PROBLEMES ESTADÍSTICA ENGINYERIA
VARIABLES ALEATÒRIES VECTORIALS CONTÍNUES

1) Las variables aleatorias continuas X e Y tienen por función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} k(3x^2+2y) & \text{si } 0 \le x \le 1 \text{ y } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Se pide:

a) El valor de la constante k.

b) Las funciones de densidad marginales.

c) Las probabilidades $P(X \le 0.5)$ y $P(Y \le 0.3)$

d) Las medias y las varianzas de X y de Y.

e) La covarianza de X e Y.

f) La matriz de varianzas-covarianzas y la de correlaciones.

2) Los gastos X e ingresos Y de una familia se consideran como una variable bidimensional con función de densidad dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & \text{si } 0 \le x \le 100 \text{ y } 0 \le y \le 100 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Se pide:

a) El valor de la constante k para que $f(x,y)$ sea densidad.

b) La probabilidad $P(0 \le X \le 60, 0 \le Y \le 50)$

c) Las funciones de densidad marginales.

d) Los gastos e ingresos medios.

e) La covarianza de X e Y.

f) La matriz de varianzas-covarianzas.

g) **Opcional.** La densidad (condicionada) de los gastos de las familias con ingresos $Y = 50$. La esperanza de los gastos condicionados a que los ingresos valen $Y = 50$.

3) Dos amigos desayunan cada mañana en una cafetería entre la 8 y las 8:30 de la mañana. La distribución conjunta de sus tiempos de llegada es uniforme en dicho intervalo, es decir (y para simplificar tomando el tiempo en minutos):

$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 \le x \le 30 \text{ y } 0 \le y \le 30 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}.$$

---

[1]Sol.: a) $k = \frac{1}{2}$; b) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3x^2+1) & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$; $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+2y) & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$; c) $P(X \le 0.5) = 0.312$ y $P(Y \le 0.3) = 0.195$; d) $E(X) = \frac{5}{8}$; $E(Y) = \frac{7}{12}$; $Var(X) = \frac{73}{960}$; $Var(Y) = \frac{11}{144}$. e) $Cov(X,Y) = \frac{-1}{96}$; f) $\begin{pmatrix} \frac{73}{960} & \frac{-1}{96} \\ \frac{-1}{96} & \frac{11}{144} \end{pmatrix}$

[2]Sol.: a) $k = \frac{1}{100^3}$; b) 0.165; c) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+50}{100^2} & \text{si } 0 < x < 100 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$, la de Y es similar; d)$E(X) = E(Y) = \frac{175}{3}$; e) $Cov(X,Y) = \frac{-625}{9}$; f) $\begin{pmatrix} \frac{6875}{9} & \frac{-625}{9} \\ \frac{-625}{9} & \frac{6875}{9} \end{pmatrix}$; g) $f_{X/Y}(x|50) = \begin{cases} \frac{1}{100^2}(x+50) & \text{si } 0 \le x \le 100 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$; $E(X/Y = 50) = \frac{175}{3}$

Si los amigos esperan un máximo de 10 minutos, calcular la probabilidad de que se encuentren (sugerencia: resolverlo gráficamente). Calcular las distribuciones marginales.

4) La variable X representa la proporción de errores tipo A en ciertos documentos y la variable Y la proporción de errores de tipo B. Se verifica que $X + Y \leq 1$ (es decir puede haber más tipos de errores posibles) y la densidad conjunta de ambas variables es

$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1 \text{ y } x+y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases} .$$

a) Calcular el valor de la constante k.

b) **Opcional.** Calcular la densidad condicional de X a $Y = y_0$ con $0 < y_0 < 1$.

c) **Opcional.** Calcular la esperanza de la variable condicionada del apartado anterior.

d) Calcular el vector de medias y la matriz de correlaciones de (X, Y)

5) La función de densidad conjunta de dos variables aleatorias continuas es:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+xy) & \text{si } (x,y) \in (0,1)^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determinar k.

b) Encontrar las funciones de densidad marginales.

c) ¿Son independientes?

6) Las variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes y ambas tienen la misma densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Determinar la densidad de $Y = X_1 + X_2$.

b) Determinar la densidad de $Z = X_1 - X_2$.

c) Calcular la esperanza y varianza de Y y de Z.

7) Un proveedor de servicios informáticos tiene una cantidad X de cientos de unidades de un cierto producto al principio de cada mes. Durante el mes se venden Y cientos de unidades del producto. Supongamos que X e Y tienen una densidad conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2/9 & \text{si } 0 < y < x < 3 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Comprobar que f es una densidad.

b) Determinar $F_{X,Y}$.

---

[3] Sol.: (Para la solución completa véase Daniel Peña "*Estadística Modelos y Métodos. Vol 1. 2 Ed pág.160*) $\frac{5}{9}$; las marginales son uniformes en el intervalo $(0, 30)$

[4] Sol.: a) $k = 2$; b) Dado $0 < y_0 < 1$ la densidad condicional de X a $Y = y_0$ es $f_{X|Y}(x|y_0) = \begin{cases} \frac{1}{(1-y)} & \text{si } 0 < x < 1 \text{y } x < 1 - y_0 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$; c) $\frac{1}{3}$

[5] Sol.: a) **4/3**, c) Sí

c) **Opcional.** Calcular la probabilidad de que al final de mes se hayan vendido como mínimo la mitad de las unidades que había inicialmente.

d) **Opcional.** Si se han vendido 100 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que hubieran, como mínimo 200 a principio de mes?

8) Opcional. Sean X e Y dos variables aleatorias conjuntamente absolutamente continuas. Supongamos que

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y que

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \frac{2y}{x^2} & \text{si } 0 < y < x \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Determinar $f_{X,Y}$.

b) Obtener la distribución de Y.

c) Calcular $f_X(x|y)$.

9) Sea $W = X + Y + Z$, donde X, Y y Z son variables aleatorias con media 0 y varianza 1,

a) Sabiendo que $Cov(X,Y) = 1/4, Cov(X,Z) = 0, Cov(Y,Z) = -1/4$. calcular la esperanza y la varianza de W.

b) Sabiendo que X, Y y Z son incorreladas calcular la esperanza y la varianza de W.

c) Calcular la esperanza y la varianza de W si $Cov(X,Y) = 1/4, Cov(X,Z) = 1/4, Cov(Y,Z) = 1/4$.

d) Sabiendo que X, Y y Z son independientes calcular $Var(W)$ y $E(W)$.

[7] Sol.: c) **1/2**, d) **1/2**
[9] Sol.: a) **0; 3**, b) **0; 3**, c) **0; 15/4**