TD n° 1

Exercice 1. Considérons les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^n$:

$$N_1(x) = \max_{1\leq i\leq n}(a_i|x_i|), \quad N_2(x) = \sqrt{X^TAX}, \quad N_3(x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i|x_i|,$$

où $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, et A est une matrice symétrique définie positive, et X est le vecteur colonne : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que N_1 est une norme,

2. les fonctions N_2 et N_3 sont-elles également des normes ?

Exercice 2. On rappelle les définitions des normes $\| \ \|_p$ usuelles dans $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n}|x_i|;$$

1. on veut retrouver dans le cas précis des normes 1, 2 et infinie le résultat d'équivalence en explicitant les meilleures valeurs possibles pour α et β :

1. pour une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels positifs, montrer que
$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad a_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_j,$$
2. en déduire l'inégalité suivante
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2,$$
3. montrer que
$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1,$$
4. à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliqué à $\langle |x|, \mathbf{1}\rangle$ où $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$ et $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$, montrer que
$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2,$$
5. en majorant chaque terme dans la somme apparaissant dans la norme 2, montrer que
$$\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$
6. montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty,$$
en déduire que les trois normes sont équivalentes,

2. étudiez les cas d'égalité dans les inégalités obtenues.

Exercice 3. Considérons une suite $((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{R}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^3$, tels que $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{6}x_n - \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{3}z_n, \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n, \\ z_{n+1} = -\frac{1}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{3}z_n, \end{cases}$$

1. montrer que $\|(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})\|_2 = \frac{1}{2}\|(x_n, y_n, z_n)\|_2$,
2. la suite converge-t-elle dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Démontrer la continuité des fonctions suivantes :
1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2z^5 - \pi xy^5z$.
2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $g(x,y,z) = (x^3 - 4,\, 5z,\, 8x^5 - 4y, 7)$.
3. $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $h(x,y,z,t) = \Big(|x| + |y|,\, \sqrt{y^2+t^2},\, z\Big)$.

TD n° 2

Nous allons ici introduire ou rappeler des définitions qui ne seront pas bloquantes d'un point de vue théorique mais pas encore abordées en CM :

Jacobienne : *on appelle matrice jacobienne de $f\colon E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ en $a \in E$, notée $J_f(a)$, la matrice suivante lorsqu'elle existe*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

on retrouve les dérivées partielles en colonne.

Jacobien : *le jacobien de f en a est le déterminant de $J_f(a)$*

Développement limité à l'ordre 1 : *si f admet des dérivées partielles en a, de plus continues en a, alors on peut approcher f autour de a par :*

$$f(x) \approx f(a) + \sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f(a) + J_f(a)(x-a)$$

Exercice 5. Calculer la matrice jacobienne des applications suivantes après en avoir justifié la régularité nécessaire :
1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (xy^2, x^2y, x^3y^3)$.
2. $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y,z,t) = (e^{x+y^2+z^3+t^4}, \ln(x^2+y^2+z^2+t^2+1))$.

Exercice 6. Soit $\varphi : (\mathbb{R}_+^*)^4 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$\varphi(x,y,z,t) = (y^{xy}, z^{xy}, t^{xyt^2}).$$

1. Que peut-on dire de la régularité de φ ?
2. Par un calcul à la main, tenter d'approcher $\varphi(0.7, 0.8, 0.9, 1.1)$ à l'aide d'un DL à l'ordre 1.

Exercice 7. Après avoir retrouvé les expressions des coordonnées cartésiennes à partir des sphériques, calculer la matrice jacobienne et le jacobien des changements de coordonnées en cylindriques et en sphériques pour des points qui ne sont pas sur le bord de l'ensemble des définition des nouvelles coordonnées. Ces deux résultats seront très utiles pour le calcul de certaines intégrales triples.