Exercices

Jean-Louis Marchand

2023-12-12

Exercice 1

Une usine de textile fabrique 3 variétés de tissu T1, T2 et T3 à partir de 3 laines L1, L2 et L3. Le tableau suivant recense les poids (en kg) des laines intervenant dans la composition d'un mètre des tissus :

	T1	T2	T3
L1	0.375	0.125	0.1
L2	0.5	0.05	0.2
L3	0.5	0.2	0.15

On dispose d'un stock de 4000 kg de laine L1, 800 kg de laine L2 et 1500 kg de laine L3. Les métiers à tisser ne peuvent fabriquer que 8000 m de tissu. Les profits nets résultant de la vente d'un mètre de tissu sont respectivement de 2.6 €, 4 € et 3.6 € pour T1, T2 et T3. Ecrire le problème de maximisation du profit sous la forme d'un programme linéaire et le résoudre.

Mise en inéquation du problème

Appelons x_1, $x_2$et x_3 les longueurs en mètres respectives de tissu T_1, T_2 et T_3. Les contraintes de laines et de longueur totale s'écrivent

$$\begin{cases} 0.375x_1 + 0.125x_2 + 0.1x_3 \leq 4000 \\ 0.5x_1 + 0.05x_2 + 0.2x_3 \leq 800 \\ 0.5x_1 + 0.2x_2 + 0.15x_3 \leq 1500 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 8000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

On peut écrire les quatre premières lignes à l'aide des matrices A, b et x comme $Ax \leq b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0.375 & 0.125 & 0.1 \\ 0.5 & 0.05 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4000 \\ 800 \\ 1500 \\ 8000 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La fonction objectif est $F = 2.6x_1 + 4x_2 + 3.6x_3 = \begin{pmatrix} 2.6 & 4 & 3.6 \end{pmatrix} x$, on cherche à la maximiser.

Résolution avec la fonction simplex

```r
library(boot)
A <- matrix(
  c(.375,.125,.1,
    .5,.05,.2,
    .5,.2,.15,
    1,1,1)
  , byrow = TRUE, ncol = 3)
b <- matrix(c(4000,800,1500,8000), ncol = 1)
```

```r
C <- c(2.6,4,3.6)
simplex(a = C,
        A1 = A,
        b1 = b,
        maxi = TRUE
        )
```

```
##
## Linear Programming Results
##
## Call : simplex(a = C, A1 = A, b1 = b, maxi = TRUE)
##
## Maximization Problem with Objective Function Coefficients
##  x1  x2  x3
## 2.6 4.0 3.6
##
##
## Optimal solution has the following values
##   x1   x2   x3
##    0 6000 2000
## The optimal value of the objective  function is 31200.
```

Résolution avec MILPModel

```r
library(magrittr)
library(ompr)
library(ompr.roi)
library(ROI)
library(ROI.plugin.glpk)
result <- MILPModel() %>%
  add_variable(T1, type = "continuous", lb = 0) %>%
  add_variable(T2, type = "continuous", lb = 0) %>%
  add_variable(T3, type = "continuous", lb = 0) %>%
  set_objective(2.6 * T1 + 4 * T2 + 3.6 * T3, "max") %>%
  add_constraint(.375*T1 + .125*T2 + .1*T3 <= 4000) %>%
  add_constraint(.5*T1 + .05*T2 + .2*T3 <= 800) %>%
  add_constraint(.5*T1 + .2*T2 + .15*T3 <= 1500) %>%
  add_constraint(T1 + T2 + T3 <= 8000) %>%
  solve_model(with_ROI(solver = "glpk"))
result$objective_value
```

```
## [1] 31200
```

```r
result$solution
```

```
##   T1   T2   T3
##    0 6000 2000
```

Exercice 2

`Kathia se demande combien elle doit dépenser pour avoir au moins l'énergie (2000 Kcal),`

les protéines (55 g) et le calcium (800 mg) dont elle a besoin tous les jours. Elle choisit 5 types de nourriture qui lui semblent être des sources nutritives abordables.

Aliment	Portion	Energie Kcal	Protéines g	Calcium mg	Prix €
porridge	28 g	110	4	2	3
poulet	100 g	205	32	12	24
lait	237 ml	160	8	285	9
tarte aux cerise	170 g	420	4	22	20
porc aux haricots	260 g	260	14	80	19

Kathia impose des contraintes supplémentaires sur la quantité maximum pour chaque aliment par jour : porridge 110 g, poulet 600 g, lait 2 l, tarte aux cerises 350 g, porc aux haricots 500 g. Sachant que Kathia veut dépenser le moins possible, donner le programme linéaire correspondant et le résoudre.

Mise en inéquation du problème

Appelons x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 le nombre de portions respectives de porridge, poulet, lait, tarte aux cerises et porc aux haricots. Les contraintes s'écrivent

$$\begin{cases} 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 420x_4 + 260x_5 \geq 2000 \\ 4x_1 + 32x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 14x_5 \geq 55 \\ 2x_1 + 12x_2 + 285x_3 + 22x_4 + 80x_5 \geq 800 \\ 28x_1 \leq 110 \\ 100x_2 \leq 600 \\ 0.237x_3 \leq 2 \\ 170x_4 \leq 350 \\ 260x_5 \leq 500 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

On peut écrire les quatre premières lignes à l'aide des matrices A, b et x comme $Ax \leq b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -110 & -205 & -160 & -420 & -260 \\ -4 & -32 & -8 & -4 & -14 \\ -2 & -12 & -285 & -22 & -80 \\ 28 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.237 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 170 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 260 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2000, -55, -800, 110, 600, 2, 350, 500 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

La fonction objectif est $F = 3x_1 + 24x_2 + 9x_3 + 20x_4 + 19x_5 = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 9 & 20 & 19 \end{pmatrix} x$, on cherche à la maximiser.

Résolution avec la fonction simplex

```
library(boot)
A <- matrix(
    c(-110,-205,-160,-420,-260,
      -4,-32,-8,-4,-14,
      -2,-12,-285,-22,-80),nrow = 3, byrow = TRUE)
A <- rbind(A, diag(c(28,100,.237,170,260)))
b <- c(-2000,-55,-800,110,600,2,350,500)
C <- c(3,24,9,20,19)
simplex(a = C, A1 = A, b1 = b, maxi = FALSE)
```

```
##
## Linear Programming Results
##
```

```
## Call : simplex(a = C, A1 = A, b1 = b, maxi = FALSE)
##
## Minimization Problem with Objective Function Coefficients
## x1 x2 x3 x4 x5
##  3 24  9 20 19
##
##
## Optimal solution has the following values
## x1 x2 x3 x4 x5
##  0  0  0  0  0
## The optimal value of the objective  function is 0.
```

La réponse ici n'est pas possible, c'est là que vous devez réagir et rechercher pourquoi. Dans l'aide, il est spécifié que les valeurs de `b` doivent être supérieures ou égales à 0.

```r
A2 <- matrix(
    c(110,205,160,420,260,
      4,32,8,4,14,
      2,12,285,22,80),nrow = 3, byrow = TRUE)
b2 <- c(2000,55,800)
A1 <- diag(c(28,100,.237,170,260))
b1 <- c(110,600,2,350,500)
C <- c(3,24,9,20,19)
simplex(a = C, A1 = A1, b1 = b1, A2 = A2, b2=b2, maxi = FALSE)
```

```
##
## Linear Programming Results
##
## Call : simplex(a = C, A1 = A1, b1 = b1, A2 = A2, b2 = b2, maxi = FALSE)
##
## Minimization Problem with Objective Function Coefficients
## x1 x2 x3 x4 x5
##  3 24  9 20 19
##
##
## Optimal solution has the following values
##       x1       x2       x3       x4       x5
## 3.928571 0.000000 4.394695 2.058824 0.000000
## The optimal value of the objective  function is 92.5144432773109.
```

Résolution avec la fonction MILPModel

```r
result <- MILPModel() %>%
  add_variable(porridge, type = "continuous", lb = 0) %>%
  add_variable(poulet, type = "continuous", lb = 0) %>%
  add_variable(lait, type = "continuous", lb = 0) %>%
  add_variable(tarte, type = "continuous", lb = 0) %>%
  add_variable(porc, type = "continuous", lb = 0) %>%
  add_constraint(110*porridge + 205*poulet + 160*lait +420*tarte + 260*porc >= 2000) %>%
  add_constraint(4*porridge + 32*poulet + 8*lait +4*tarte + 14*porc >= 55) %>%
  add_constraint(2*porridge + 12*poulet + 285*lait +22*tarte + 80*porc >= 800) %>%
  add_constraint(28*porridge <= 110) %>%
  add_constraint(100*poulet <= 600) %>%
  add_constraint(.237*lait <= 2) %>%
  add_constraint(170*tarte <= 350) %>%
```

```r
  add_constraint(260*porc <= 500) %>%
  set_objective(3*porridge + 24*poulet + 9*lait +20*tarte + 19*porc, "min") %>%
  solve_model(with_ROI(solver = "glpk"))
result$solution
```

```
##     lait     porc porridge   poulet    tarte
## 4.394695 0.000000 3.928571 0.000000 2.058824
```