Master 2 MODE

ALEA
TP 1

Exercice 1. Considérons une chaîne de Markov sur un espace d'états $\mathcal{E}$ à 6 états dont la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & \dots & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & \dots \end{pmatrix}$$

1. compléter la matrice M
2. tracer le graphe de transition
3. montrer que $\mathbb{P}(T_4 < +\infty | X_0 = 4) \leq \mathbb{P}(X_1 = 6 | X_0 = 4)$
4. déterminer la nature des états
5. à l'aide des fonctions `t()` et `eigen()`, déterminer les probabilités invariantes pour P

   *pour rappel - ou pas - un **vecteur propre** ou **eigenvector** V d'une matrice carrée M est un vecteur non-nul tel que $MV = \lambda V$ où λ est un réel appelé **valeur propre** ou **eigenvalue***
6. interpréter le nombre de solutions ainsi que les solutions elles-même
7. créer une fonction `traj()` qui prend en entrée une position initiale et un temps final, et enregistre en sortie l'ensemble d'une trajectoire simulée (on pourra utiliser les fonctions `multinom()` et `which`)
8. calculer P^{1000} (on pourra utiliser la commande `P%^%1000` qui nécessite le package `expm`)
9. interpréter le résultat

Exercice 2. Soit une chaîne de Markov sur un espace d'états à 4 états dont la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. déterminer la classe des états
2. après renumérotation des états, déterminer une approximation de P^n lorsque n est grand

Exercice 3. La modélisation de propagation d'une infection dans une population peut se faire à l'aide de chaînes de Markov.

1. considérons un modèle à compartiments SI (un individu est Susceptible d'être infecté, ou déjà Infecté), appelons p_I la probabilité qu'un individu infecté contamine une personne saine, et considérons le processus qui compte le nombre de personnes infectées au cours du temps
   (a) expliquer en quoi une chaîne de Markov permettrait de représenter la dynamique
   (b) simuler des trajectoires de I et S
   (c) quel est le comportement en temps long du nombre d'infectés ?
2. considérons un modèle à compartiments SIR (on rajoute les personnes qui ont Recouvré, elles sont supposées immunes par la suite), et supposons que les malades guérissent au bout d'une itération

(a) expliquer en quoi une chaîne de Markov permettrait de représenter la dynamique
(b) simuler des trajectoires de I , S et R
(c) quel est le comportement en temps long du nombre d'infectés ?

3. supposons maintenant qu'un malade guérisse avec probabilité p_R
   (a) expliquer en quoi une chaîne de Markov permettrait de représenter la dynamique
   (b) simuler des trajectoires de I, S et R
   (c) quel est le comportement en temps long du nombre d'infectés ?