

Processus markoviens de saut

B. Ycart

Un modèle d'évolution dynamique en temps continu dans lequel on fait dépendre l'évolution future de l'état présent et du hasard est un processus de Markov. On en rencontre dans de nombreux domaines d'applications, des modèles de population à la gestion des réseaux informatiques. Ces notes traitent uniquement des processus markoviens de saut, à espaces d'états finis ou dénombrables. Ils sont présentés comme des chaînes de Markov dont les sauts sont séparés par des durées exponentielles indépendantes. Même si la présentation n'est pas classique, le contenu reste à un niveau élémentaire, et se retrouve dans la plupart des références du domaine, comme les livres suivants.

N. BOULEAU Processus stochastiques et applications.
Hermann, Paris, 1988.

A.T. BARUCHA-REID Elements of the theory of Markov processes and their applications. *McGraw-Hill, London, 1960.*

E. ÇINLAR Introduction to stochastic processes.
Prentice Hall, New York, 1975.

Ce "cahier de mathématiques appliquées" doit beaucoup aux relectures scrupuleuses de Romain Abraham, au dynamisme de Sylvie Sevestre-Ghalila, au soutien de l'Ecole Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information de Tunisie, par son directeur Makki Ksouri et son directeur des études Nacef Elloumi, ainsi qu'à la compétence de Habib Bouchriha, directeur du Centre des Publications Universitaires de la Tunisie.

Table des matières

| | | |
|----------|--|------------|
| 1 | Le processus de Poisson | 67 |
| 1.1 | Lois exponentielles et lois géométriques | 67 |
| 1.2 | Comptage d'événements imprévisibles | 70 |
| 1.3 | Version discrétisée | 76 |
| 1.4 | Equations de Chapman-Kolmogorov | 77 |
| 1.5 | Modélisation | 79 |
| 2 | Algorithmes markoviens en temps continu | 80 |
| 2.1 | Chaînes temporisées | 80 |
| 2.2 | Taux de transition et générateur | 82 |
| 2.3 | Chaîne incluse et chaîne harmonisée | 86 |
| 2.4 | Pratique de la simulation | 88 |
| 2.5 | Modèles en fiabilité | 90 |
| 2.6 | Particules interactives | 94 |
| 3 | Traitement mathématique | 98 |
| 3.1 | Propriété de Markov | 98 |
| 3.2 | Probabilités de transition | 101 |
| 3.3 | Système de Chapman-Kolmogorov | 104 |
| 3.4 | Temps d'accès | 106 |
| 3.5 | Comportement asymptotique | 109 |
| 4 | Exercices | 115 |

1 Le processus de Poisson

Le processus de Poisson est un outil fondamental dans le passage du temps discret au temps continu. Comme nous le verrons en 2.3, les processus markoviens de saut à temps continu s'écrivent comme des chaînes de Markov dont on a remplacé l'échelle de temps \mathbb{N} par une échelle dont les pas sont des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle, c'est-à-dire par un processus de Poisson.

1.1 Lois exponentielles et lois géométriques

La loi exponentielle et la loi géométrique modélisent des temps d'attente d'événements "imprévisibles". Nous rassemblons ici quelques propriétés de base.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Sa densité est :

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) .$$

La fonction de répartition correspondante est :

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) .$$

L'espérance et la variance valent respectivement :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2} .$$

De nombreux algorithmes ont été proposés pour la simulation des lois exponentielles. Nous retiendrons le plus simple, qui est l'algorithme d'inversion :

$$X \longleftarrow -\log(\text{Random})/\lambda .$$

Si X suit la loi $\mathcal{E}(1)$ alors X/λ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. En pratique, X représente une durée, typiquement le temps d'attente d'un événement ou une durée de vie. La propriété importante des lois exponentielles est d'être "*sans mémoire*". C'est une propriété caractéristique.

Proposition 1.1 *Une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^+ , de fonction de répartition continue suit une loi exponentielle si et seulement si pour tout $t, h \geq 0$,*

$$\mathbb{P}[X > t + h \mid X > t] = \mathbb{P}[X > h] .$$

Démonstration : Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ alors :

$$\mathbb{P}[X > t + h \mid X > t] = \frac{1 - F_X(t + h)}{1 - F_X(t)} = e^{-\lambda h} = \mathbb{P}[X > h] .$$

Réciproquement si F_X est la fonction de répartition de X , elle est solution de l'équation fonctionnelle :

$$1 - F_X(t+h) = (1 - F_X(t))(1 - F_X(h)) .$$

Toute solution continue de cette équation est de la forme :

$$1 - F_X(t) = e^{at} ,$$

et a est nécessairement négatif car $F_X(t)$ tend vers 1 quand t tend vers $+\infty$.
□

Si X est une durée, la probabilité que cette durée s'achève dans un intervalle de temps de longueur h ne dépend pas du fait que la durée ait déjà été longue ou non. La propriété suivante est la version infinitésimale de la propriété d'absence de mémoire.

Proposition 1.2 Une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^+ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ si et seulement si pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}[X \leq t+h \mid X > t] = \lambda h + o(h) .$$

Démonstration : Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ alors :

$$\mathbb{P}[X \leq t+h \mid X > t] = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h) .$$

Réciproquement si :

$$\mathbb{P}[X \leq t+h \mid X > t] = \frac{F_X(t+h) - F_X(t)}{1 - F_X(t)} = \lambda h + o(h) ,$$

alors :

$$\frac{F_X(t+h) - F_X(t)}{h} = \lambda(1 - F_X(t)) + \frac{o(h)}{h} .$$

On en déduit la continuité, la dérivabilité à droite, puis la dérivabilité à gauche (relation analogue entre $t-h$ et t). Donc $1 - F_X(t)$ est dérivable et :

$$\frac{d}{dt}(1 - F_X(t)) = -\lambda(1 - F_X(t)) .$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$1 - F_X(t) = e^{-\lambda t} .$$

□

La propriété de stabilité suivante est souvent invoquée dans la modélisation par des chaînes de Markov à temps continu.

Proposition 1.3 *Considérons n variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n , de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda_1), \dots, \mathcal{E}(\lambda_n)$. Posons :*

$$Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Alors Y suit la loi $\mathcal{E}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ et pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\mathbb{P}[Y = X_i] = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}.$$

Démonstration : Pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y > t] &= \mathbb{P}[X_1 > t \text{ et } \dots \text{ et } X_n > t] \\ &= e^{-\lambda_1 t} \dots e^{-\lambda_n t} = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}. \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y = X_i] &= \int_{\{(x_1, \dots, x_n); 0 < x_i < x_j \forall j\}} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \dots \lambda_n e^{-\lambda_n x_n} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{x_i=0}^{\infty} \lambda_i e^{-\lambda_i x_i} \dots e^{-\lambda_n x_i} dx_i \\ &= \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}. \end{aligned}$$

□

Les deux propositions suivantes précisent le rapport entre les lois exponentielles et géométriques.

Proposition 1.4 *Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ alors pour tout $h > 0$ la variable aléatoire $K = \lfloor X/h \rfloor + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - \exp(-\lambda h)$. ($\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière d'un réel).*

Démonstration : Pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[K = k] &= \mathbb{P}[X \in [(k-1)h, kh[) \\ &= \exp(-(k-1)\lambda h) - \exp(-k\lambda h) \\ &= (1 - \exp(-\lambda h))(\exp(-\lambda h))^{k-1}. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.5 *Soit λ un réel positif fixé. Soient $(p_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ et $(h_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que :*

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} p_\ell = 0, \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} h_\ell = 0, \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{p_\ell}{h_\ell} = \lambda.$$

Soit $(K_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout ℓ , K_ℓ suit la loi géométrique de paramètre p_ℓ . Alors la suite $(h_\ell K_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre λ .

Démonstration : On peut le vérifier par exemple en utilisant les fonctions de répartition. Pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}[h_\ell K_\ell \leq t] = 1 - (1 - p_\ell)^{k+1},$$

où $k = \lfloor t/h_\ell \rfloor$. Soit :

$$\mathbb{P}[h_\ell K_\ell \leq t] = 1 - \exp\left(\left(\lfloor t/h_\ell \rfloor + 1\right) \log(1 - p_\ell)\right),$$

qui converge vers $1 - \exp(-\lambda t)$ quand ℓ tend vers l'infini. \square

Dans les deux propositions précédentes, il faut comprendre h ou h_ℓ comme des pas de discrétisation de l'échelle de temps. Le temps étant toujours discret pour un ordinateur, il n'y a pas de différence essentielle entre la modélisation d'une durée par une loi géométrique ou par une loi exponentielle. Nous retrouverons cette idée sous d'autres formes dans les paragraphes suivants.

1.2 Comptage d'événements imprévisibles

Définition 1.6 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Posons $S_0 = 0$, et pour tout $n \geq 1$:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Pour tout $t \geq 0$, définissons la variable aléatoire N_t , à valeurs dans \mathbb{N} , par :

$$N_t = n \iff S_n \leq t < S_{n+1}.$$

On appelle processus de Poisson d'intensité λ la famille de variables aléatoires :

$$\{N_t, t \geq 0\}.$$

Le processus de Poisson est un modèle de comptage d'événements aléatoires isolés dans le temps, comme des "tops" d'horloge, séparés par des durées aléatoires. Dans ce modèle :

- X_n est la durée séparant le $(n-1)$ -ième top du n -ième.
- S_n est la date à laquelle survient le n -ième top.
- N_t est le nombre de tops comptés entre l'instant 0 et l'instant t .

Nous commençons par énoncer les propriétés principales, que nous démontrerons plus loin (propositions 1.9, 1.10 et théorème 1.11).

Observons d'abord que N_t est un *processus de comptage*.

Définition 1.7 Un processus de comptage est une famille de variables aléatoires $\{N_t, t \geq 0\}$, à valeurs entières, telles que $N_0 \equiv 0$ et pour tout $0 \leq s \leq t$, $N_s \leq N_t$.

C'est aussi un processus à *accroissements indépendants*.

Définition 1.8 Un processus à accroissements indépendants est une famille de variables aléatoires $\{N_t, t \geq 0\}$ telles que pour tout entier k et toute suite d'instants $t_0 < t_1 < \dots < t_k$, les variables aléatoires $N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ sont indépendantes.

S'agissant du processus de Poisson, dire qu'il est à accroissements indépendants signifie que les nombres de tops comptés dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants. Cette propriété est liée à la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle (proposition 1.1).

Le processus de Poisson est nommé ainsi car ses accroissements suivent des lois de Poisson. Précisément, si $0 < s < t$, la variable aléatoire $N_t - N_s$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda(t-s))$:

$$\mathbb{P}[N_t - N_s = n] = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}.$$

En particulier,

$$\mathbb{E}[N_t - N_s] = \lambda(t-s).$$

Le nombre moyen de tops comptés dans un intervalle de temps est proportionnel à l'amplitude de cet intervalle. Le coefficient de proportionnalité λ , appelé intensité du processus est le nombre moyen de tops comptés par unité de temps. Rappelons que les tops sont séparés par des durées exponentielles d'espérance $1/\lambda$. Si la durée moyenne entre deux tops est $1/\lambda$, il est normal de compter λ tops par unité de temps en moyenne. La figure 1 représente une trajectoire d'un processus de Poisson d'intensité 2, jusqu'au temps $t = 10$.

Le fait que les accroissements suivent des lois de Poisson se traduit en une version infinitésimale, analogue à la proposition 1.2. Pour tout $t \geq 0$ on a :

- $\mathbb{P}[N_{t+h} - N_t \geq 2] = o(h)$,
- $\mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = 1] = \lambda h + o(h)$.

La première des deux égalités dit que la probabilité de compter plus d'un top dans un petit intervalle de temps est négligeable. On traduit ceci en disant que le processus de Poisson est un processus *d'événements rares*. La seconde affirme que la probabilité de compter un top dans un petit intervalle est proportionnelle à la longueur de l'intervalle, ce qui n'a rien de particulier, mais aussi que la constante de proportionnalité ne dépend pas de t , en d'autres termes que le processus est *homogène en temps*.

Nous venons d'énoncer 4 propriétés importantes du processus de Poisson. C'est un :

- processus de comptage (P1),
- processus à accroissements indépendants (P2),
- processus à accroissements poissonniens (P3),
- processus d'événements rares, homogène en temps (P4).

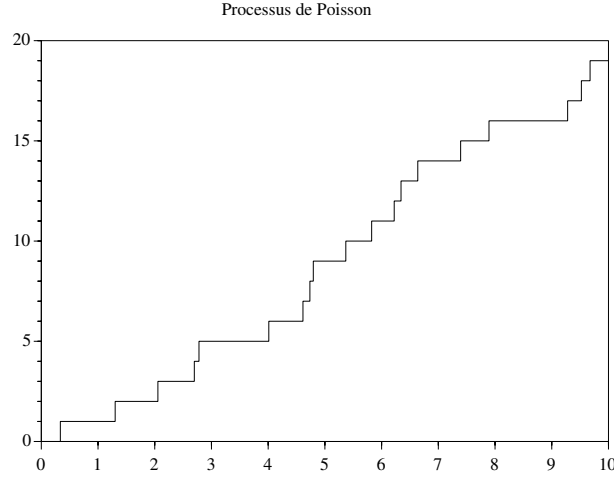


FIGURE 1 – Trajectoire d'un processus de Poisson d'intensité 2.

La propriété $P1$ est immédiate au vu de la définition. $P4$ est une conséquence directe de $P3$. En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = 1] &= e^{-\lambda h}(\lambda h) = \lambda h + o(h) , \\ \mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = 0] &= e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h) , \end{aligned}$$

d'où $P4$. Pour démontrer $P2$ et $P3$, nous commençons par un cas particulier de $P3$.

Proposition 1.9 *Pour tout $t \geq 0$, N_t suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.*

Démonstration : On calcule la densité conjointe du n -uplet (S_1, \dots, S_n) , à partir de la densité de (X_1, \dots, X_n) . Pour cela il faut effectuer le changement de variable :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (s_1, \dots, s_n) , \end{aligned}$$

avec $s_i = x_1 + \dots + x_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Le déterminant jacobien vaut 1. On obtient la densité conjointe de (S_1, \dots, S_n) :

$$f_{(S_1, \dots, S_n)}(s_1, \dots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n} \mathbb{1}_D(s_1, \dots, s_n) ,$$

où :

$$D = \{(s_1, \dots, s_n), 0 < s_1 < \dots < s_n\} .$$

D'après la définition :

$$\mathbb{P}[N_t = n] = \mathbb{P}[S_n \leq t \text{ et } S_{n+1} > t] .$$

C'est donc la probabilité que le $(n+1)$ -uplet $(S_1, \dots, S_n, X_{n+1})$ appartienne à l'ensemble C :

$$C = \{(s_1, \dots, s_n, x_{n+1}), 0 < s_1 < \dots < s_n < t \text{ et } x_{n+1} > t - s_n\}.$$

Comme X_{n+1} est indépendante de (S_1, \dots, S_n) , la densité du vecteur $(S_1, \dots, S_n, X_{n+1})$ est le produit des densités de (S_1, \dots, S_n) et X_{n+1} . On a donc :

$$\mathbb{P}[N_t = n] = \int_C \lambda^n e^{-\lambda s_n} \lambda e^{-\lambda x_{n+1}} ds_1 \dots ds_n dx_{n+1}.$$

En intégrant tout d'abord par rapport à x_{n+1} entre $t - s_n$ et $+\infty$, on obtient :

$$\mathbb{P}[N_t = n] = \lambda^n e^{-\lambda t} \int_{[0, t]^n \cap D} ds_1 \dots ds_n = \lambda^n e^{-\lambda t} \frac{t^n}{n!}.$$

□

Nous avons besoin ensuite d'un deuxième ingrédient qui est plus qu'un simple lemme technique.

Proposition 1.10 *La loi conditionnelle de (S_1, \dots, S_n) sachant " $N_t = n$ " est la loi des statistiques d'ordre d'un n -uplet de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, t]$.*

En d'autres termes, si on a compté n tops jusqu'à l'instant t , leurs dates sont réparties comme si elles avaient été tirées au hasard entre 0 et t . Nous verrons en 1.5 quelles sont les implications de ce résultat au niveau de la modélisation et de la simulation.

Démonstration : Si (U_1, \dots, U_n) est un n -uplet de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, t]$, il a pour densité :

$$f_{(U_1, \dots, U_n)}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{t^n} \mathbb{1}_{[0, t]^n}(u_1, \dots, u_n).$$

Les statistiques d'ordre prennent les mêmes valeurs que U_1, \dots, U_n , mais réordonnées.

$$U_{(1)} = \min\{U_1, \dots, U_n\} \leq U_{(2)} \leq \dots \leq U_{(n)} = \max\{U_1, \dots, U_n\}.$$

Pour calculer la densité du vecteur $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$, on observe que la loi de (U_1, \dots, U_n) reste inchangée si on permute ses coordonnées. Si B est un borélien quelconque de \mathbb{R}^n , on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(U_{(1)}, \dots, U_{(n)}) \in B] &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathbb{P}[(U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(n)}) \in B \cap D] \\ &= n! \mathbb{P}[(U_1, \dots, U_n) \in B \cap D], \end{aligned}$$

où $D = \{(s_1, \dots, s_n), 0 < s_1 < \dots < s_n\}$. La densité du n -uplet des statistiques d'ordre est donc :

$$f_{(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})}(u_1, \dots, u_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{[0, t]^n \cap D}(u_1, \dots, u_n) .$$

Calculons maintenant la densité conditionnelle de (S_1, \dots, S_n) sachant " $N_t = n$ ". Pour un borélien B quelconque de \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{P}[(S_1, \dots, S_n) \in B \mid N_t = n] = \frac{\mathbb{P}[(S_1, \dots, S_n) \in B \text{ et } N_t = n]}{\mathbb{P}[N_t = n]} .$$

Nous avons déjà calculé le dénominateur. Le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(S_1, \dots, S_n) \in B \text{ et } N_t = n] &= \mathbb{P}[(S_1, \dots, S_n) \in B \text{ et } S_n \leq t < S_{n+1}] \\ &= \mathbb{P}[(S_1, \dots, S_n, X_{n+1}) \in B \times \mathbb{R}^+ \cap C] , \end{aligned}$$

où le domaine C a été défini dans la démonstration précédente. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(S_1, \dots, S_n) \in B \text{ et } N_t = n] &= \int_{B \times \mathbb{R}^+ \cap C} \lambda^n e^{-\lambda s_n} \lambda e^{-\lambda x_{n+1}} ds_1 \dots ds_n dx_{n+1} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda t} \int_{B \cap [0, t]^n \cap D} ds_1 \dots ds_n \\ &= \lambda^n e^{-\lambda t} \int_B \mathbb{1}_{[0, t]^n \cap D}(s_1, \dots, s_n) ds_1 \dots ds_n . \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\mathbb{P}[(S_1, \dots, S_n) \in B \mid N_t = n] = \int_B \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{[0, t]^n \cap D}(s_1, \dots, s_n) ds_1 \dots ds_n .$$

□

Avant de démontrer $P2$ et $P3$, il faut observer que ces deux propriétés caractérisent la loi du processus. Pour caractériser la loi d'un processus aléatoire, on doit décrire la loi conjointe d'un k -uplet de variables aléatoires extraites de ce processus, pour tout k . Ici, il faut pouvoir donner la loi conjointe de $(N_{t_1}, \dots, N_{t_k})$, pour tout entier k et toute suite d'instants $0 < t_1 < \dots < t_k$. Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(N_{t_1}, \dots, N_{t_k}) = (n_1, \dots, n_k)] \\ = \mathbb{P}[N_{t_1} = n_1 \text{ et } N_{t_2} - N_{t_1} = n_2 - n_1 \text{ et } \dots \text{ et } N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k - n_{k-1}] . \end{aligned}$$

Posons $t_0 = 0$ et :

$$m_1 = n_1 , m_2 = n_2 - n_1 , \dots , m_k = n_k - n_{k-1} .$$

Si $P2$ et $P3$ sont vraies, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(N_{t_1}, \dots, N_{t_k}) = (n_1, \dots, n_k)] &= \prod_{i=1}^k \mathbb{P}[N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = m_i] \\ &= \prod_{i=1}^k e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \frac{(\lambda(t_i - t_{i-1}))^{m_i}}{m_i!}, \end{aligned}$$

si $0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$. Cette probabilité est nulle sinon. Réciproquement, si la formule ci-dessus est vraie pour tout k et pour tout $0 < t_1 < \dots < t_k$, alors $P3$ en est un cas particulier, et $P2$ est également vraie puisque la loi conjointe des accroissements est une loi produit. Nous allons donc démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.11 *Pour tout k , pour tout $0 < t_1 < \dots < t_k$ et pour tout $m_1, \dots, m_k \geq 0$, on a :*

$$\mathbb{P}[N_{t_1} = m_1 \text{ et } \dots \text{ et } N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = m_k] = \prod_{i=1}^k e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \frac{(\lambda(t_i - t_{i-1}))^{m_i}}{m_i!}. \quad (1.1)$$

Démonstration : Posons $n = m_1 + \dots + m_k$ et $t = t_k$. La formule (1.1) s'écrit :

$$\mathbb{P}[N_{t_1} = m_1 \text{ et } \dots \text{ et } N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = m_k] = \lambda^n e^{-\lambda t} \prod_{i=1}^k \frac{(t_i - t_{i-1})^{m_i}}{m_i!}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N_{t_1} = m_1 \text{ et } \dots \text{ et } N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = m_k] \\ \mathbb{P}[N_{t_1} = m_1 \text{ et } \dots \text{ et } N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = m_k \mid N_t = n] \mathbb{P}[N_t = n]. \end{aligned}$$

D'après la proposition 1.9,

$$\mathbb{P}[N_t = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

On est donc ramené à montrer que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N_{t_1} = m_1 \text{ et } \dots \text{ et } N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = m_k \mid N_t = n] = \\ \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} \left(\frac{t_1 - t_0}{t} \right)^{m_1} \dots \left(\frac{t_k - t_{k-1}}{t} \right)^{m_k}. \end{aligned}$$

Or d'après la proposition 1.10, conditionnellement à " $N_t = n$ ", les dates des tops sont réparties uniformément entre 0 et t . La probabilité pour une de ces dates de tomber entre t_{i-1} et t_i est $(t_i - t_{i-1})/t$. La répartition des nombres de tops dans les k intervalles de temps est multinomiale, de paramètres n et $(t_i - t_{i-1})/t$, $i = 1, \dots, k$. D'où le résultat. \square

1.3 Version discrétisée

Notons δ un pas de discrétisation de l'échelle de temps, à savoir l'amplitude d'un petit intervalle de temps (le centième de seconde pour fixer les idées). Le décompte des tops d'horloge se fera selon la discrétisation. Nous notons I_k la fonction indicatrice de l'événement "un top a été compté dans l'intervalle $[(k-1)\delta, k\delta[$ ". Ces événements sont supposés indépendants. En notant p la probabilité qu'un top soit compté dans un intervalle d'amplitude δ , I_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p . Si le nombre moyen de tops dans un intervalle d'amplitude 1 reste λ , on doit choisir $p = \lambda\delta$. Comme p est strictement positif, les I_k prendront presque sûrement la valeur 1 une infinité de fois. Définissons les suites de variables aléatoires (Z_n) et (Y_n) de la façon suivante :

- Z_n est le n -ième indice k tel que I_k prend la valeur 1,
- $Y_n = Z_n - Z_{n-1}$ est le nombre d'intervalles entre le $(n-1)$ -ième et le n -ième top.

Les variables aléatoires Y_n sont indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$. Quand δ tend vers 0, le rapport $p/\delta = \lambda$ restant constant, la loi de δY_n converge vers la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ (proposition 1.5).

Considérons maintenant deux instants s et t , multiples entiers de δ . Notons N_t^δ le nombre de tops comptés entre 0 et t :

$$N_t^\delta = \sum_{k \leq t/\delta} I_k .$$

L'accroissement $N_t^\delta - N_s^\delta$ est le nombre de tops comptés entre s et t . Les tops survenant indépendamment avec probabilité p , $N_t^\delta - N_s^\delta$ suit la loi binomiale de paramètres $(t-s)/\delta$ et $p = \lambda\delta$. Quand δ tend vers 0, cette loi converge vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda(t-s))$ (propriété $P3$). De plus, par construction, $N_t^\delta - N_s^\delta$ est indépendant de N_s^δ (propriété $P2$). Il est donc raisonnable d'affirmer que quand δ tend vers 0, le processus $\{N_t^\delta, t \geq 0\}$ converge en loi vers le processus de Poisson d'intensité λ . Transformer les arguments qui précèdent en une démonstration rigoureuse des propriétés $P2$ et $P3$ nécessite la mise au point de quelques détails techniques sur lesquels nous passerons. Il est bon de garder en mémoire les deux versions, continue et discrète, au moment des applications pratiques. L'algorithme suivant simule la version discrète et constitue une illustration sonore du processus de Poisson. Ce n'est évidemment pas le meilleur algorithme de simulation.

Répéter

Répéter

Jusqu'à (Random < p)

(choisir une valeur de p très faible)

Emettre un Bip sonore

(très court)

Jusqu'à (lassitude de l'auditoire)

1.4 Equations de Chapman-Kolmogorov

Notre but ici est d'une part de donner une nouvelle caractérisation de la loi d'un processus de Poisson, d'autre part d'introduire une technique mathématique que nous retrouverons pour des processus markoviens plus généraux.

Théorème 1.12 Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus :

- de comptage (P1)
- à accroissement indépendants (P2)
- d'événements rares, homogène en temps (P4).

Alors $\{N_t, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson.

Démonstration : Nous avons vu que les propriétés P2 et P3 caractérisent la loi d'un processus de Poisson. Il nous suffit donc de montrer que P1, P2 et P4 impliquent P3. Nous commençons par déterminer la loi de N_t , en l'exprimant comme solution d'un système récurrent d'équations différentielles. Fixons t et $h > 0$, et utilisons la formule des probabilités totales pour exprimer la loi de N_{t+h} à l'aide de la loi de N_t . Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[N_{t+h} = n] &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[N_{t+h} = n \mid N_t = k] \mathbb{P}[N_t = k] && \text{d'après P1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = n - k \mid N_t = k] \mathbb{P}[N_t = k] \\
 &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = n - k] \mathbb{P}[N_t = k] && \text{d'après P2} \\
 &= \mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = 0] \mathbb{P}[N_t = n] \\
 &\quad + \mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = 1] \mathbb{P}[N_t = n-1] \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = n - k] \mathbb{P}[N_t = k] \\
 &= \mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = 0] \mathbb{P}[N_t = n] \\
 &\quad + \mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = 1] \mathbb{P}[N_t = n-1] + o(h) \quad \text{d'après P4.}
 \end{aligned}$$

En effet, la somme des $n-1$ premiers termes est majorée par $\mathbb{P}[N_{t+h} - N_t \geq 2]$, qui est négligeable. Posons $p_n(t) = \mathbb{P}[N_t = n]$. En utilisant à nouveau P4, on peut écrire :

$$p_n(t+h) = (1 - \lambda h + o(h))p_n(t) + (\lambda h + o(h))p_{n-1}(t) + o(h) .$$

Soit :

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h} .$$

Comme $o(h)/h$ tend vers 0 quand h tend vers 0, le membre de droite a une limite. Le membre de gauche a donc aussi une limite, qui est la dérivée à droite de $p_n(t)$. Entre les instants $t-h$ et t , on a :

$$\frac{p_n(t) - p_n(t-h)}{h} = -\lambda p_n(t-h) + \lambda p_{n-1}(t-h) + \frac{o(h)}{h} .$$

En passant à la limite quand h tend vers 0, on montre que la dérivée à gauche de $p_n(t)$ existe et est égale à la dérivée à droite. La fonction $p_n(t)$ est donc dérivable et on a :

$$p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) .$$

Pour $n = 0$, il suffit d'écrire :

$$IP[N_{t+h} = 0] = IP[N_{t+h} - N_t = 0] IP[N_t = 0] ,$$

soit :

$$p_0(t+h) = (1 - \lambda h + o(h))p_0(t) ,$$

qui mène à :

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) .$$

La solution de cette équation différentielle, pour $p_0(0) = 1$ est $p_0(t) = e^{-\lambda t}$. Or $p_0(t)$ est la probabilité pour que la date du premier top soit postérieure à t . On retrouve bien le fait que la loi de X_1 est exponentielle de paramètre λ .

La loi $(p_n(t))$ de N_t est solution du système différentiel linéaire suivant, dit système de Chapman-Kolmogorov.

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) \\ p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, introduisons la fonction génératrice de la loi de N_t .

$$G(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n(t) .$$

En multipliant la n -ième équation du système par z^n et en sommant on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n p'_n(t) = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n(t) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} z^n p_{n-1}(t) ,$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t}(z, t) &= -\lambda G(z, t) + \lambda z G(z, t) \\ &= \lambda(z-1)G(z, t) . \end{aligned}$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$G(z, t) = \varphi(z) e^{\lambda(z-1)t} ,$$

où φ est une fonction de z à déterminer par la condition initiale. Or en $t = 0$, $N_0 \equiv 0$, donc $G(z, 0) \equiv 1$. Finalement :

$$G(z, t) = e^{\lambda(z-1)t} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Donc N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt . Pour démontrer $P3$, nous devons déterminer la loi de $N_t - N_s$. Pour s fixé, et pour tout $\tau \geq 0$, posons :

$$N_{\tau}^* = N_{s+\tau} - N_s.$$

Le processus $\{N_{\tau}^*, \tau \geq 0\}$ est encore un processus de comptage. Ses accroissements sont des accroissements de $\{N_t, t \geq 0\}$, et sont donc indépendants. Pour la même raison, il possède aussi la propriété $P4$. On peut donc lui appliquer ce qui précède. Donc $N_t - N_s = N_{t-s}^*$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$. \square

1.5 Modélisation

De nombreuses situations sont modélisées par les processus de Poisson : arrivées de clients dans une file d'attente, appels à un central téléphonique, désintégration de particules radioactives (compteur Geiger), pannes de composants électroniques... Pour se faire une idée concrète de ce qu'est un processus de Poisson, rien ne vaut la simulation. On peut bien sûr programmer en suivant la définition, ce qui implique des tirages successifs de variables exponentielles. On peut aussi appliquer la proposition 1.10. Pour simuler des événements poissonniens sur l'intervalle de temps $[0, t]$, on commence par choisir la valeur n prise par N_t suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda t)$, puis on simule les dates d'arrivées des n événements, en les tirant au hasard suivant la loi uniforme sur $[0, t]$. La figure 1 représente une trajectoire simulée d'un processus de Poisson d'intensité 2 sur l'intervalle $[0, 10]$. On constate que d'assez longues périodes sans aucun comptage alternent avec des rafales de comptages rapprochés. Il n'y a pas d'autre explication à la fameuse "loi des séries" chère aux journalistes. Si des événements (comme par exemple des accidents d'avion) arrivent rarement, de manière imprévisible et indépendante, on ne peut pas imaginer qu'ils surviennent à des intervalles de temps réguliers. Il faut plutôt s'attendre à les voir survenir parfois de manière rapprochée, par "séries".

Il est important de comprendre quelles hypothèses de modélisation l'utilisation d'un processus de Poisson sous-entend.

Dire que des événements surviennent selon un processus de Poisson, c'est supposer qu'à chaque instant, l'arrivée du prochain événement est parfaitement imprévisible, c'est-à-dire indépendante de ce qui a précédé. On suppose de plus que l'intensité (nombre moyen d'événements par unité de temps) reste

constante. C'est dans la version discrétisée que les conséquences de ces hypothèses sont les plus tangibles. Supposons que l'on souhaite modéliser des arrivées de clients dans un magasin. Les questions sont les suivantes.

- Les clients arrivent-ils un par un (événements rares) ?
- Dans une seconde fixée, les chances de voir arriver un client sont elles constantes (homogénéité en temps) ?
- Le temps qui s'est écoulé depuis l'arrivée du dernier client est-il sans incidence sur les chances d'en voir arriver un autre bientôt (accroissements indépendants) ?

La réponse à ces questions est généralement négative, mais un modèle poissonnien peut néanmoins être valable en première approximation si l'observation a lieu sur un intervalle de temps limité. Quand il conduit à des résultats faux, on a recours à des modèles plus sophistiqués, qui sont des généralisations du processus de Poisson. Par exemple les *processus de renouvellement* sont des processus de comptage d'événements séparés par des durées indépendantes, mais de loi autre qu'exponentielle. Les *processus de Poisson non homogènes* sont des processus de comptage, à accroissements indépendants, d'événements rares, mais la loi de $N_{t+h} - N_t$ dépend de t . Les *processus de Poisson composés* permettent de cumuler des sommes aléatoires autres que binaires : au lieu d'ajouter 1 à chaque top, on ajoute une variable aléatoire. Ceci permet en particulier de tenir compte d'arrivées groupées dans les modèles d'attente.

Signalons enfin que le processus de Poisson peut être étendu à des indices de dimension supérieure à 1, pour des comptages dans l'espace (comptage d'individus d'une espèce protégée dans un parc naturel par exemple). Désignons par N_A la variable aléatoire égale au nombre d'objets comptés dans un domaine A de \mathbb{R}^d , dont le volume est noté $vol(A)$. Les propriétés que l'on attend sont les suivantes :

- P1 $N_\emptyset = 0$, $A \subset B \implies N_A \leq N_B$ (processus de comptage),
- P2 Si A_1, \dots, A_k sont des domaines disjoints, alors les variables aléatoires N_{A_1}, \dots, N_{A_k} sont indépendantes (accroissements indépendants).
- P4 $\mathbb{P}[N_A \geq 2] = o(vol(A))$ (événements rares) et $\mathbb{P}[N_A = 1] = \lambda vol(A) + o(vol(A))$ (homogénéité).

On peut montrer comme au paragraphe 1.4 que ces trois propriétés entraînent que N_A suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda vol(A)$.

2 Algorithmes markoviens en temps continu

2.1 Chaînes temporisées

Le passage du temps discret au temps continu se fait en remplaçant le pas de temps fixe d'une chaîne de Markov, par des intervalles de temps aléatoires indépendants de lois exponentielles. Les paramètres de ces exponentielles peuvent dépendre de l'état de la chaîne.

Définition 2.1 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace mesurable E . Soit λ une application bornée de E dans \mathbb{R}^{+*} . Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, exponentielle de paramètre 1. La suite (V_n) est supposée indépendante de la chaîne (X_n) . On note $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite croissante d'instants de \mathbb{R}^+ définie par $T_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$T_n = \frac{V_0}{\lambda(X_0)} + \cdots + \frac{V_{n-1}}{\lambda(X_{n-1})} .$$

Pour tout $t \geq 0$, on note Z_t la variable aléatoire définie par :

$$\forall t \in [T_n, T_{n+1}[, \quad Z_t = X_n .$$

Le processus $\{Z_t; t \geq 0\}$ est un processus markovien de saut, ou version temporisée de la chaîne (X_n) .

Dans la définition 2.1 nous n'avons rien fait d'autre que remplacer l'échelle de temps \mathbb{N} de la chaîne par une échelle de temps aléatoire. L'incrémentatation du temps est la seule chose qui soit modifiée dans l'algorithme de simulation de la chaîne.

```

t ← 0
Initialiser X
Répéter
    x ← X                (état présent)
    choisir l'état suivant y
    X ← y                 (état suivant)
    t ← t - log(Random)/λ(x)
Jusqu'à (arrêt de la simulation)
```

Le coefficient $\lambda(x)$ doit être compris comme le *taux de saut* à partir de l'état x . Son inverse $1/\lambda(x)$ est le temps moyen avant le prochain saut quand le processus est dans l'état x . Il n'est pas exclu que ce prochain saut conduise encore la chaîne dans l'état x (saut fictif). Le temps de séjour réel du processus dans l'état x en sera prolongé d'autant. Nous reviendrons en détail sur cette question des sauts fictifs et des temps de séjour dans les paragraphes suivants. Les $\lambda(x)$ étant supposés bornés, la suite T_n des instants de saut du processus tend presque sûrement vers l'infini. Dans le cas particulier où la fonction λ est constante, cette suite forme un processus de Poisson homogène d'intensité λ . Un taux $\lambda(x)$ nul correspondrait à une durée de séjour infinie dans l'état x , qui serait alors qualifié d'*état absorbant*.

Il est légitime de se demander quel est le degré de généralité de la définition 2.1. Il existe de nombreuses variétés de processus vérifiant la propriété de Markov (définition 3.1). Pour ne citer que le plus célèbre, le mouvement brownien ne relève clairement pas de la définition 2.1. Ce n'est même pas un processus de saut, car ses trajectoires sont continues. Dans les applications,

on peut souvent se ramener au cas où l'espace d'états est fini. Tout processus de Markov sur un ensemble fini peut être construit comme indiqué dans la définition 2.1. C'est à ce cas là que nous nous limiterons pour l'essentiel. Selon les algorithmes de simulation, il pourra apparaître que l'espace d'états naturel est infini dénombrable (par exemple \mathbb{N} pour une file d'attente). Sur un espace d'états dénombrable, la plupart des processus de Markov d'intérêt pratique peuvent s'écrire comme des versions temporisées de chaînes de Markov (voir 2.3). Nous utiliserons désormais la dénomination processus markovien, puisque tous les processus que nous étudions ont leurs valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable, et leurs trajectoires sont constantes par morceaux : ce sont forcément des processus de saut.

2.2 Taux de transition et générateur

Nous supposons désormais que l'espace d'états $E = \{i, j, \dots\}$ est fini. Notre but est d'établir la relation entre la définition 2.1 et la présentation classique des processus markoviens sur un ensemble fini, à partir des taux de transition et du générateur correspondant. Nous nous plaçons dans le cas homogène. La loi de la chaîne de Markov (X_n) que l'on temporise est caractérisée par la loi de X_0 et la matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$. La temporisation rajoute en plus les taux de saut $(\lambda(i))_{i \in E}$. L'algorithme (théorique) est le suivant.

```

t ← 0
Initialiser X
Répéter
    i ← X                (état présent)
    choisir j avec probabilité pij
    X ← j                (état suivant)
    t ← t - log(Random)/λ(i)
Jusqu'à (arrêt de la simulation)

```

On suppose désormais que la chaîne n'a pas d'état absorbant :

$$\forall i \in E, \quad p_{ii} < 1.$$

Soit i un état tel que $p_{ii} > 0$. Dans l'algorithme ci-dessus il est possible que plusieurs étapes consécutives maintiennent le processus dans l'état i . Nous commençons par définir la *chaîne incluse* associée à une chaîne de Markov (X_n) comme la suite des états visités par (X_n) , en excluant les visites redoublées dans un même état lors de pas consécutifs.

Définition 2.2 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P , ne possédant aucun état absorbant. Posons :

$$X'_0 = X_0 \quad \text{et} \quad N_0 = \inf\{n > 0; X_n \neq X_0\}.$$

L'entier N_0 est la durée de séjour (discrète) dans l'état initial. Nous définissons par récurrence la suite des visites distinctes (X'_m) et la suite des durées de séjour discrètes (N_m) de la façon suivante.

$$\forall m \geq 0, X'_{m+1} = X_{N_0+\dots+N_m} \text{ et } N_{m+1} = \inf\{n > 0; X_{N_m+n} \neq X'_{m+1}\}.$$

L'absence d'état absorbant entraîne que toutes les durées de séjour sont finies, ce qui assure la cohérence de la définition ci-dessus.

Proposition 2.3 La suite des visites (X'_m) est une chaîne de Markov homogène dont les probabilités de transition sont :

$$p'_{ij} = \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}} \text{ si } i \neq j, \\ = 0 \quad \text{si } i = j.$$

Sachant que la suite des $m+1$ premières visites est i_0, \dots, i_m , les $m+1$ durées de séjour correspondantes N_0, \dots, N_m sont distribuées comme un $(m+1)$ -uplet de variables aléatoires indépendantes de lois géométriques, les paramètres respectifs étant $1 - p_{i_0 i_0}, \dots, 1 - p_{i_m i_m}$.

Démonstration : La suite des visites successives est produite par l'algorithme suivant.

```

m ← 0
Initialiser X'
Répéter
    i ← X'                (état présent)
    Répéter
        choisir j avec probabilité pij
    Jusqu'à (j ≠ i)
    X' ← j                (état suivant)
    m ← m + 1
Jusqu'à (arrêt de la simulation)

```

C'est donc une chaîne de Markov. La durée de séjour discrète dans l'état i est le nombre de parcours de la boucle :

```

Répéter
    choisir j avec probabilité pij
Jusqu'à (j ≠ i)

```

La loi est donc géométrique et son paramètre est la probabilité de l'événement par lequel on conditionne, soit :

$$\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1 - p_{ii}.$$

La probabilité p'_{ij} d'atteindre l'état j à partir de l'état i est la probabilité conditionnelle sachant l'événement $j \neq i$. \square

Voici maintenant les notions correspondantes pour la version temporisée.

Définition 2.4 Soit $\{Z_t; t \geq 0\}$ une version temporisée de la chaîne (X_n) (définition 2.1). On suppose encore que la chaîne (X_n) n'a pas d'état absorbant. On note :

$$X'_0 = Z_0 \quad \text{et} \quad D_0 = \inf\{t > 0; Z_t \neq X'_0\}.$$

Nous définissons par récurrence la suite des visites distinctes (X'_m) et la suite des durées de séjour continues (D_m) de la façon suivante.

$$\forall m \geq 0, \quad X'_{m+1} = Z_{D_0+\dots+D_m} \quad \text{et} \quad D_{m+1} = \inf\{t > 0; Z_{D_m+t} \neq X'_{m+1}\}.$$

Bien entendu, la suite des visites définie ci-dessus et la suite des visites de la définition 2.2 sont identiques. C'est une chaîne de Markov, que nous appellerons la *chaîne incluse* du processus.

Proposition 2.5 Sachant que la suite des $m+1$ premières visites est i_0, \dots, i_m , les $m+1$ durées de séjour continues D_0, \dots, D_m sont distribuées comme un $(m+1)$ -uplet de variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles, les paramètres respectifs étant $\lambda(i_0)(1 - p_{i_0 i_0}), \dots, \lambda(i_m)(1 - p_{i_m i_m})$.

Le produit $\lambda(i)(1 - p_{ii})$ apparaît donc comme le *taux de sortie* de l'état i , son inverse étant le temps moyen de séjour dans cet état.

Démonstration : La durée totale de séjour dans l'état i est calculée par la boucle suivante :

```

D ← 0
Répéter
    choisir  $j$  avec probabilité  $p_{ij}$ 
    D ← D - log(Random)/ $\lambda(i)$ 
Jusqu'à ( $j \neq i$ )

```

Soit N la durée de séjour discrète. Conditionnellement à " $N = n$ ", la loi de la durée de séjour est celle de la somme de n variables exponentielles de paramètre $\lambda(i)$ indépendantes. C'est la loi Gamma $\mathcal{G}(n, \lambda(i))$, de densité :

$$f_D^{N=n}(x) = \frac{\lambda^n(i) x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(i)x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(x).$$

La densité de D est donc :

$$\begin{aligned} f_D(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_D^{N=n}(x) \mathbb{P}[N = n] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n(i) x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(i)x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(x) (1 - p_{ii}) p_{ii}^{n-1} \\ &= (1 - p_{ii}) \lambda(i) e^{-\lambda(i)x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(i) p_{ii} x)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \lambda(i) (1 - p_{ii}) e^{-\lambda(i)(1-p_{ii})x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(x). \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

La correspondance entre les temps de séjour discrets (géométriques) et les temps de séjour continus (exponentiels) n'est pas surprenante au vu des propositions 1.4 et 1.5.

Les propositions 2.3 et 2.5 montrent que si on remplace dans la définition 2.1 la chaîne (X_n) par la chaîne incluse (X'_n) et les taux de saut $\lambda(i)$ par les taux de sortie $\lambda(i)(1 - p_{ii})$, on obtient le même processus $\{Z_t; t \geq 0\}$. Considérons deux chaînes de Markov, de matrices de transition P et Q , et deux vecteurs de taux de sauts $(\lambda(i))$ et $(\mu(i))$. Les versions temporisées correspondantes auront la même loi si :

$$\forall i \neq j, \quad \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}} = \frac{q_{ij}}{1 - q_{ii}},$$

(même chaîne incluse) et :

$$\forall i, \quad \lambda(i)(1 - p_{ii}) = \mu(i)(1 - q_{ii}),$$

(mêmes taux de sortie). Ceci équivaut à :

$$\forall i \neq j, \quad \lambda(i)p_{ij} = \mu(i)q_{ij}.$$

Les quantités $\lambda(i)p_{ij}$, pour $i \neq j$ sont donc intrinsèquement liées au processus et non à sa représentation comme chaîne de Markov temporisée. Ce sont les *taux de transition*, que l'on note habituellement λ_{ij} .

$$\lambda_{ij} = \lambda(i)p_{ij}, \quad \forall i \neq j.$$

Quand beaucoup de ces taux sont nuls, ce qui est fréquent dans les applications, on représente les transitions par un graphe pondéré, le *diagramme de transition* (voir par exemple la figure 3, paragraphe 2.5).

En termes matriciels, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux chaînes de Markov temporisées conduisent au même processus s'écrit :

$$\text{Diag}((\lambda(i))(P - I) = \text{Diag}((\mu(i))(Q - I).$$

La valeur commune de ces matrices est le *générateur* du processus, noté Λ . Un générateur de Markov (ou infinitésimal) est une matrice carrée indexée par E . Ses coefficients hors de la diagonale sont les taux de transition. Le coefficient d'ordre i de la diagonale est habituellement noté $-\lambda_{i\bullet}$:

$$\lambda_{i\bullet} = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}.$$

La somme des éléments d'une même ligne vaut 0 :

$$\Lambda \mathbb{1} = 0.$$

2.3 Chaîne incluse et chaîne harmonisée

Dans les applications, un modèle markovien continu est défini par ses taux de transition λ_{ij} , qui ont en général une signification concrète (nombres moyens de clients, de pannes, de services ou de réparations par unité de temps par exemple). La représentation d'un processus sous forme de chaîne de Markov temporisée autorise une certaine latitude dans le choix d'un algorithme de simulation.

Considérons par exemple un automate binaire ($E = \{0, 1\}$) dont les taux de transition de 0 à 1 et de 1 à 0 sont respectivement :

$$\lambda_{01} = 5 \quad \text{et} \quad \lambda_{10} = 4.$$

Pour simuler ce processus, il faut choisir une matrice de transition P sur $\{0, 1\}$ et deux taux de saut $\lambda(0)$ et $\lambda(1)$ tels que :

$$\lambda(0)p_{01} = 5 \quad \text{et} \quad \lambda(1)p_{10} = 4.$$

Deux des 4 paramètres peuvent être choisis arbitrairement. Un choix possible est celui correspondant à la chaîne incluse :

$$p_{01} = 1 \quad \text{et} \quad p_{10} = 1.$$

Mais on pourrait prendre aussi :

$$p_{01} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad p_{10} = \frac{1}{3}.$$

Un choix naturel est :

$$p_{01} = 1 \quad \text{et} \quad p_{10} = \frac{4}{5}.$$

Alors :

$$\lambda(0) = \lambda(1) = 5.$$

C'est la *version harmonisée* du processus.

Proposition 2.6 Soit Λ un générateur markovien sur un ensemble fini E . Posons

$$\lambda = \max_i \lambda_{i\bullet} = \max_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}.$$

Définissons la matrice de transition P par :

$$P = I + \frac{1}{\lambda} \Lambda.$$

Soit (X_n) une chaîne de Markov de matrice de transition P . Alors la version temporisée de (X_n) par la fonction constante $\lambda(i) \equiv \lambda$ a pour générateur Λ .

Démonstration : c'est une conséquence immédiate des résultats du paragraphe précédent. \square

Définition 2.7 Soit Λ un générateur de Markov sur E . On appelle chaîne harmonisée associée à Λ une chaîne de Markov de matrice de transition :

$$P = I + \frac{1}{\lambda} \Lambda ,$$

où

$$\lambda = \max_i \lambda_{i\bullet} = \max_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} .$$

La définition de la chaîne harmonisée s'étend de manière évidente à des processus de Markov sur des ensembles infinis dénombrables, pourvu que :

$$\sup_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} < \infty .$$

On parle alors de *processus harmonisable*, ou *uniformisable*.

On peut voir la simulation de la chaîne harmonisée comme une extension de la méthode de rejet. Dans la version temporisée, la suite des instants de saut forme un processus de Poisson homogène d'intensité λ . Il faut comprendre λ comme une unité par laquelle on peut quantifier la vitesse de fonctionnement du processus de générateur Λ . Nous l'appellerons l'*horloge interne* du processus. Désignons par (X_n) une chaîne de Markov de matrice de transition P et par $\{N_t; t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ , indépendant de la chaîne (X_n) . Pour tout $t \geq 0$, posons :

$$Z_t = X_{N_t} .$$

Le processus $\{Z_t; t \geq 0\}$ est un processus markovien de saut, de générateur $\Lambda = \lambda(P - I)$. Cette écriture permet de ramener l'étude théorique des processus markoviens harmonisables à celle des chaînes de Markov. Nous l'utiliserons en 3.2.

La chaîne harmonisée présente l'avantage théorique d'avoir le même comportement asymptotique que le processus à temps continu. En particulier si la chaîne admet la loi de probabilité p comme mesure stationnaire (ou réversible), alors il en est de même pour le processus.

Sur le plan algorithmique, il pourrait sembler plus efficace de simuler la chaîne incluse, qui évite les sauts fictifs d'un état vers lui-même. En pratique c'est très souvent la chaîne harmonisée qui s'avère la meilleure. Les pertes de temps que sont les sauts fictifs sont largement compensées par une économie importante sur le nombre de tests, et surtout dans la gestion de l'échelle de temps. Nous étudions ceci dans le paragraphe suivant.

2.4 Pratique de la simulation

Rappelons l'algorithme théorique de simulation d'une chaîne de Markov temporisée.

```

 $t \leftarrow 0$ 
Initialiser  $X$ 
Répéter
     $i \leftarrow X$  (état présent)
    choisir  $j$  avec probabilité  $p_{ij}$ 
     $X \leftarrow j$  (état suivant)
     $t \leftarrow t - \log(\text{Random})/\lambda(i)$ 
Jusqu'à (arrêt de la simulation)
  
```

Les tirages aléatoires correspondant aux incréments de l'échelle de temps sont indépendants entre eux et indépendants des choix de sauts de la chaîne. Ils alourdissent l'algorithme, et sont en fait inutiles dans la plupart des applications. En général on n'écrit pas un algorithme de simulation pour observer seulement quelques dizaines de sauts du processus. La boucle de simulation sera exécutée des milliers, voire des millions de fois. Dans ces conditions, le suivi pas à pas de l'échelle de temps est superflu. On peut ne l'observer que tous les K pas (disons $K = 1000$ pour fixer les idées). Sur K itérations, l'échelle de temps aura été incrémentée de la somme de K variables exponentielles indépendantes. Bien que ces variables ne soient pas de même loi, le théorème central limite s'applique dans ce cas. On pourra donc remplacer l'incrément totale sur les K pas de temps par une variable aléatoire suivant une loi normale de même moyenne et de même variance. L'algorithme devient alors le suivant.

```

 $t \leftarrow 0$ 
Initialiser  $X$ 
Répéter
    moyenne  $\leftarrow 0$ 
    variance  $\leftarrow 0$ 
    Répéter  $K$  fois
         $i \leftarrow X$  (état présent)
        choisir  $j$  avec probabilité  $p_{ij}$ 
         $X \leftarrow j$  (état suivant)
        moyenne  $\leftarrow$  moyenne +  $1/\lambda(i)$ 
        variance  $\leftarrow$  variance +  $(1/\lambda(i))^2$ 
    finRépéter
     $t \leftarrow t +$  moyenne + Normale(0,1) *  $\sqrt{\text{variance}}$ 
Jusqu'à (arrêt de la simulation)
  
```

(Rappelons que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $1/\lambda$ et que sa variance est $1/\lambda^2$). Il faut remarquer de plus qu'au bout des K itérations, si K est assez grand, l'écart-type sera petit devant la moyenne. De

sorte qu'on ne commettra pas une grosse erreur en incrémentant l'échelle de temps seulement par les durées moyennes.

```

 $t \leftarrow 0$ 
Initialiser  $X$ 
Répéter
     $i \leftarrow X$  (état présent)
    choisir  $j$  avec probabilité  $p_{ij}$ 
     $X \leftarrow j$  (état suivant)
     $t \leftarrow t + 1/\lambda(i)$ 
Jusqu'à (arrêt de la simulation)

```

Le cas de la simulation par la chaîne temporisée est particulier. Si tous les $\lambda(i)$ sont égaux à λ , l'échelle de temps discrète et l'échelle de temps continue sont proportionnelles en moyenne. Il suffit donc de compter les sauts de la chaîne, c'est-à-dire d'incrémenter l'échelle de temps par pas de 1. En d'autres termes, il n'y a pratiquement aucune différence algorithmique entre la simulation d'un processus et la simulation de sa chaîne harmonisée. C'est un des avantages de la chaîne harmonisée par rapport à la chaîne incluse pour ce qui est de la simulation.

Exemple : Automate binaire.

Considérons le processus markovien sur $E = \{0, 1\}$ dont le générateur est :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

La matrice de transition de la chaîne incluse est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algorithme de simulation correspondant est le suivant.

```

 $t \leftarrow 0$ 
Initialiser  $X$ 
Répéter
    Si ( $X = 0$ )
        alors
             $X \leftarrow 1$ 
             $t \leftarrow t + 1/\lambda$ 
        sinon
             $X \leftarrow 0$ 
             $t \leftarrow t + 1/\mu$ 
    finSi
Jusqu'à (arrêt de la simulation)

```

Supposons $\lambda < \mu$. La matrice de transition de la chaîne harmonisée est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda}{\mu} & \frac{\lambda}{\mu} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les taux de saut sont constants, $\lambda(0) = \lambda(1) = \mu$. L'algorithme de simulation est le suivant.

```

t ← 0
Initialiser X
Répéter
    Si (X = 0)
        alors
            Si (Random < λ/μ)
                X ← 1
            finSi
        sinon
            X ← 0
    finSi
    t ← t + 1
Jusqu'à (arrêt de la simulation)
t ← t/μ

```

Bien entendu, la constante λ/μ devra être précalculée en dehors de la boucle principale. Selon les valeurs de λ et μ , les “sauts fictifs” en 0 pourront être compensés par la simplification dans la gestion de l'échelle de temps.

2.5 Modèles en fiabilité

En fiabilité, on considère qu'un système est constitué de composants, qui sont alternativement en fonctionnement (1) ou en panne (0). Dans les modèles markoviens, la durée de fonctionnement d'un composant est supposée exponentielle. C'est évidemment une approximation, valable sur un certain intervalle de temps en dehors des défauts de jeunesse et du vieillissement. On considère aussi que les durées de réparation sont exponentielles. Si pour un composant donné la durée de fonctionnement suit la loi $\mathcal{E}(\mu)$ et la durée de réparation suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors l'état du composant à l'instant t est un processus markovien dans $E = \{0, 1\}$ dont le générateur est :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

C'est l'automate binaire du paragraphe précédent. Les paramètres λ et μ sont respectivement le *taux de réparation* et le *taux de panne* du composant.

Supposons qu'un système ait N composants, dont les fonctionnements sont indépendants. L'état du système sera décrit par un N -uplet, chaque coordonnée prenant la valeur 0 ou 1. L'espace d'états est alors $E = \{0, 1\}^N$.

La simulation de processus markoviens indépendants n'est pas à proprement parler un cas que l'on rencontre fréquemment dans les applications. Etudier en détail cet exemple nous permettra de mettre en place un schéma algorithmique général qui reste valable pour de nombreux réseaux de processus synchronisés, qu'ils soient interprétés comme des systèmes réparables en fiabilité, des réseaux de files d'attente, ou des systèmes de particules interactives.

On se donne une collection de N espaces d'états finis, E_1, \dots, E_N . Pour tout $n = 1, \dots, N$ les états de E_n seront notés i_n, j_n, \dots . Sur chacun de ces espaces est défini un générateur de Markov. Le taux de transition de l'état i_n à l'état j_n dans E_n est noté $\lambda_{i_n j_n}^{(n)}$. Le générateur correspondant est noté Λ_n .

Définition 2.8 On appelle somme de Kronecker des générateurs Λ_n , $n = 1, \dots, N$, le générateur de Markov sur $E = E_1 \times \dots \times E_N$ défini de la façon suivante.

- Si deux N -uplets (i_1, \dots, i_N) et (j_1, \dots, j_N) diffèrent en deux coordonnées au moins, alors le taux de transition de l'un à l'autre est nul.
- Le taux de transition de

$$(i_1, \dots, i_{n-1}, i_n, i_{n+1}, \dots, i_N) \quad \text{à} \quad (i_1, \dots, i_{n-1}, j_n, i_{n+1}, \dots, i_N)$$

est $\lambda_{i_n j_n}^{(n)}$.

Proposition 2.9 Pour tout $n = 1, \dots, N$ soit $\{Z_t^{(n)}, t \geq 0\}$ un processus markovien de saut de générateur Λ_n sur E_n . Ces N processus sont supposés indépendants entre eux. Considérons le processus $\{Z_t, t \geq 0\}$ défini sur $E = E_1 \times \dots \times E_N$ par :

$$Z_t = (Z_t^{(1)}, \dots, Z_t^{(N)}) .$$

Alors $\{Z_t, t \geq 0\}$ est un processus markovien de saut, dont le générateur est la somme de Kronecker des générateurs Λ_n , $n = 1, \dots, N$.

Démonstration : Pour tout $n = 1, \dots, N$ notons $\lambda^{(n)}$ l'horloge interne du n -ième processus.

$$\lambda^{(n)} = \max_{i_n} \sum_{j_n} \lambda_{i_n j_n}^{(n)} .$$

Considérons, pour chacun des générateurs Λ_n la matrice de transition de la chaîne harmonisée correspondante.

$$P_n = I + \frac{1}{\lambda^{(n)}} \Lambda_n .$$

Dans la version harmonisée, l'échelle de temps du processus d'indice n est un processus de Poisson d'intensité $\lambda^{(n)}$. Ces N échelles de temps sont indépendantes. La somme de N processus de Poisson indépendants est encore un processus de Poisson, d'intensité $\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(N)}$ (cf. exercice 1). Cette

intensité est l'horloge interne du processus $\{Z_t, t \geq 0\}$. Quand le processus $\{Z_t\}$ entre dans l'état (i_1, \dots, i_N) , la durée avant le prochain saut est donc exponentielle, de paramètre $\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(N)}$. Le prochain saut sera celui de la coordonnée n avec probabilité $\lambda^{(n)} / (\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(N)})$, d'après la proposition 1.3. Ce saut se fera de l'état i_n vers l'état j_n avec probabilité $\lambda_{i_n j_n}^{(n)} / \lambda^{(n)}$. Les deux choix successifs sont indépendants. La probabilité de transition de l'état $(i_1, \dots, i_{n-1}, i_n, i_{n+1}, \dots, i_N)$ vers l'état $(i_1, \dots, i_{n-1}, j_n, i_{n+1}, \dots, i_N)$ est donc :

$$\frac{\lambda^{(n)}}{\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(N)}} \frac{\lambda_{i_n j_n}^{(n)}}{\lambda^{(n)}} = \frac{\lambda_{i_n j_n}^{(n)}}{\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(N)}} .$$

Ceci justifie l'expression annoncée pour les taux de transition du processus $\{Z_t, t \geq 0\}$ (définition 2.8). En suivant ce raisonnement, on obtient l'algorithme de simulation ci-dessous.

```

t ← 0
Initialiser  $(X^{(1)}, \dots, X^{(N)})$ 
Répéter
    choisir n avec probabilité  $\lambda^{(n)} / (\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(N)})$ 
     $i_n \leftarrow X^{(n)}$ 
    choisir  $j_n$  avec probabilité  $\lambda_{i_n j_n}^{(n)} / \lambda^{(n)}$ 
     $X^{(n)} \leftarrow j_n$ 
    t ← t + 1
Jusqu'à (arrêt de la simulation)
t ← t /  $(\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(N)})$ 

```

C'est bien l'algorithme de simulation d'un processus markovien de saut sous sa forme harmonisée. \square

Dans la démonstration ci-dessus, notre but était d'écrire un algorithme théorique faisant apparaître le processus $\{Z_t, t \geq 0\}$ comme une chaîne de Markov temporisée. Il se trouve que cet algorithme est aussi celui qu'il est conseillé d'implémenter en pratique. Voici pourquoi. Dans le paragraphe 2.3 nous avons décrit deux algorithmes de simulation d'un processus, par la chaîne incluse et par la chaîne harmonisée. Si N est grand la simulation de la chaîne incluse est inapplicable. En effet le nombre d'états dans E croît exponentiellement avec N . On ne pourra donc pas précalculer la matrice de transition de la chaîne incluse. Or chaque ligne de cette matrice de transition contient au moins de l'ordre de N termes non nuls, qu'il faudrait calculer dans la boucle principale avant d'effectuer le choix aléatoire correspondant. Ceci rend prohibitif le coût de simulation de la chaîne incluse. Pour ce qui est de la chaîne harmonisée, d'après la définition 2.7, la probabilité de transition de l'état $(i_1, \dots, i_{n-1}, i_n, i_{n+1}, \dots, i_N)$ vers l'état $(i_1, \dots, i_{n-1}, j_n, i_{n+1}, \dots, i_N)$ est $\lambda_{i_n j_n}^{(n)} / (\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(N)})$. Dans l'algorithme de la démonstration ci-dessus cette transition est simulée en deux étapes :

choisir n avec probabilité $\lambda^{(n)} / (\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(N)})$

choisir j_n avec probabilité $\lambda_{i_n j_n}^{(n)} / \lambda^{(n)}$

Ceci est un cas particulier de la méthode de simulation par décomposition pour les lois discrètes.

Considérons maintenant un système réparable formé de N automates binaires indépendants et *identiques*. Pour chacun d'entre eux le taux de réparation est $\lambda > 0$ et le taux de panne est $\mu > 0$. Si l'état du n -ième composant à l'instant t est noté $Z_t^{(n)}$, nous venons de voir que le N -uplet $(Z_t^{(1)}, \dots, Z_t^{(N)})$ est un processus de Markov, dont le générateur est la somme de Kronecker de N copies identiques d'un générateur sur $\{0, 1\}$. Mais on peut ne pas souhaiter suivre chaque composant, et ne retenir que le nombre de ceux qui sont en fonctionnement à l'instant t . On doit alors considérer la somme des $Z_t^{(n)}$. Notons :

$$S_t = \sum_{n=1}^N Z_t^{(n)}.$$

Proposition 2.10 *Le processus $\{S_t, t \geq 0\}$ est un processus markovien de saut sur $\{0, \dots, N\}$. Son générateur est défini par les taux de transition suivants, pour tout $n = 0, \dots, N$ (le diagramme de transition est celui de la figure 2).*

$$\begin{cases} \lambda_{n, n+1} = (N - n)\lambda \\ \lambda_{n, n-1} = n\mu. \end{cases}$$

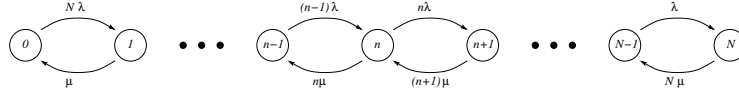


FIGURE 2 – Diagramme de transition pour le processus $\{S_t\}$, somme de N automates binaires indépendants.

Démonstration : Considérons un état du système dans lequel n composants sont en fonctionnement. Chaque composant changera d'état au bout d'un temps exponentiel, de paramètre μ pour les n qui sont en fonctionnement, de paramètre λ pour les $N - n$ qui sont en réparation. Le prochain changement d'état sera une panne ou une réparation de l'un des composants. Il surviendra au bout d'un temps qui est le minimum de N variables exponentielles indépendantes. Ce temps sera exponentiel, de paramètre $(N - n)\lambda + n\mu$. Le prochain mouvement sera une panne avec probabilité $n\mu / ((N - n)\lambda + n\mu)$, ou une réparation, avec probabilité $(N - n)\lambda / ((N - n)\lambda + n\mu)$ (cf. proposition 1.3). Ce qui vient d'être décrit est la chaîne incluse du processus $\{S_t, t \geq 0\}$. Les taux de transition s'en déduisent immédiatement. \square

L'indépendance des composants est une hypothèse théorique difficile à vérifier en pratique. Il est fréquent que la panne d'un composant entraîne celle d'autres composants avec lesquels il est lié dans le système. Nous nous contenterons d'un exemple de modèle dans lequel la possibilité de panne simultanée de deux composants est prise en compte.

On considère un système à deux composants identiques, tels qu'en cas de panne de l'un des deux composants, l'autre puisse aussi tomber en panne. Les hypothèses de modélisation sont les suivantes.

- Le temps de bon fonctionnement de chaque composant suit la loi $\mathcal{E}(\mu)$.
- Le temps de réparation d'un composant seul pendant le fonctionnement suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
- Le temps de réparation des deux composants simultanément suit la loi $\mathcal{E}(\nu)$.
- En cas de panne d'une unité, l'autre continue à fonctionner avec probabilité c .
- Toutes les variables aléatoires du modèle sont indépendantes.

Si $Z_t \in \{0, 1\}^2$ est l'état du système à l'instant t , les hypothèses de modélisation permettent de montrer que $\{Z_t, t \geq 0\}$ est un processus markovien de saut dont le générateur est le suivant :

$$\Lambda = \begin{array}{c|cccc} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ \hline 00 & -\nu & 0 & 0 & \nu \\ 01 & \mu & -(\lambda + \mu) & 0 & \lambda \\ 10 & \mu & 0 & -(\lambda + \mu) & \lambda \\ 11 & 2\mu(1-c) & \mu c & \mu c & -2\mu \end{array}$$

On peut aussi considérer le nombre de composants en fonctionnement à l'instant t , $S_t \in \{0, 1, 2\}$. On montre que $\{S_t, t \geq 0\}$ est un processus markovien, dont le générateur est le suivant :

$$\Lambda = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -\nu & 0 & \nu \\ 1 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda \\ 2 & 2\mu(1-c) & 2\mu c & -2\mu \end{array}$$

Les diagrammes de transition des processus $\{Z_t\}$ et $\{S_t\}$ sont représentés sur la figure 3.

2.6 Particules interactives

Il n'y a pas de différence mathématique entre un modèle markovien en fiabilité et un processus de particules sur un ensemble fini de sites. Ce sont deux points de vue de modélisation assez différents, et les deux théories se sont développées de manière largement indépendante. Nous nous limiterons pour l'instant au cas des processus de spin à valeurs dans $\{0, 1\}$. La méthode

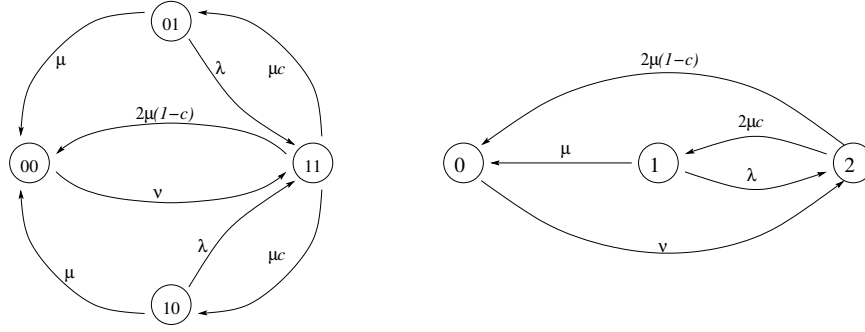


FIGURE 3 – Diagrammes de transition pour un modèle de fiabilité à deux composants. Etats des composants (à gauche) et nombre de composants en panne (à droite).

générale de simulation s'étend de manière immédiate aux systèmes à valeurs dans un ensemble fini quelconque.

Soit S un ensemble fini de cardinal N , dont les éléments sont appelés *sites*. L'ensemble S est supposé muni d'une structure de graphe non orienté, l'ensemble d'arêtes étant A . La relation de voisinage est notée \sim .

$$\forall x, y \in S, \quad x \sim y \iff \{x, y\} \in A.$$

Dans de nombreux cas, l'ensemble de sites est un sous-ensemble de \mathbb{Z}^d et la structure de graphe est déterminée par les boules d'une certaine norme.

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, \quad x \sim y \iff \|x - y\| \leq r.$$

Un *processus de spin* est un processus markovien à valeurs dans $E = \{0, 1\}^S$. Les éléments de E sont appelés *configurations*. Ce sont des applications de S dans $\{0, 1\}$.

$$\forall x \in S, \quad \eta(x) \in \{0, 1\}.$$

L'hypothèse essentielle est que le taux de transition d'une configuration η à une configuration ζ qui diffère de η en plus d'un site est nul. Une configuration donnée ne peut changer qu'en un site à la fois. Nous noterons η_x la configuration η changée au site x .

$$\begin{aligned} \eta_x(y) &= \eta(y) && \text{si } y \neq x, \\ \eta_x(x) &= 1 - \eta(x). \end{aligned}$$

On note $c(x, \eta)$ le taux de transition de η vers η_x (taux avec lequel la configuration change au point x). Ce taux de transition peut dépendre a priori

de toute la configuration. Dans la plupart des modèles courants, il ne dépend en fait que des valeurs de la configuration η sur x et ses voisins. Nous commençons par quelques exemples de base.

Processus de contact

Le processus de contact est un modèle de propagation d'épidémie. Si η est une configuration, $\eta(x) = 1$ signifie que le site x est infecté, $\eta(x) = 0$ signifie qu'il est sain. Les taux de changement $c(x, \eta)$ sont définis comme suit.

- Si $\eta(x) = 1$ alors $c(x, \eta) = 1$
(les sites guérissent avec un taux constant).
- Si $\eta(x) = 0$ alors $c(x, \eta) = \lambda \sum_{y \sim x} \eta(y)$
(les sites s'infectent avec un taux proportionnel au nombre de voisins infectés).

Si le coefficient de proportionnalité λ reste en deçà d'une certaine valeur critique, la guérison est certaine. Au delà de cette valeur critique, l'épidémie s'étend et peut perdurer (figure 4).

Modèle d'élection

Les sites sont interprétés comme des électeurs, 0 et 1 sont les deux opinions possibles. Les arêtes du graphe traduisent les influences entre électeurs. Les taux de changement $c(x, \eta)$ sont définis par :

- Si $\eta(x) = 1$ alors $c(x, \eta) = \sum_{y \sim x} 1 - \eta(y)$.
- Si $\eta(x) = 0$ alors $c(x, \eta) = \sum_{y \sim x} \eta(y)$.

Le taux avec lequel chaque électeur change d'opinion est égal au nombre de ses voisins qui pensent différemment.

Processus des philosophes

Le processus des philosophes est un modèle de partage de ressources. Les sites sont des philosophes qui ne savent faire que deux choses : penser ($\eta(x) = 0$) ou manger ($\eta(x) = 1$). Mais pour manger, ils ont besoin de ressources (les couverts) qu'ils partagent avec leurs voisins sur le graphe. De sorte qu'un philosophe ne peut se mettre à manger que si tous ses voisins sont en train de penser. Les taux de changement $c(x, \eta)$ sont les suivants.

- Si $\eta(x) = 1$ alors $c(x, \eta) = 1$
(les philosophes se mettent à penser avec un taux constant).
- Si $\eta(x) = 0$ alors $c(x, \eta) = \lambda$ si $\forall y \sim x, \eta(y) = 0$, $c(x, \eta) = 0$ sinon.

Processus de Ising

Ce modèle rend compte de l'évolution d'un ensemble d'atomes (les sites) dont les spins peuvent prendre deux valeurs. L'évolution rend compte de l'attraction entre atomes de même nature : un atome entouré d'atomes de spins différents aura tendance à s'aligner sur les valeurs de ses voisins.

Nous supposons qu'une fonction d'énergie f est définie sur l'ensemble des configurations. La mesure de Gibbs associée à f à température T est la suivante.

$$p_\eta^T = \frac{1}{Z(T)} \exp\left(-\frac{1}{T}f(\eta)\right), \quad \forall \eta \in E.$$

On appelle processus de Ising relatif à la fonction d'énergie f tout processus de spin qui admet la mesure de Gibbs comme mesure réversible. Les taux de changement $c(x, \eta)$ doivent vérifier la condition de réversibilité suivante.

$$c(x, \eta) \exp\left(-\frac{1}{T}f(\eta)\right) = c(x, \eta_x) \exp\left(-\frac{1}{T}f(\eta_x)\right).$$

Cette équation laisse beaucoup de latitude quant au choix des taux. Voici trois exemples.

1. Dynamique symétrique

$$c(x, \eta) = \exp\left(-\frac{1}{2T}(f(\eta_x) - f(\eta))\right).$$

2. Dynamique de Glauber

$$c(x, \eta) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{T}f(\eta_x)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{T}f(\eta)\right) + \exp\left(-\frac{1}{T}f(\eta_x)\right)}.$$

3. Dynamique de Metropolis

$$\begin{aligned} c(x, \eta) &= 1 && \text{si } f(\eta_x) \leq f(\eta), \\ &= \exp\left(-\frac{1}{T}(f(\eta_x) - f(\eta))\right) && \text{sinon.} \end{aligned}$$

La simulation d'un processus de spin se fait par la méthode de la chaîne harmonisée. Le nombre de valeurs possibles pour les taux de changement $c(x, \eta)$ est fini. Notons ν le taux maximal de changement d'une configuration en un point.

$$\nu = \max\{c(x, \eta) ; x \in S, \eta \in E\}.$$

L'horloge interne du processus est $N\nu$. Pour la simulation de la chaîne harmonisée, on doit décider de modifier la configuration courante η au site x avec probabilité $c(x, \eta)/(N\nu)$. Cette décision sera naturellement décomposée en deux étapes.

```

t ← 0
Initialiser η
Répéter
    choisir x ∈ S avec probabilité 1/N
    Si (Random < c(x, η)/ν) alors η(x) ← 1 - η(x)

```

```

finSi
   $t \leftarrow t + 1$ 
Jusqu'à (arrêt de la simulation)
 $t \leftarrow t/(N\nu)$ 

```

Pour optimiser l'algorithme, on pourra coder la configuration courante comme un tableau de booléens, et les différentes valeurs des probabilités $c(x, \eta)/\nu$ seront précalculées en dehors de la boucle principale.

Exemple : Processus de contact.

Notons r le degré maximal d'un sommet du graphe (S, A) . Le taux maximal de changement d'une configuration en un site est $\nu = \max\{1, r\lambda\}$. L'algorithme est le suivant.

```

 $t \leftarrow 0$ 
Initialiser  $\eta$ 
Répéter
  choisir  $x \in S$  avec probabilité  $1/N$ 
  Si ( $\eta(x) = 1$ )
    alors
      Si (Random  $< 1/\nu$ ) alors  $\eta(x) \leftarrow 0$ 
      finSi
    sinon
       $k \leftarrow \sum_{y \sim x} \eta(y)$ 
      Si (Random  $< (k\lambda)/\nu$ ) alors  $\eta(x) \leftarrow 1$ 
      finSi
  finSi
   $t \leftarrow t + 1$ 
Jusqu'à (arrêt de la simulation)
 $t \leftarrow t/(N\nu)$ 

```

3 Traitement mathématique

3.1 Propriété de Markov

Les propriétés que nous étudions ici sont les analogues de la propriété de Markov et de l'homogénéité en temps qui définissent habituellement les chaînes de Markov. Comme dans le cas discret, ces propriétés conduisent à une caractérisation simple de la loi du processus.

Définition 3.1 Soit $\{Z_t, t \geq 0\}$ un processus stochastique. On dit qu'il possède la propriété de Markov si pour tout $k > 0$, pour toute suite d'instants $0 < t_1 < \dots < t_k < t$ et pour tout k -uplet d'états $i_1, \dots, i_k \in E$, la loi

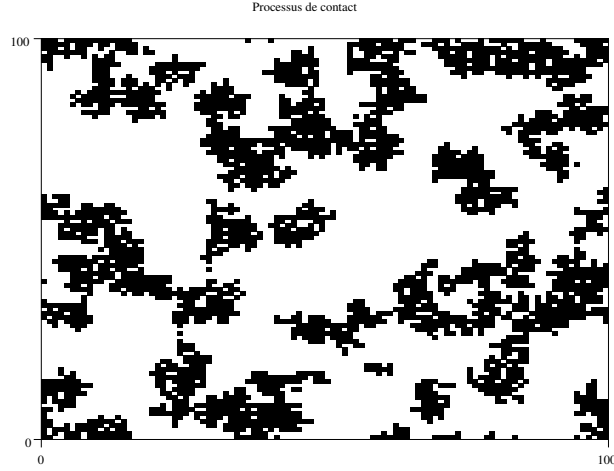


FIGURE 4 – Simulation d'un processus de contact sur un carré de 100×100 , 100000 itérations. Les sites infectés apparaissent en noir. Le taux de contagion est $\lambda = 2$: l'épidémie s'étend.

conditionnelle de Z_t sachant " $Z_{t_1} = i_1, \dots, Z_{t_k} = i_k$ " est égale à la loi conditionnelle de Z_t sachant " $Z_{t_k} = i_k$ ".

En d'autres termes, si on souhaite prédire l'état de Z_t connaissant l'évolution du processus jusqu'à l'instant t_k , on peut oublier le passé, seule l'information la plus récente est à conserver.

Définition 3.2 Soit $\{Z_t, t \geq 0\}$ un processus stochastique. On dit qu'il est homogène en temps si pour tout $s, t > 0$ et pour tout état i , la loi conditionnelle de Z_{s+t} sachant " $Z_s = i$ " est égale à la loi conditionnelle de Z_t sachant " $Z_0 = i$ ".

Autrement dit, les prédictions que l'on peut faire pour un horizon fixé ne dépendent que de l'amplitude de l'intervalle, et pas de l'instant de prédiction.

La raison pour laquelle nous n'avons pas utilisé ces propriétés pour définir les processus de Markov est double. D'une part l'approche choisie est plus concrète et guidée par la simulation. D'autre part il y a parmi les processus vérifiant la propriété de Markov, même sur un ensemble dénombrable, certains comportements pathologiques, que l'approche choisie nous permet d'écarter par hypothèse. Nous supposons donc que $\{Z_t, t \geq 0\}$ est un processus harmonisable. En d'autres termes, il existe une chaîne de Markov (X_n) de matrice de transition P et un processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ d'intensité

λ , indépendants, tels que pour tout $t \geq 0$:

$$Z_t = X_{N_t} .$$

Le processus $\{Z_t, t \geq 0\}$ est un processus markovien de saut, de générateur $\Lambda = \lambda(P - I)$.

Théorème 3.3 *Le processus $\{Z_t, t \geq 0\}$ possède la propriété de Markov et est homogène en temps.*

Démonstration : Nous utilisons bien sûr la propriété de Markov et l'homogénéité de la chaîne et du processus de Poisson. Commençons par fixer une suite d'instants $0 < t_1 < \dots < t_k < t$, et une suite d'états $i_1, \dots, i_k, i \in E$. Nous allons montrer que :

$$\mathbb{P}[Z_t = i \mid Z_{t_1} = i_1, \dots, Z_{t_k} = i_k] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[X_n = i \mid X_0 = i_k] \mathbb{P}[N_{t-t_k} = n] ,$$

ce qui entraîne à la fois la propriété de Markov et l'homogénéité. Pour cela, on commence par conditionner sur la valeur de $N_t - N_{t_k}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z_t = i \mid Z_{t_1} = i_1, \dots, Z_{t_k} = i_k] \\ = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[Z_t = i \mid Z_{t_1} = i_1, \dots, Z_{t_k} = i_k \text{ et } N_t - N_{t_k} = n] \\ \mathbb{P}[N_t - N_{t_k} = n \mid Z_{t_1} = i_1, \dots, Z_{t_k} = i_k] \end{aligned}$$

Dans le membre de droite, la seconde probabilité conditionnelle est en fait $\mathbb{P}[N_t - N_{t_k} = n]$, du fait de l'hypothèse d'indépendance entre le processus de Poisson et la chaîne de Markov, et de la propriété d'accroissements indépendants du processus de Poisson. Par homogénéité, on a $\mathbb{P}[N_t - N_{t_k} = n] = \mathbb{P}[N_{t-t_k} = n]$. Il reste donc à montrer :

$$\mathbb{P}[Z_t = i \mid Z_{t_1} = i_1, \dots, Z_{t_k} = i_k \text{ et } N_t - N_{t_k} = n] = \mathbb{P}[X_n = i \mid X_0 = i_k] .$$

Pour cela, on commence par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z_t = i \mid Z_{t_1} = i_1, \dots, Z_{t_k} = i_k \text{ et } N_t - N_{t_k} = n] \\ = \mathbb{P}[X_{n+N_{t_k}} = i \mid Z_{t_1} = i_1, \dots, Z_{t_k} = i_k] , \end{aligned}$$

en utilisant encore l'indépendance de la chaîne et du processus de Poisson. Il reste ensuite à conditionner sur les valeurs possibles du k -uplet $(N_{t_1}, \dots, N_{t_k})$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}[X_{n+N_{t_k}} = i \mid Z_{t_1} = i_1, \dots, Z_{t_k} = i_k] \\
&= \sum_{n_1, \dots, n_k} \mathbb{P}[X_{n+n_k} = i \mid X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_k} = i_k] \times \\
&\quad \mathbb{P}[(N_{t_1}, \dots, N_{t_k}) = (n_1, \dots, n_k) \mid X_{N_{t_1}} = i_1, \dots, X_{N_{t_k}} = i_k] \\
&= \mathbb{P}[X_n = i \mid X_0 = i_k] \times \\
&\quad \sum_{n_1, \dots, n_k} \mathbb{P}[(N_{t_1}, \dots, N_{t_k}) = (n_1, \dots, n_k) \mid X_{N_{t_1}} = i_1, \dots, X_{N_{t_k}} = i_k] \\
&= \mathbb{P}[X_n = i \mid X_0 = i_k] .
\end{aligned}$$

□

3.2 Probabilités de transition

Comme pour les chaînes à temps discret, la propriété de Markov et l'homogénéité en temps simplifient notablement la caractérisation de la loi d'un processus de Markov. Pour tout $t \geq 0$, et pour tout $i, j \in E$, nous noterons $r_{ij}(t)$ la probabilité de transition :

$$r_{ij}(t) = \mathbb{P}[Z_{s+t} = j \mid Z_s = i] .$$

La donnée des $r_{ij}(t)$ et de la loi de Z_0 suffit à caractériser la loi du processus.

Proposition 3.4 *Pour tout k , pour toute suite d'instants $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$, et pour toute suite d'états i_0, i_1, \dots, i_k , on a :*

$$\mathbb{P}[Z_0 = i_0 \text{ et } Z_{t_1} = i_1 \text{ et } \dots \text{ et } Z_{t_k} = i_k] = \mathbb{P}[Z_0 = i_0] \prod_{l=1}^k r_{i_{l-1}i_l}(t_l - t_{l-1}) .$$

Démonstration : On utilise la propriété de Markov et l'homogénéité pour montrer :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}[Z_{t_{k+1}} = i_{k+1} \mid Z_{t_0} = i_0 \text{ et } \dots \text{ et } Z_{t_k} = i_k] \\
&= \mathbb{P}[Z_{t_{k+1}} = i_{k+1} \mid Z_{t_k} = i_k] \\
&= r_{i_k i_{k+1}}(t_{k+1} - t_k) .
\end{aligned}$$

On conclut alors, par récurrence sur k . □

Pour tout $t \geq 0$, notons $R(t) = (r_{ij}(t))$ la matrice des probabilités de transition sur un intervalle de longueur t . Elle s'exprime simplement à l'aide du générateur.

Théorème 3.5 Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$R(t) = \exp(t\Lambda) .$$

Démonstration : Nous commençons par rappeler la définition et les principales propriétés de l'exponentielle de matrice. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice indicée par E , fini ou dénombrable. Définissons sa norme par :

$$\|A\| = \sup_{i \in E} \sum_{j \in E} |a_{ij}| .$$

L'ensemble des matrices A telles que $\|A\|$ est finie est un espace vectoriel normé complet, isomorphe à $L_c(\ell_\infty, \ell_\infty)$, qui est l'espace des applications linéaires continues de l'ensemble des suites bornées indicées par E dans lui-même. De plus $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, au sens où $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. Pour toute matrice A de norme finie, la série :

$$\exp(A) = I + A + \cdots + \frac{1}{n!} A^n + \cdots$$

est normalement convergente, donc convergente. L'exponentielle de matrice a des propriétés analogues à l'exponentielle réelle. En particulier, si A et B sont deux matrices qui commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Aussi,

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(tA) .$$

Dans le cas d'un générateur Λ ,

$$\|\Lambda\| = 2 \sup_{i \in E} \lambda_{i\bullet} .$$

L'hypothèse $\lambda_{i\bullet} \leq \lambda$, qui permet de définir le processus comme une chaîne temporisée par un processus de Poisson, assure aussi que $\|\Lambda\|$ est finie. Reprenons l'écriture du processus à l'aide d'une chaîne de Markov et d'un processus de Poisson :

$$Z_t = X_{N_t} .$$

Pour calculer $r_{ij}(t) = \mathbb{P}[Z_t = j \mid Z_0 = i]$, on commence par conditionner sur la valeur de N_t :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z_t = j \mid Z_0 = i] &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[Z_t = j \mid Z_0 = i \text{ et } N_t = n] \mathbb{P}[N_t = n \mid Z_0 = i] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[X_n = j \mid X_0 = i] \mathbb{P}[N_t = n] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} p_{ij}^{(n)} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} , \end{aligned}$$

en notant $p_{ij}^{(n)}$ les probabilités de transition en n pas de la chaîne (X_n) . Leur matrice est P^n . On peut donc écrire :

$$R(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} .$$

Or la matrice de transition de la chaîne harmonisée et le générateur du processus sont liés par $P = I + \frac{1}{\lambda} \Lambda$. On a donc :

$$\begin{aligned} R(t) &= e^{-\lambda t} \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n n! (\lambda I + \Lambda)^n \\ &= e^{-\lambda t} \exp(t(\lambda I + \Lambda)) \\ &= \exp(t\Lambda) , \end{aligned}$$

en utilisant la définition et les propriétés de l'exponentielle. \square

Exemple 1 : Automate binaire.

Reprenons le générateur sur $\{0, 1\}$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} .$$

En diagonalisant Λ , on obtient l'expression suivante :

$$R(t) = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} + \frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda \\ -\mu & \mu \end{pmatrix} .$$

Exemple 2 : Système à deux composants.

Nous reprenons ici le système réparable donné en exemple en fin du paragraphe 2.5. Considérons le cas particulier $\lambda = \mu = \nu = 1$ et $c = 1/2$. Le générateur sur $\{0, 1, 2\}$ est le suivant :

$$\Lambda = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{array}$$

Les valeurs propres sont 0, -2 et -3, avec comme matrice de passage :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

On a donc :

$$R(t) = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} C^{-1} .$$

Pour $i = 0, 1, 2$, notons $p_i(t)$ la probabilité que i composants soient en marche à l'instant t et supposons que tous le soient à l'instant 0. Le vecteur $(p_i(t))$ est la dernière ligne de $R(t)$, soit :

$$\begin{cases} p_0(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ p_1(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} \\ p_2(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t} . \end{cases}$$

3.3 Système de Chapman-Kolmogorov

Très satisfaisante sur le plan théorique, l'expression des probabilités de transition en fonction du générateur n'a que peu d'utilité pratique. Dans les applications, ce sont les taux de transition, et donc le générateur qui sont donnés. Calculer l'exponentielle d'une matrice quand le nombre d'états dépasse quelques dizaines n'est pas possible, même avec un ordinateur. De plus c'est souvent inutile, dans la mesure où on ne souhaite pas disposer de toutes les probabilités de transition, mais seulement de la loi de Z_t , pour une initialisation (loi de Z_0) donnée. Pour calculer la loi de Z_t , on l'exprime comme solution d'un système différentiel linéaire, le *système de Chapman-Kolmogorov*.

Théorème 3.6 Soit $\{Z_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de générateur Λ sur E . Notons $p(t) = (p_i(t))_{i \in E}$ la loi de Z_t . Le vecteur $p(t)$ est solution du système suivant d'équations différentielles, dit système de Chapman-Kolmogorov.

$$\frac{d}{dt}p(t) = {}^t\Lambda p(t) . \quad (3.2)$$

Démonstration : Il suffit d'exprimer $p(t)$ à l'aide de la matrice $R(t)$ des probabilités de transition, en suivant la proposition 3.4 :

$$p(t) = {}^tR(t)p(0) = \exp({}^t\Lambda t)p(0) .$$

La dérivée de $\exp({}^t\Lambda t)$ est ${}^t\Lambda \exp({}^t\Lambda t)$, d'où le résultat. □

Dans le système (3.2), l'équation relative à l'état i est :

$$p'_i(t) = - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} p_i(t) + \sum_{j \neq i} \lambda_{ji} p_j(t) .$$

En termes concrets, le taux de variation pour la probabilité de trouver le processus dans l'état i à l'instant t est un bilan entre les transitions qui le font sortir (signe $-$) de l'état i s'il s'y trouve, et les transitions qui le ramènent (signe $+$) à l'état i s'il était ailleurs.

En pratique, les taux de transition sont les données d'un modèle. Il est bon de garder à l'esprit leur interprétation infinitésimale. Pour tout t et h positifs, on a :

$$\left(\mathbb{P}[Z_{t+h} = j \mid Z_t = i] \right)_{i,j \in E} = R(h) = \exp(h\Lambda) = I + h\Lambda + o(h) .$$

Soit, pour tout $i \in E$ et pour tout $j \neq i$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z_{t+h} = i \mid Z_t = i] &= 1 - h \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} + o(h) \\ \mathbb{P}[Z_{t+h} = j \mid Z_t = i] &= h\lambda_{ij} + o(h) . \end{aligned}$$

A partir de ces expressions, on peut retrouver les équations de Chapman-Kolmogorov de la façon suivante.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z_{t+h} = i] &= \sum_{j \in E} \mathbb{P}[Z_{t+h} = i \mid Z_t = j] \mathbb{P}[Z_t = j] \\ &= \mathbb{P}[Z_{t+h} = i \mid Z_t = i] \mathbb{P}[Z_t = i] + \sum_{j \neq i} \mathbb{P}[Z_{t+h} = i \mid Z_t = j] \mathbb{P}[Z_t = j] . \end{aligned}$$

Soit :

$$p_i(t+h) = (1 - h \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} + o(h)) p_i(t) + \sum_{j \neq i} (h\lambda_{ji} + o(h)) p_j(t) .$$

Ou encore, en réarrangeant les termes :

$$\frac{p_i(t+h) - p_i(t)}{h} = - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} p_i(t) + \sum_{j \neq i} \lambda_{ji} p_j(t) + \frac{o(h)}{h} .$$

Un raisonnement déjà utilisé pour le processus de Poisson (théorème 1.12) conduit à l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$p'_i(t) = - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} p_i(t) + \sum_{j \neq i} \lambda_{ji} p_j(t) .$$

Exemple : Reprenons la somme de N automates binaires indépendants du paragraphe 2.5 (figure 2). C'est le processus $\{S_t, t \geq 0\}$ sur $\{0, \dots, N\}$ dont le générateur est défini par les taux de transition suivants, pour tout $n = 0, \dots, N$.

$$\begin{cases} \lambda_{n,n+1} = (N-n)\lambda \\ \lambda_{n,n-1} = n\mu . \end{cases}$$

Dans le système de Chapman-Kolmogorov, l'équation relative à l'état n est la suivante :

$$p'_n(t) = -((N-n)\lambda + n\mu) p_n(t) + (N-n+1)\lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t) .$$

Ecrire la matrice $R(t)$ dans ce cas serait très compliqué. Par contre, pour certaines conditions initiales, le système admet une solution simple. Supposons en effet que les N composants soient en panne à l'instant 0. A l'instant t , chacun sera en fonctionnement avec probabilité :

$$p(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) ,$$

d'après l'étude déjà faite pour l'automate binaire. Mais si tous restent indépendants, le nombre de ceux qui seront en fonctionnement à l'instant t suit la loi binomiale de paramètres N et $p(t)$. On trouve donc que les fonctions $p_n(t)$ suivantes sont solution du système de Chapman-Kolmogorov.

$$p_n(t) = \binom{N}{n} p(t)^n (1 - p(t))^{N-n} .$$

3.4 Temps d'accès

Nous nous intéressons ici au temps qu'il faut pour accéder à j pour la première fois en partant de i . Supposons d'abord $j \neq i$. Considérons un processus markovien $\{Z_t, t \geq 0\}$, tel que $Z_0 = i$. Le temps d'accès T_{ij} est la variable aléatoire définie par :

$$T_{ij} > t \iff \forall s \in [0, t], Z_s \neq j .$$

Pour $j = i$ c'est le temps de premier retour que l'on considérera : partant de i , le temps de séjour en i est exponentiel de paramètre $\lambda_{i\bullet}$. A l'issue de ce séjour, le processus quitte i , et T_{ii} est le premier instant où il y retourne à nouveau. Reprenons le processus $\{Z_t, t \geq 0\}$ tel que $Z_0 = i$. Notons S le temps de séjour en i :

$$S = \inf\{t > 0, Z_t \neq i\} .$$

Le temps de premier retour T_{ii} est défini par :

$$T_{ii} > t \iff \forall s \in [S, t], Z_s \neq i .$$

Typiquement, dans les applications en fiabilité, i est un état initial de bon fonctionnement et j est un état de panne. Le temps T_{ij} est alors une durée de fonctionnement sans panne et $\mathbb{P}[T_{ij} > t]$ est appelée la *fonction de survie* du système. C'est cette fonction de survie que nous voulons calculer.

Considérons les taux de transition d'un nouveau processus markovien sur E , déduits de ceux du processus initial en annulant les taux de sortie de l'état j , sans rien modifier d'autre. Ceci revient à rendre l'état j absorbant. Désignons par $\{Y_t, t \geq 0\}$ un processus partant de $i \neq j$, dont le générateur a été modifié en rendant j absorbant, c'est-à-dire en annulant tous les taux λ_{jk} .

Le temps que met Z_t à aller en j pour la première fois a la même loi que le temps pendant lequel Y_t n'est pas encore absorbé en j . Notons $q(t) = (q_k(t))$ la loi de Y_t . Le vecteur $q(t)$ est solution du système de Chapman-Kolmogorov. Pour $k \neq j$, l'équation donnant $q'_k(t)$ est :

$$q'_k(t) = - \sum_{h \neq k} \lambda_{kh} q_k(t) + \sum_{h \neq j, k} \lambda_{hk} q_h(t) .$$

Supposons résolu ce système, avec pour condition initiale $q_i(0) = 1$. Alors,

$$\mathbb{P}[T_{ij} > t] = \sum_{k \neq j} q_k(t) .$$

Exemple : Reprenons le système à deux composants, de générateur :

$$\Lambda = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{array}$$

On souhaite calculer sa fonction de survie, ou encore la loi du temps de première atteinte de l'état 0 à partir de l'état 2. Pour cela, il suffit d'annuler le taux de réparation à partir de la panne complète ($\nu = 0$). Le nouveau générateur est :

$$M = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{array}$$

On est donc amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} q'_1(t) = -2q_1(t) + q_2(t) \\ q'_2(t) = q_1(t) - 2q_2(t) . \end{cases}$$

Pour $q_2(0) = 1$, on trouve la solution suivante :

$$\begin{cases} q_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \\ q_2(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \end{cases}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}[T_{20} > t] = q_1(t) + q_2(t) = e^{-t} .$$

La durée de fonctionnement du système suit la loi exponentielle de paramètre 1, comme celles des deux composants pris séparément. Il est donc inutile de les coupler dans ces conditions.

Dans le cas général, la fonction $\mathbb{P}[T_{ij} > t]$ est toujours décroissante, mais il se peut qu'elle ne tende pas vers 0 à l'infini. Notons :

$$f_{ij} = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[T_{ij} > t] .$$

C'est la probabilité d'accéder de i à j en un temps fini. Si on écrit le processus comme une chaîne de Markov temporisée par un processus de Poisson, alors les probabilités d'accès f_{ij} sont les mêmes pour la chaîne harmonisée et pour le processus. La classification des états est la même, et nous ne la reprendrons pas. Dans le cas où le temps d'accès de i à j est fini avec probabilité 1 ($f_{ij} = 1$), on peut chercher à calculer le temps moyen d'accès $\mathbb{E}[T_{ij}]$. Dans l'interprétation fiabiliste, $\mathbb{E}[T_{ij}]$ est le temps moyen de bon fonctionnement ou MTTF (mean time to failure), une donnée essentielle du système. Si on a déjà calculé la fonction de survie $\mathbb{P}[T_{ij} > t]$, il suffit de l'intégrer :

$$\mathbb{E}[T_{ij}] = \int_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}[T_{ij} > t] dt .$$

Sinon, il est facile de calculer le MTTF en résolvant un système linéaire.

Proposition 3.7 *Les temps moyens d'accès $\mathbb{E}[T_{ij}]$ sont solution du système linéaire suivant. Pour tout i :*

$$\mathbb{E}[T_{ij}] = \frac{1}{\lambda_{i\bullet}} + \sum_{k \neq i,j} \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{i\bullet}} \mathbb{E}[T_{kj}] .$$

L'équation ci-dessus se lit ainsi : pour aller de i à j , il faut d'abord rester en i un temps exponentiel de paramètre $\lambda_{i\bullet} = \sum \lambda_{ij}$, d'espérance $1/\lambda_{i\bullet}$. Ensuite, il faut sauter soit vers j , soit vers $k \neq j$, avec probabilité $\lambda_{ik}/\lambda_{i\bullet}$. Il faut alors atteindre j à partir de k , en un temps moyen $\mathbb{E}[T_{kj}]$.

Démonstration : Ecrivons le processus comme un chaîne temporisée par un processus de Poisson. Soit $P = I + \frac{1}{\lambda} \Lambda$ la matrice de transition de la chaîne. Pour celle-ci, le nombre moyen de pas nécessaires pour aller de i à j est e_{ij} , solution du système :

$$e_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} e_{kj} .$$

Chacun de ces pas correspond pour le processus à un intervalle de temps exponentiel, indépendant de la chaîne et des autres durées. On a donc $\mathbb{E}[T_{ij}] = e_{ij}/\lambda$, soit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_{ij}] &= \frac{1}{\lambda} + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mathbb{E}[T_{kj}] \\ &= \frac{1}{\lambda} + \left(1 - \frac{\lambda_{i\bullet}}{\lambda}\right) \mathbb{E}[T_{ij}] + \sum_{k \neq i,j} \frac{\lambda_{ik}}{\lambda} \mathbb{E}[T_{kj}] , \end{aligned}$$

d'où on déduit immédiatement le résultat. □

Exemple : Reprenons encore une fois le système à deux composants, de générateur :

$$\Lambda = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -\nu & 0 & \nu \\ 1 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda \\ 2 & 2\mu(1-c) & 2\mu c & -2\mu \end{array}$$

Le MTTF du système est le temps moyen d'atteinte de l'état 0 à partir de l'état 2. On le calcule par le système :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[T_{20}] = \frac{1}{2\mu} + c\mathbb{E}[T_{10}] \\ \mathbb{E}[T_{10}] = \frac{1}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\mathbb{E}[T_{20}] \end{cases}.$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}[T_{20}] = \frac{\lambda + \mu + 2\mu c}{2\mu(\mu + (1-c)\lambda)}.$$

Le couplage des deux composants n'est efficace que si le MTTF du système est supérieur au MTTF de chacun pris séparément, à savoir $1/\lambda$. On vérifie que c'est le cas si et seulement si $c > 1/2$, ce qui est assez intuitif.

3.5 Comportement asymptotique

La description du comportement asymptotique sera écourtée par rapport au cas des chaînes, auquel on se ramènera grâce à la notion de chaîne harmonisée. On considère un processus $\{Z_t, t \geq 0\}$ de générateur Λ sur un ensemble d'états E fini. Fixons $\lambda > \max \lambda_{i\bullet}$. Il existe une chaîne de Markov (X_n) de matrice de transition $P = I + \frac{1}{\lambda}\Lambda$ et un processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ d'intensité λ , indépendants, tels que pour tout $t \geq 0$:

$$Z_t = X_{N_t}.$$

La classification des états est la même pour le processus $\{Z_t, t \geq 0\}$ et pour la chaîne (X_n) . Deux états communiquent si on peut atteindre l'un à partir de l'autre par des transitions de taux non nuls. On regroupe les états qui communiquent deux à deux en *classes irréductibles*. Si tous les états communiquent deux à deux, le processus lui-même est dit irréductible. Si deux états communiquent, ils sont de même nature, transients ou récurrents positifs. Notons que les p_{ii} sont strictement positifs, et donc aucun état ne peut être périodique. La notion de périodicité n'a pas de sens en temps continu, ce qui simplifie d'autant la discussion. Les classes irréductibles récurrentes sont celles dont on ne sort pas, les autres sont transientes.

Définition 3.8 On appelle mesure stationnaire d'un processus markovien de générateur Λ toute mesure de probabilité v sur E vérifiant ${}^t\Lambda v = 0$.

Les mesures stationnaires sont les mêmes pour le processus et la chaîne harmonisée. En effet :

$${}^t\Lambda v = 0 \iff \left(I + \frac{1}{\lambda} {}^t\Lambda\right) v = v.$$

L'interprétation est la même. Si ${}^t\Lambda v = 0$, alors $\exp({}^t\Lambda t) v = v$. Si la loi de Z_0 est v , alors pour tout $t > 0$, la loi de Z_t reste égale à v .

Comme pour les chaînes, on se ramène au cas irréductible.

Théorème 3.9 *Soit $\{Z_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de saut, irréductible, de générateur Λ sur un ensemble fini E . Il existe une unique mesure stationnaire $\pi = (\pi_i)$, $i \in E$. Elle possède les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $i \in E$, π_i est strictement positif.*
2. *Pour tout $i, j \in E$, $r_{ij}(t)$ converge vers π_j quand t tend vers l'infini.*
3. *Quelle que soit la loi de Z_0 , la loi de Z_t converge vers π quand t tend vers l'infini.*
4. *Pour toute fonction f de E dans \mathbb{R} :*

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T f(Z_t) dt \longrightarrow \sum_{i \in E} f(i) \pi_i, \quad p.s.$$

Interprétations : Ce sont les mêmes que pour le théorème analogue sur les chaînes de Markov. Nous rappelons les points principaux.

Le point 2 peut se traduire comme suit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[Z_{s+t} = j \mid Z_s = i] = \pi_j.$$

Les comportements du processus en deux instants éloignés l'un de l'autre sont à peu près indépendants. Quelle que soit l'information disponible sur le passé, la meilleure prédiction que l'on puisse faire à horizon lointain est la mesure stationnaire.

Le point 3 est une conséquence immédiate de 2. Nous montrerons en fait que la convergence en loi vers la mesure stationnaire se fait à vitesse exponentielle. Concrètement, cela signifie que la mesure stationnaire, qui en théorie n'est qu'un comportement à l'infini, peut être atteinte en pratique dans les simulations au bout d'un nombre d'itérations raisonnable. Malheureusement cette vitesse de convergence dépend également de la taille de l'espace d'états et de la vitesse à laquelle le processus peut le parcourir. Il peut se faire, sur des espaces d'états très gros, que la mesure stationnaire ne puisse jamais être observée à l'échelle de temps des simulations.

Dans 4, il faut comprendre la fonction f comme un coût associé aux visites dans les différents états. En fiabilité par exemple, la valeur de f sur un état de bon fonctionnement serait positive (bénéfice), elle serait négative sur un état

de panne (coût de réparation). Le membre de gauche $\frac{1}{T} \int f(Z_t) dt$ est le coût moyen observé sur une période de temps d'amplitude T . Le membre de droite est l'espérance du coût d'une étape en régime stationnaire. En pratique, si l'espace d'états est très grand, il arrive que l'on ne puisse pas calculer la mesure stationnaire π . On peut néanmoins calculer une valeur approchée du coût moyen en régime stationnaire en effectuant la moyenne des coûts observés sur une seule trajectoire simulée. Dans le cas particulier où f est la fonction indicatrice de l'état i , le membre de gauche est la proportion du temps que la chaîne a passé dans l'état i entre 0 et T . Le point 4 affirme que sur une longue période de temps, cette proportion est la probabilité stationnaire π_i .

Démonstration : La chaîne harmonisée est irréductible et apériodique. Ceci entraîne l'unicité de la mesure stationnaire, qui est de plus strictement positive. Si α est valeur propre de Λ , alors $1 + \alpha/\lambda$ est valeur propre de P et réciproquement. On en déduit que 0 est valeur propre simple de Λ , et que toute autre valeur propre est de partie réelle strictement négative. Écrivons Λ sous la forme :

$$\Lambda = C \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & B & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} C^{-1},$$

où la matrice de passage C a pour première colonne ${}^t(1, \dots, 1)$. On a donc :

$$\exp(\Lambda t) = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \exp(Bt) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Si $\alpha \neq 0$ est valeur propre de B , alors $e^{\alpha t}$ est valeur propre de $\exp(Bt)$. Or $|e^{\alpha t}|$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini, puisque la partie réelle de α est négative. On en déduit que $R(t) = \exp(\Lambda t)$ converge à vitesse exponentielle vers la matrice :

$$L = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} C^{-1}.$$

On montre ensuite que toutes les lignes de cette matrice L sont égales à la mesure stationnaire.

Nous admettrons le point 4. □

Nous n'avons considéré jusqu'ici que des espace d'états finis. Dans le cas infini dénombrable, même si tous les états communiquent, il peut se faire qu'ils soient transients (si $f_{ii} < 1$ ou récurrents nuls (si $f_{ii} < 1$ et $e_{ii} = \infty$)).

Nous ne reprendrons pas ici la classification des états d'une chaîne de Markov. Pour illustrer les différents types de classes, nous allons donner un exemple rassemblant les différents types de classes.

Exemple : Considérons le générateur sur $E = \{1, \dots, 9\}$ suivant (le diagramme de transition est celui de la figure 5).

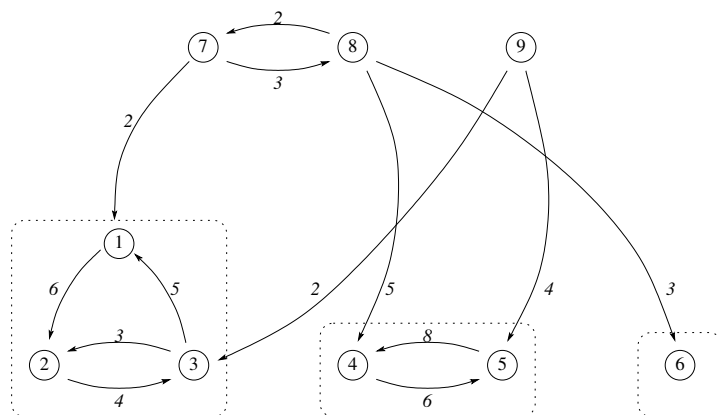
$$\Lambda = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 3 & 2 & -10 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}$$


FIGURE 5 – Diagramme de transition d'un processus markovien de saut. Les classes récurrentes sont entourées en pointillés.

La matrice de transition de la chaîne incluse est :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---------------|---------------|---------------|----------------|---------------|----------------|----------------|---------------|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | $\frac{2}{5}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{3}{5}$ | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | $\frac{5}{10}$ | 0 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | $\frac{2}{6}$ | 0 | $\frac{4}{6}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

Pour l'horloge interne $\lambda = 10$, la matrice de transition de la chaîne harmonisée est :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 0.4 | 0.6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0.6 | 0.4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0.5 | 0.3 | 0.2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0.4 | 0.6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0.8 | 0.2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0.2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0.3 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 0.3 | 0.2 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0.2 | 0 | 0.4 | 0 | 0 | 0 | 0.4 |

Il y a deux classes transientes, $\{7, 8\}$ et $\{9\}$, et trois classes récurrentes :

$$C_1 = \{1, 2, 3\}, \quad C_2 = \{4, 5\}, \quad C_3 = \{6\}.$$

A chaque classe récurrente est associée une mesure stationnaire qui ne charge que les éléments de cette classe. Ces trois mesures stationnaires sont les suivantes.

$$\begin{aligned} \pi_{C_1} &= {}^t(\frac{5}{23}, \frac{12}{23}, \frac{6}{23}, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \pi_{C_2} &= {}^t(0, 0, 0, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \pi_{C_3} &= {}^t(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Toute mesure stationnaire est combinaison convexe de ces trois mesures. L'ensemble des mesures stationnaires est :

$$\{\alpha_1 \pi_{C_1} + \alpha_2 \pi_{C_2} + \alpha_3 \pi_{C_3} ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0, 1] \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1\}.$$

A partir d'un état transient i , les probabilités d'accès aux états d'une même classe récurrente sont constantes. On les note f_{iC_j} (probabilité d'accéder à la

classe C_j depuis i). On trouve :

$$\begin{aligned} f_{7C_1} &= \frac{20}{44} & f_{7C_2} &= \frac{15}{44} & f_{7C_3} &= \frac{9}{44} \\ f_{8C_1} &= \frac{4}{44} & f_{8C_2} &= \frac{25}{44} & f_{8C_3} &= \frac{15}{44} \\ f_{9C_1} &= \frac{1}{3} & f_{9C_2} &= \frac{2}{3} & f_{9C_3} &= 0 . \end{aligned}$$

Soit $\{Z_t, t \geq 0\}$ un processus markovien de saut de générateur Λ . On suppose que la loi de Z_0 est : ${}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_9)$. Quand t tend vers l'infini, Z_t converge en loi vers la mesure suivante.

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{20}{44}\alpha_7 + \frac{4}{44}\alpha_8 + \frac{1}{3}\alpha_9) \pi_{C_1} + \\ &(\alpha_4 + \alpha_5 + \frac{15}{44}\alpha_7 + \frac{25}{44}\alpha_8 + \frac{2}{3}\alpha_9) \pi_{C_2} + \\ &(\alpha_6 + \frac{9}{44}\alpha_7 + \frac{15}{44}\alpha_8) \pi_{C_3} . \end{aligned}$$

Tous les renseignements qui précèdent peuvent être obtenus à partir de la chaîne harmonisée. La seule chose qui diffère pour un processus à temps continu, ce sont les durées de séjour dans les états. Ici, le temps de séjour dans l'état 9 suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(6)$. On calcule la fonction de survie de la durée de séjour dans la classe $\{7, 8\}$ en résolvant les équations correspondantes dans le système de Chapman-Kolmogorov, et en ajoutant $p_7(t)$ et $p_8(t)$. Notons s_7 et s_8 les durées moyennes de séjour dans la classe $\{7, 8\}$, à partir de 7 et de 8 respectivement. Elles sont solution du système linéaire suivant.

$$\begin{cases} s_7 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}s_8 \\ s_8 = \frac{1}{10} + \frac{2}{10}s_7 . \end{cases}$$

On trouve $s_7 = \frac{13}{44}$ et $s_8 = \frac{7}{44}$.

4 Exercices

Exercice 1

1. Soient $\{N_t, t \geq 0\}$ et $\{M_t, t \geq 0\}$ deux processus de Poisson indépendants, d'intensités respectives λ et μ . Pour tout $t \geq 0$, on pose $L_t = N_t + M_t$.
 - (a) Montrer que $\{L_t, t \geq 0\}$ est un processus à accroissements indépendants.
 - (b) Montrer que pour tout couple d'instants (s, t) , $0 \leq s \leq t$, $L_t - L_s$ suit la loi de Poisson de paramètre $(\lambda + \mu)(t - s)$.
 - (c) En déduire que $\{L_t\}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda + \mu$.
2. Soit $\{L_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ . On décide d'affecter à chacun des événements comptés par le processus $\{L_t\}$ une couleur aléatoire, noir ou marron. Ces affectations de couleurs sont indépendantes entre elles, et indépendantes du processus $\{L_t\}$. La probabilité qu'un événement soit noir est p . On note $\{N_t, t \geq 0\}$ le processus de comptage des événements noirs et $\{M_t, t \geq 0\}$ le processus de comptage des événements marron.
 - (a) Montrer que $\{N_t\}$ et $\{M_t\}$ sont des processus à accroissements indépendants.
 - (b) Montrer que pour tous s, t , $0 \leq s \leq t$, $N_t - N_s$ suit la loi de Poisson de paramètre $(\lambda p)(t - s)$.
 - (c) En déduire que $\{N_t\}$ et $\{M_t\}$ sont des processus de Poisson, d'intensités respectives λp et $\lambda(1 - p)$.
 - (d) Montrer que pour tout $t \geq 0$, les variables aléatoires N_t et M_t sont indépendantes.
3. Sur l'intervalle $[0, 10]$, simuler les instants d'un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, et ceux d'un processus de paramètre 2. Réordonner les deux suites concaténées. Répéter 1000 fois la procédure. Pour $t = 1, 2, \dots, 10$, tester l'ajustement de la distribution empirique des nombres d'instants inférieurs à t avec la loi de Poisson de paramètre $3t$.
4. Pour chacune des 1000 suites de la question précédente, et pour t allant de 0 à 10 par pas de 0.1, calculer la proportion des instants issus de la première suite. Pour les mêmes valeurs de t , calculer la proportion moyenne sur les 1000 suites et représenter graphiquement cette proportion moyenne en fonction de t .

Exercice 2 Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ . Soit T une variable aléatoire indépendante du processus $\{N_t, t \geq 0\}$, de loi exponentielle de paramètre μ . On considère la variable aléatoire N_T .

1. Quelle est la loi conditionnelle de N_T sachant " $T = t$ " ? Montrer que la loi de N_T est la loi binomiale négative $\mathcal{BN}(1, \frac{\mu}{\lambda+\mu})$ définie pour $k \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathbb{P}[N_T = k] = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k .$$

Pour $s \geq 0$, quelle est la loi de $N_{s+T} - N_s$?

2. Soit S une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} , telle que S , T , et $\{N_t, t \geq 0\}$ soient indépendants dans leur ensemble. Quelle est la loi de $N_{S+T} - N_S$?
3. Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, exponentielle de paramètre μ . On suppose que la suite (T_n) et le processus $\{N_t, t \geq 0\}$ sont indépendants. On note :

$$S_0 = 0 \text{ et } \forall n \geq 1, S_n = T_1 + \dots + T_n .$$

A tout entier $n \geq 1$, on associe la variable aléatoire $X_n = N_{S_n}$. Montrer que $\{X_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov et décrire ses probabilités de transition. Montrer que la loi de X_n est la loi binomiale négative $\mathcal{BN}(n, \frac{\mu}{\lambda+\mu})$.

4. Pour $\lambda = 2$ et $\mu = 1$, simuler 1000 trajectoires de la chaîne (X_n) jusqu'en $n = 10$ en utilisant la définition de la question précédente, puis 1000 autres en utilisant ses probabilités de transition. Pour tout $n = 1, 2, \dots, 10$, tester l'adéquation des deux distributions empiriques avec la loi binomiale négative $\mathcal{BN}(n, \frac{\mu}{\lambda+\mu})$.

Exercice 3 *Processus de Poisson non homogène.*

Soit $\lambda(t)$ une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , que l'on supposera continue par morceaux, et continue à droite en tout point. On note $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ la primitive de λ nulle en 0. Sa dérivée à droite en $t \geq 0$ est égale à $\lambda(t)$. On appelle *processus de Poisson non homogène d'intensité λ* , un processus $\{N_t, t \geq 0\}$ dont on suppose qu'il possède toutes les propriétés d'un processus de Poisson, sauf l'homogénéité, remplacée par :

$$\mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = 1] = \lambda(t)h + o(h) .$$

1. On note $G(z, t)$ la fonction génératrice de N_t . Montrer que $G(z, t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \lambda(t)(z - 1)G .$$

2. En déduire que N_t suit la loi de Poisson de paramètre $\Lambda(t)$.
3. Si s et t sont deux réels positifs tels que $s < t$, montrer que $N_t - N_s$ suit la loi de Poisson de paramètre $\Lambda(t) - \Lambda(s)$.

4. Soit $\{M_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène, d'intensité 1. Pour tout $t \geq 0$, on pose $N_t = M_{\Lambda(t)}$. Montrer que $\{N_t, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non homogène d'intensité λ .
5. En déduire un algorithme de simulation pour un processus de Poisson non homogène d'intensité λ .
6. Dans un salon de coiffure, les clients arrivent avec un taux de 3 par heure entre 14h. et 16h., puis le taux moyen augmente linéairement de 3 à 5 entre 16h et 17h, reste au niveau 5 de 17h à 18 h., puis retombe à 2 après 18 heures. Quelles hypothèses doit on faire pour modéliser les arrivées de clients par un processus de Poisson non homogène ? Calculer l'espérance du nombre d'arrivées entre 14h30 et 18h30 ainsi que la probabilité qu'il y ait plus de 10 clients dans cette période.
7. Simuler 1000 trajectoires du processus de Poisson non homogène dont l'intensité λ est celle de la question précédente. Calculer la moyenne empirique des nombres de clients arrivés au temps t , pour t allant de 14h à 19h par pas de 5 minutes. Représenter graphiquement ces moyennes empiriques en fonction de t , et superposer sur le même graphique le graphe de $\Lambda(t)$. Vérifier expérimentalement les résultats de la question précédente.

Exercice 4 Soient $\{N_t, t \geq 0\}$ et $\{M_t, t \geq 0\}$ deux processus de Poisson indépendants, d'intensités respectives λ et μ . Pour tout $t \geq 0$, on pose $Z_t = N_t - M_t$.

1. Montrer que $\{N_t, t \geq 0\}$ est un processus de Markov. Décrire le générateur et la matrice des probabilités de transitions.
2. Montrer que $\{Z_t, t \geq 0\}$ est un processus markovien et décrire son générateur. Ecrire le système de Chapman-Kolmogorov.
3. Décrire les probabilités de transition de la chaîne incluse et de la chaîne harmonisée.

Exercice 5 Soient (X_1, \dots, X_n) n variables aléatoires indépendantes et de même loi, exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On note $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ les statistiques d'ordre du n -uplet (X_1, \dots, X_n) , définies par :

$$\{(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})\} = \{X_1, \dots, X_n\} \text{ et } X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}.$$

1. Montrer que les variables aléatoires $X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)}$ sont indépendantes, de lois respectives $\mathcal{E}(n\lambda), \mathcal{E}((n-1)\lambda), \dots, \mathcal{E}(\lambda)$.
2. Pour tout $t \geq 0$, on définit la variable aléatoire Z_t , à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ par :

$$Z_t = k \iff X_{(k)} \leq t < X_{(k+1)}.$$

(Par convention $X_{(0)} = 0$ et $X_{(n+1)} = +\infty$.) Montrer que $\{Z_t, t \geq 0\}$ est un processus de Markov et déterminer son générateur.

3. On note :

$$p_k(t) = P[Z_t = k] \text{ et } G(z, t) = \sum_{k=0}^n p_k(t) z^k.$$

Ecrire le système des équations de Kolmogorov. En déduire une équation en G , $\partial G / \partial z$ et $\partial G / \partial t$.

4. Montrer que pour tout $t > 0$, $(p_k(t))$ est la loi binomiale de paramètres n et $p(t)$, où $p(t)$ est une fonction de t que l'on déterminera.
5. Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n représentent les durées de fonctionnement de n composants non réparables, placés en parallèle : le système fonctionne tant que un des composants fonctionne. A l'instant initial tous les composants fonctionnent. Quelle est la fonction de survie de ce système ? Quel est son MTTF ?
6. Soit T_n la durée de fonctionnement du système. On pose $T_n^* = \lambda T_n - \log(n)$. Montrer que la loi de T_n^* converge quand n tend vers l'infini vers la loi de Gumbel, de fonction de répartition $F(x) = e^{-e^{-x}}$.
7. Pour $\lambda = 1$ et $n = 10, 20, \dots, 100$, simuler 1000 trajectoires du processus $\{Z_t\}$. Pour chaque trajectoire calculer la valeur prise par la variable aléatoire T_n^* . Superposer sur un même graphique la fonction de répartition empirique de ces valeurs et la fonction de répartition de la loi de Gumbel. Tester l'ajustement des deux distributions.

Exercice 6 On considère un processus markovien $\{Z_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans $E = \{1, 2, 3\}$ dont les taux de transition sont :

$$\lambda_{1,2} = 1, \lambda_{1,3} = 0, \lambda_{2,1} = 0, \lambda_{2,3} = 1, \lambda_{3,1} = 1, \lambda_{3,2} = 0.$$

1. Représenter son graphe de transitions élémentaires et écrire son générateur Λ .
2. Ecrire la matrice de transition de la chaîne incluse.
3. Ecrire le système de Chapman-Kolmogorov et déterminer la mesure stationnaire.
4. Calculer $\exp(\Lambda t)$ et retrouver le résultat précédent.
5. Simuler 1000 trajectoires du processus $\{Z_t\}$, partant de $Z_0 = 1$, jusqu'au temps $t = 10$. Pour $t = 1, 2, \dots, 10$, tester l'adéquation de la distribution empirique des 1000 trajectoires au temps t avec la distribution théorique, calculée à la question précédente.
6. Simuler une trajectoire partant de $Z_0 = 1$ jusqu'au temps $t = 10^6$ et calculer la proportion empirique du temps passé dans chacun des états. Tester l'adéquation de cette distribution empirique avec la mesure stationnaire.

Exercice 7 On considère un processus markovien $\{Z_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans $E = \{1, 2, 3\}$ dont les taux de transition sont :

$$\lambda_{1,2} = 1, \lambda_{1,3} = 2, \lambda_{2,1} = 1, \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}, \lambda_{3,1} = \frac{1}{3}, \lambda_{3,2} = \frac{2}{3}.$$

1. Représenter son graphe de transitions élémentaires et écrire son générateur Λ .
2. Ecrire la matrice de transition de la chaîne incluse.
3. Ecrire le système de Chapman-Kolmogorov et déterminer la mesure stationnaire.
4. Soit p_0 un réel entre 0 et $1/3$. Supposons que la loi de Z_0 soit :

$${}^tP(0) = (p_0, 2p_0, 1 - 3p_0).$$

Montrer que pour tout $t > 0$, la loi de Z_t est :

$${}^tP(t) = (p(t), 2p(t), 1 - 3p(t)),$$

où $p(t)$ est une fonction de t que l'on déterminera.

5. Vérifier que cette loi converge vers la mesure stationnaire quand t tend vers l'infini.
6. Simuler 1000 trajectoires du processus $\{Z_t\}$, partant de $Z_0 = 1$, jusqu'au temps $t = 10$. Pour $t = 1, 2, \dots, 10$, tester l'adéquation de la distribution empirique des 1000 trajectoires au temps t avec la distribution théorique, calculée à la question 3.
7. Simuler une trajectoire partant de $Z_0 = 1$ jusqu'au temps $t = 10^6$ et calculer la proportion empirique du temps passé dans chacun des états. Tester l'adéquation de cette distribution empirique avec la mesure stationnaire.

Exercice 8 Les matrices suivantes sont des générateurs de processus markoviens sur l'ensemble $\{1, \dots, 7\}$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Pour chacune de ces matrices, notée Λ :

1. Représenter le diagramme de transitions élémentaires, classifier les états.
2. Pour $t = 1, 2, \dots, 10$, calculer numériquement $\exp(\Lambda t)$.
3. Pour $i = 1, \dots, 7$, résoudre numériquement le système des équations de Kolmogorov, avec comme condition initiale la masse de Dirac en i et retrouver le résultat de la question précédente.
4. Pour $i = 1, \dots, 7$, simuler 1000 trajectoires du processus $\{Z_t\}$ de générateur Λ , partant de $Z_0 = i$, jusqu'au temps $t = 10$. Pour $t = 1, 2, \dots, 10$, tester l'adéquation de la distribution empirique des 1000 trajectoires au temps t avec la distribution théorique, calculée numériquement aux questions précédentes.
5. Déterminer l'ensemble des mesures stationnaires. Calculer numériquement une approximation de la limite quand t tend vers l'infini de $\exp(\Lambda t)$.
6. Pour $i = 1, \dots, 7$, simuler une trajectoire partant de $Z_0 = i$ jusqu'au temps $t = 10^6$ et calculer la proportion empirique du temps passé dans chacun des états. Tester l'adéquation de cette distribution empirique avec la mesure stationnaire de l'une des classes récurrentes du processus.

Exercice 9 Sisyphe monte avec sa pierre les N marches de la grande pyramide. Le temps qu'il met à franchir chaque marche suit la loi exponentielle de paramètre λ . Malheureusement au bout d'un temps exponentiel de paramètre μ , les Dieux renvoient la pierre et Sisyphe instantanément en bas et Sisyphe recommence.

1. Soit Z_t le numéro de la marche atteinte à l'instant t . Sous quelles hypothèses peut-on considérer $\{Z_t; t \geq 0\}$ comme un processus de Markov ?
2. Pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, on note :

$$p_n(t) = P[Z_t = n] .$$

Ecrire le système des équations de Kolmogorov pour la loi $(p_n(t))$.

3. Soit T le temps que Sisyphe mettra à arriver en haut. Montrer que :

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda} \right)^N - 1 \right] .$$

Combien d'échecs en moyenne Sisyphe aura-t-il connus avant son succès ?

4. Ecrire et implémenter un algorithme de simulation du processus. L'algorithme prend en entrée les paramètres du modèle, ainsi qu'un nombre de trajectoires à simuler. Il retourne en sortie un échantillon de valeurs de T .
5. Exécuter le programme pour 1000 trajectoires, $\lambda = 10$, $\mu = 1, 2, \dots, 10$, $N = 10$. Donner une estimation de l'espérance et de la variance de T , et représenter un histogramme des valeurs de T .
6. Les Dieux, facétieux mais bons princes, conviennent qu'à chacune de leurs interventions (séparées par des temps exponentiels de paramètre μ), ils tireront au sort avec probabilité p pour décider s'ils renvoient Sisyphe en bas ou s'ils mettent fin définitivement à son calvaire en l'expédiant en haut de la pyramide. Reprendre les questions précédentes.

Exercice 10 On considère un système constitué de trois composants identiques. Le système fonctionne tant que au moins deux des trois composants fonctionnent. Au départ, les trois composants fonctionnent. Quand un des trois tombe en panne, il attend la panne de l'un des deux qui restent en fonctionnement. Dès que deux des composants sont en panne, le système s'arrête, et il est complètement réparé. La durée moyenne de fonctionnement sans panne de chaque composant est de 12h. La durée moyenne de réparation du système est de 2h. Les durées de fonctionnement sans panne et de réparation sont indépendantes et suivent des lois exponentielles.

1. On code l'état du système par des triplets de booléens dont la i -ième coordonnée indique l'état du i -ième composant : 1 s'il marche, 0 s'il est en panne. L'ensemble des états possibles a donc 5 éléments :

$$\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), stop\} .$$

Ecrire les taux de transition du processus markovien décrivant l'état du système.

2. Quelle est la loi du temps de séjour dans l'état $(1, 1, 1)$, quelle est son espérance ?
3. Déterminer la mesure stationnaire du processus, en déduire la probabilité asymptotique que le système fonctionne.
4. On décide désormais de coder l'état du système par le nombre de machines en panne. L'ensemble des états possibles est donc $\{0, 1, stop\}$. Ecrire les taux de transition de ce nouveau processus et en déduire le système de Chapman-Kolmogorov.

5. A l'instant initial les trois composants fonctionnent. Calculer le nombre moyen d'heures de fonctionnement du système avant la première réparation.
6. En rendant l'état 2 absorbant dans le système de Kolmogorov, calculer la fonction de survie du système (probabilité que la première panne survienne après l'instant t). On pourra utiliser la question 2, et chercher la probabilité qu'une seule machine soit en panne sous la forme $p_1(t) = -ae^{-3\lambda t} + ae^{-2\lambda t}$, où $\lambda = 1/12$ et a est une constante à déterminer.
7. Ecrire et implémenter un algorithme de simulation pour le processus. Utiliser ce programme pour vérifier expérimentalement les résultats des questions précédentes.

Exercice 11 Dans tout l'exercice, S est l'ensemble $\{0, \dots, N-1\}$ identifié à $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ muni de sa structure de graphe cyclique :

$$A = \{\{x, x+1 \text{ Modulo } N\}, x = 0, \dots, N-1\}.$$

On étudie le processus d'élection sur (S, A) à savoir le système de spin dont les taux de changement en un site sont égaux au nombre de voisins dans un état différent (voir 2.6). On notera $\{\eta(t); t \geq 0\}$ le processus correspondant, à valeurs dans $E = \{0, 1\}^S$.

1. *Comportement asymptotique.*
 - (a) Quel est l'ensemble des mesures invariantes ?
 - (b) Utiliser les équations de Chapman-Kolmogorov pour montrer que la fonction qui à t associe :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x \in S} \eta(t)(x)\right],$$

est constante.

- (c) Sachant que la configuration initiale est η_0 quelle est la probabilité que tous les sites soient dans l'état 1 dans la configuration finale ?
 - (d) Exprimer la limite en loi de $\eta(t)$ quand t tend vers l'infini, en fonction de la loi de η_0 .
2. *Composantes connexes.* Si $\eta \in X$ est une configuration, on appelle composante connexe de η un ensemble maximal au sens de l'inclusion, de sites voisins sur lequel η est constante. Un site à 1 entouré de deux voisins à 0 est une composante connexe de cardinal 1. Montrer que le nombre de composantes connexes de $\eta(t)$ est une fonction décroissante du temps.
3. *Cas de deux composantes connexes.* On suppose désormais que η_0 a au plus deux composantes connexes. On note Z_t le nombre de sites à 1 de $\eta(t)$:

$$Z_t = \sum_{x \in S} \eta(t)(x).$$

- (a) Montrer que $\{Z_t; t \geq 0\}$ est un processus markovien à valeurs dans $\{0, \dots, N\}$.
- (b) Représenter son diagramme de transitions élémentaires et écrire son générateur.
- (c) Pour tout $i = 0, \dots, N$, on note :

$$\alpha_i(t) = \mathbb{P}[Z_t = 0 \mid Z_0 = i] \text{ et } \beta_i(t) = \mathbb{P}[Z_t = N \mid Z_0 = i] .$$

Montrer que pour tout $i = 1, \dots, N-1$, on a :

$$\alpha'_i(t) = 2\alpha_{i-1}(t) - 4\alpha_i(t) + 2\alpha_{i+1}(t) ,$$

et

$$\beta'_i(t) = 2\beta_{i-1}(t) - 4\beta_i(t) + 2\beta_{i+1}(t) .$$

- (d) Soit T le temps d'absorption du processus :

$$T = \inf\{t \geq 0, Z_t = 0 \text{ ou } N\} .$$

Pour tout $i = 1, \dots, N$, on pose :

$$t_i = \mathbb{E}[T \mid Z_0 = i] .$$

Montrer que :

$$t_i = \int_0^{+\infty} (1 - \alpha_i(t) - \beta_i(t)) dt .$$

En déduire que les t_i sont solution de l'équation de récurrence :

$$1 = 2t_{i-1} - 4t_i + 2t_{i+1} .$$

- (e) Résoudre cette équation de récurrence (chercher la solution sous la forme $t_i = a + bi + ci^2$).
4. *Chaîne incluse.* On note (X_n) , $n \in \mathbb{N}$ la chaîne incluse du processus $\{Z_t; t \geq 0\}$.
- (a) Quelle est sa matrice de transition ?
 - (b) Pour tout $i = 0, \dots, N$, on note :

$$a_i(n) = \mathbb{P}[X_n = 0 \mid X_0 = i] \text{ et } b_i(n) = \mathbb{P}[X_n = N \mid X_0 = i] .$$

Montrer que pour tout $i = 1, \dots, N-1$, on a :

$$a_i(n+1) = \frac{1}{2}a_{i-1}(n) + \frac{1}{2}a_{i+1}(n) ,$$

et

$$b_i(n+1) = \frac{1}{2}b_{i-1}(n) + \frac{1}{2}b_{i+1}(n) .$$

- (c) Soit U le nombre de sauts de la chaîne avant absorption :

$$U = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n = 0 \text{ ou } N\}.$$

Pour tout $i = 1, \dots, N$, on pose :

$$u_i = \mathbb{E}[U \mid X_0 = i].$$

Montrer que les u_i sont solution de l'équation de récurrence :

$$u_i = \frac{1}{2}u_{i-1} + \frac{1}{2}u_{i+1} + 1.$$

- (d) Résoudre cette équation de récurrence (chercher la solution sous la forme $u_i = a + bi + ci^2$).

5. *Simulation.*

- (a) Ecrire un programme de simulation pour le processus $\{\eta(t); t \geq 0\}$. Le programme prend en entrée le nombre N de sites, ainsi que le nombre i de sites à 1 dans la configuration initiale. Il tire au hasard la configuration initiale en choisissant les i sites à 1 au hasard parmi les N , puis simule le processus par la chaîne harmonisée jusqu'à ce que tous les sites soient dans le même état. Il retourne la durée de la trajectoire ainsi que l'état commun des sites en fin d'exécution.
- (b) Utiliser ce programme pour vérifier les résultats de la question 1 et estimer le temps moyen d'absorption pour $N = 10, 20, \dots, 100$ et $i = N/2$.
- (c) Ecrire trois algorithmes de simulation pour le processus $\{Z_t; t \geq 0\}$. Le premier simule le processus $\{\eta(t)\}$ comme dans la question 5.a), en mettant dans la configuration initiale i sites consécutifs à 1, les autres à 0. Le second simule le processus $\{Z_t\}$ par la méthode de la chaîne incluse, le troisième le simule par la méthode de la chaîne harmonisée. Lequel des trois algorithmes est le plus rapide ?
- (d) Vérifier expérimentalement les résultats des questions 3 et 4 pour $N = 100, 200, \dots, 1000$, et $i = N/10, 2N/10, \dots, 9N/10$.

Exercice 12 Soit S un ensemble fini de sites, muni d'une structure de graphe non orienté d'ensemble d'arêtes A . On étudie le processus des philosophes sur (S, A) à savoir le système de spin dont les taux de changement $c(x, \eta)$ sont les suivants (voir 2.6) :

- si $\eta(x) = 1$ alors $c(x, \eta) = 1$,
- si $\eta(x) = 0$ alors $c(x, \eta) = \lambda$ si $\forall y \sim x, \eta(y) = 0$, $c(x, \eta) = 0$ sinon.

On notera $\{\eta(t); t \geq 0\}$ le processus correspondant. On note $E \subset \{0, 1\}^S$ l'ensemble des configurations η telles que :

$$\eta(x) = 1 \implies \eta(y) = 0 \forall y \sim x.$$

1. *Cas général.*

- (a) Montrer que le processus est irréductible sur E .
 (b) Montrer qu'il admet pour mesure réversible la mesure ν définie sur E par :

$$\nu(\eta) = \frac{1}{z^A(\lambda)} \lambda^{\sum \eta(x)},$$

où $z^A(\lambda)$ est le polynôme en λ :

$$z^A(\lambda) = \sum_{\eta \in E} \lambda^{\sum \eta(x)}.$$

2. *Graphe ligne.* On suppose que $S = \{1, \dots, N\}$, muni de la structure de graphe ligne :

$$A = \{ \{x, x+1\}, x = 1, \dots, N-1 \}.$$

On note dans ce cas $z_N^\ell(\lambda)$ le polynôme $z^A(\lambda)$.

- (a) Montrer que pour tout $N \geq 3$:

$$z_N^\ell(\lambda) = \lambda z_{N-2}^\ell(\lambda) + z_{N-1}^\ell(\lambda).$$

- (b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$z_N^\ell(\lambda) = A(\lambda) \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2} \right)^N + B(\lambda) \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2} \right)^N,$$

où :

$$A(\lambda) = \frac{-1 - 2\lambda + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\sqrt{1 + 4\lambda}} \quad \text{et} \quad B(\lambda) = \frac{1 + 2\lambda + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\sqrt{1 + 4\lambda}}.$$

- (c) Pour tout $x = 1, \dots, N$, on note $p_x(\lambda)$ la probabilité que le site x soit dans l'état 1 pour la mesure réversible ν . Montrer que :

$$p_1(\lambda) = p_N(\lambda) = \frac{\lambda z_{N-2}^\ell(\lambda)}{z_N^\ell(\lambda)},$$

$$p_2(\lambda) = p_{N-1}(\lambda) = \frac{\lambda z_{N-3}^\ell(\lambda)}{z_N^\ell(\lambda)},$$

et pour $x = 3, \dots, N-2$:

$$p_x(\lambda) = p_{N-x+1}(\lambda) = \frac{\lambda z_{x-2}^\ell(\lambda) z_{N-x-1}^\ell(\lambda)}{z_N^\ell(\lambda)}.$$

- (d) Programmer l'algorithme de simulation du processus par la méthode de la chaîne harmonisée. Le programme prend en entrée les valeurs de N et λ , un horizon T (suffisamment grand) ainsi qu'un nombre K de trajectoires à simuler. Il simule les K trajectoires indépendamment jusqu'au temps T . Il retourne pour chaque valeur de x entre 1 et N un intervalle de confiance pour la probabilité p_x .
 - (e) Exécuter votre programme pour $N = 5, 6, \dots, 10$, $\lambda = 0.1, 0.5, 1, 5, 10$, et vérifier expérimentalement les résultats de la question 2.c).
3. *Graphe cyclique.* L'ensemble de sites n'est pas modifié, mais on rajoute $\{1, N\}$ à l'ensemble d'arêtes. On note $z_N^c(\lambda)$ le nouveau polynôme $z^A(\lambda)$.
- (a) Montrer que pour tout $N \geq 3$:

$$z_N^c(\lambda) = \lambda z_{N-3}^\ell(\lambda) + z_{N-1}^\ell(\lambda) .$$

- (b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$z_N^c(\lambda) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2} \right)^N + \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2} \right)^N .$$

- (c) On note $q(\lambda)$ la probabilité qu'un site x (quelconque) soit dans l'état 1 pour la mesure réversible ν . Montrer que pour $N \geq 3$:

$$q(\lambda) = \frac{\lambda z_{N-3}^c(\lambda)}{z_N^c(\lambda)} .$$

- (d) Ecrire un programme de simulation analogue à celui du 2.d), qui retourne un intervalle de confiance pour la probabilité q .
- (e) Exécuter votre programme pour $N = 5, 6, \dots, 10$, $\lambda = 0.1, 0.5, 1, 5, 10$, et vérifier expérimentalement les résultats de la question 3.c).

Index

- absence de mémoire, 68
- accroissements indépendants, 70
- chaîne
 - de Markov, 80
 - harmonisée, 86, 89
 - incluse, 82, 89
- Chapmann-Kolmogorov, 77, 103, 106
- classe irréductible, 109
- classification des états, 108
- discrétisation, 75
- état absorbant, 81
- événements rares, 72
- exponentielle de matrice, 101
- fiabilité, 90
- fonction de survie, 106
- générateur, 82, 85
- homogène, 72
- horloge interne, 87
- intensité, 71
- loi
 - binomiale, 76
 - de Poisson, 72
 - exponentielle, 67, 76, 84
 - géométrique, 67, 76, 83
- mesure stationnaire, 109
- mouvement brownien, 81
- MTTF, 107
- processus
 - à accroissements indépendants, 70
 - d'élection, 96
 - de comptage, 70
 - de contact, 95, 98
 - de Ising, 96
 - de Markov, 81
 - de Poisson, 70, 71, 87
 - de Poisson composé, 80
 - de Poisson non homogène, 80, 115
 - de renouvellement, 80
 - de spin, 95
 - des philosophes, 96
 - homogène, 72
 - markovien de saut, 81
- propriété de Markov, 81, 99
- simulation
 - d'un automate binaire, 89
 - d'un processus de Poisson, 79
 - d'un processus de saut, 81, 87
 - d'un processus de spin, 97
 - de la loi exponentielle, 67
- statistiques d'ordre, 73
- système de Chapmann-Kolmogorov, 77, 103, 106
- taux
 - de sortie, 84
 - de transition, 84, 85
- temps
 - d'accès, 105
 - de premier retour, 105
 - de séjour, 81, 83