Exercice 1. On s'intéresse à une forêt composée de deux espèces d'arbres, E_1 et E_2. Lorsqu'un arbre meurt, un nouveau grandit à sa place mais il peut être de l'une ou l'autre des deux espèces. Ceux de la première espèce ayant une longue durée de vie, on suppose que 1% d'entre eux meurt chaque année alors que ce taux est de 5% pour la deuxième espèce. Mais ces derniers grandissant plus rapidement réussiront plus souvent à occuper une place laissée vacante : on suppose que 75% des places vacantes sont prises par un arbre de la deuxième espèce contre seulement 25% pour un arbre de la première espèce.

1. Expliquer comment l'occupation d'un emplacement de cette foret peut être modélisé par une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ à deux états E_1 et E_2 et justifier la formule suivante :

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = E_1 | X_t = E_1) = 0,99 + 0,01 \times 0,25 = 0,9925.$$

2. En déduire la matrice de transition P de la chaîne de Markov .
3. Tracer le graphe correspondant.
4. $\pi_1 = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \end{pmatrix}$ est-elle une distribution stationnaire pour cette chaîne de Markov ?
5. $\pi_2 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$ est-elle une distribution stationnaire pour cette chaîne de Markov ?
6. Que peut-on en déduire quand au comportement de la forêt en temps long ?

Exercice 2. On considère une chaîne de Markov $(Xn)_{n\geq 0}$ sur $\{1,\dots,7\}$ de matrice de transition Q donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe de la chaîne de Markov associée en précisant les probabilités de transitions entre les différents états.
2. Déterminer les classes d'états récurrents et transitoires.
3. La chaîne est-elle irréductible ?
4. Calculer $\mathbb{P}_3(X_2 = 6)$ et $\mathbb{P}_1(X_2 = 7)$ (où $\mathbb{P}_i$ désigne la probabilité sachant que $X_0 = i$).