Probabilitats condicionades

Recordatori:

donats dos successos qualssevol A i B, la probabilitat de A condicionada a B es calcula com:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si els successos són independents, llavors $P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

En aquest tema:

Cas discret

Siguin dues v.a. X i Y discretes amb funció de probabilitat conjunta $P(X = x, Y = y)$, la **funció de probabilitat de Y condicionada per X** es defineix com:

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

Propietat: les variables aleatòries discretes X i Y són **independents** si i només si

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \qquad \forall (x, y)$$

La **funció de distribució de Y condicionada per X** es defineix com:

$$P(Y \leq y|X = x) = \frac{P(X = x, Y \leq y)}{P(X = x)}$$

I, en general, donat un succés qualsevol A:

$$P(A|X = x) = \frac{P(A)}{P(X = x)} = \frac{\sum_{y \in A} P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

Les funcions de probabilitat i distribució de X condicionades per Y es defineixen de manera anàloga i es denoten $P(X = x|Y = y)$, $P(X \leq x|Y = y)$.

Cas continu

Siguin dues v.a. X i Y contínues amb funció de densitat conjunta $f_{XY}(x, y)$, la **funció de densitat de Y condicionada per X** es defineix com:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}$$

Propietat: les variables aleatòries contínues X i Y són **independents** si i només si

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \forall (x, y)$$

La **funció de distribució de Y condicionada per X** es defineix com:

$$F_{Y|X}(y|x) = P(Y \leq y|X = x) = \frac{\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x, y)\, dy}{f_X(x)}$$

I, en general, donat un succés qualsevol A:

$$P(A|X = x) = \frac{\int_{y \in A} f_{XY}(x, y)\, dy}{f_X(x)}$$

Les funcions de densitat i distribució de X condicionades per Y es defineixen de manera anàloga i es denoten $f_{X|Y}(x|y)$, $F_{X|Y}(x|y)$.

Exemple 9:

(Exercici 11b). Llançam a l'aire un dau equilibrat. Considerem dues variables aleatòries X *i* Y *definides com:*

$$X = \begin{cases} -1 & \text{si el resultat és imparell} \\ 1 & \text{si el resultat és parell} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} -1 & \text{si el resultat és 1, 2 o 3} \\ 0 & \text{si el resultat és 4} \\ 1 & \text{si el resultat és 5 o 6} \end{cases}$$

Calculau $P(X+Y=0|Y \leq 0)$ *i* $P(X=1|X+Y=2)$.

Exemple 10:

(Exercici 14bc). Un auditor selecciona a l'atzar un cert nombre X *de factures d'un arxivador;* X *és un nombre a l'atzar entre 5 i 8. Sigui* Y *el temps en minuts que tarda en revisar-les. Suposem que* (X,Y) *té una llei conjunta donada per*

$$P(X=x, Y=y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot \frac{10-x}{x} \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^y & \text{si } x = 5,6,7,8, y = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

a) *Trobau la distribució condicional de* X *donat que* $Y = y$.

b) *Calculau la probabilitat que hagi triat 6 factures sabent que ha tardat més de 3 minuts en revisar-les.*

Exemple 11:

(Exercici 16b). Siguin X *i* Y *dues variables aleatòries amb densitat conjunta*

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

Calculau $f_Y(y|x)$.

Exemple 12:

(Exercici 9). Siguin X *i* Y *dues variables aleatòries conjuntament absolutament contínues. Suposem que*

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases} \qquad \text{i que} \qquad f_Y(y|x) = \begin{cases} \frac{2y}{x^2} & \text{si } 0 < y < x \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

a) *Determinau* $f_{X,Y}$.

b) *Obteniu la distribució de* Y.

c) *Trobau* $f_X(x|y)$.

Exercicis proposats: 12, 8d, 13, 17c, 7, 23