

Examen ALEA

Tout document autorisé, durée 2h

Exercice 1. On s'intéresse à une forêt composée de deux espèces d'arbres, E_1 et E_2 . Lorsqu'un arbre meurt, un nouveau grandit à sa place mais il peut être de l'une ou l'autre des deux espèces. On suppose que 1% d'arbres de l'espèce E_1 meurent chaque année alors que ce taux est de 5% pour la deuxième espèce. L'espèce E_2 est une espèce pionnière et réussit plus souvent à occuper une place laissée vacante : on suppose qu'en moyenne 75% des places vacantes sont prises par un arbre de la deuxième espèce contre seulement 25% pour un arbre de la première espèce.

1. On s'intéresse à un emplacement en particulier de la forêt. Si il est occupé par un arbre de l'espèce E_1 l'année t , quels sont les mécanismes qui peuvent aboutir au fait qu'il y a encore un arbre de l'espèce E_1 l'année $t + 1$?
2. Justifier la formule suivante :

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = E_1 | X_t = E_1) = 0,99 + 0,01 \times 0,25 = 0,9925.$$

Quelles hypothèses biologiques ont été implicitement faites lorsqu'on écrit cette formule ?

3. Expliquer comment l'occupation d'un emplacement de cette forêt peut être modélisé par une chaîne de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ à deux états E_1 et E_2 et
4. En déduire la matrice de transition P de la chaîne de Markov .
5. Tracer le graphe correspondant.
6. $\pi_1 = (0,625 \quad 0,375)$ est-elle une distribution stationnaire pour cette chaîne de Markov ?
7. $\pi_2 = (0,01 \quad 0,99)$ est-elle une distribution stationnaire pour cette chaîne de Markov ?
8. Que peut-on en déduire quant au comportement de la forêt en temps long ?

Exercice 2. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur $\{1, \dots, 7\}$ de matrice de transition Q donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe de la chaîne de Markov associée en précisant les probabilités de transitions entre les différents états.
2. Déterminer les classes d'états récurrents et transitoires.
3. La chaîne est-elle irréductible ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X_2 = 6 | X_0 = 3)$ et $\mathbb{P}(X_2 = 7 | X_0 = 1)$.

Exercice 3. **distiller2020using** propose un modèle pour analyser des données issus de pièges photographiques afin de comprendre d'analyser les activités des jaguars à Bêlize. Le but de cet exercice est de reprendre quelques éléments de leur approche.

Un seul jaguar sur la zone de suivi. Un piège photographique prend une photo dès que le capteur de mouvement est activé. On note les instants t_1, \dots, t_n de "captures" (au sens de on a pris une photo) du jaguar présent sur la zone. On propose de modéliser ces instants de captures par un processus ponctuels d'intensité μ (intensité exprimée en captures par heure).

1. Quelles sont les hypothèses biologiques sous-jacentes à ce choix de modélisation ?
2. Combien de photos de jaguars en moyenne observe-t-on si le piège photographique est déployé pendant une journée ? (Donner l'expression en fonction de μ).

3. D'un jour à l'autre, le nombre de captures est variable. Quelle est la loi du nombre de captures journalières ?
4. Proposer une modification du modèle permettant de prendre en compte le fait que l'activité diurne et l'activité nocturne du jaguar soient différentes.
5. Le jaguar est un animal territorial qui quitte rarement son territoire. L'intensité μ de captures définie précédemment correspond à un piège posé au centre du territoire du jaguar. On imagine que le taux de capture s'atténue avec la distance d entre le piège et le centre d'activité du jaguar selon un coefficient d'atténuation $e^{-d^2/2}$. Donner l'intensité du processus ponctuel qui décrit les captures en prenant en compte l'atténuation.

Deux jaguars sur la zone de suivi.

1. Dessiner une réalisation possible du processus ponctuel correspondant aux captures sur une zone contenant deux jaguars (en faisant dans un premier temps abstraction de la notion de territoire et d'un changement de rythme dans la journée). Vous pourrez utiliser deux couleurs pour représenter les captures correspondantes à chaque jaguar.
2. Si les jaguars ne sont pas identifiés individuellement (on ne distingue pas les couleurs du schéma précédent), combien en moyenne de photos sont prises en une journée.
3. Quelle est l'intensité du processus ponctuel qui donne les instants de détection ?
4. Si le jaguar 1 a le centre de son territoire à une distance d_1 du piège photo et le jaguar 2 a une distance d_2 , si on prend aussi en compte les changements d'activités du jaguar selon la journée, quel modèle proposez-vous pour représenter les temps où une photo de jaguar est prise ?

Ce sont les idées que vous avez développées dans cet exercice qui sont à l'origine du papier de **distiller2020** using.