu = 5\sigma$, y que $P(X < 6) = 0.8413$.

a) Determinar la esperanza y la varianza de X.

b) ¿Cuál es la función de distribución de $Y = 3 - X^2$ y su esperanza?

15) El percentil 90 de una variable aleatoria X es el valor x_{90} para el que $F_X(x_{90}) = P(X \leq x_{90}) = 0.9$. De manera similar, el percentil 50 es el valor x_{50} que satisface $P(X \leq x_{50}) = 0.5$ que recibe el nombre de **mediana** (poblacional). Determinar estos dos valores para una variable aleatoria exponencial de valor medio 10.

16) Una centralita recibe llamadas telefónicas con un ritmo medio de μ llamadas por minuto. Calcular la probabilidad de que el intervalo entre dos llamadas consecutivas supere al intervalo medio en más de dos desviaciones típicas .

[14] Sol.: a)(**5**, **1**) ; b) $\mathbf{E(Y) = -23}$

[15] Sol.: (**23.0585**, **6.93147**)

[16] Sol.: **0.05**